I.1.1 Blackov model

Blackov model je určitou obdobou Black–Scholesovho modelu pre deriváty založené na úrokových produktoch. Black–Scholesov model má jedno veľké obmedzenie vo vzťahu k úrokom, a síce, že úrok bol deterministický (presnejšie pôvodný model predpokladal konštantný). Pri derivátoch akcií to nebol veľký problém, pretože ich cena je ovplyvnená volatilitou ceny akcií viac ako volatilitou úrokov. Pri úrokových derivátoch je však práve ona ten tzv. driving factor. Nasledujúce odvodenie sa nebude obracať priamo na výšku úroku, ale sa budú používať bezkupónové dlhopisy, ktorých cena má v sebe zakomponovanú „stochastičnosť“ úroku. Tento model sa úspešne v praxi používa na oceňovanie jednoduchých derivátov, ako sú európske opcie na dlhopisy, caps, floors a európske swaptions.

Majme opciu (ktorej cenu označíme *V*) na bezkupónový dlhopis s dobou splatnosti T^* a cenou $P(0,T^*)$, ktorá expiruje v čase $t^* < T^*$ a jej expiračná cena je *E*. Predpokladajme ďalej, že cena opcie závisí od forward ceny dlhopisu $FP(0,t^*,T^*)$ a aktuálnej ceny dlhopisu „separovateľným spôsobom“, teda platí:

$$V\big(FP(0,t^*,T^*), P(0,t^*)\big) = f\big(FP(0,t^*,T^*)\big)P(0,t^*)$$

pre nejakú, v tejto chvíli neznámu, funkciu *f*. Uvažujme portfólio zložené z jednej opcie, *a* jednotiek bezkupónových dlhopisov s dobou splatnosti t^* a *b* jednotiek long forward kontraktov s dobou splatnosti t^* na dlhopisy s dobou splatnosti T^* (teda súčasná cena kontraktu je $(FP(0,t^*,T^*) - P^*)P(0,t^*)$; predpokladáme nákup za cenu P^*). Nech ceny dlhopisov i forward ceny dlhopisov majú lognormálny vývoj:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \mu_P dt + \sigma_P dW_t \quad \text{a} \quad \frac{dFP(t,T,T+\Delta T)}{FP(t,T,T+\Delta T)} = \mu_{FP} dt + \sigma_{FP} dW_t \, .$$

Potom súčasná hodnota portfólia v čase *t* je:

$$\begin{aligned}\pi(t) &= V + aP(t,t^*) + b\big(FP(t,t^*,T^*) - P_0\big)P(t,t^*) = \\ &= f\big(FP(t,t^*,T^*)\big)P(t,t^*) + aP(t,t^*) + b\big(FP(t,t^*,T^*) - P^*\big)P(t,t^*).\end{aligned}$$

Zmena ceny portfólia pre infinitesimálny časový interval *dt* je daná vzťahom (použijúc Itôovu lemu):

$$\begin{aligned} d\pi(t) = &\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2_{FP(t,t^*,T^*)} FP(t,t^*,T^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial FP(t,t^*,T^*)^2}\right] P(t,t^*)dt + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial FP(t,t^*,T^*)} P(t,t^*) dFP(t,t^*,T^*) + f dP(t,t^*) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial FP(t,T)} dFP(t,t^*,T^*) dP(t,t^*) + \\ &+ a dP(t,t^*) + b(FP(t,t^*,T^*) - P^*) dP(t,t^*) + b dFP(t,t^*,T^*) P(t,t^*) + \\ &+ b dFP(t,t^*,T^*) dP(t,t^*). \end{aligned}$$

Ak teraz špecifikujeme počet dlhopisov $a = -f$ a počet jednotiek forward kontraktu $b = -\frac{\partial f}{\partial FP}$ a ak o P^* predpokladáme, že je rovné fair hodnote (to znamená, že vždy keď meníme portfólio, zavrieme pozíciu vo forward kontrakte a vstúpime do novej pozície s novou cenou), zistíme že:

- počiatočná cena portfólia je 0
- vývoj ceny portfólia je deterministický.

Teda ak nemá nastať arbitráž, musí $d\pi(t) \equiv 0$ (pretože nemôžeme na niečom, čo sme nezaplatili, s istotou získať, alebo stratiť). To nám dáva parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorú musí spĺňať funkcia *f*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2_{FP} FP \frac{\partial^2 f}{\partial FP^2} = 0 .$$

Explicitné riešenie tejto rovnice pre európske call a put opcie na bezkupónové dlhopisy má tvar:

$$\begin{aligned} V_c &= P(0,t^*)[FP(0,t^*,T^*)\Phi(d_1) - E\Phi(d_2)], \\ V_p &= P(0,t^*)[E\Phi(-d_2) - FP(0,t^*,T^*)\Phi(-d_1)], \end{aligned}$$

$$FP(0,t^*,T^*) = \frac{P(0,T^*)}{P(0,t^*)},$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{FP(0,t^*,T^*)}{E} + \frac{1}{2}\sigma^2_{FP} t^*}{\sigma_{FP}\sqrt{t^*}}, \quad d_2 = \frac{\ln\frac{FP(0,t^*,T^*)}{E} - \frac{1}{2}\sigma^2_{FP} t^*}{\sigma_{FP}\sqrt{t^*}}.$$

Z týchto vzťahov vidieť analógiu s Black–Scholesovým modelom. Je dôležité všimnúť si, že (aj v prípade swapov, FRA a forwardov) opciu oceňujeme pomocou ceny bezkupónových dlhopisov, čo znamená, že oceňovanie je relatívne. Blackov model umožňuje na základe znalosti kontinua cien bezkupónových dlhopisov (tzv. diskontnej funkcie) presne oceniť tieto deriváty [1]. Taktiež si všimnime, že do vzorca vstupuje volatilita forward ceny dlhopisu, nie jeho aktuálnej ceny. Pomocou trhových cien preto zistíme iba implikovanú volatilitu forward ceny.

Ďalším často obchodovaným derivátom je *cap*. Cap je kolekcia *capletov* definovaných ako kontrakt, kde vypisovateľ v čase t_{i+1} platí kupcovi rozdiel medzi aktuálnym úrokom na obdobie $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ zisteným v čase t_i a strike *K*, vynásobený dĺžkou obdobia. Platí sa však iba ak je rozdiel kladný. Teda $\mathrm{Caplet}(\mathrm{t}_{i+1}) = \max\{R_i - K, 0\}\tau_i$, kde $R_i := R(t_i, t_{i+1})$. V čase t_i je hodnota tohto payoff:

$$\frac{\tau_i}{1 + \tau_i R_i} \max\{R_i - K, 0\},$$

po úprave:

$$\max\left\{1 - \frac{1 + K\tau_i}{1 + R_i \tau_i}, 0\right\}.$$

Posledný výraz je presne payoff pre európsku put opciu s expiráciou v čase t_i na bezkupónový dlhopis s dobou splatnosti t_{i+1} a nominálnou hodnotou $1 + K\tau_i$, pričom expiračná cena je 1. Čiže na cap sa dá pozerať ako na sériu európskych put opcií na vhodné dlhopisy. Analogicky *floor* je kolekcia európskych call opcií na dlhopisy. Payoff floorletu má tvar: $\max\{K - R_i, 0\}\tau_i$.

Cap sa používa často v prípade dlhu s voľným úrokom, ktorý sa resetuje v stanovených časoch. Keď nechceme platiť vyšší úrok než zvolený, kúpime si cap vhodných parametrov. Floor zasa limituje platený úrok zospodu. Kombinácia long cap a short floor sa nazýva *collar*. Najčastejšie sa konštruuje tak, aby sa cena capu a flooru rovnali, teda aby ma mal nulovú cenu. Collar zaručí platenie úroku v stanovenom rozmedzí.

I.1.2 Odhad diskontnej funkcie

Doteraz všetky deriváty boli oceňované pomocou cien bezkupónových dlhopisov, čiže bola implikovaná znalosť *diskontnej funkcie* (diskontná funkcia je definovaná: $f(t) = P(0,t) \quad \forall t > 0$). Otázkou je, ako zistiť ceny týchto dlhopisov ak sa priamo neobchodujú. Existuje na to niekoľko spôsobov, pričom sa vždy vychádza z aktuálneho stavu trhu. Keďže sa neobchodujú, je potrebné ich ceny implikovať z cien kupónových

[1] Samozrejme iba ak považujeme predpoklady BS modelu za prijateľné.

dlhopisov alebo iných derivátov (opcie, caps, floors atď.). Je možné pritom využiť yield–curve modely alebo to skúsiť „drevorubačskejšie“ pomocou nejakej aproximácie (napríklad MNŠ). Uveďme si jednoduchý príklad lineárneho modelu. Rozložme diskontnú funkciu $P(0,t)$ pomocou nejakých bázových funkcií $g_k(t)$:

$$P(0,t) = \sum_{k=1}^{s} a_k g_k(t),$$

kde a_k sú v tejto chvíli neznáme a chceme ich odhadnúť. Teda cenu dlhopisu vyplácajúceho (pre jednoduchosť ročne) kupóny X s dobou splatnosti T_n a nominálnou hodnotou Z môžeme zapísať ako:

$$\begin{aligned} Bnd_n &= \sum_{i=1}^{n} XP(0,t_i) + ZP(0,t_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} X \sum_{k=1}^{s} a_k g_k(t_i) + Z \sum_{k=1}^{s} a_k g_k(t_n) = \\ &= \sum_{k=1}^{s} a_k G_{n,k}, \end{aligned}$$

pričom

$$G_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} Xg_k(t_i) + Zg_k(t_n).$$

Vo vektorovom zápise dostávame:

$$\mathbf{Bnd} = \mathbf{GA},$$

kde **Bnd** je vektor cien dlhopisov, **A** je vektor hľadaných koeficientov a **G** je matica tvorená prvkami $G_{n,k}$. Počet jej riadkov je rovný počtu dlhopisov. Keďže je v praxi počet dlhopisov oveľa väčší ako „rozumná veľkosť“ s. Využitím MNŠ vieme, že $\mathbf{A} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{Bnd}$ je najlepší odhad **A**. Do rovnice je vhodné ešte zakomponovať podmienku $P(0,0) = 1$. Teraz ešte ostáva otvorená otázka voľby bázových premenných a ich počtu. Skúšali sa rôzne alternatívy ako kubické a Beziérové splajny a pod. Vo všeobecnosti sa ukázalo, že výsledná diskontná funkcia bola spojito diferencovateľná, avšak implikované forward rates už nezodpovedali realite. Taktiež vykazovali príliš veľkú citlivosť na počet bázových funkcií, na malé zmeny vo vektore cien dlhopisov alebo na polohu riadiacich bodov Beziérových kriviek. Preto sa takéto priame modelovanie diskontnej funkcie ukázalo nevýhodným (viď citát z [3]: „*obtaining reliable forward rates from fitted discount functions can be more of an art than a science*“).