I.1. Yield–curve modely

V tejto kapitole si veľmi stručne popíšeme Vasickov, CRI a Hull & White modely. Tieto modely si ukážeme najmä v kontexte hľadania diskontnej funkcie.

I.1.1 Trhová cena rizika

V kontexte modelov pre deriváty úrokovej miery boli už v roku 1977 odvodené podmienky, ktoré musí spĺňať cena dlhopisu, aby nenastala arbitráž (Vasicek). Predpokladajme všeobecný model vývoja aktuálneho short rate:

$$dr = \mu_r(r,t)dt + \sigma_r(r,t)dW_t .$$

Pomocou Itôovej lemy môžeme odvodiť diferenciál funkcie ceny bezkupónového dlhopisu s dobou splatnosti T:

$$\begin{aligned} dP(t,T) &= \left[\frac{\partial P}{\partial r}\mu_r + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]dt + \sigma_r\frac{\partial P}{\partial r}dW_t = \\ &= \mu(t,T)dt + v(t,T)dW_t \end{aligned}.$$

Vytvorme portfólio pozostávajúce z jedného dlhopisu s dobou splatnosti T_1 a θ dlhopisov s dobou splatnosti T_2:

$$\pi(t) = P(t,T_1) + \theta P(t,T_2).$$

Zmena ceny tohto portfólia za časový úsek dt je:

$$\begin{aligned} d\pi &= [\mu(t,T_1) + \theta\mu(t,T_2)]dt + \left[\frac{\partial P(t,T_1)}{\partial r}\sigma_r + \theta\frac{\partial P(t,T_2)}{\partial r}\sigma_r\right]dW_t = \\ &= \mu_\pi dt + \sigma_\pi dW_t . \end{aligned}$$

Ak položíme

$$\theta = -\frac{\dfrac{\partial P(t,T_1)}{\partial r}}{\dfrac{\partial P(t,T_2)}{\partial r}},$$

potom $\sigma_\pi \equiv 0$ a vývoj ceny portfólia je deterministický. Vynásobením čitateľa aj menovateľa σ_r dostávame:

$$\theta = -\frac{v(t,T_1)}{v(t,T_2)} \text{ a } d\pi = dP(t,T_1) - \frac{v(t,T_1)}{v(t,T_2)}dP(t,T_2).$$

Keďže portfólio je teraz deterministické, musí platiť: $d\pi = r(t)\pi(t)dt$. Po dosadení:

$$dP(t,T_1) - \frac{v(t,T_1)}{v(t,T_2)} dP(t,T_2) = \left[P(t,T_1) - \frac{v(t,T_1)}{v(t,T_2)} P(t,T_2) \right] r(t) dt$$

$$\mu(t,T_1) - \frac{v(t,T_1)}{v(t,T_2)} \mu(t,T_2) = \left[P(t,T_1) - \frac{v(t,T_1)}{v(t,T_2)} P(t,T_2) \right] r(t)$$

Úpravami nakoniec dostávame:

$$\frac{\mu(t,T_1) - r(t)P(t,T_1)}{v(t,T_1)} = \frac{\mu(t,T_2) - r(t)P(t,T_2)}{v(t,T_2)}.$$

Táto rovnica platí pre ľubovoľné doby splatnosti. To znamená, že hodnota jednotlivých zlomkov nezávisí od doby splatnosti a je funkciou *r* a *t*:

$$\lambda(r,t) = \frac{\mu(t,T) - r(t)P(t,T)}{v(t,T)}.$$

Keby sme absolútny drift a volatilitu vyjadrili percentuálne: $\mu = mP$, $v = v'P$, potom:

$$\lambda(t,r) = \frac{m(t,T) - r(t)}{v'(t,T)}.$$

Teda percentuálny výnos z dlhopisu sa od bezrizikovej short rate líši o funkciu času a short rate násobenú volatilitou. Táto funkcia sa nazýva *trhová cena rizika* (market price of risk). Ak je investor risk–averse (t.j. jeho funkcia úžitku je konkávna), λ je kladné a reprezentuje výnos navyše oproti bezrizikovému. Tento výnos navyše „správne kompenzuje“ riziko z držania dlhopisu.

I.1.2 Vasicek a CIR modely

Ako už bolo naznačené v kapitole II.3, stochastický proces modelujúci vývoj short rate by mal spĺňať určité kritéria dané historickým vývojom short rate na trhu. Medzi tie najdôležitejšie požiadavky partia:

- Rozsah hodnôt by mal byť konzistentný s „pravdepodobnými“ hodnotami úrokov. Špeciálne by úrok nemal byť záporný a tiež „nehorázne“ vysoký.
- Ukázalo sa, že vysoké hodnoty úroku boli nasledované poklesom častejšie ako ďalším rastom, pre extrémne nízke úroky to bolo naopak. Úrok vykazuje tzv. mean–reverting.
- Volatilita úrokov na rôzne obdobia je rôzna, na kratšie obdobia spravidla vyššia ako na dlhšie.
- Hodnota volatility pre short rate sa mení s hodnotou short rate. Ukázalo sa, že pre volatilitu v tvare σr^{β} je najvhodnejšie beta okolo 1,5.

Samozrejme tieto špecifikácie sú dosť vágne a používajú sa veľmi benevolentne. Napríklad jasná požiadavka nezápornosti úrokových mier bola porušená vo Švajčiarsku v roku 1960, aj keď len na krátku dobu. Žiaden zo známych jedno a dvojfaktorových modelov nedokáže dodržať všetky požiadavky naraz. Preto je pri konkrétnej aplikácii nejakého modelu potrebné brať do úvahy tie, ktoré najviac ovplyvňujú daný derivát.

Oba modely – Vasicek a Cox, Ingersoll, Ros – sú v podstate rovnaké. Líšia sa konkrétnou voľbou určitých parametrov. Označenie bude použité podľa CIR modelu.

Stochastický proces pre short rate má v tomto kontexte tvar:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^{\beta} dW_t = \mu_r dt + \sigma_r dW_t .$$

Ďalej cena bezkupónového dlhopisu závisí od r, t, T a vo všeobecnosti spĺňa:

$$\frac{dP}{P} = \mu(r,t,T)dt + v(r,t,T)dW_t .$$

Aplikovaním Itôovej lemy dostaneme:

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial r}\mu_r + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma_r^2\right]dt + \frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial r}\sigma_r\right]dW_t =$$

$$= \left[\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r}k(\theta - r) + \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\left(\sigma r^{\beta}\right)^2\right]dt + \left[\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r}\sigma r^{\beta}\right]dW_t .$$

Porovnaním s prechádzajúcim vzťahom zistíme, že

$$v(r,t,T) = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r}\sigma r^{\beta} .$$

Z podmienok arbitráže z predchádzajúcej sekcie platí:

$$\mu_p(r,t,T) = r + \lambda^*(r,t)v(r,t,T) \quad \Rightarrow \quad \mu_p(r,t,T) = r + \lambda^*(r,t)\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r}\sigma r^{\beta} .$$

Aplikovaním Itôovej lemy na dP sme dostali jedno vyjadrenie pre drift, z trhovej ceny rizika druhé. Keď ich dáme do rovnosti, dostaneme PDR, ktorú musí spĺňať cena dlhopisu:

$$\frac{\partial P}{\partial r}k(\theta - r) + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\left(\sigma r^{\beta}\right)^2 = rP + \lambda^*(r,t)\frac{\partial P}{\partial r}\sigma r^{\beta} .$$

Na tomto mieste môžeme rozlíšiť oba modely:

- Vasickov model: $\beta = 0,\ \lambda^*(r,t) = \lambda_0$,
- CIR model: $\beta = \frac{1}{2},\ \lambda^*(r,t) = \frac{\lambda_0 r^{\frac{1}{2}}}{\sigma}$,

pričom λ_0 je konštanta odlišná pre každý z modelov. Teda môžeme zapísať PDR špeciálne pre jednotlivé modely:

- Vasicek: $rP = \frac{\partial P}{\partial r}\left[k(\theta - r) - \lambda_0\sigma\right] + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2$,
- CIR: $rP + \frac{\partial P}{\partial r}(\lambda_0 + k)r = \frac{\partial P}{\partial r}k\theta + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2 r$.

Ďalej sa budeme venovať len CIR modelu. Vasickov model je kritizovaný najmä pre dva nedostatky: umožňuje záporné úrokové miery a možné dosiahnuteľné tvary yield–curve sú dosť limitované.

Koncová podmienka pre PRD je $P(r,T,T) = 1$ pre ľubovoľné T, okrajové podmienky sú: $P(r,t,T) \to 0$ pre $r \to \infty$ a $P(0,t,T)$ je konečná. Pre tieto podmienky má model explicitné riešenie v tvare:

$$P(r,t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r},$$

kde:

$$A(t,T) = \left[\frac{\phi_1 e^{\phi_2\tau}}{\phi_2\left(e^{\phi_1\tau} - 1\right) + \phi_1}\right]^{\phi_3},$$

$$B(t,T) = \frac{e^{\phi_1\tau} - 1}{\phi_2\left(e^{\phi_1\tau} - 1\right) + \phi_1},$$

$$\phi_1 = \sqrt{(k + \lambda_0)^2 + 2\sigma^2},\ \phi_2 = \frac{k + \lambda_0 + \phi_1}{2},\ \phi_3 = \frac{2k\theta}{\sigma^2},\ \tau = T - t.$$

Všimnime si, že parametre k, λ_0 a θ sa nevyskytujú v riešení separovane, ale len v kombináciách $k\theta$ a $k + \lambda_0$. Teda priamo hodnoty týchto parametrov sa nedajú odhadnúť z produktov obchodovaných ba trhu.

Pozrime sa teraz na správanie tejto diskontnej funkcie pre τ veľmi malé, pričom využime vzťah $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, teda pre veľmi malé x: $e^x \approx 1 + x$:

$$A(t,T) \approx \left[\frac{\phi_1(1 + \phi_2\tau)}{\phi_2(1 + \phi_1\tau - 1) + \phi_1}\right]^{\phi_3} = \left[\frac{\phi_1 + \phi_1\phi_2\tau}{\phi_1\phi_2\tau + \phi_1}\right]^{\phi_3} = 1,$$

$$B(t,T) \approx \frac{1 + \phi_1\tau - 1}{\phi_2(1 + \phi_1\tau - 1) + \phi_1} = \frac{\tau}{1 + \phi_2\tau} \approx \tau.$$

Takže máme pre τ veľmi malé: $P(r,t,T) \approx e^{-r(T-t)}$, čo zodpovedá cene dlhopisu pre deterministický úrok, alebo tiež hodnote koruny diskontovanej krátkodobým úrokom na krátky čas. Je treba spomenúť, že odvodenie trhovej ceny rizika i týchto modelov je platné nielen pre ceny dlhopisov, ale aj pre ceny ľubovoľných úrokových derivátov, ktoré potom môžu byť ocenené pomocou týchto modelov.

I.1.3 Hull & White model

Tento model obsahuje Vasickov aj CIR ako svoje špeciálne prípady a nazýva sa tiež Extended Vasicek Model. V tomto modeli sú parametre riadiace vývoj short rate závislé od času:

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b(t) - r)]dt + \sigma(t)r^{\beta} dW_t .$$

Čiže ide tiež o mean–reverting proces (s reversion level $\frac{\theta(t)}{a(t)}$). Nech $f(t, r)$ je hodnota nejakého derivátu úrokovej miery v čase t. Tým istým postupom, ako pre CIR model, dostaneme PDR, ktorú musí spĺňať cena derivátu:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [\phi(t) - a(t)r]\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - rf = 0 ,$$

pričom $\phi(t) = \theta(t) + a(t)b(t) - \lambda(r)r^{\beta}\sigma(t)$. Pre ceny bezkupónových dlhopisov má model riešenie v tvare $P(r,t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r}$, avšak A aj B sú určené obyčajnými diferenciálnymi rovnicami. Pre tento model existuje metóda numerického riešenia pomocou stromov.