ÚVOD

Úmrtnostné tabuľky môžeme považovať za najstaršie demografické modely vôbec. Počet rokov života, ktoré jedinec daného veku môže ešte v priemere očakávať, alebo nájdenie odpovedajúceho radu vymierania danej populácie sú problémy, ktoré zaujímali ľudstvo už v minulosti. Úmrtnostné tabuľky v podstate predstavujú prostriedok ako oznámiť informáciu získanú pozorovaním príslušnej populácie a nasledovnými výpočtami, aby sme mohli tieto hodnoty odtiaľ okamžite podľa jednotlivých vekových skupín vyčítať.

K samotnej myšlienke radu vymierania sa pravdepodobne priblížili už v stredoveku, hlavne v Ríme a v Babylónii. V treťom storočí nášho letopočtu bola v Ríme používaná na výpočet rent tabuľka, ktorá ukazuje strednú dĺžku života pri narodení. Je pripisovaná Ulpianovi.

Prvé pozorovanie zodpovedajúce konštrukcii dnešných úmrtnostných tabuliek urobil v druhej polovici 17. storočia John Graunt na základe údajov z krstných a úmrtných listov obyvateľov Londýna. O tridsať rokov neskôr publikoval známy britský astronóm Halley úmrtnostnú tabuľku zostavenú na základe matričných záznamov mesta Vratislav. Táto tabuľka sa prakticky neodlišuje od tvaru dnešných úmrtnostných tabuliek.

Úmrtnostné tabuľky môžeme klasifikovať z rôznych hľadísk. Základné delenie je na generačné a prierezové úmrtnostné tabuľky.

Generačné úmrtnostné tabuľky predstavujú záznam priebehu života konkrétnej populácie súčasne narodených jedincov, počínajúc narodením všetkých jedincov tejto populácie a končiac smrťou posledného z nich. Často sa nazývajú aj *kohortné úmrtnostné tabuľky*, lebo pre generáciu súčasne narodených jedincov sa v demografii používa názov *kohorta*.

Prierezové úmrtnostné tabuľky vychádzajú z dekrementných skúseností danej populácie behom krátkeho časového prierezu. Niekedy sa prierezové tabuľky nazývajú aj *bežné úmrtnostné tabuľky*.

Iným typom klasifikácie je delenie na úplné a skrátené úmrtnostné tabuľky.

Úplné úmrtnostné tabuľky pracujú s vekovými intervalmi dĺžky 1 roka (tj. 0-1, 1-2, ...), zatiaľ čo pri *skrátených úmrtnostných tabuľkách* je dĺžka vekového intervalu s výnimkou najnižšej vekovej kategórie väčšia ako 1 (často sa tu volia intervaly 0-1, 1-5, 5-10, ...).

Čo sa týka použitia úmrtnostných tabuliek, hodnoty z týchto tabuliek sa používajú pri väčšine demografických výskumov. Okrem demografie sa používajú predovšetkým v oblasti poistenia osôb. Niektoré ich modifikácie sa používajú v lekárskych výskumoch (pri spracovaní výsledkov určitej terapie, ktorá bola aplikovaná na skupinu pacientov), ale aj v zoológii alebo pri plánovaní výroby a obnovy, pri skúmaní životnosti materiálov atď.

Na skonštruovanú úmrtnostnú tabuľku sa môžeme pozerať troma spôsobmi:

1. Tabuľka poskytuje základné informácie, ktoré vo forme pravdepodobnosti úmrtia alebo strednej dĺžky života popisujú dekrementné chovanie priemerného jedinca danej vekovej kategórie.

2. Na úmrtnostnú tabuľku sa môžeme pozerať ako na záznam vymierania hypotetickej generácie súčasne narodených jedincov s počiatočným rozsahom l_0 . Táto hypotetická generácia sa niekedy nazýva ako tzv. *syntetická kohorta*.

3. Úmrtnostné tabuľky môžeme považovať aj za zápis štruktúry *stacionárnej populácie*, ktorá je uzavretá, nemení sa úmrtnosť v čase pre jednotlivé veky a počet narodených sa rovná počtu zomretých.

V našej práci sme sa zamerali na úplné úmrtnostné tabuľky a venujeme sa metódam ich konštrukcie.

Obsahom prvej kapitoly je stručný popis úmrtnostnej tabuľky a jej konštrukcie.

Zvláštnu problematiku pri zostavovaní úmrtnostnej tabuľky tvorí vyrovnávanie vstupnej funkcie pravdepodobnosti úmrtia, nakoľko vplyvom náhodných faktorov môžu tieto po sebe nasledujúce hodnoty kolísať. Takýmito faktormi môžu byť nepresnosti pri udávaní veku v okamihu úmrtia alebo pri sčítaní ľudu, rovnako ako aj náhodné kolísania počtu zomrelých v rokoch, keď sú počty zomrelých malé. Týmto problémom sa zaoberá druhá kapitola, v ktorej sú podrobnejšie popísané metódy vyrovnávania úmrtnostných tabuliek.

Nie vždy je však potrebné konštruovať novú úmrtnostnú tabuľku. Za základ pre demografické výpočty môžeme niekedy prevziať už existujúcu tabuľku, ktorú však musíme otestovať, či je vhodná pre naše použitie. Niekoľko takýchto testov ponúka tretia kapitola.

Štvrtú kapitolu tvorí niekoľko príkladov, kde sme na konkrétne dáta (za rok 1997 SR pre mužov) aplikovali popísanú teóriu.

1. ÚMRTNOSTNÉ TABUĽKY

1.1. Popis úmrtnostnej tabuľky

V jednotlivých stĺpcoch úplnej úmrtnostnej tabuľky sa nachádzajú nasledujúce údaje:

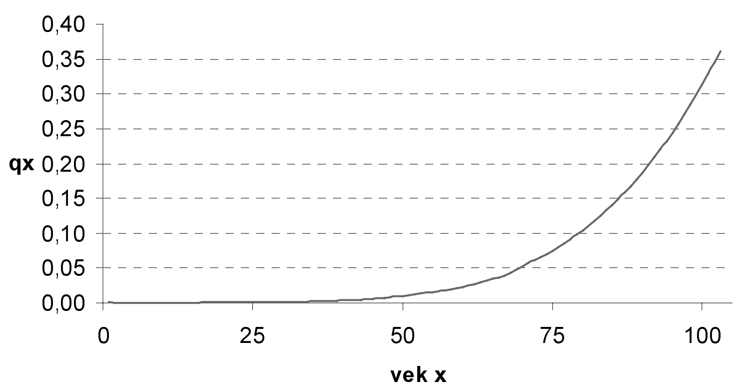
1) ***Vekový interval*** ***<x, x+1), vek x***

Tento interval vymedzuje vekové rozpätie, ku ktorému sa potom vzťahujú všetky hodnoty v príslušnom riadku tabuľky. Hodnoty z tohoto riadku tabuľky sa týkajú jedincov, ktorí majú práve *x* rokov (x = 0,1, ... w-1). Posledný vekový interval je nekonečný s dolnou hranicou *w* (napr. pre *w* = 95 sa interpretuje ako 95 rokov a viac).

2) ***Pravdepodobnosť úmrtia vo veku x*** ***(q_x)***

Jedná sa o pravdepodobnosť toho, že jedinec, ktorý je nažive vo veku *x*, zomrie pred dosiahnutím veku $x+1$. Súčasne s q_x sa definuje aj *pravdepodobnosť dožitia sa veku x (p_x)* ako pravdepodobnosť toho, že jedinec, ktorý je nažive vo veku *x* rokov, sa dožije veku $x+1$.

$$p_x = 1 - q_x \tag{1.1}$$



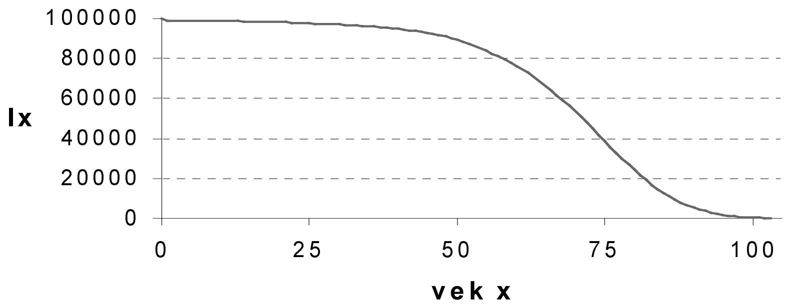
Obr. 1.1. Pravdepodobnosť úmrtia q_x pre mužov v SR z roku 1997

3) ***Počet dožívajúcich sa veku x*** ***(l_x)***

Prvá hodnota l_0 je vhodne zvolený koreň úmrtnostnej tabuľky. V demografii sa obyčajne volí l_0 = 100 000. Hodnota l_x predstavuje počet jedincov z koreňa l_0 , ktorí sa dožijú veku x.

Postupnosť $l_0 ,l_1 , ... ,l_w$ je nerastúca. $l_0 \geq l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_w$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{1.2}$$



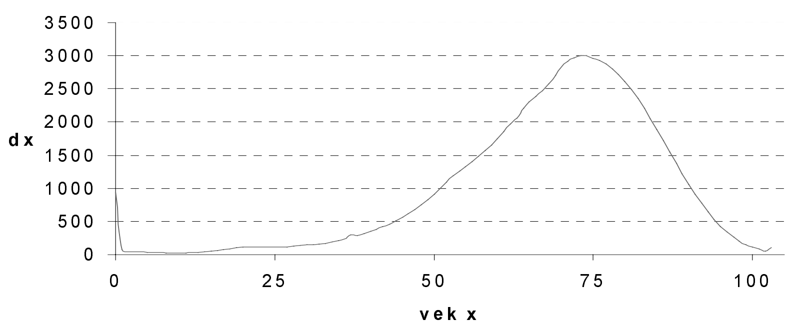
Obr. 1.2. Počty dožívajúcich l_x pre mužov v SR z roku 1997

4) ***Počet zomrelých vo veku x*** ***(d_x)***

Je to počet jedincov z koreňa l_0 , ktorí zomrú vo veku <x, x+1).

$$d_x = l_x - l_{x+1} \tag{1.3}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \tag{1.4}$$



Obr. 1.3. Počty zomrelých d_x pre mužov v SR z roku 1997

5) ***Dĺžka časti posledného roka života zomrelých vo veku x*** ***(a_x)***

Jedná sa o priemerný počet rokov prežitých vo vekovom intervale <x, x+1) osobami, ktoré zomreli vo veku <x, x+1). Približne platí, že a_x = 0,5 pre x = *5,6,7,8,...* . Hodnoty a_0 , a_1 ,... , a_4 závisia od miestnych podmienok a môžeme ich odhadnúť z príslušných štatistických prehľadov. Pritom platí

$$a_0 \cong 0{,}1 \qquad 0{,}40 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq 0.50$$

ŠÚ SR kladie $\quad a_0 = 0{,}08 \qquad a_1 = a_2 = \ldots = a_w = 0{,}5$

6) ***Celkový počet rokov prežitých osobami vo vekovom intervale <x, x+1)*** ***(L_x)***

Pre túto hodnotu platí

$$L_x = l_{x+1} + a_x d_x \tag{1.5}$$

Každý z l_{x+1} dožívajúcich prispeje do hodnoty L_x jedným rokom, zatiaľ čo každý z d_x zomrelých sem prispeje v priemere hodnotou a_x. V súvislosti s touto interpretáciou jednotky, v ktorých sa hodnoty L_x merajú, chápeme ako „osoboroky“ (person years). Zároveň môžeme hodnotu L_x považovať za stredný stav jedincov vo vekovom intervale *(x, x+1)* v rámci stacionárnej populácie, ktorú daná úmrtnostná tabuľka modeluje.

7) ***Počet zostávajúcich rokov života osôb vo veku x*** ***(T_x)***

Táto hodnota je súčtom hodnôt L_x ,L_{x+1} , ... ,L_w tj.

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \ldots + L_w \tag{1.6}$$

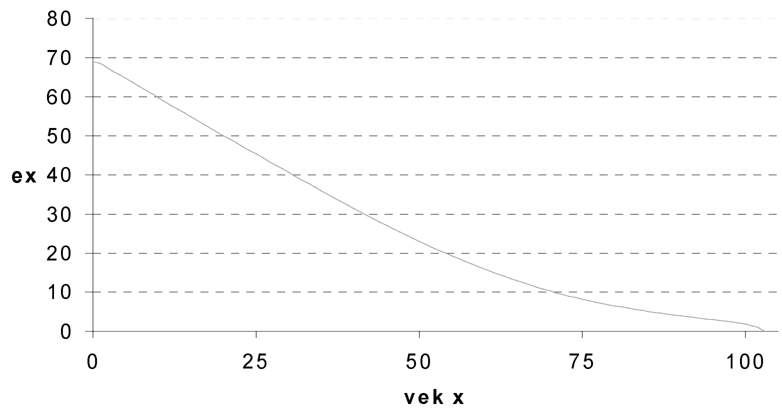
Hodnotu T_x môžeme tiež interpretovať ako stredný stav jedincov vo veku x a viac v rámci tabuľkovej stacionárnej populácie.

8) ***Stredná dĺžka života osôb vo veku x*** ***(e_x)***

Jedná sa o priemerný počet rokov, ktoré prežije jedinec vo veku x.

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} \tag{1.7}$$

Osoby vo veku x rokov prežijú spolu T_x rokov, jedna taká osoba prežije ešte priemerne e_x rokov. S rastúcim vekom x hodnoty e_x klesajú. Význačné postavenie medzi hodnotami e_x má hodnota e_0 . Pre strednú dĺžku života môžeme dokázať dosadením do (1.7) nasledujúci vzťah $e_0 = \sum_{x=0}^{w} (x + a_x) \frac{d_x}{l_0}$, ktorý hovorí, že stredná dĺžka narodeného dieťaťa je rovná priemernému veku úmrtia v populácii, a teda potvrdzuje skutočnosť, že úmrtnostná tabuľka naozaj modeluje stacionárnu populáciu.



Obr. 1.4. Stredná dĺžka života e_x pre mužov v SR z roku 1997

1.2. Konštrukcia úmrtnostnej tabuľky

Teraz si popíšeme konštrukciu úplnej úmrtnostnej tabuľky, na začiatku ktorej máme k dispozícii miery úmrtnosti m_x a hodnoty a_x.

$$m_x = \frac{D_x}{P_x} \qquad x = 0,1, \dots ,w$$

$$q_x = \frac{m_x}{1 + (1 - a_x)\, m_x} \qquad x = 0,1, \dots ,w\text{-}1 \qquad (1.8)$$

$$q_w = 1$$

D_x - počet jedincov podľa vekových intervalov, ktorí zomreli v priebehu uvažovaného roka

P_x – stredný stav populácie v jednotlivých vekových intervaloch

Úmrtnostnú tabuľku môžeme teraz skonštruovať podľa nasledujúcich krokov, ktoré priamo vyplývajú z popisu tabuľky:

1. Vypočítame q_x podľa predchádzajúcich vzorcov (1.8)
2. Položíme l_0 = 100 000. Vypočítame d_x a l_x rekurentne podľa vzorcov

$$d_x = l_x\, q_x \qquad (1.9)$$

$$l_{x+1} = l_x - d_x \qquad x = 0,1, \dots ,w\text{-}1$$

$$d_w = l_w$$

3. Vypočítame L_x pomocou vzorcov

$$L_x = l_{x+1} + a_x\, d_x \qquad x = 0,1, \dots ,w\text{-}1 \qquad (1.10)$$

$$L_w = \frac{l_w}{m_w}$$

4. Vypočítame T_x pomocou vzorca

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \ldots + L_w \qquad x = 0,1, \ldots ,w \qquad (1.11)$$

5. Vypočítame e_x° pomocou vzorca

$$e_x^\circ = \frac{T_x}{l_x} \qquad x = 0,1, \ldots ,w \qquad (1.12)$$

Poznámka: Posledný vzťah v (1.10) môžeme odôvodniť takto:

Vzťah vychádza z aproximácie (viď [4] VI.1.16 a VI..18)

$$\frac{d_x}{L_x} = \frac{D_x}{P_x} \qquad x = 0,1, \ldots ,w\text{-}1 \qquad (1.13)$$

Ak vzťah (1.13) rozšírime aj pre prípad $x = w$, tak dostaneme

$$L_w = \frac{d_w P_w}{D_w}$$

čo je podľa (1.9) naozaj overovaný vzťah.

2. GRADUÁCIA ÚMRTNOSTNÝCH TABULIEK

Pretože úmrtnostné tabuľky sú skonštruované štatisticky na základe dát o populácii, kolísajú vypočítané odhady okolo skutočných hodnôt. Pritom niekedy napríklad vzhľadom k nešťastnej zhode okolností pri výbere dát môžu byť odchýlky vypočítaných hodnôt od skutočných nezanedbateľné. Tomuto negatívnemu javu môžeme čeliť predovšetkým *tzv. graduáciou úmrtnostných tabuliek* (z angličtiny graduácia = odstupňovanie). Zjednodušene povedané, takýto postup sa riadi snahou, aby jeho realizáciou sa v grafe pravdepodobnosti q_x odstránili nehladké úseky s „hrbmi“ bez racionálneho vysvetlenia, ktoré pravdepodobne vznikli vzhľadom k nevhodnej konfigurácii použitých dát.

Skúsený demograf či životný aktuár má obvykle predstavu, ako by mal vyzerať priebeh výslednej postupnosti q_x pre populáciu v danom regióne a čase. Vo väčšine vyspelých krajín môžeme dnes hovoriť o nasledujúcom typickom priebehu tejto postupnosti (porovnaj s [5] obr.4.2.3): napriek zdokonaľujúcej sa prenatálnej starostlivosti začína postupnosť q_x vyššími hodnotami, ktoré sú mnohonásobne väčšie ako neskoršia detská úmrtnosť. Absolútne minimum dosahuje uvažovaná postupnosť pri vstupe do puberty, a potom rýchlo rastie až do začiatku tretej desiatky, kde obvykle vykazuje mierne lokálne maximum, lebo potom určitú dobu slabo klesá. Ako dôvod spomínaného lokálneho minima sa uvádzajú smrteľné úrazy pri automobilových nehodách a značná kumulácia samovrážd v tomto veku. Po prekročení veku 30 rokov už postupnosť q_x viac menej rastie exponenciálne.

Ale vráťme sa teraz naspäť k už spomínanej graduácii úmrtnostných tabuliek, ktorá bude predmetom našeho ďalšieho pozorovania.

V nasledujúcich častiach si podrobne popíšeme princípy troch spôsobov graduácie:

1. Neparametrická graduácia
2. Graduácia pomocou matematického vzorca (parametrická)
3. Grafická graduácia

2.1. Neparametrické metódy graduácie

Vyrovnávanie neparametrickými metódami patrí vzhľadom na svoju numerickú jednoduchosť k najpoužívanejším vyrovnávajúcim postupom. Graduovanú hodnotu pre daný vek *x* získame urobením priemeru hodnôt z vhodne zvoleného okolia veku *x.* Pritom sa väčšinou jedná o kĺzavý priemer, ktorý prikladá spriemerovaným hodnotám tým menšiu váhu, čím sú vzdialenejšie od veku *x,* tj. od stredu príslušného okolia.

Metódu kĺzavých priemerov zaraďujeme medzi adaptívne prístupy k trendovej zložke. Adaptívne prístupy môžeme všeobecne charakterizovať tak, že sú schopné pracovať s trendovými zložkami, ktoré v čase globálne menia svoj charakter, takže na ich popísanie nemôžeme použiť žiadnu matematickú krivku s nemennými parametrami. Na druhej strane sa však predpokladá, že v krátkych úsekoch radu je takéto vyrovnanie pomocou matematickej krivky možné, aj keď tieto krivky majú v rôznych úsekoch odlišné parametre. Čiže, ak je možné iba lokálne vyrovnanie trendu, hovoríme o tzv. koncepcii postupného trendu.

Čo sa týka kĺzavých priemerov, týmto názvom označujeme lineárnu kombináciu členov pôvodného radu, napr. $\frac{1}{4}(q_{t-1} + 2q_t + q_{t+1})$

Vytváranie takýchto konečných kombinácii členov radu je ekvivalentné s vyrovnávaním krátkych úsekov radu určitými matematickými krivkami.

Uvažujme o negraduovaných hodnotách q_x ako o hodnotách pozostávajúcich z dvoch častí, a to skutočnej hodnoty u_x a príslušnej chyby e_x (tj. $q_x = u_x + \varepsilon_x$). Hlavným cieľom graduácie je samozrejme eliminovať náhodné chyby najviac ako sa len dá a získať hladkú postupnosť hodnôt.

V snahe eliminovať náhodné chyby by sme mali zabrániť ***tzv. skresleniu*** (distortion), tj. zabezpečiť aby sa neeliminovali aj systematické chyby, inak povedané, aby sa hladká krivka už nevyhladzovala. Môžeme to dosiahnuť dvoma spôsobmi:

1) použitím polynomického kĺzavého priemeru

2) postupnou aplikáciou jednoduchých kĺzavých priemerov

2.1.1. Konštrukcia kĺzavých priemerov vyrovnávaním úseku radu polynomickými krivkami.

Vychádzame z toho, že každá „rozumná“ funkcia môže byť aproximovaná polynómom. Budeme postupovať tak, že najprv vyrovnáme vhodným polynómom prvých $2m + 1$ členov radu a použijeme hodnotu tohoto polynómu v bode $t = m + 1$ (tj. v strede uvažovaného úseku) ako vyrovnanú hodnotu $\hat{q}_{m+1}$ daného radu v tomto bode. Potom pre získanie vyrovnanej hodnoty v bode $t = m + 2$ urobíme to isté s pozorovaniami $q_2, \ldots ,q_{2m+2}$ atď.

Tento postup je ekvivalentný s tým, že pre výpočet vyrovnaných hodnôt vytvárame lineárne kombinácie členov pôvodného radu s pevne určenými koeficientmi alebo vytvárame kĺzavé priemery.

Všeobecne môžeme vyrovnávať úsek dĺžky $2m + 1$ polynómom r-tého stupňa, a tak získať ***kĺzavé priemery dĺžky 2m + 1 a stupňa r***. Vyrovnaná hodnota $\hat{q}_t$ v bode t je lineárna kombinácia výrazov $\sum_{\tau=-m}^{m} \tau^j q_{t+\tau}$ s párnym j, lebo po algebraickej úprave je to lineárna kombinácia hodnôt $q_{t-m}, \ldots ,q_{t+m}$ s pevne určenými koeficientmi K_i, ktoré sa nazývajú ***váhy kĺzavého priemeru.***

VLASTNOSTI KĹZAVÝCH PRIEMEROV:

1) Súčet váh kĺzavého priemeru je rovný jednej, tj. $\sum_i K_i = 1$

   (aplikujeme kĺzavý priemer na rad konštantných hodnôt, a potom vyrovnanou hodnotou musí byť opäť pôvodná konštanta)

2) Váhy sú symetrické okolo prostrednej hodnoty, tj. $K_i = - K_{-i}$

   (lebo vo výrazoch typu $\sum_{\tau=-m}^{m} \tau^j q_{t+\tau}$ majú pre párne j členy $q_{t-\tau}$ a $q_{t+\tau}$ symetrické koeficienty)

3) Ak je r párne číslo, tak kĺzavé priemery stupňa r a $r+1$ s rovnakou dĺžkou $2m+1$ sú totožné.

2.1.2. Postupná aplikácia jednoduchých kĺzavých priemerov

Definícia 2.1: Nech n je prirodzené číslo, q_x - funkcia celočíselného argumentu x. Operátor ***sumácia [n]*** je definovaný vzťahom:

$$[n]q_x = q_{x-\frac{n-1}{2}} + q_{x-\frac{n-3}{2}} + \ldots + q_{x-\frac{n-1}{2}}$$

Definícia 2.2: Centrálna diferencia prvého rádu je definovaná nasledovne

$$\delta\, q_x = q_{x+\frac{1}{2}} - q_{x-\frac{1}{2}}$$

Všeobecne diferencia k-teho rádu je definovaná ako

$$\delta^k q_x = \delta\left(\delta^{k-1} q\ \right)$$

Kĺzavý priemer n hodnôt (Pozri [2]) môžeme zapísať ako

$$\hat{q_x} = \frac{[n]}{n} q_x = \left\{1 + \frac{\left(n^2 - 1^2\right)}{2^2 3!}\delta^2 + \frac{\left(n^2 - 1^2\right)\left(n^2 - 3^2\right)}{2^4 5!}\delta^4 + \ldots\right\} q_x \qquad (2.1)$$

kde podľa definície 2.2 pre *2. a 4. centrálnu diferenciu* q_x platí

$$\delta^2 q_x = q_{x+1} - 2q_x + q_{x-1}$$

$$\delta^4 q_x = q_{x+2} - 4q_{x+1} + 6q_x - 4q_{x-1} + q_{x-2}$$

Na odvodenie sumačného graduačného vzorca bola využitá hladkosť kĺzavého priemeru. Väčšina známych vzorcov obsahuje tri sumačné operátory [n_1], [n_2], [n_3] a štvrtý operátor, ktorý je lineárnou kombináciou dvoch alebo viacerých sumačných operátorov.

Sumačný graduačný vzorec zložený z postupne aplikovaných jednoduchých kĺzavých priemerov dĺžky n_i resp. ich lineárnej kombinácie max. dĺžky m má podľa [10] tvar:

$$\hat{q_x} = \frac{[n_1][n_2]\ldots[n_k]}{\left(\prod_{i=1}^{k} n_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\, j\right)} \left\{\sum_{j=1}^{m} a_j [j]\right\} q_x \qquad \text{a je dĺžky} \qquad m + \sum_{i=1}^{r}\left(n_i - 1\right) = 2r + 1$$

Benjamin a Pollard [2] uvádzajú 12 takýchto vzorcov, niektoré z nich a ešte aj ďalšie možno nájsť v [5] a [9]. Na ilustráciu uvádzame niektoré najpoužívanejšie sumačné graduačné vzorce.

SPENCER 21 $$\hat{q}_x = \frac{[5][5][7]}{350}\{[1]+[3]+[5]-[7]\}q_x$$

SPENCER 15 $$\hat{q}_x = \frac{[5][4][4]}{320}\{[1]+6[3]-3[5]\}q_x$$

WOOLHOUSE 15 $$\hat{q}_x = \frac{[5][5][5]}{125}\{10[1]-3[3]\}q_x$$

KARUP 19 $$\hat{q}_x = \frac{[5][5][5]}{625}\{3[3]+2[5]-2[7]\}q_x$$

LARUS 19 $$\hat{q}_x = \frac{[3][5][7]}{945}\{-6[1]+5[3]+7[5]-5[7]\}q_x$$

WITTSTEIN 9 $$\hat{q}_x = \frac{[5][5]}{25}q_x$$

Posledný vzorec je vlastne dvakrát po sebe aplikovaný jednoduchý kĺzavý priemer, a preto obsahuje skreslenie druhej diferencie.

Na to, aby sme vedeli vybrať najvhodnejší vzorec pre naše potreby, musíme urobiť komplexnú analýzu vzorca, ktorá pozostáva z posúdenia nasledujúcich charakteristík:

a) *Skreslenie 2. a 4.diferencie* (the second and the fourth-difference distortion)

b) *Rozsah vzorca* (the range)

c) *Chyby redukujúca sila vzorca* (error-reducing power)

d) *Vyhladzovacia sila vzorca* (smoothing power)

e) *Vlny odrezávajúce vlastnosti* (wave-cutting properties)

Rozoberme si každý zo spomenutých bodov podrobnejšie.

a) ***Skreslenie 2. a 4.diferencie***

Ako sme už spomenuli, postupná aplikácia jednoduchých kĺzavých priemerov je jeden zo spôsobov ako zabrániť skresleniu, tj. neeliminovať systematické chyby. Väčšina sumačných graduačných vzorcov sa skladá z troch operátorov [n_1], [n_2],[n_3] a štvrtý operátor je lineárnou kombináciou dvoch alebo viacerých operátorov. Pokiaľ už máme vybraté operátory [n_1], [n_2], [n_3], posledný lineárne zostavený operátor môžeme zvoliť tak, aby eliminoval skreslenie 2.diferencie.

Príklad 2.1: Vypočítajme aké veľké skreslenie vznikne použitím graduačnej metódy SPENCER 15 a overme, že táto formula bola skonštruovaná tak, aby neobsahovala skreslenie spôsobené 2.diferenciou.

$$\frac{[5][4][4]}{5x4x4} \equiv \left(1+\delta^2+\frac{1}{5}\delta^4\right)\left(1+\frac{5}{8}\delta^2+\frac{7}{128}\delta^4+\ldots\right)^2$$

$$\equiv 1+\frac{9}{4}\delta^2+\frac{39}{20}\delta^4+\ldots$$

$$\frac{1}{4}\{[1]+6[3]-3[5]\} \equiv \frac{1}{4}\left\{1+18\left(1+\frac{1}{3}\delta^2\right)-15\left(1+\delta^2+\frac{1}{5}\delta^4+\ldots\right)\right\}$$

$$\equiv 1-\frac{9}{4}\delta^2-\frac{3}{4}\delta^4+\ldots$$

Takže

$$\frac{[5][4][4]}{320}\{[1]+6[3]-3[5]\}q_x =$$

$$= \left(1+\frac{9}{4}\delta^2+\frac{39}{20}\delta^4+\ldots\right)\left(1-\frac{9}{4}\delta^2-\frac{3}{4}\delta^4+\ldots\right) = \left(1+\frac{189}{80}\delta^4+\ldots\right) q_x$$

b) ***Rozsah vzorca***

Rozsah graduačného vzorca môžeme definovať ako počet negraduovaných hodnôt *q*, potrebných na výpočet jednotlivej graduovanej hodnoty. Avšak pokiaľ má niektoré *q* nulový koeficient, tak samozrejme môže byť rozsah vzorca väčší.

Na to, aby sme mohli presne určiť rozsah vzorca, nám pomôže nasledujúce pravidlo:

(i) Zo sumačných operátorov obsiahnutých v lineárne zostavenom operátore vyberieme najväčšie n_i

(ii) K tomuto n_i pripočítame číslo, ktoré získame ako súčet hodnôt n_i *-1* z každého operátora [n_i], nachádzajúceho sa mimo lineárne zostavený operátor

Príklad 2.2: Vypočítajme rozsah vzorca SPENCER 15.

(i) najväčšie n=5

(ii) hodnoty n-1 z každého operátora [n] sú nasledovné: 4, 3, 3

Súčet všetkých týchto hodnôt je 15.

Každý sumačný vzorec rozsahu 2r+1 môžeme zapísať v tvare jednoduchej explicitnej formy: $K_0q_x + K_1(q_{x+1}+q_{x-1}) + ... + K_r(q_{x+r}+q_{x-r})$

Aby sme získali rozvoj (expanziu) sumačného vzorca, aplikujeme daný vzorec na stĺpec pozostávajúci z núl a jednej jednotky v strede.

Príklad 2.3: Odvoďme explicitný tvar daného graduačného vzorca

Postup pri odvodzovaní explicitného vzorca pre metódu Spencer 15 je znázornený v nasledujúcej tabuľke:

A	[3]A B	6B C	[5]A D	3D E	A+C-E F	[4]F G	[4]G H	[5]H I
								-3
								-6
							-3	-5
						-3	-3	3
			1	3	-3	0	1	21
	1	6	1	3	3	4	8	46
1	1	6	1	3	4	7	18	67
	1	6	1	3	3	7	22	74
			1	3	-3	4	18	67
						0	8	46
						-3	1	21
							-3	3
							-3	-5
								-6
								-3

Tabuľka 2.1

Z posledného stĺpca tabuľky môžeme vyvodiť explicitný tvar uvažovaného sumačného graduačného vzorca:

$$q_x^{\wedge} = \frac{1}{320}\{74q_x + 67\,(q_{x+1} + q_{x-1}) + 46\,(q_{x+2} + q_{x-2}) + 21\,(q_{x+3} + q_{x-3}) + 3(q_{x+4} + q_{x-4}) - 5(q_{x+5} + q_{x-5}) - 6(q_{x+6} + q_{x-6}) - 3(q_{x+7} + q_{x-7})\}$$

Súčet koeficientov musí byť 1. Súčet čísel v poslednom stĺpci tabuľky je však 320, lebo sme vynechali delenie číslom 320 aby sa nám ľahšie počítalo.

Poznámka: Keďže tento spôsob zápisu explicitného tvaru vzorca je dosť zdĺhavý, bol zavedený jednoduchší zápis, pri ktorom používame len koeficienty K_j (viď. [3]). Potom

$$q_x^{\wedge} = K_0 q_x + \sum_{j=1}^{r} K_j \left(q_{x+j} + q_{x-j}\right) = \left(K_r, K_{r-1}, \ldots, K_1, K_0, \ldots\right) q_x\ .$$

Čiže zápis vzorca SPENCER15 má tvar

$q_x^{\wedge} = \frac{1}{320}(-3,-6,-5,3,21,46,67,74,..)q_x$, kde 74 je koeficient pri q_x a ostatné členy sa opakujú.

Ostatné vyššie uvedené sumačné graduačné vzorce v explicitnom tvare:

SPENCER 21 $\hat{q}_x = \frac{1}{350}(-1,-3,-5,-5,-2,6,18,33,47,57,60,\ldots)q_x$

WOOLHOUSE 15 $\hat{q}_x = \frac{1}{125}(-3,-2,0,3,7,21,24,25,\ldots)q_x$

WITTSTEIN 9 $\hat{q}_x = \frac{1}{25}(1,2,3,4,5,\ldots)q_x$

KARUP 19 $\hat{q}_x = \frac{1}{625}(-2,-6,-9,-8,0,21,53,87,114,125,\ldots)q_x$

LARUS 19 $\hat{q}_x = \frac{1}{945}(-5,-13,-17,-11,10,46,89,130,159,169,\ldots)q_x$

Poznámka: Analogicky použitím opačného postupu môžeme získať z explicitného tvaru vzorca jeho zápis v tvare sumačných operátorov.

Poznámka: (Pozri [5]) Nemecká úmrtnostná tabuľka na roky 1960-1962 (ADSt 60/62), ktorú používali nemecké životné poisťovne, bola vyrovnaná nasledujúcim spôsobom:

(i) pre x = 0 a 1 $\hat{q}_0 = q_0 \quad \hat{q}_1 = q_1$

(ii) pre $2 \leq x \leq 25$

$$\hat{q}_x = \exp\,(-6{,}3845 - 0{,}043323u - 1{,}5908u^2 - 0{,}64283u^3 - 12{,}455u^4 - 14{,}789u^5 - 6{,}3829u^6 - 0{,}94560u^7)$$

kde $u = \frac{x-25}{10}$

(iii) pre $25 \leq x \leq 90$ $\hat{q}_x = \hat{q}_x^{s}$

kde $\hat{q}_x^{s}$ je hodnota vypočítaná pomocou metódy SPENCER 15

(iv) pre $90 < x \leq 100$

$$\hat{q}_x = 1 - \exp\,[\,-\exp(-1{,}1166 + 0{,}80164u - 0{,}27543u^2)]$$

kde $u = \frac{x-90}{10}$

c) ***Chyby redukujúca sila vzorca***

Až doteraz sme uvažovali iba o tom, ako sumačný vzorec pôsobí na základné skutočné hodnoty bez skreslení. Jednou z najdôležitejších úloh sumačného graduačného vzťahu je redukovať chyby $\{\varepsilon_x\}$.

Ak vzorec v explicitnej forme aplikujeme na pozorované dáta, nevyrovnané chyby $\{\varepsilon_x\}$ sa vyhladia a poskytnú nám vyrovnané chyby $\{\varepsilon_x'\}$.

$$\varepsilon_x' = K_0\,\varepsilon_x + K_1\,(\varepsilon_{x+1} + \varepsilon_{x-1}) + \ldots + K_r\,(\varepsilon_{x+r} + \varepsilon_{x-r})$$

Graduačný vzorec bude vhodný ako „odstraňovač chýb“ vtedy, ak $\{\varepsilon_x'\}$ budú bližšie k nule ako hodnoty $\{\varepsilon_x\}$. Aby to bolo splnené, musí byť variancia ε_x' menšia ako variancia ε_x . Uvažujme, že $\{\varepsilon_x\}$ sú nezávislé a majú spoločnú varianciu σ^2.

Potom platí: $\quad \text{var}\,(\varepsilon_x) = \sigma^2$

$$\text{var}\,(\varepsilon_x') = (K_0^2 + 2K_1^2 + \ldots + 2K_r^2)\,\sigma^2$$

Definícia 2.2: Mieru sily, akou vzorec redukuje chyby, nám udáva ϕ_E *index* (error-reducing index), ktorý je definovaný ako podiel štandardnej odchýlky ε_x' a štandardnej odchýlky ε_x .

$$\phi_E = \sqrt{(K_0^2 + 2K_1^2 + \ldots + 2K_r^2)} \qquad (2.2)$$

Čím je ϕ_E *index* menší, tým má vzorec väčšiu schopnosť chyby redukovať.

<u>*Príklad 2.4*</u>: Vypočítajme ϕ_E *index* pre vzorec SPENCER 15

$$\phi_E = \sqrt{\frac{74^2 + 2.67^2 + 2.46^2 + 2.21^2 + 2.(-3)^2 + 2.(-5)^2 + 2.(-6)^2 + 2.(-3)^2}{320^2}}$$

$\phi_E = 0{,}439$

d) Vyhladzovacia sila vzorca

Na prvý pohľad by sa nám mohlo zdať, že je to isté ako sila odstraňujúca chyby, lebo čím chyby bližšie k nule, tým je postupnosť graduovaných hodnôt hladšia. Presvedčme sa však o tom, že je medzi nimi rozdiel.

Ak si zobrazíme koeficienty K_{-r} ... K_0 ... K_r a postupne ich pospájame, získame tzv. *krivku koeficientov*. Pokiaľ je táto krivka hladká, tj. koeficienty K_j sa menia postupne, tak vyrovnané chyby sa tiež budú meniť postupne. Pretože skutočné hodnoty $\{u_x\}$ majú predpoklad byť hladké, vzorec, ktorého explicitný tvar má hladkú postupnosť koeficientov, bude produkovať hladkú postupnosť graduovaných hodnôt.

ϕ_E *index* závisí iba od veľkosti koeficientov K_j. Vyhladzovacia sila sumačného vzorca okrem veľkosti koeficientov K_j závisí aj od ich poradia.

Zvyčajný spôsob vyšetrovania hladkosti je uvažovať rôzne stupne diferencií a zamerať sa obzvlášť na 3.diferenciu. Graduačný vzorec má dobrú vyhladzovaciu vlastnosť, ak 3.diferencia vyrovnaných hodnôt $\{\varepsilon_x'\}$ je bližšie k nule ako 3.diferencia hodnôt $\{\varepsilon_x\}$.Aby to bolo splnené, musí platiť $\operatorname{var}(\Delta^3\varepsilon_x') < \operatorname{var}(\Delta^3\varepsilon_x)$.

Definícia 2.3: Mieru vyhladzovacej sily vzorca nám udáva ϕ_S *index* (smoothing index), ktorý je definovaný ako podiel štandardnej odchýlky $(\Delta^3\varepsilon_x')$ a štandardnej odchýlky $(\Delta^3\varepsilon_x)$ za predpokladu, že $\{\varepsilon_x\}$ sú nezávislé a majú spoločnú varianciu σ^2.

Vieme, že
$$\Delta^3\varepsilon_x = \varepsilon_{x+3} - 3\varepsilon_{x+2} + 3\varepsilon_{x+1} - \varepsilon_x$$

$$\operatorname{var}(\Delta^3\varepsilon_x) = \sigma^2 + 9\sigma^2 + 9\sigma^2 + \sigma^2 = 20\sigma^2$$

Na to, aby sme zistili $\operatorname{var}(\Delta^3\varepsilon_x')$, si podľa nasledujúcich pravidiel skonštruujeme tabuľku:

- prvý stĺpec tabuľky bude obsahovať koeficienty K_j z explicitného tvaru graduačného vzorca

- druhý stĺpec získame vynásobením prvého stĺpca číslom -3 a zapísaním tejto hodnoty o jednu pozíciu nižšie (o jeden riadok)
- tretí stĺpec je taký istý ako druhý, ibaže s opačnými znamienkami a znova posunutými hodnotami o jednu pozíciu nižšie
- štvrtý stĺpec sa zhoduje s prvým, ale má opačné znamienka a hodnoty zapíšeme o tri pozície nižšie
- hodnoty do piateho stĺpca získame spočítaním hodnôt v danom riadku z predošlých stĺpcov
- šiesty stĺpec dostaneme ak hodnoty v piatom stĺpci umocníme na druhú

Variancia $\left(\Delta^3 e_x'\right)$ je rovná súčtu hodnôt šiesteho stĺpca vynásobenému σ^2.

Takže
$$\phi_S = \sqrt{\left\{\frac{\text{súčet 6.stlpca}}{20}\right\}} \tag{2.3}$$

Tieto výpočty si však môžeme zjednodušiť:

a) Nakoľko je graduačný vzorec symetrický, aj hodnoty v poslednom stĺpci tabuľky budú symetrické. Čiže nám stačí zostrojiť prvú polovicu tabuľky a zdvojnásobiť súčet posledného stĺpca.

b) Koeficienty K_j sú zlomky tj. prirodzené čísla delené rovnakým prirodzeným menovateľom. Je jednoduchšie počítať s koeficientmi v tvare prirodzených čísel a nakoniec vydeliť súčet posledného stĺpca tabuľky druhou mocninou daného menovateľa.

Príklad 2.5: Vypočítajme ϕ_S *index* pre vzorec SPENCER 15:

A	B	C	D	E	F
-3				-3	9
-6	9			3	9
-5	18	-9		4	16
3	15	-18	3	3	9
21	-9	-15	6	3	9
46	-63	9	5	-3	9
67	-138	63	-3	-11	121
74	-201	138	-21	-10	100
67	-222	201	-46	0	0
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	564

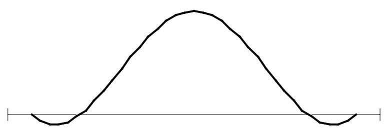
Tabuľka 2.2

$$\phi_S = \sqrt{\frac{564/(320)^2}{20}} = 0{,}0167$$

e) Vlny odrezávajúce vlastnosti vzorca

Uvažujme tieto dve krivky koeficientov:

a)



b)

Prvá krivka stúpa strmo k ostrému vrcholu, druhá však stúpa veľmi postupne k širokému plochému vrcholu.

Použitie graduačného vzorca reprezentovaného prvou krivkou bude znamenať, že ľubovolná negraduovaná chyba bude mať značný vplyv na graduované hodnoty nachádzajúce sa blízko nej, ale veľmi malý efekt na ostatné. Takýto vzorec bude mať sklon lokalizovať vplyv na chyby a vlnovky v negraduovaných chybách sa budú opakovať, hoci v menšom rozsahu ako pri graduovaných hodnotách.

Použitie vzorca reprezentovaného druhou krivkou rozšíri efekt na negraduované chyby na širšiu plochu, a potom budeme môcť povedať, že má dobré 'wave cutting' vlastnosti.

Definícia 2.4: ϕ_w *index* (wave cutting index) graduačného vzorca je definovaný ako súčet piatich stredných koeficientov K_j. Ak máme párny počet členov, tak zoberieme súčet štyroch prostredných koeficientov plus nasledujúci z jednej alebo druhej strany

Čím je ϕ_w *index* menší, tým má daný vzorec lepšie 'wave cutting' vlastnosti.

Príklad 2.6: Vypočítajme ϕ_w *index* pre vzorec SPENCER 15

$$\phi_w = \frac{46+67+74+67+46}{320} = 0{,}9375$$

<u>Graduačné vzorce s optimálnou silou redukcie chýb</u>

Ako sme už spomenuli, existuje nekonečne veľa graduačných vzorcov v explicitnom tvare, ktoré nemôžu byť odvodené zo sumačného vzťahu.

Uvažujme graduačný vzorec v explicitnom tvare rozsahu (2r+1):

$$K_0 q_x + K_1(q_{x+1}+q_{x-1}) + \dots + K_r(q_{x+r}+q_{x-r}) \tag{2.4}$$

kde
$$K_0 + 2\sum_{j=1}^{r} K_j = 1 \tag{2.5}$$

Vzorec (2.1) môžeme použiť na odvodenie vzťahu pre q_x a q_{-x} pomocou q_0 :

$$q_x + q_{-x} = \{[\,2x+1] - [2x-1]\}\, q_0 = \left(2 + x^2\delta^2 + \frac{1}{12}\left(x^4 - x^2\right)\delta^4 + \dots\right) q_0$$

Tento vzťah obsahuje skreslenie 2.diferencie $x^2\delta^2 q_0$. To znamená, že na to, aby mal sumačný graduačný vzorec nulové skreslenie 2.diferencie musí platiť:

$$\sum_{j=1}^{r} j^2 K_j = 0 \tag{2.6}$$

Aby sme zoptimalizovali silu redukcie chýb, podľa [2] potrebujeme minimalizovať ϕ_E^2 za podmienok (2.5), (2.6).

Tvrdenie: Minimalizácia druhej mocniny indexu redukcie chýb $\phi_E^2 = K_0^2 + 2K_1^2 + \dots + 2K_r^2$ za podmienok (2.5) a (2.6) vedie ku kĺzavým priemerom s váhami $K_j = \dfrac{3\left(3r^2+3r-1\right)}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} - \dfrac{15j^2}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$

<u>Dôkaz:</u> $L = K_0^2 + 2K_1^2 + \dots + 2K_r^2 + \lambda\, (K_0 + 2\sum_{j=1}^{r} K_j - 1) + \gamma\, (\sum_{j=1}^{r} j^2 K_j)$

Podmienky prvého rádu majú tvar:

$$\frac{\partial L}{\partial K_0} = 2K_0 + \lambda = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial K_j} = 4K_j + 2\lambda + \gamma j^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = K_0 + 2\sum_{j=1}^{r} K_j - 1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \sum_{j=1}^{r} j^2 K_j = 0$$

Z toho vyplýva, že $\lambda = -2K_0$.

$$4K_j - 4K_0 + \gamma j^2 = 0 \qquad (*)$$

$$4\sum_{j=1}^{r} K_j - 4rK_0 + \gamma \sum_{j=1}^{r} j^2 = 0$$

$$2\sum_{j=1}^{r} K_j = 1 - K_0$$

$$2(1-K_0) - 4rK_0 + \gamma \sum_{j=1}^{r} j^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \frac{2(K_0(2r+1)-1)}{\sum_{j}^{r} j^2}$$

Do (*) dosadíme γ

$$4K_j - 4K_0 + \frac{2(K_0(2r+1)-1)}{\sum_{j=1}^{r} j^2} j^2 = 0$$

$$\boxed{K_j = K_0 + \frac{2(K_0(2r+1)-1)}{2\sum_{j=1}^{r} j^2}\, j^2}$$

$$\sum_{j=1}^{r} j^2 K_j = K_0 \sum_{j=1}^{r} j^2 + \frac{1-K_0(2r-1)}{2\sum_{j=1}^{r} j^2} \sum_{j=1}^{r} j^4$$

Z podmienky (2.6) dostávame $K_0 = \dfrac{\sum_{j=1}^{r} j^4 \Big/ \sum_{j=1}^{r} j^2}{(2r+1)\left(\sum_{j=1}^{r} j^4 \Big/ \sum_{j=1}^{r} j^2\right) - 2\sum_{j=1}^{r} j^2}$

Dosadením K_0 do vzťahu (2.7) a použitím nasledujúcich vzorcov (pozri [1], str.169)

$$\sum_{j=1}^{r} j^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

$$\sum_{j=1}^{r} j^4 = \frac{r(r+1)(2r+1)(3r^2+3r-1)}{30}$$

dostaneme pre K_j vzťah

$$K_j = \frac{3\left(3r^2 + 3r - 1\right)}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} - \frac{15j^2}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} .$$

Dôsledok: $$\phi_E = \left(\frac{3\left(3r^2 + 3r - 1\right)}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{K_0}$$

$$\phi_S = \frac{3\sqrt{\left(12r^4 + 24r^3 + 39r^2 + 27r + 23\right)}}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)\sqrt{5}}$$

$$\phi_W = \frac{15\left(3r^2 + 3r - 11\right)}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} = 100K_1 - 5K_0$$

Také sú polynomické kĺzavé priemery dĺžky $2r + 1$ a stupňa 2 a 3, ktoré popisuje Cipra [3] v kap. 6. Ako príklad uvádzame formulu dĺžky 5

$$\hat{q_x} = \frac{1}{35}\left(-3, 12, 17, 12, -3\right)q_x$$

Polynomické kĺzavé priemery majú tú výhodu, že ich možno doplniť o vzorce na vyhladenie celého radu, resp. aj na predpovede dĺžky 1.

Schopnosť graduačného vzorca redukovať chyby môžeme vypočítať ako podiel optimálneho ϕ_E *indexu* pre daný rozsah a ϕ_E *indexu* pre daný vzorec.

Tabuľka 2.3 uvádza vlastnosti vzorcov s optimálnou silou redukcie chýb:

r	ΦE	ΦS	ΦW	KO
5	0,6969	0,3174	1	0,4857
7	0,5773	0,194	1,1905	0,3333
9	0,5054	0,1418	1,0606	0,2554
11	0,4555	0,1124	0,9207	0,2075
13	0,4181	0,0935	0,8042	0,1748
15	0,3888	0,0801	0,7014	0,1511
17	0,3649	0,0702	0,6347	0,1331
19	0,3449	0,0624	0,5728	0,119
21	0,328	0,0563	0,5214	0,1076
23	0,3133	0,0512	0,4783	0,0981
25	0,3004	0,047	0,4258	0,902
27	0,289	0,0435	0,41	0,0835

Tabuľka 2.3

Napríklad: SPENCER15

$$\frac{0{,}3888}{0{,}439} = 89\%$$

Graduačné vzorce s optimálnou vyhladzovacou silou

Na to, aby sme zoptimalizovali vyhladzovaciu silu vzorca, potrebujeme minimalizovať ϕ_S^2 za podmienok (2.5), (2.6). Podľa [2] krivka koeficientov bude polynóm 8. stupňa a pre graduačný vzorec rozsahu (2r-3) platí:

$$K_i = \frac{315\left\{(r-1)^2 - i^2\right\}\left\{r^2 - i^2\right\}\left\{(r+1)^2 - i^2\right\}\left\{\left(3r^2 - 16\right) - 11i^2\right\}}{8r\left(r^2 - 1\right)\left(4r^2 - 1\right)\left(4r^2 - 9\right)\left(4r^2 - 25\right)}$$

Efektívnosť vyhladzovacej sily vzorca vypočítame ako podiel ϕ_S *indexu* pre daný rozsah a ϕ_S *indexu* pre daný vzorec.

V tabuľke4 sú uvedené vlastnosti vzorcov s optimálnou vyhladzovacou silou:

	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
K_O	0,559441	0,412587	0,33114	0,277945	0,240057	0,211541	0,189231	0,171127	0,156469	0,14406
K_1	0,293706	0,293706	0,266557	0,238693	0,214337	0,193742	0,17639	0,161691	0,149136	0,138318
K_2	-0,07343	0,058741	0,11847	0,141267	0,147356	0,145904	0,141112	0,134965	0,128423	0,121949
K_3		-0,05874	-0,00987	0,035723	0,065492	0,082918	0,092293	0,096658	0,097956	0,097395
K_4			-0,04072	-0,02679	0	0,024027	0,042093	0,54685	0,063038	0,068303
K_5				-0,02786	-0,02786	-0,14134	0,002467	0,017475	0,029628	0,38933
K_6					-0,01935	-0,0245	-0,01864	-0,00816	0,003119	0,01343
K_7						-0,01373	-0,02037	-0,01897	-0,0129	-0,00495
K_8							-0,00996	-0,0166	-0,01761	-0,01453
K_9								-0,00738	-0,01346	-0,01569
K_{10}									-0,00557	-0,01092
K_{11}										-0,00428
Φ_E	0,704474	0,597124	0,532297	0,486473	0,45146	0,423415	0,400219	0,38058	0,36365	0,348845
Φ_S	0,263542	0,11466	0,058078	0,033066	0,020415	0,013384	0,009192	0,006551	0,004812	0,003626
Φ_W	1	1,117481	1,101194	1,037865	0,963443	0,890833	0,824235	0,764578	0,711587	0,664594

Tabuľka 2.4

<u>*Napríklad:*</u> SPENCER 15

$$\frac{0{,}013384}{0{,}0167} = 80\%$$

2.1.3. Výhody a nevýhody neparametrických metód graduácie a ich použitie v programe STATGRAPHICS

Graduačné vzorce sa rozvíjali najmä v 19. Storočí (Spencerova formula bola publikovaná v r. 1904 v [13]) a dodnes sa používa pri vyhladzovaní (graduovaní) úmrtnostných tabuliek. Ich hlavná výhoda - jednoduchosť výpočtov (sumačné vzorce obsahujú v podstate iba sčítanie) - sa dnes už stráca, majú však dobré vyhladzovacie schopnosti a okrem toho graduačné formuly sú lineárnymi operátormi.

Nevýhodou však je, že krajné hodnoty zostávajú nevyrovnané (možno však odvodiť formuly aj pre krajné hodnoty, viď. [3]) a isté problémy s testovaním vhodnosti vyrovnania, mlčky totiž predpokladajú rovnaký rozptyl pre všetky e_x. Akýmsi zovšeobecnením kĺzavých priemerov sú jadrové odhady.

Nasledujúca tabuľka ukazuje ako možno počítať kĺzavé priemery v programe STATGRAPHICS .

V procedúre **MOVAVG** - jednoduché kĺzavé priemery

WMOV - (1) jednoduché kĺzavé priemery
- (2) SPENCER 15
- (3) SPENCER 21
- (4) HENDERSON
- (5) váhy zadané užívateľom

SEASON - jednoduché kĺzavé priemery

Zadáva sa		Obmedzenie
MOVAVG	- počet bodov na každú stranu *r*	r ≤ n/4
WMOV	- (1) dĺžka kĺzavého priemeru *2r + 1*	2r + 1 ≤ n/4
	- (2) 2r + 1 = 15	15 ≤ n
	- (3) 2r + 1 = 21	21 ≤ n
	- (4) dĺžka kĺzavého priemeru *2r + 1*	2r + 1 ≤ n/4
	- (5) dĺžka kĺzavého priemeru (*2r + 1*) + váhy	2r + 1 ≤ n/4
SEASON	- počet sezón (*2r* alebo *2r + 1*)	
	dĺžka kĺzavého priemeru je *2r + 1*	2(2r + 1) ≤ n

POZNÁMKA: Krajné hodnoty vyrovnáva iba MOVAVG.

2.2. Graduácia pomocou matematického vzorca

V tejto časti sa budeme venovať metóde *„fitovania pomocou matematickej krivky“*. Matematická krivka môže mať niekedy sklon, ktorý predstavuje všeobecný vzorec funkcie, ktorú chceme graduovať. Takáto krivka bude spojitá a hladká, takže otázka nie je či dosiahneme dokonalú hladkosť, ale či zvolený sklon krivky vyhovuje pre dané dáta. Úspešné používanie tejto metódy vyžaduje značné znalosti alebo zostavenie rozumných hypotéz o všeobecnom sklone a tvare množiny pozorovaných hodnôt, ktoré majú byť graduované.

Benjamin Gompertz (1825) ukázal na fyziologických základoch, že intenzita úmrtnosti má rovnaký podiel v rovnakých vekových intervaloch. Pre intenzitu úmrtnosti navrhol vzorec

$$\mu_x = Bc^x \tag{2.8}$$

Gompertzov vzorec použil **Makeham** (1860), ktorý ho upravil na nasledujúci tvar

$$\mu_x = A + Bc^x \tag{2.9}$$

Zaviedol konštantu A a exponenciálne rastúcu zložku intenzity úmrtnosti na zdôraznenie dvoch rozdielnych spôsobov úmrtia - náhodného a prirodzeného.

V roku 1932 **Perks** navrhol nové vzorce, ktorý znázorňuje najlepší pokus fitovať krivku pre celý rozsah tabuľky.

$$\mu_x (alebo q_x) = \frac{A + Bc^x}{1 + Dc^x} \quad \text{a} \quad \mu_x = \frac{A + Bc^x}{Kc^{-x} + 1 + Dc^x} \tag{2.10}$$

2.2.1. Metódy odhadu parametrov vo vzorcoch používaných na graduáciu

Metóda maximálnej vierohodnosti

Odhady metódou maximálnej vierohodnosti majú veľa výhod, a preto sú štatistikmi široko používané. Hlavný princíp tejto metódy nám hovorí, že pre náš odhad parametrov by sme mali použiť tú hodnotu, ktorá maximalizuje vierohodnosť pozorovanej udalosti.

Ak E_x je vystavenie sa riziku vo veku x a q_x je pravdepodobnosť úmrtia vo veku x, potom pozorovaný počet úmrtí D_x má binomické rozdelenie s parametrami E_x a q_x. Avšak úmrtia v rozličných vekových kategóriách v pozorovaniach sú vzájomne nezávislé.

Vierohodnosť konkrétneho výstupu je podľa [2]daná vzťahom

$$L = \prod_x \binom{E_x}{D_x} q_x^{D_x} \; p_x^{E_x - D_x} \tag{2.11}$$

kde E_x a D_x sú známe. Ak predpokladáme, že pravdepodobnosť úmrtia vo veku x q_x a pravdepodobnosť dožitia sa veku x p_x sa budú riadiť konkrétnym matematickým vzorcom, tak q_x a p_x budú funkcie neznámych parametrov v danom vzorci (B a c v Gompertzovom).

Odhady neznámych parametrov pomocou metódy maximálnej vierohodnosti sú hodnoty, ktoré maximalizujú (2.11). Tieto hodnoty tiež maximalizujú logaritmus tohoto výrazu t.j.

$$\ln L = \sum_x \left[\ln \binom{E_x}{D_x} + D_x \ln q_x + (E_x - D_x) \ln p_x \right] \tag{2.12}$$

a pretože prvý člen pravej strany je známy a fixný, môžeme predpokladať, že odhady parametrov sú tie hodnoty, ktoré maximalizujú výraz

$$\Lambda = \sum_x \left[D_x \ln q_x + (E_x - D_x) \ln p_x \right] \tag{2.13}$$

Systém rovníc pre odhady neznámych parametrov získame položením prvých parciálnych derivácii výrazu Λ (podľa parametrov) rovných nule. Výsledné rovnice sú však dosť komplikované pre praktické použitie, a preto sa na optimalizáciu Λ používajú iné metódy.

Metóda najmenších štvorcov

Predstavme si, že chceme graduovať dáta pomocou nasledujúceho vzorca

$$q_x = F(x), \tag{2.14}$$

kde F(x) je daná funkcia obsahujúca neznáme parametre a, b, c,... Pravdepodobnosť úmrtia získanú pozorovaním označíme $\overset{\circ}{q}_x$. Hodnota, ktorú budeme „fitovať" pre daný vek je F(x) a parametre a, b, c, ... musíme vybrať tak, aby „fitovaná" krivka bola čo najbližšie k pozorovaným hodnotám $\{\overset{\circ}{q}_x\}$.

Dobrý „fit" sme získali vtedy, ak sú všetky vzdialenosti medzi pozorovanými a príslušnými „fitovanými" hodnotami čo najmenšie. Krivka získaná neváženou metódou najmenších štvorcov minimalizuje súčet štvorcov týchto vzdialeností:

$$\sum_x \left[\overset{\circ}{q}_x - F(x)\right]^2 \tag{2.15}$$

Táto metóda pracuje správne, ak majú pozorované hodnoty $\overset{\circ}{q}_x$ rovnakú varianciu, čo je však v praxi dosť neobvyklé. Pozorovanie vo veku x môže mať malú varianciu a pozorovanie vo veku y môže mať pomerne veľkú varianciu. Tento jav sa nazýva heteroscedasticita. V takejto situácii sa vyžaduje, aby „fitovaná" krivka bola čo najbližšie k bodu $(x, \overset{\circ}{q}_x)$ a možno nie až tak blízko bodu $(y, \overset{\circ}{q}_y)$. Na splnenie tejto požiadavky potrebujeme metódu, ktorá dáva väčší dôraz na pozorovanie $\overset{\circ}{q}_x$ ako na $\overset{\circ}{q}_y$. Za týmto účelom môžeme nasledovne modifikovať neváženú metódu najmenších štvorcov.

Ak variancia pozorovania $\overset{\circ}{q}_x$ je proporcionálna k hodnote w_x^{-1}, potom príslušná krivka získaná *<u>váženou metódou najmenších štvorcov</u>* minimalizuje výraz

$$\sum w_x \left[\overset{\circ}{q}_x - F(x)\right]^2 \tag{2.16}$$

$\{w_x\}$ sú tzv. váhy. Veľká váha v konkrétnom bode (zodpovedajúca malej variancii) vyústi do fitovanej krivky, ktorá bude veľmi blízko k tomuto bodu.

Základná pravdepodobnosť úmrtia q_x je neznáma, a preto ju vo vzorci nahradíme nejakou známou štandardizovanou hodnotou q_x^s (alebo hodnotou $\overset{\circ}{q}_x$). Keďže $Var(\overset{\circ}{q}_x) \approx \frac{q_x}{E_x}$, tak vážená metóda najmenších štvorcov minimalizuje výraz

$$\sum_x \left(\frac{E_x}{q_x^s}\right)\left[\overset{\circ}{q}_x - F(x)\right]^2 \tag{2.17}$$

alebo

$$\sum_x \left(\frac{E_x}{\overset{\circ}{q}_x}\right)\left[\overset{\circ}{q}_x - F(x)\right]^2 \tag{2.18}$$

Systém rovníc pre odhady neznámych parametrov pomocou váženej metódy najmenších štvorcov získame tak, ako pri metóde maximálnej vierohodnosti, a to položením prvých parciálnych derivácii výrazov (2.17) alebo (2.18) (podľa parametrov) rovných nule. Ak F(x) je lineárna v neznámych parametroch, potom získame lineárne rovnice. Na ich vyriešenie použijeme štandardné metódy. Ak je však táto funkcia v neznámych parametroch nelineárna, dostaneme systém nelineárnych rovníc, ktoré sú dosť zložité pre praktické výpočty.

Avšak všetky rozsiahlejšie počítačové systémy majú softwarové balíky na „fitovanie“ kriviek pomocou váženej metódy najmenších štvorcov. Problémy nelineárnej metódy sa riešia iteračne a počítačový program obyčajne vyžaduje počiatočné hodnoty pre parametre. V prípade Makehamovho vzorca obvykle c leží medzi 1,05 a 1,13, A a B sú obidve malé a kladné. Obyčajne je vhodné počiatočné hodnoty voliť nasledovne: A=0,0003, B=0,0003, c=1,08.

Minimálny χ-kvadrát

Ako naznačuje názov, táto metóda pri vhodnom výbere parametrov minimalizuje testovaciu charakteristiku χ-kvadrát zhody medzi vyrovnanými hodnotami a hodnotami získanými z pozorovaní. Na odhad parametrov pomocou tejto metódy sa taktiež používajú počítačové algoritmy.

KTORÁ Z TROCH HORE UVEDENÝCH METÓD JE NAJVHODNEJŠIA?

Nakoľko všetky tri metódy dávajú približne rovnaký výsledok, je vecou osobnej preferencie, ktorú metódu si zvolíme pre naše výpočty.

Ak sú hodnoty $\{E_x\}$vysoké pri každom veku, tak použijeme normálnu aproximáciu binomickým rozdelením a funkcia vierohodnosti bude mať tvar

$$L = \prod_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(E_x p_x q_x)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(D_x - E_x q_x)^2}{E_x p_x q_x}\right] \tag{2.19}$$

Približné riešenie metódou maximálnej vierohodnosti môžeme získať nahradením variancie počtu zomrelých výrazom $E_x q_x^s$. Potom maximalizujeme výraz

$$L^* = \prod_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(E_x q_x^s)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(D_x - E_x q_x)^2}{E_x q_x^s}\right]. \tag{2.20}$$

Maximalizácii výrazu L^* je to ekvivalentná minimalizácia výrazu Λ^*, ktorá nám poskytne riešenie váženou metódou najmenších štvorcov.

$$\Lambda^* = \sum_x E_x \frac{\left(q_x^\circ - q_x\right)^2}{q_x^s} \tag{2.21}$$

Eventuálne môžeme štandardnú odchýlku $\sqrt{E_x p_x q_x}$ nahradiť hodnotou $\sqrt{D_x}$, a potom budeme maximalizovať

$$L^{**} = \prod_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{D_x}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(D_x - E_x q_x)^2}{E_x p_x q_x}\right] \tag{2.22}$$

Maximalizácia tohoto výrazu je ekvivalentná minimalizácii výrazu Λ^{**}, ktorá nám poskytne riešenie metódou minimálneho χ-kvadrátu.

$$\Lambda^{**} = \sum_x \frac{(D_x - E_x q_x)^2}{E_x\ p_x\ q_x} \tag{2.23}$$

2.3. Grafické metódy graduácie

Grafická metóda graduácie je najrozšírenejšie používaná technika graduácie. Jej veľkou prednosťou je to, že je jednoduchá na realizáciu špeciálnych úloh a poskytuje nám dobré výsledky aj vtedy, ak máme nedostatočné údaje.

Dekrementné miery počítame z prístupných údajov a graficky znázorňujeme pomocou bodov. Načrtneme hladkú krivku, ktorej sklon naznačuje poloha bodov, čo najbližšie k daným bodom tak, aby sa pritom zachovala postupnosť daných mier. Potom môžeme z danej krivky vyčítať „vyhladené“ dekrementné miery. Postupnosť týchto mier môžeme vylepšiť preskúmaním a úpravou niekoľkých diferencii, čím získame hladkosť a dobrú priliehavosť k dátam. Tento proces je známy ako HAND-POLISHING.

Na graduáciu môžeme použiť štandardné tabuľky, ktoré nám naznačia všeobecný sklon dekrementných mier (pomôžu nám vybrať tvar krivky). Dôležité sú hlavne údaje na konci tabuľky, ktoré bývajú často tak nedostatočné, že získané miery sú obzvlášť nespoľahlivé a krivku musíme načrtnúť podľa predchádzajúceho pozorovania.

Pri grafickej graduácii úmrtnostných dát je vhodné zaznačiť do grafu aj 95% -ný interval spoľahlivosti pre pozorované hodnoty pri každom veku. Pri počítaní týchto hraníc obyčajne nepotrebujeme úplnú presnosť, pretože ich použijeme len ako približné „vodítko“. Za predpokladu, že počet úmrtí v každom veku nie je menší ako 10, 95% -ný interval spoľahlivosti získame podľa vzorca

$$\overset{\circ}{q}_x \pm \frac{2\sqrt{D_x}}{E_x} \tag{2.24}$$

Spojnice pozorovaných hodnôt s príslušnou hornou a dolnou hranicou nám poslúžia ako pomôcka pri kreslení hladkej krivky pre graduáciu. Hladká krivka by nemala prečnievať hranice intervalu spoľahlivosti viackrát ako raz za 20 pozorovaní (tj. 5% hodnôt).

3. TESTOVANIE VHODNOSTI POUŽITIA UŽ EXISTUJÚCEJ TABUĽKY

Na výber základu pre demografické výpočty máme dve možnosti:

1. prevziať príslušnú štandardnú tabuľku za základ

2. skonštruovať novú špecialnu tabuľku

Pri použití už existujúcej tabuľky musíme však overiť, či údaje získané z jednotlivých úmrtnostných pozorovaní môžeme pokladať za pochádzajúce z populácie, ktorej pravdepodobnosti úmrtia už boli správne určené. Na overenie tejto skutočnosti bolo navrhnutých niekoľko testov, z ktorých najpoužívanejší je χ-kvadrát test.

χ-KVADRÁT TEST

Tento test sa používa na testovanie nulovej hypotézy

H_0: pozorované hodnoty môžeme pokladať za hodnoty pochádzajúce z populácie s danými pravdepodobnosťami úmrtia $\{q_x\}$

Za platnosti nulovej hypotézy platí: $D_x \approx bin\,(E_x, q_x)$

Za predpokladu, že stredná hodnota počtu zomrelých $E_x q_x$ nie je veľmi malá, rozdelenie D_x je približne normálne so strednou hodnotou $E(D_x) = E_x q_x$ a varianciou $Var\,(D_x) = E_x q_x p_x$. Potom

$$\chi^2 = \sum_x \left(\frac{D_x - E(D_x)}{\sqrt{Var(D_x)}} \right)^2 \qquad (3.1)$$

má χ-kvadrát rozdelenie s n stupňami voľnosti, kde n je počet jednotlivých vekov alebo vekových skupín. H_0 zamietame, ak hodnota padne nad 95%-ný kvantil χ-kvadrát rozdelenia.

Výraz $\frac{D_x - E(D_x)}{\sqrt{Var(D_x)}}$ nazývame ŠTANDARDIZOVANÁ ODCHÝLKA.

Nedostatky χ-kvadrát testu

Aj vtedy, keď χ-kvadrát test poukazuje na dobrú priliehavosť k štandardnej tabuľke, podrobné vyšetrovanie jednotlivých odchýliek niekedy odhalí vážne rozdiely medzi získanými hodnotami a hodnotami zo štandardnej tabuľky. Keďže štatistický test (3.1) obsahuje súčet štvorcov štandardizovaných odchýliek pre jednotlivé vekové kategórie, niekedy zlyháva pri odhaľovaní :

A) existencie niekoľkých veľmi veľkých odchýliek vyvážených veľkým počtom malých odchýliek

B) veľkých kumulatívnych odchýliek v časti alebo v celom vekovom interval

C) veľkých kladných alebo záporných odchýliek v časti alebo v celom vekovom intervale

D) nadmerného zoskupovania odchýliek rovnakého znamienka

Preto môžeme povedať, že aj keď tento test poskytuje vhodné porovnanie získaných hodnôt a hodnôt štandardnej tabuľky, ďalšie testy sú nevyhnutné. My sa postupne zameriame na šesť takýchto testov.

<u>Test individuálnych štandardizovaných odchýliek</u>

Tento test sa používa na odstraňovanie nedostatkov typu A. Našou úlohou je pozorovať, či viac ako 5% štandardizovaných odchýliek nepresahuje 2 v absolútnej hodnote.

Podľa normálneho rozdelenia očakávame, že percentá štandardizovaných odchýliek ležia v intervaloch $(-\infty,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,\infty)$ a majú hodnotu 0%, 2%, 14%, 34%, 14%, 2%, 0%. Hodnoty štandardizovaných odchýliek, ktoré padnú do týchto intervalov, musíme porovnať s očakávanými hodnotami, napríklad pomocou už spomínaného χ^2-kvadrát testu.

Pochybnosti o vhodnosti štandardnej úmrtnostnej tabuľky budeme mať vtedy, ak rozsah štandardizovaných odchýliek bude veľmi veľký, alebo ich rozdelenie bude mať nenulovú strednú hodnotu.

Test absolútnych odchýliek

Pravdepodobnosť, že normálne rozdelená náhodná premenná leží medzi -2/3 a 2/3 je skoro presne 0,5. Z toho vyplýva, že približne polovica absolútnych hodnôt štandardizovaných odchýliek by mala byť menšia ako 2/3 a polovica väčšia.

Ak máme *n* vekových kategórii, tak počet hodnôt *N* absolútnych hodnôt štandardizovaných odchýliek presahujúci 2/3, bude binomická náhodná premenná s parametrami *n* a 1/2.

Na nevhodnosť použitia štandardnej tabuľky nám poukáže fakt, ak *N* padne do oblasti vrchných 5% binomického (*n*, 1/2) rozdelenia.

Pre *n*>20 môžeme použiť aproximáciu binomického rozdelenia normálnym. Primeranosť štandardnej tabuľky bude spochybnená, ak hodnota $T = \frac{2N - n}{\sqrt{n}}$ padne nad 95%-ný kvantil normálneho rozdelenia (tj. ak T > 1,64) .

Tento test podobne ako predchádzajúci odhalí nedostatky typu A.

Test kumulatívnych odchýliek

Kumulatívna odchýlka pre vek x_1 a x_2 má tvar $Y = \sum_{x_1}^{x_2} \left(D_x - E_x q_x\right)$.

Je to normálne rozdelená náhodná veličina so strednou hodnotou E(Y) = 0 a varianciou $Var(Y) = \sum_{x_1}^{x_2} E_x q_x p_x$. Použitie štandardnej tabuľky môžeme považovať za nevhodné, ak absolútna hodnota kumulatívnej odchýlky celej tabuľky je väčšia ako dvojnásobok druhej odmocniny variancie, alebo kumulatívne odchýlky z rôznych častí tabuľky majú vysokú absolútnu hodnotu.

Test odhaľuje nedostatky typu B.

Znamienkový test

Vzhľadom na H_0 sú odchýlky pozorovaných a očakávaných úmrtí nezávislé, normálne rozdelené náhodné premenné. Znamienka jednotlivých odchýliek sú preto nezávislé a rovnako pravdepodobné je + aj -.

Ak máme *n* vekových intervalov a overovanie získanej hodnoty odhalí veľmi pozitívnu alebo veľmi negatívnu odchýlku, nulovú hypotézu zamietneme, ak počet pozitívnych odchýliek padne nad 97,5%-ný alebo pod 2,5%-ný kvantil binomického $(n,1/2)$ rozdelenia.

Pre $n > 20$ môžeme opäť použiť aproximáciu normálnym rozdelením. Ak hodnota $T = \frac{2N - n}{\sqrt{n}}$ padne nad 97,5%-ný alebo pod 2,5%-ný kvantil normálneho rozdelenia

(tj. $|T| > 1{,}96$), tak nulovú hypotézu zamietneme.

Test odhaľuje nedostatky typu C.

Stevensov test pre zoskupovanie znamienok

Počet kladných a záporných odchýliek môžeme ohodnotiť podľa znamienkového testu, ale predsa len by sme mali pochybovať o vhodnost použita štandardnej tabuľky, ak počet skupín s kladnými znamienkami (a teda aj so zápornými) je malý, čiže dĺžka „behov“ kladných a záporných znamienok je veľká.

Môžeme rozdeliť počet n_1 kladných znamienok do t neprázdnych skupín. Počet možností ako sa to dá urobiť je $\binom{n_1 - 1}{t - 1}$. Ak máme n_2 záporných znamienok, potom n_2-1 je počet možných pozícií pre t kladných skupín a počet možností ako rozdeliť t pozícií je$\binom{n_2 + 1}{t}$. Celkový počet možností ako usporiadať n_1 kladných a n_2 záporných znamienok je $\binom{n_1 + n_2}{n_1}$, z čoho môžeme vyvodiť, že pravdepodobnosť získania t kladných zoskupení je

$$\frac{\binom{n_1-1}{t-1}\binom{n_2+1}{t}}{\binom{n_1+n_2}{n_2}}$$

čo môžeme zapísať ako $$\frac{\binom{n_1-1}{t-1}\binom{n_2+1}{n_2+1-t}}{\binom{n_1+n_2}{n_2}} \tag{3.2}$$

Je to hypergeometrická pravdepodobnosť vo forme $\dfrac{\binom{A}{a}\binom{B}{b}}{\binom{A+B}{a+b}}$.

Predpokladajme, že naše pozorovanie má g kladných zoskupení. Pravdepodobnosť, že získame g kladných zoskupení, dostaneme spočítaním výrazu (3.2) pre $t \leq g$. Ak táto pravdepodobnosť bude menšia ako 0,05 , budeme mať značné pochybnosti o vhodnosti použitia štandardnej tabuľky, pre nadmerné zoskupovanie znamienok.

Okrem prípadov, ak n_1 a n_2 sú veľmi malé, počítanie podľa (3.2) je veľmi zdĺhavé Môžeme použiť hypergeometrické tabuľky. Stredná hodnota a variancia hypergeometrického rozdelenia sú známe a je možné odvodiť, že stredná hodnota a variancia počtu pozitívnych zoskupení je:

$$E(.) = \frac{n_1(n_2+1)}{n_1+n_2} \qquad Var(.) = \frac{(n_1 n_2)^2}{(n_1+n_2)^3}$$

Stevensov test potom môžeme urobiť približným porovnaním hodnoty $G = \dfrac{[g - E(.)]}{\sqrt{Var(.)}}$

s dolným 5% intervalom normálneho rozdelenia.

Test odhaľuje nedostatky typu D.

Binomický test zmeny znamienka

Počet znamienkových zmien v postupnosti *n* odchýliek má binomické rozdelenie s parametrami (n-1,1/2). Sklon odmietnuť štandardnú tabuľku budeme mať vtedy, ak počet znamienkových zmien padne pod 5%-ný kvantil binomického (n-1,1/2) rozdelenia.

Pre n-1>20 použijeme aproximáciu normálnym rozdelením. Štandardnú tabuľku zamietneme, ak hodnota $S = \frac{2N - n + 1}{\sqrt{n-1}}$ padne pod 5%-ný kvantil normálneho rozdelenia (tj. ak S < -1,64).

Keďže aj tento test odhaľuje nedostatky typu D, objasnime si rozdiel medzi Stevensovým testom pre zoskupovanie znamienok a binomickým znamienkovým testom. Stevensov test je navrhnutý na odhalenie zoskupení. Tento test nedáva dôveryhodný výsledok napríklad s 39-timi zápornými a jedným kladným znamienkom. Binomický znamienkový test dáva veľmi dobré výsledky aj z takýchto dát. Skupina 20-ich pozitívnych znamienok medzi 20-mi zápornými a 20-mi kladnými znamienkami bude na druhej strane dávať významné výsledky pre Stevensov a nie pre binomický test.

4. PRÍKLADY

V práci [12] je opísaný postup konštrukcie úmrtnostných tabuliek, ktorý používal FSÚ a v súčasnosti používa ŠÚ SR. Podľa tohoto postupu sa najprv odporúča k odstráneniu náhodných výkyvov urobiť v rozmedzí od 4 do 83 rokov vyrovnanie kĺzavými priemermi podľa vzorca

$$\hat{q_x} = \frac{1}{315}\left(105 q_x + 90\left(q_{x-1} + q_{x+1}\right) + 45\left(q_{x-2} + q_{x+2}\right) - 30\left(q_{x-3} + q_{x+3}\right)\right) \qquad (4.1)$$

a dvojnásobným opakovaním postupných interpolácií 2.stupňa. Vo veku zhruba nad 80 rokov sa vplyvom rýchle rastúcej úmrtnosti značne zmenšujú súbory žijúcich a tak dochádza k veľkým nepravidelnostiam. Preto pre vyššie ročníky použijeme extrapoláciu hodnôt pravdepodobnosti dožitia p_x Gompertz-Makehamovou formulou. Metódou King-Hardyho sú stanovené hodnoty a, b, c z intervalov 60-67, 68-75, 76-83 rokov a použité pre interval do 103 rokov až od veku s najmenšou diferenciou.

Označme si extrapolované hodnoty r_i. Vypočítame ich podľa nasledujúcich vzťahov:

$$r_i = e^{A + BC^{(i-1)}} \qquad (4.2)$$

$$C = \sqrt[8]{C8} \qquad (4.3)$$

$$B = \frac{(C-1)(R2 - R1)}{C^{60}\,(C8-1)^2} \qquad (4.4)$$

$$A = \left(R1 - \frac{R2 - R1}{C8 - 1}\right) : 8 \qquad (4.5)$$

$$C8 = \frac{R3 - R2}{R2 - R1} \qquad (4.6)$$

$$R1 = \sum_{i=60}^{67} \ln\, p_i \qquad (4.7)$$

$$R2 = \sum_{i=68}^{75} \ln\, p_i \qquad (4.8)$$

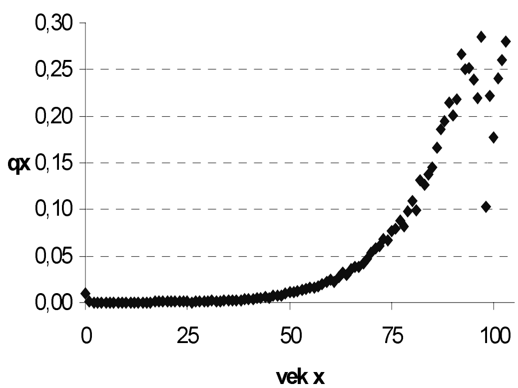
$$R3 = \sum_{i=76}^{83} \ln \ p_i \qquad (4.9)$$

Potom od veku 76 až 85 rokov vypočítame diferencie medzi hodnotami p_i a r_i a extrapolované hodnoty r_i potom použijeme od veku s najmenšou diferenciou.

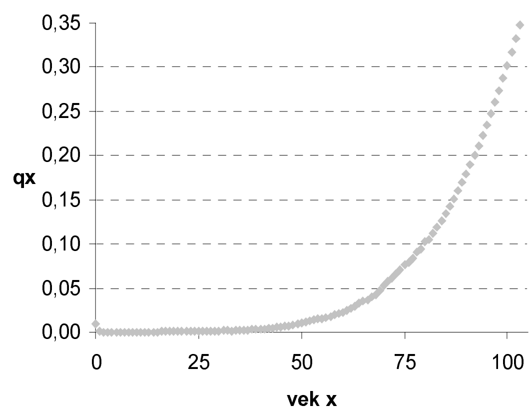
Týmto postupom vypočítame úmrtnostnú tabuľku pre SR za rok 1997 pre mužov a porovnáme s údajmi ŠÚ SR.

Príklad 4.1.: *Konštrukcia úmrtnostnej tabuľky a jej graduácia pomocou graduačnej metódy ŠÚ SR*

Ako vstupné informácie na skonštruovanie úmrtnostnej tabuľky potrebujeme údaje o strednom stave obyvateľstva a počte zomrelých v daných vekových skupinách. Použijeme údaje za SR za rok 1997, ktoré nám poskytol ŠÚ SR a skonštruujeme tabuľku postupom opísaným v časti 1.2.



Obr. 4.1. Nevyrovnané hodnoty q_x



Obr. 4.2. Vyrovnané hodnoty q_x

vek x	Px	Dx	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	30192	285	0,009358	100000	936	99139	6875266	68,75
1	30695	24	0,000782	99064	77	99025	6776127	68,40
2	32258	13	0,000403	98987	40	98967	6677101	67,45
3	35364	15	0,000424	98947	42	98926	6578134	66,48
4	37484	16	0,000394	98905	39	98885	6479209	65,51
5	38642	16	0,000362	98866	36	98848	6380323	64,54
6	39669	12	0,000300	98830	30	98815	6281475	63,56
7	39673	6	0,000265	98801	26	98787	6182660	62,58
8	40368	12	0,000212	98774	21	98764	6083872	61,59
9	41254	11	0,000227	98753	22	98742	5985108	60,61
10	42228	6	0,000249	98731	25	98719	5886366	59,62
11	43872	14	0,000235	98706	23	98695	5787648	58,64
12	44810	12	0,000295	98683	29	98669	5688953	57,65
13	45270	15	0,000373	98654	37	98636	5590284	56,67
14	45720	22	0,000390	98617	39	98598	5491649	55,69
15	45773	21	0,000483	98579	48	98555	5393051	54,71
16	46268	24	0,000617	98531	61	98501	5294496	53,73
17	47808	39	0,000747	98470	74	98434	5195995	52,77
18	48739	48	0,000957	98397	94	98350	5097561	51,81
19	48778	50	0,001084	98303	107	98249	4999212	50,86
20	48762	62	0,001202	98196	118	98137	4900962	49,91
21	48047	55	0,001245	98078	122	98017	4802825	48,97
22	47401	66	0,001225	97956	120	97896	4704808	48,03
23	46061	50	0,001237	97836	121	97775	4606913	47,09
24	43480	48	0,001092	97715	107	97661	4509137	46,15
25	41145	51	0,000993	97608	97	97560	4411476	45,20
26	69475	42	0,000964	97511	94	97464	4313916	44,24
27	38299	47	0,001039	97417	101	97367	4216452	43,28
28	36880	41	0,001210	97316	118	97257	4119085	42,33
29	36201	59	0,001617	97198	157	97120	4021828	41,38
30	37011	64	0,001711	97041	166	96958	3924709	40,44
31	28245	57	0,001782	96875	173	96789	3827751	39,51
32	39585	60	0,001772	96702	171	96617	3730962	38,58
33	40194	70	0,001765	96531	170	96446	3634346	37,65
34	39335	80	0,001843	96361	178	96272	3537900	36,72
35	39151	78	0,002212	96183	213	96077	3441628	35,78
36	39995	100	0,002490	95970	239	95851	3345551	34,86
37	40076	119	0,002707	95731	259	95602	3249701	33,95
38	40761	118	0,003046	95472	291	95327	3154099	33,04
39	42383	133	0,003274	95181	312	95025	3058772	32,14
40	43228	165	0,003644	94870	346	94697	2963747	31,24
41	43202	171	0,004023	94524	380	94334	2869050	30,35
42	42744	198	0,004603	94144	433	93927	2774716	29,47
43	42266	199	0,004804	93710	450	93485	2680789	28,61
44	41984	245	0,005433	93260	507	93007	2587304	27,74
45	41402	216	0,006019	92753	558	92474	2494298	26,89
46	39944	295	0,006637	92195	612	91889	2401823	26,05
47	37117	268	0,007327	91583	671	91248	2309934	25,22
48	34966	279	0,008473	90912	770	90527	2218687	24,40
49	33746	320	0,009163	90142	826	89729	2128160	23,61
50	30428	324	0,010307	89316	921	88856	2038431	22,82
51	26607	290	0,011425	88395	1010	87890	1949575	22,06
52	25686	325	0,012519	87385	1094	86838	1861685	21,30
53	25366	353	0,013934	86291	1202	85690	1774847	20,57
54	24197	368	0,015251	85089	1298	84440	1689157	19,85
55	23759	394	0,015987	83791	1340	83122	1604716	19,15
56	23546	390	0,016872	82452	1391	81756	1521595	18,45
57	22545	395	0,018019	81061	1461	80330	1439839	17,76
58	21105	422	0,020067	79600	1597	78801	1359508	17,08
59	20216	445	0,021659	78003	1689	77158	1280707	16,42
60	19528	478	0.022928	76313	1750	75438	1203549	15.77

vek x	Px	Dx	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
61	19384	443	0,025343	74563	1890	73619	1128111	15,13
62	19380	524	0,027060	72674	1967	71690	1054493	14,51
63	18985	618	0,029708	70707	2101	69657	982802	13,90
64	19148	580	0,033499	68607	2298	67458	913145	13,31
65	19154	706	0,035644	66308	2364	65127	845688	12,75
66	18552	725	0,037373	63945	2390	62750	780561	12,21
67	17792	691	0,040512	61555	2494	60308	717811	11,66
68	16854	723	0,043419	59061	2564	57779	657503	11,13
69	16002	779	0,048521	56497	2741	55126	599724	10,62
70	15300	834	0,053998	53756	2903	52304	544598	10,13
71	14488	874	0,059939	50853	3048	49329	492293	9,68
72	13774	865	0,063777	47805	3049	46280	442964	9,27
73	13526	954	0,068317	44756	3058	43227	396684	8,86
74	12868	896	0,072682	41698	3031	40183	353457	8,48
75	11865	952	0,079456	38668	3072	37132	313274	8,10
76	10222	850	0,082325	35595	2930	34130	276142	7,76
77	8628	789	0,087062	32665	2844	31243	242012	7,41
78	5796	493	0,094832	29821	2828	28407	210769	7,07
79	3460	357	0,098540	26993	2660	25663	182362	6,76
80	3309	384	0,108619	24333	2643	23012	156699	6,44
81	3630	379	0,119927	21690	2601	20390	133687	6,16
82	4544	638	0,128306	19089	2449	17864	113297	5,94
83	4668	631	0,136300	16640	2268	15506	95433	5,74
84	3952	585	0,126649	14372	1820	13462	79927	5,56
85	3214	501	0,134425	12552	1687	11708	66466	5,30
86	2560	465	0,142569	10864	1549	10090	54758	5,04
87	2152	441	0,151092	9315	1407	8612	44668	4,80
88	1738	375	0,160007	7908	1265	7275	36056	4,56
89	1273	306	0,169327	6643	1125	6080	28781	4,33
90	914	204	0,179065	5518	988	5024	22701	4,11
91	677	166	0,189232	4530	857	4101	17677	3,90
92	502	154	0,199841	3673	734	3306	13576	3,70
93	363	104	0,210901	2939	620	2629	10270	3,49
94	268	77	0,222424	2319	516	2061	7642	3,30
95	188	51	0,234419	1803	423	1592	5581	3,09
96	122	30	0,246895	1380	341	1210	3989	2,89
97	72	24	0,259859	1040	270	905	2779	2,67
98	46	5	0,273318	769	210	664	1874	2,44
99	28	7	0,287275	559	161	479	1210	2,16
100	36	7	0,301735	399	120	338	731	1,83
101	0	0	0,316698	278	88	234	393	1,41
102	0	0	0,332163	190	63	159	159	0,83
103	0	0	0,348127	127	44	0	0	0,00

Tabuľka 4.1. Úmrtnostná tabuľka vypočítaná v Príklade 4.1

Nakoľko sme pri konštrukcii tejto tabuľky nepoužili dvojnásobné opakovanie postupných interpolácii 2.stupňa (ako odporúča Pecka v [12]), hodnoty v našej tabuľke sa úplne nezhodujú s hodnotami v tabuľke ŠÚ SR.

Príklad 4.2.: *Výpočet intervalu spoľahlivosti pre úmrtnostnú tabuľku vypočítanú v predchádzajúcom príklade.*

Podľa [11] platí pre výpočet intervalu spoľahlivosti nasledujúca veta:

Veta: Nevychýleným odhadom pravdepodobnosti q_x je podiel

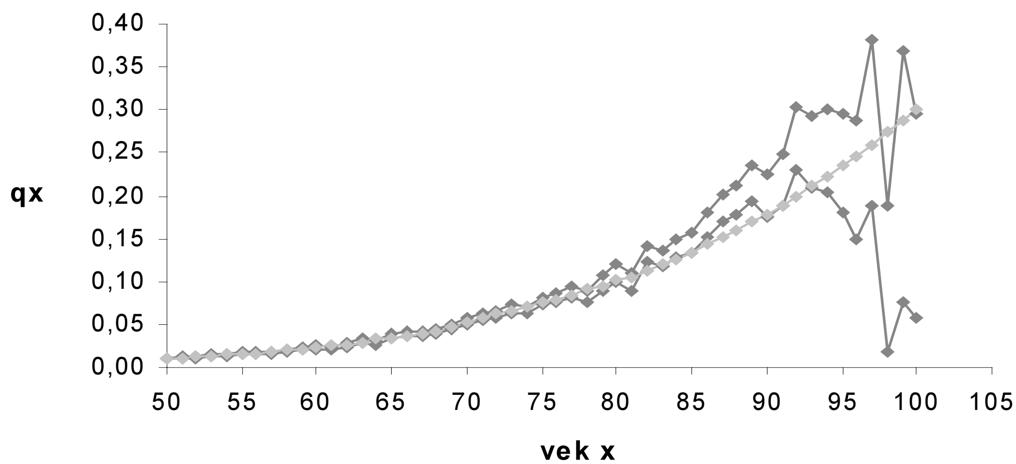
$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{l_x} \approx N\left(q_x,\, q_x(1-q_x)/l_x\right).$$

Za odhad rozptylu tohoto odhadu možno vziať

$$s^2(\hat{q}_x) = \hat{q}_x(1-\hat{q}_x)/l_x = \hat{q}_x^{\,2}(1-\hat{q}_x)/D_x\ .$$

Potom pre dosť veľké l_x (1-α) . 100% interval spoľahlivosti pre q_x má tvar

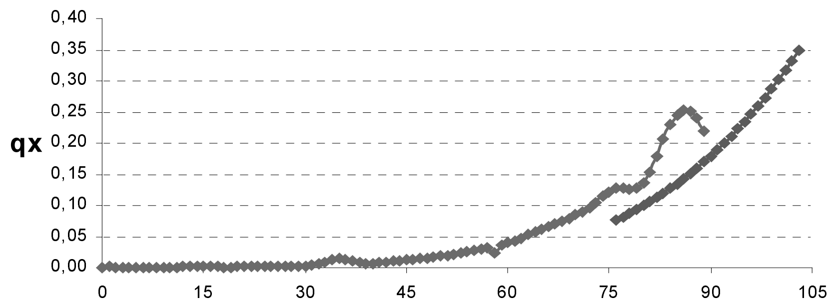
$$P\left(\hat{q}_x - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{q}_x^{\,2}(1-\hat{q}_x)/D_x} < q_x < \hat{q}_x + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{q}_x^{\,2}(1-\hat{q}_x)/D_x}\right) = 1-\alpha$$



Obr. 4.3. Interval spoľahlivosti pre q_x a hodnoty $\hat{q}_x$ vyrovnané metódou z Príkladu 4.1.

Príklad 4.3.: <u>*Graduácia úmrtnostnej tabuľky metódou SPENCER 15*</u>

Budeme vyrovnávať hodnoty q_x vypočítané pri konštrukcii úmrtnostnej tabuľky v Príklade 4.1. Keďže metóda SPENCER 15 slúži iba na graduáciu strednej časti tabuľky, na vyrovnanie hodnôt na konci tabuľky použijeme extrapoláciu popísanú tiež v Príklade 4.1.



Obr. 4.4. Vyrovnané hodnoty q_x

Ako môžeme vidieť na obrázku 4.4. krivka vyrovnaných hodnôt nie je spojitá. Na odstránenie tohto „defektu“ použijeme nasledovný postup (pozri [2]):

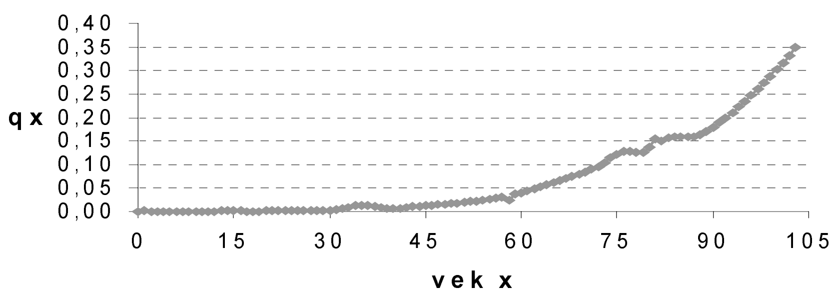
Označme graduované hodnoty $u_0^a, ..., u_r^a,\ u_{r+1}^a, ..., u_{s-1}^a,$

$$u_{r+1}^b, ..., u_{s-1}^b, \quad u_s^b, ...$$

$$u_{r+t} = \kappa_{r+t}\, u_{r+t}^a + \lambda_{r+t}\, u_{r+t}^b \qquad t=1, ..., s-r-1$$

kde $\kappa_{r+t} + \lambda_{r+t} = 1 \qquad \kappa_r = 1 \qquad \lambda_r = 0 \qquad \kappa_s = 0 \qquad \lambda_s = 1$

Napr.:
$$\kappa_{r+t} = \begin{cases} 1-2\left(\dfrac{t}{s-t}\right)^2 & t \le \dfrac{s-r}{2} \\ 2\left(1-\dfrac{t}{s-r}\right)^2 & t \ge \dfrac{s-r}{2} \end{cases}$$



Obr. 4.5. Vyrovnané hodnoty q_x po použití vyššie popísanej metódy

Príklad 4.4.: *Vypočítajme ϕ_E, ϕ_S, ϕ_W -indexy (popísané v časti 2.1.2) pre graduačný vzorec (4.1).*

1. $\phi_E = \sqrt{(K_0^2 + 2K_1^2 + ... + 2K_r^2)} = 0{,}577$

2.

A	B	C	D	E	F
-30				-30	900
45	90			135	18225
90	-135	-90		-135	18225
105	-270	135	30	0	0
90	-315	270	-45	0	0
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	74700

Tabuľka 4.2

$$\phi_S = \sqrt{\frac{74700/315^2}{20}} = 0{,}194$$

3. $$\phi_W = \frac{45 + 90 + 105 + 90 + 45}{315} = 0{,}1905$$

Ak porovnáme indexy vypočítané v Príklade 4.1 s indexmi pre graduačný vzorec s optimálnou silou redukcie chýb podľa Tabuľky 2.3 zistíme, že ich hodnoty sú identické. Na základe tohoto poznatku môžeme tvrdiť, že graduačný vzorec (4.1) bol zrejme skonštruovaný tak, aby jeho sila redukcie chýb bola stopercentná.

Príklad 4.5: *Aplikácia niektorých testov popísaných v tretej kapitole na tabuľku skonštruovanú v Príklade 4.1*

H_0: pozorované hodnoty môžeme pokladať za hodnoty pochádzajúce z populácie s danými pravdepodobnosťami úmrtia $\{q_x\}$

- χ-kvadrát test

Testovacia štatistika: $$\chi^2 = \sum_x \left(\frac{D_x - E(D_x)}{\sqrt{Var(D_x)}} \right)^2$$

H_0 zamietame, ak hodnota χ^2 padne nad 95%-ný kvantil χ-kvadrát rozdelenia.

1 x	2 Px	3 Dx	4 qx	5 px	6 E(Dx)	7 Var(Dx)	8 (3-6)/sqrt(8)	9 8*8
35	39151	78	0,002210	0,997790	86,52	86,33	-0,9174	0,8416
36	39995	100	0,002487	0,997513	99,48	99,23	0,0523	0,0027
37	40076	119	0,002703	0,997297	108,34	108,05	1,0257	1,0521
38	40761	118	0,003041	0,996959	123,96	123,58	-0,5360	0,2873
39	42383	133	0,003268	0,996732	138,50	138,04	-0,4677	0,2188
40	43228	165	0,003639	0,996361	157,29	156,72	0,6156	0,3790
41	43202	171	0,004018	0,995982	173,58	172,88	-0,1962	0,0385
42	42744	198	0,004596	0,995404	196,46	195,56	0,1100	0,0121
43	42266	199	0,004796	0,995204	202,70	201,72	-0,2602	0,0677
44	41984	245	0,005420	0,994580	227,54	226,31	1,1603	1,3463
45	41402	216	0,006000	0,994000	248,41	246,92	-2,0628	4,2552
46	39944	295	0,006615	0,993385	264,25	262,50	1,8982	3,6033
47	37117	268	0,007300	0,992700	270,95	268,97	-0,1800	0,0324
48	34966	279	0,008438	0,991562	295,03	292,54	-0,9370	0,8780
49	33746	320	0,009121	0,990879	307,80	304,99	0,6987	0,4882
50	30428	324	0,010254	0,989746	312,02	308,82	0,6815	0,4645
51	26607	290	0,011360	0,988640	302,26	298,83	-0,7092	0,5030
52	25686	325	0,012441	0,987559	319,56	315,59	0,3062	0,0937
53	25366	353	0,013836	0,986164	350,98	346,12	0,1088	0,0118
54	24197	368	0,015135	0,984865	366,23	360,69	0,0932	0,0087
55	23759	394	0,015861	0,984139	376,84	370,86	0,8912	0,7942
56	23546	390	0,016732	0,983268	393,97	387,38	-0,2017	0,0407
57	22545	395	0,017859	0,982141	402,63	395,44	-0,3835	0,1470
58	21105	422	0,019865	0,980135	419,26	410,93	0,1354	0,0183
59	20216	445	0,021427	0,978573	433,17	423,89	0,5748	0,3303
60	19528	478	0,022672	0,977328	442,74	432,70	1,6953	2,8740
61	19384	443	0,025022	0,974978	485,03	472,89	-1,9327	3,7352
62	19380	524	0,026697	0,973303	517,38	503,57	0,2949	0,0869
63	18985	618	0,029269	0,970731	555,67	539,41	2,6836	7,2017
64	19148	580	0,032945	0,967055	630,83	610,05	-2,0579	4,2350
65	19154	706	0,035019	0,964981	670,75	647,26	1,3855	1,9197
66	18552	725	0,036688	0,963312	680,64	655,67	1,7326	3,0017
67	17792	691	0,039714	0,960286	706,59	678,53	-0,5986	0,3583
68	16854	723	0,042495	0,957505	716,21	685,77	0,2593	0,0672
69	16002	779	0,047361	0,952639	757,86	721,97	0,7866	0,6188
70	15300	834	0,052579	0,947421	804,45	762,16	1,0703	1,1455
								41,160

Hodnota χ- kvadrát testu s 36 stupňami voľnosti nám vyšla 41,16. Pretože 95%-ný kvantil χ-kvadrát rozdelenia s 36 stupňami voľnosti je 51,0 nemáme dôvod na zamietnutie hypotézy

♦ Test absolútnych odchýliek

N – počet absolútnych hodnôt štandardizovaných odchýliek presahujúci 2/3

n – počet stupňov voľnosti

Testovacia štatistika: $T = \dfrac{2N - n}{\sqrt{n}}$

H_0 zamietame, ak hodnota T padne nad 95%-ný kvantil normálneho rozdelenia (tj. T > 1,645).

V našom prípade N = 18, n = 36, T = 0 $\Rightarrow$ H_0 prijímame

♦ Test kumulatívnych odchýliek

Skonštruujeme si tabuľku, ktorá bude obsahovať kumulatívne odchýlky a príslušné variancie.

Kumulatívna odchýlka a variancia: $Y = \sum_{x_1}^{x_2} \left(D_x - E_x q_x\right)$ $\quad Var(Y) = \sum_{x_1}^{x_2} E_x q_x p_x$

H_0 zamietame, ak $\left|Y\right| > 2\sqrt{Var(Y)}$

x	*1*	*2*	x	*1*	*2*
35	-8,52	86,33	**53**	10,38	4153,71
36	-8,00	185,56	**54**	12,15	4514,39
37	2,66	293,61	**55**	29,31	4885,26
38	-3,30	417,19	**56**	25,34	5272,63
39	-8,79	555,23	**57**	17,72	5668,07
40	-1,08	711,96	**58**	20,46	6078,99
41	-3,66	884,84	**59**	32,29	6502,88
42	-2,13	1080,40	**60**	67,56	6935,58
43	-5,82	1282,12	**61**	25,53	7408,47
44	11,63	1508,43	**62**	32,15	7912,04
45	-20,78	1755,35	**63**	94,47	8451,45
46	9,97	2017,85	**64**	43,65	9061,49
47	7,02	2286,83	**65**	78,90	9708,76
48	-9,00	2579,36	**66**	123,26	10364,42
49	3,20	2884,35	**67**	107,67	11042,95
50	15,18	3193,18	**68**	114,46	11728,73
51	2,92	3492,00	**69**	135,59	12450,70
52	8,35	3807,59	**70**	165,14	13212,85

Kumulatívne odchýlky (stĺpec 1) a variancie (stĺpec *2*) sme získali z predchádzajúcej tabuľky.

Y = 165,14 Var (Y) = 13212,85 $2\sqrt{Var(Y)}$ = 229,89

Pretože 165,14 < 229,89 $\Rightarrow$ H_0 prijímame

♦ <u>Znamienkový test</u>

Testovacia štatistika: $T = \dfrac{2N - n}{\sqrt{n}}$

H_0 zamietame, ak hodnota T padne nad 97,5%-ný alebo pod 2,5%-ný kvantil normálneho rozdelenia (tj. ak $|T|$ > 1,96).

V našom príklade T = 0 < 1,96 $\Rightarrow$ H_0 prijímame

♦ <u>Binomický test zmeny znamienka</u>

Testovacia štatistika: $S = \dfrac{2N - n + 1}{\sqrt{n-1}}$

H_0 zamietame, ak hodnota S padne pod 5%-ný kvantil normálneho normovaného rozdelenia (tj. ak S < -1,645).

Pre náš príklad platí S = 0,169 > -1,645 $\Rightarrow$ H_0 prijímame

Uvedené testy potvrdzujú, že tabuľka vypočítaná v Príklade 4.1 dobre vystihuje pozorovanú úmrtnosť v SR za rok 1997.