Dodatok B

Numerická schéma na riešenie premenlivej volatility σ

V tejto časti predstavíme numerickú diskretizáciu na riešenie Black-Scholesovej rovnice s volatilitou závislou na cene akcie $\sigma(S)$:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{\sigma(S)^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + rV = 0 .$$

Časovú deriváciu budeme diskretizovať v tvare

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} \cong \frac{V_i - \overline{V_i}}{k} ,$$

pri priestorových deriváciach budeme uvažovať s neekvidistantnou priestorovou diskretizáciou, pretože delenie pracovného intervalu je tiež neekvidistantné a tento fakt je nutné zohľadniť aj tu:

$$\frac{\partial V}{\partial S} \cong \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{S_{i+1} - S_{i-1}} ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \cong \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{S_{i+1} - S_i} - \frac{V_i - V_{i-1}}{S_i - S_{i-1}} \right) \frac{2}{S_{i+1} - S_{i-1}} .$$

Potom diskrétna Black-Scholesova rovnica s volatilitou závislou na cene akcie $\sigma(S)$ bude mať tvar:

$$\frac{V_i - \overline{V_i}}{k} - \frac{\sigma(S_i)^2}{2} S_i^2 \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{S_{i+1} - S_i} - \frac{V_i - V_{i-1}}{S_i - S_{i-1}} \right) \frac{2}{S_{i+1} - S_{i-1}} - (r - D)S_i \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{S_{i+1} - S_{i-1}} + rV_i = 0 .$$

Túto rovnicu začneme ďalej upravovať.

$$V_i - \sigma(S_i)^2 S_i^2 k\left(\frac{V_{i+1}-V_i}{S_{i+1}-S_i} - \frac{V_i - V_{i-1}}{S_i - S_{i-1}}\right)\frac{1}{S_{i+1}-S_{i-1}} - (r-D)S_i\ k\frac{V_{i+1}-V_{i-1}}{S_{i+1}-S_{i-1}} + rkV_i = \overline{V_i}$$

$$V_{i-1}\left(-\sigma(S_i)^2 S_i^2 k\left(\frac{1}{S_i - S_{i-1}}\right)\frac{1}{S_{i+1}-S_{i-1}} - (r-D)S_i T\frac{1}{S_{i+1}-S_{i-1}}\right)+$$

$$V_i\left(1+\sigma(S_i)^2 S_i^2 k\left(\frac{1}{S_{i+1}-S_i} + \frac{1}{S_i - S_{i-1}}\right)\frac{1}{S_{i+1}-S_{i-1}} + rk\right)+$$

$$V_{i+1}\left(-\sigma(S_i)^2 S_i^2 k\left(\frac{1_i}{S_{i+1}-S_i}\right)\frac{1}{S_{i+1}-S_{i-1}} + (r-D)S_i k\frac{1}{S_{i+1}-S_{i-1}}\right) = \overline{V_i}$$

$$V_{i-1}\left(-k\left(\sigma(S_i)^2 S_i^2\frac{1}{S_i - S_{i-1}} - (r-D)S_i\right)\frac{1}{S_{i+1}-S_{i-1}}\right)+$$

$$V_i\left(1+\left(\sigma(S_i)^2 S_i^2\frac{1}{(S_{i+1}-S_i)(S_i - S_{i-1})} + r\right)\right)+$$

$$V_{i+1}\left(-k\left(\sigma(S_i)^2 S_i^2\frac{1}{S_i - S_{i-1}} + (r-D)S_i\right)\frac{1}{S_{i+1}-S_{i-1}}\right) = \overline{V_i} \quad .$$

Označíme si

$$a_i = \left(-k\left(\sigma(S_i)^2 S_i^2\frac{1}{S_i - S_{i-1}} - (r-D)S_i\right)\frac{1}{S_{i+1}-S_{i-1}}\right),$$

$$b_i = \left(1+\left(\sigma(S_i)^2 S_i^2\frac{1}{(S_{i+1}-S_i)(S_i - S_{i-1})} + r\right)\right),$$

$$c_i = \left(-k\left(\sigma(S_i)^2 S_i^2\frac{1}{S_i - S_{i-1}} + (r-D)S_i\right)\frac{1}{S_{i+1}-S_{i-1}}\right).$$

Koeficienty a_i, b_i, c_i potom využime na riešenie dole uvedenej sústavy, kde riešením je vektor V_{new}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & \\ & & & & \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \\ \\ V_{new} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \overline{V_{old}} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Vektor V_{new} ($\overline{V_{old}}$) je vektor nových (starých) hodnôt cien opcií, vypočítaných pomocou Black-Scholesovej rovnice s volatilitou závislou na cene akcie $\sigma(S)$.

Prvýkrát za hodnoty vektora $\overline{V_{old}}$ zoberieme hodnoty payoff-diagramu a potom postupujme podľa nasledujúceho vzorca:

$$\overline{V_{old}} = \max\left(payoff, V_{new}\right),$$

kde *payoff* je príslušný payoff diagram pre opciu V.

Riešenie tejto sústavy sa opakuje m-krát (m – počet časových delení).