4. Problém konštantnej vs. premenlivej volatility

Poznamenajme, že Black-Scholesova rovnica však ešte stále nepredstavuje dokonalý opis vývoja ceny opcie. Ceny akcií sa správajú omnoho komplikovanejšie ako geometrický Brownov pohyb s konštantnou volatilitou. Prečo sa teda na ohodnocovanie cien opcií používa práve táto parciálna diferenciálna rovnica? Jedným z dôvodov je to, že sa v praxi ľahko používa, nakoľko Black-Scholesova rovnica obsahuje len jeden parameter, ktorý sa nedá vypozorovať priamo z trhu. Tým parametrom je historická volatilita vývoja ceny akcie. Účastníci opčných obchodov môžu počítať historické volatility cien akcií zo znalostí cien opcií, a naopak môžu určovať ceny opcií s využitím znalostí historickej volatility akcií, a to jednoznačným spôsobom. Samozrejme, že existujú aj zložitejšie modely na stanovenie cien opcií, tie však obsahujú viac takých parametrov, akým je pre Black-Scholesov model volatilita (nie je ich možné vypozorovať priamo z trhu), a preto je ich použitie omnoho zložitejšie.

Ďalším dôvodom popularity Black-Scholesovho modelu je, že užívatelia si vytvorili rôzne tzv. „triky obchodu“, aby zúžitkovali jeho nedostatky.

4.1 Volatilita

Volatilita ceny akcie je miera nepredvídateľnosti vývoja ceny akcie do budúcnosti. Ak narastie volatilita, tak šanca, že burza bude „pracovať“ pre nás alebo proti nám, sa zväčší. Majiteľ call opcie získava z nárastu ceny akcie a je zároveň zabezpečený pri poklese ceny, že stratí len sumu, ktorú zaplatil za opciu. Podobne majiteľ put opcie má osoh z poklesu ceny akcie a jeho strata je limitovaná v prípade nárastu ceny. Preto hodnoty oboch opcií put aj call sa zvyšujú pri zvýšení hodnoty volatility. Typické hodnoty pre σ sa pohybujú v intervale 0.2 – 0.4, čiže 20% až 40%.

4.1.1 Získavanie volatility z historických dát

Cena akcie je obvykle pozorovaná vo fixovaných časových intervaloch (každý deň, každý týždeň, či mesiac).

Nech n+1 ..... počet pozorovaní

S_i ..... cena akcie na konci i-teho intervalu i = 0, 1, ... n

τ ..... dĺžka časového intervalu v roku

a nech $u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$ pre i = 1, 2, ... , n .

Keďže $S_i = S_{i-1} e^{u_i}$, tak potom u_i je spojite úročený zisk v i-tom intervale. Obvyklý odhad s, štandardnej odchýlky, pre u_i je daný vzorcom:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i - \bar{u}\right)^2} \qquad (4.1.1)$$

alebo

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2} - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}, \qquad (4.1.2)$$

kde $\bar{u}$ je aritmetický priemer hodnôt u_i. Zmena v ln$S$ medzi časom t a T má normálne rozdelenie

$$\ln S_T - \ln S \approx \Phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right], \qquad (4.1.3)$$

z ktorého vyplýva, že štandardná odchýlka pre u_i je rovná $\sigma\sqrt{\tau}$. Premenná s je preto len odhadom $\sigma\sqrt{\tau}$. Takže

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\tau}}. \qquad (4.1.4)$$

Štandardná chyba takéhoto odhadu je približne $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$.

4.1.2 Implikovaná volatilita

Jeden parameter v Black-Scholesovej oceňovacej formule, ktorý sa nedá priamo vypozorovať z okamžitých hodnôt cien akcií a opcií na trhu, je volatilita ceny akcie. Na tomto mieste je vhodné spomenúť alternatívny prístup na určenie volatility, ktorý používa pojem tzv. implikovanej volatility. To je volatilita implikovaná cenou opcie vypozorovanej z trhu, t.j. taká hodnota volatility, pri ktorej (použijúc Black-Scholesovu oceňovaciu formulu) dostávame reálnu cenu opcie pri danej hodnote ceny akcie. Implikovaná volatilita môže byť použitá na monitorovanie názoru trhu na jednotlivé akcie. Taktiež môže byť použitá na stanovenie ceny opcie z ceny nejakej inej opcie.

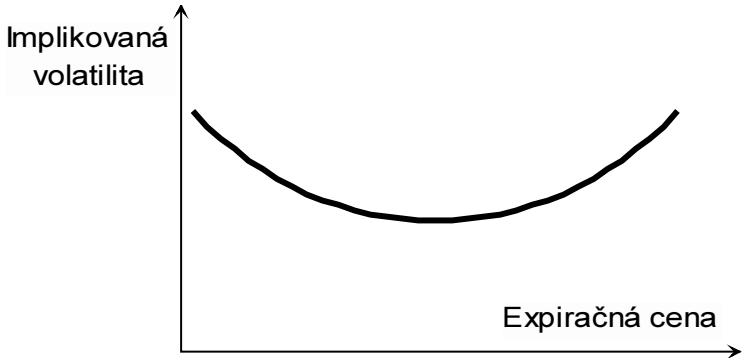
Implikovaná volatilita je teda hodnota volatility, ktorá zodpovedá riešeniu Black-Scholesovej rovnice (neznáma je v tomto prípade σ), ak poznáme pozorovanú cenu opcie. Ak nie je nijaké riešenie pre implikovanú volatilitu, tak platí jeden z nasledujúcich prípadov:

1. likvidita je príliš nízka (najčastejší prípad),
2. možnosť arbitráže.

Hlavným cieľom tejto diplomovej práce je skúmanie implikovanej volatility, preto by bolo vhodné uviesť aspoň pár príkladov jej využitia v praxi.

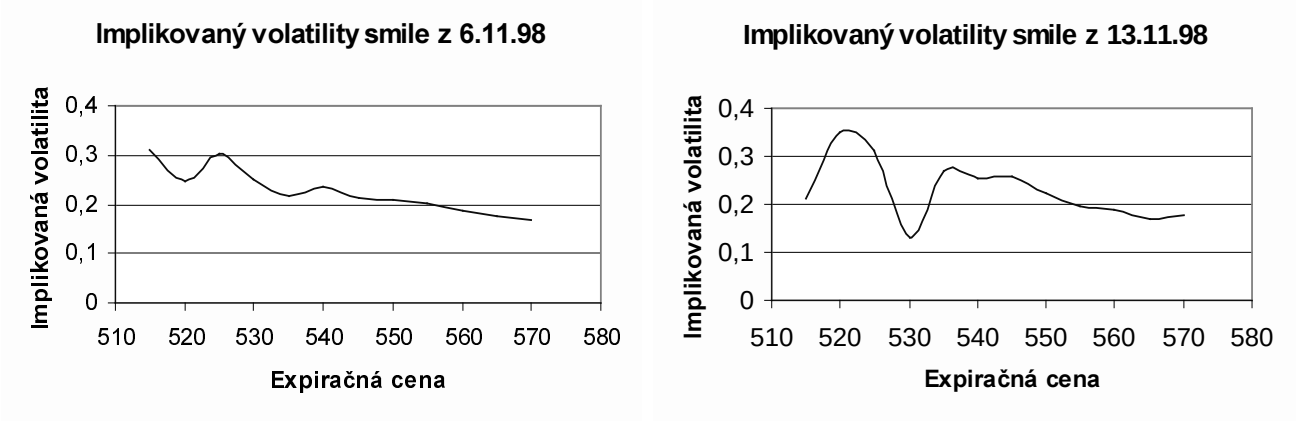
4.2 Implikovaný volatility smile

Poznamenajme, že v danom okamihu sú na burze známe cena akcie a ceny opcií vypísaných na rôzne expiračné ceny. Pri predstavovaní si funkcie implikovanej volatility je potrebné si uvedomiť, že ide o vzťah závislosti medzi implikovanou volatilitou a expiračnou cenou.



Obrázok č.4 – Implikovaný volatility smile.

Podľa predpokladov Black-Scholesovej teórie by takýto úkaz, aký je vidno na obrázku č.4, nemal vôbec nastať, pretože by to bolo v rozpore s predpokladom o konštantnosti volatility. Tento rozpor je však možné vysvetliť nereálnosťou predpokladu o konštantnosti volatility v Black-Scholesovom modeli oceňovania opcií.



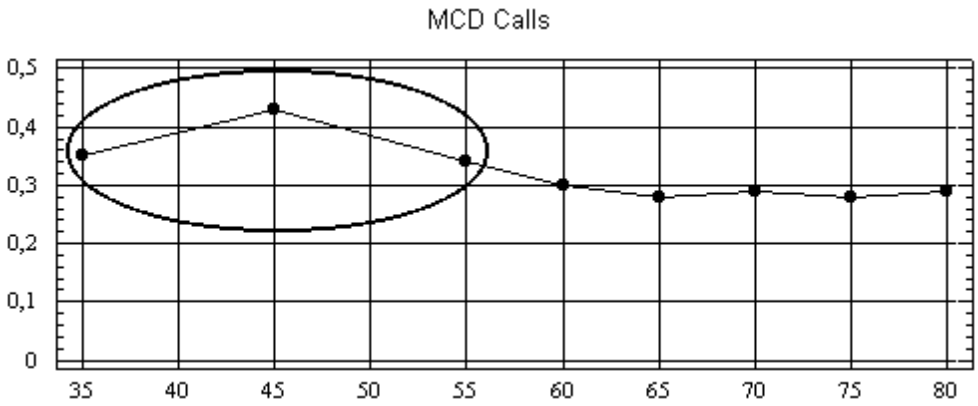
Obrázky č.5 a 6 – Reálne implikované volatility smiles pre index S&P100,
pre hodnoty: S = 558.88 (6.11.98), S = 554.26 (13.11.98)
a dátumom expirácie pre obidve opcie 21.11.1998.

Jednoduché, ale pritom efektívne využitie volatility smile-u v praxi vychádza z predpokladu, že hoci nie je známy priebeh grafu závislosti implikovanej volatility od expiračnej ceny, v praxi sa najčastejšie vyskytuje ako konvexný. Preto táto konvexnosť volatility smile-u sa prijala ako pravdivý predpoklad a každý iný tvar je považovaný za poruchu, ktorá sa rýchlo odstráni. Našou úlohou je skonštruovať portfólio, ktorého úlohou je zabezpečiť nárast hodnoty tohto portfólia prostredníctvom odstránenia poruchy v konvexnosti smile-u. Takáto stratégia sa nazýva *stratégia zub*. Podrobnejšiu analýzu tejto stratégie aj s výsledkami môžeme nájsť v diplomovej práci M. Kmetíkovej [Km].

4.2.1 Stratégia zub

Uvažujme o troch opciách na tri po sebe idúce expiračné ceny $X < Y < Z$ a ich implikovaných volatilitách I_X, I_Y, I_Z. Pre lokálnu výchylku z konvexnosti platí:

1. Implikovaná volatilita pre expiračnú cenu Y je väčšia ako implikované volatility ostatných dvoch opcií X, Z, a teda platí vzťah $I_Y > \max(I_X, I_Z)$.
2. Implikovaná volatilita pre expiračnú cenu Y nespĺňa nutnú podmienku konvexnosti, a teda platí nerovnosť $I_Y (Z - X) > I_X (Z - Y) + I_Z (Y - X)$.



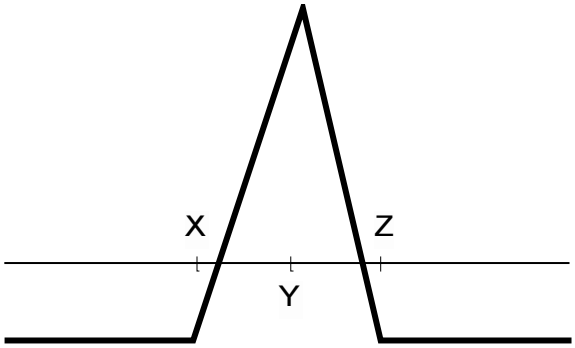
Obrázok č.7 – Smile zo dňa 25.8.1998.

V prípade, že sa zub nachádza v expiračnej cene Y, tak potom je pravdivý jeden z nasledujúcich výrokov:

1. Trh správne ocenil opciu na expiračnú cenu Y, ale vzhľadom na ňu podhodnotil opcie na realizačné ceny X a Z.
2. Trh správne ocenil opcie na expiračné ceny X a Z , ale vzhľadom na ne nadhodnotil opciu na realizačnú cenu Y.
3. Alebo súčasne je nadhodnotená opcia na expiračnú cenu Y a podcenené opcie na realizačné ceny X a Z.

Vychádzajúc z nášho predpokladu o konvexnosti smile-u však predpokladáme, že sa táto situácia v spomínaných troch prípadoch za krátky čas upraví. Ďalej si vytvoríme portfólio: Nakúpime po jednej opcii na expiračné ceny X a Z a predáme dve opcie na

realizačnú cenu Y. Portfólio je zabezpečené aj proti pohybu akcie, čo si môžeme pozrieť na pay-off diagrame.



Obrázok č.8 – pay-off diagram portfólia pre stratégiu zub.

Cena portfólia s narastajúcim časom potom bude tiež stúpať.

4.3 Risk zohľadňujúca stratégia oceňovania opcií

Doteraz sme brali do úvahy len prípad, keď si kupujúci zaobstaráva opcie spojite (čiže môže ich kúpiť v ľubovolnom časovom okamihu) a za túto kúpu zaplatí len cenu opcie. Nebrali sme však do úvahy ***transakčné poplatky*** (ako sú napríklad: provízia pre sprostredkovateľa, dane, odvody pre štát ...atď). Toto je základný rozdiel medzi Black-Scholesovým modelom oceňovania opcií a realitou na opčných burzách. V Black-Scholesovom modeli sa investor snaží vhodným hedgingom (kúpou a predajom opcií a akcií) vytvoriť si svoje portfólio tak, aby jeho zisk bol aspoň taký, aký by mal, keby si tie peniaze vložil do banky pri bezrizikovom úroku *r*. Ak by sme však do tohto spojitého modelu zahrnuli, čo i len veľmi malé transakčné náklady, mohlo by sa nakoniec stať, že by tieto náklady prerástli do obrovských rozmerov. Z toho dôvodu sa pri odvodzovaní risk zohľadňujúcej stratégie oceňovania opcií uvažuje nie ako o spojitom, ale ako o diskrétnom modeli. To znamená, že investor si upravuje svoje portfólio v určitých diskrétnych časových okamihoch a nie v ľubovolnom čase. Táto časová diskretizácia nesie so sebou aj určité rizika, nakoľko kupujúci sa nemôže dostatočne pružne brániť proti výkyvom ceny opcie (poklesu, nárastu), pretože svoje portfólio môže upravovať len v daných časových okamihoch. Tieto riziká sú tým väčšie, čím je dlhší časový interval medzi dvomi zabezpečeniami portfólia.

Týmto spôsobom mu môže uniknúť veľa peňazí, ktoré by v spojitom modeli mohol zarobiť, ale môže aj veľa stratiť. Ostatné predpoklady pre túto stratégiu sú také isté ako boli v Black-Scholesovom modeli oceňovania opcií.

Označme:
- očakávanú mieru rizika z variancie portfólia ako r_{var},
- očakávanú hodnotu transakčných nákladov ako r_{tc}.

Odvodenie základnej parciálnej diferenciálnej rovnice pre tento model je podobné ako tomu bolo pri odvádzaní *Black-Scholesovej rovnice*. Predpokladáme, že hodnota akcie sleduje diskrétny difúzny proces:

$$\delta S = \mu S \delta_t + \sigma S \Phi \sqrt{\delta_t}\,, \tag{4.3.1}$$

teda $dw = \Phi\sqrt{\delta_t}$, kde δ_t je časový interval (nie nekonečne malý), $\Phi \approx N(0,1)$. Výsledný tvar základnej parciálnej diferenciálnej rovnice je potom

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r V = r_{\text{var}} + r_{tc}\,. \tag{4.3.2}$$

Výsledkom tohto modelu je spojitá parciálna diferenciálna rovnica, hoci v priebehu odvodzovania sme uvažovali o diskrétnom (nenulovom) δ_t.

4.3.1 Očakávaná miera rizika r_{var}

Akú výšku by mala mať prémia, ktorou bude investor kompenzovaný za to, že preberá na seba riziko vyplývajúce z hedgovania jeho portfólia len v určitých diskrétnych časových intervaloch? Určite platí, že čím väčšia variancia (t.j. čím dlhší čas medzi jednotlivými zabezpečeniami), tým väčšie riziko preberá na seba investor, a preto sa zväčšuje aj jeho prémia.

Označme R tzv. *variance risk koeficient*. Potom očakávaná hodnota rizika bude

$$r_{\text{var}} = \frac{R\,\text{var}(\delta P)}{\delta_t}, \qquad (4.3.1.1)$$

kde δP je zmena portfólia za časový interval δ_t. Po sérii úprav dostávame výsledný tvar pre očakávanú mieru rizika

$$r_{var} = 2R\sigma^4 S^4 \Gamma^2 \delta_t. \qquad (4.3.1.2)$$

Detaily odvodenia výsledného vzťahu môžeme nájsť v článku M. Kratku [K] alebo v diplomovej práci M. Spustu [Sm].

4.3.2 Očakávaná miera transakčných výdavkov r_{tc}

Predpokladajme, že transakčné poplatky sa platia z množstva uskutočnených kontraktov. Označme celkový úhrn transakčných poplatkov na jeden kontrakt ako C. Predpokladáme, že C je konštantné. Aká bude očakávaná miera transakčných výdavkov?

Naše úvahy budú presne opačné ako pri riziku z variancie. Teda, čím kratší časový interval medzi jednotlivými zabezpečeniami, tým ich bude viac a to znamená aj vyššie transakčné náklady, pretože ich platíme pri každom hedgingu. Teda

$$r_{tc} = \frac{CE\left[\left|\delta\Delta\right|\right]}{\delta_t}. \qquad (4.3.2.1)$$

Potom pre výsledný tvar očakávanej miery transakčných výdavkov bude platiť:

$$r_{tc} = \frac{C\sigma S\left|\Gamma\right|\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{\delta_t}}, \qquad (4.3.2.2)$$

kde

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \qquad (4.3.2.3)$$

Presný postup odvodení jednotlivých vzorcov môžeme nájsť v článku M. Kratku [K] alebo v diplomovej práci M. Spustu [Sm].

4.3.3 Hedgovacia stratégia zohľadňujúca risk a transakčné náklady

Zo vzťahov (4.3.1.2) a (4.3.2.2) dostávame:

$$r_{\text{var}} + r_{tc} = 2R\sigma^4 S^4 \Gamma^2 \delta_t + C\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma S|\Gamma|\frac{1}{\sqrt{\delta_t}}. \qquad (4.3.3.1)$$

Základná myšlienka risk zohľadňujúcej metodológie je hľadanie takej optimálnej stratégie (t.j. optimálny výber δ_t), pre ktorú je hodnota $r_{var} + r_{tc}$ minimálna. Nutná podmienka minima pravej strany rovnice (4.3.3.1) je daná rovnosťou

$$2R\sigma^4 S^4 \Gamma^2 - \frac{1}{2}C\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma S|\Gamma|\frac{1}{\delta_t^{3/2}} = 0, \qquad (4.3.3.2)$$

z ktorej dostávame, že

$$\delta_t^{3/2} = \frac{C\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma S|\Gamma|}{2R\sigma^4 S^4 \Gamma^2},$$

a teda

$$\delta_t = \left(\frac{C}{2\sqrt{2\pi}R\sigma^3 S^3|\Gamma|}\right)^{2/3}. \qquad (4.3.3.3)$$

Ak označíme konštantu $k = \left(\frac{C}{2R\sqrt{2\pi}}\right)^{1/3}$, nájdeme optimálne δ_t v tvare

$$\delta_t = \frac{k^2}{\sigma^2 S^2 |\Gamma|^{2/3}}. \qquad (4.3.3.4)$$

Po dosadení optimálneho δ_t späť do (4.3.3.1) a po jednoduchých úpravách dostaneme

$$r_{\text{var}} + r_{tc} = \frac{1}{2}m\sigma^2 S^2 |\Gamma|^{4/3}, \qquad (4.3.3.5)$$

kde

$$m = \left(\frac{216RC^2}{\pi} \right)^{1/3}. \qquad (4.3.3.6)$$

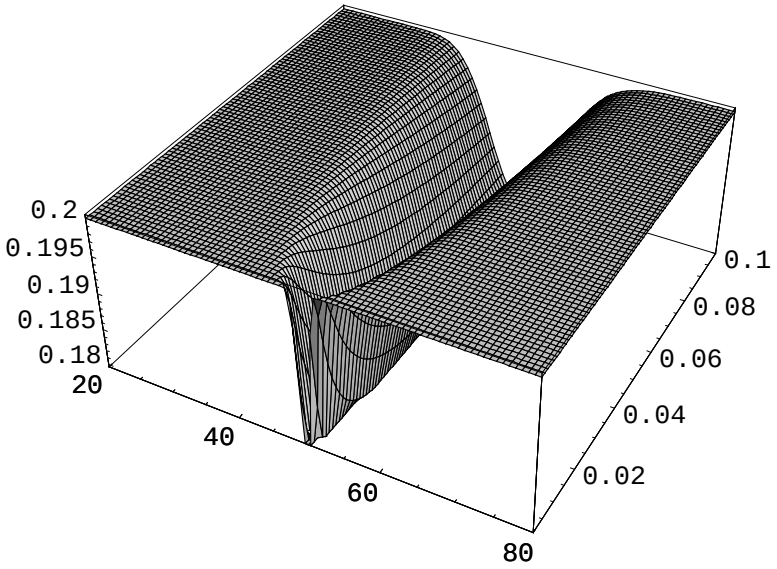
Na záver môžeme zostaviť konečnú rovnicu risk zohľadňujúcej metodológie oceňovania opcií dosadením (4.3.3.5) do (4.3.2)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(1 - m\Gamma^{1/3}\right)\Gamma - rV = 0. \qquad (4.3.3.7)$$

Ak by sme teraz zaviedli novú volatilitu $\bar{\sigma}^2$ ako

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 - m\Gamma^{1/3}\right),$$

tak rovnica (4.3.3.7) sa opäť dá identifikovať ako Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica s modifikovanou volatilitou, ktorá v tomto prípade už nie je konštantná, ale je funkciou závislou od času a ceny akcie $\bar{\sigma}$ (*S, t*). Typický priebeh funkcie $\bar{\sigma}$ (*S, t*) je znázornený na nasledujúcom obrázku.



Obrázok č.9 – Trojrozmerný graf risk zohľadňujúcej volatility v závislosti od ceny akcie 20< S< 80 a času T do expirácie, 0< T< 0.1.

Predošlé úvahy a poznatky nás vedú k myšlienke vytvoriť model, ktorý by vychádzal z Black-Scholesovho modelu, ale nemal by konštantnú volatilitu σ = *konšt*., ale volatilitu, ktorá by bola premenlivá a závisela by na cene akcie a čase $\sigma = \sigma(S, t)$.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma(S,t)^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 .$$

K tejto úprave Black-Scholesovej rovnice nás oprávňujú aj nasledujúce dva dôvody:

1. Implikovaná volatilita nie je konštantná, ale na základe predpokladov Black-Scholesovho modelu by však takou mala byť.
2. Existencia modelov, ktoré zahŕňajú transakčné náklady (napríklad Kratkov model – uverejnený v článku M. Kratku [K] , Lelandov model – uvedený časopise Journal of Finance [L]).