5. Praktická analýza Black-Scholesovho modelu s premenlivou volatilitou

V prvej časti tejto kapitoly sa budeme sústrediť na model, v ktorom bude volatilita závisieť len na cene akcie $\sigma = \sigma(S)$. Našim cieľom bude nájsť také $\sigma = \sigma(S)$, aby sme sa pri výpočte Black-Scholesovho modelu s premenlivou volatilitou „trafili“ do vopred známych reálnych dát. Jedná sa teda o inverznú úlohu na výpočet difúzneho koeficientu $\sigma = \sigma(S)$, pričom sú známe riešenia parabolickej Black-Scholesovej rovnice v koncovom čase a všetky ostatné parametre úlohy. V druhej časti uvedieme úvahu o metóde určovania volatility, závislej nielen od ceny akcie, ale aj od času, teda $\sigma = \sigma(S, t)$.

5.1 Volatilita závislá od ceny akcie $\sigma(S)$

5.1.1 Analýza a príprava reálnych dát

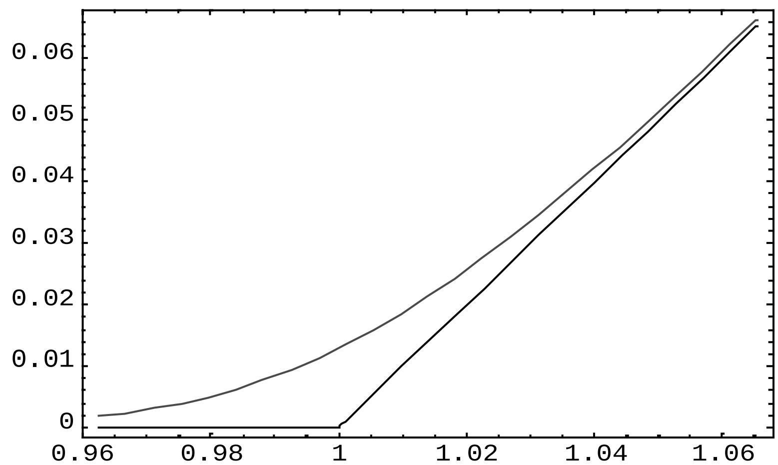
Skôr ako pristúpime k analýze reálnych dát, uvedomme si, že nemáme k dispozícii ceny opcií V na rôzne ceny akcií S pri pevnom E, ale práve naopak. K dispozícii máme len jednu cenu akcie, na ktorú sú vypísané opcie s rôznymi expiračnými cenami. Z tohto dôvodu je vhodné zaviesť nasledujúce substitúcie:

$$s = \frac{S}{E}, \qquad e = 1, \qquad W = \frac{1}{E}V. \tag{5.1.1.1}$$

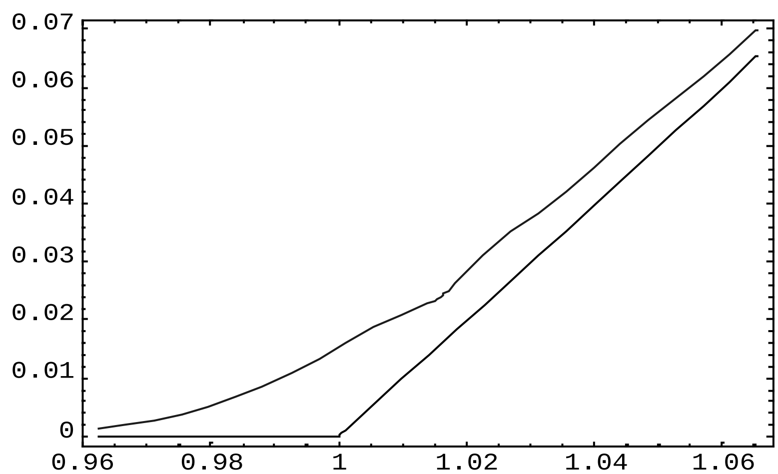
Pomocou tejto substitúcie dostávame transformované ceny akcií s jednou konštantnou expiračnou cenou e = 1. Podrobnejšie odvodenie transformácie aj s ukážkou môžeme nájsť v dodatku A.

5.1.2 Rozdiel medzi skutočnými dátami a Black-Scholesovým modelom

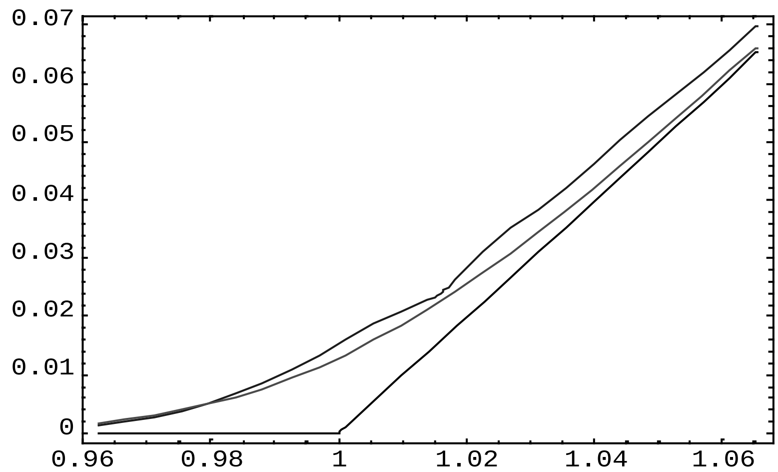
Na reálnych dátach si ukážeme praktický rozdiel medzi teoretickými hodnotami ceny opcií, získaných použitím Black-Scholesovej formuly a skutočnými cenami opcií na burzovom trhu. Budeme uvažovať reálne dáta o vývoji indexu S&P100. Grafy reálnych cien opcií sme vytvorili pomocou transformácie uvedenej v sekcii 5.1.1.



Obrázok č.10 - Graf vytvorený pomocou Black-Scholesovej formuly.



Obrázok č.11 - Graf vytvorený pomocou reálnych dát.

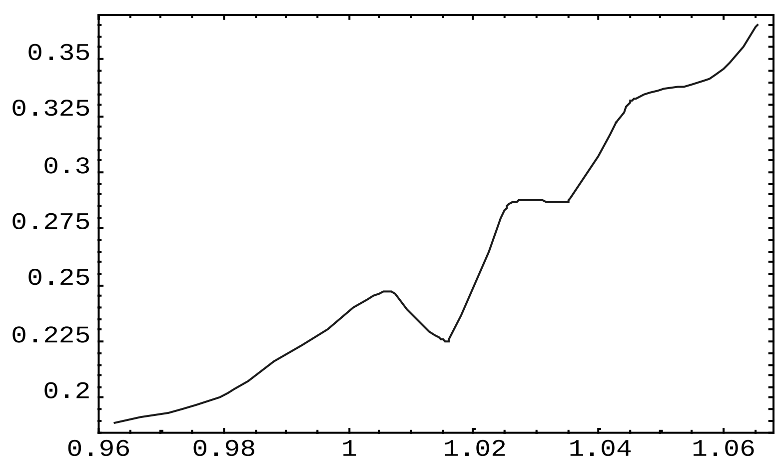


Obrázok č.12 - Graf porovnania reálnych dát s dátami vypočítanými pomocou Black-Scholesovej formuly.

Z grafov je možné vidieť, že údaje získané pomocou Black-Scholesovej formuly pre oceňovanie opcií sa dosť líšia od reality.

5.1.3 Získanie implikovanej volatility z reálnych dát

V tejto časti nám pôjde o riešenie inverznej úlohy pre Black-Scholesovu rovnicu, keď poznáme ako cenu opcie, tak všetky ostatné parametre (okrem volatility), ktoré vstupujú do tejto rovnice a snažíme sa vypočítať volatilitu.



Obrázok č.13 - Graf implikovanej volatility.

Pri výpočte implikovanej volatility z Black-Scholesovej rovnice sa však stále uvažuje s podmienkou, že volatilita je konštantná. Preto je opodstatnené zaviesť tzv. premenlivú implikovanú volatilitu, ktorá by bola funkciou ceny akcie $\sigma(S)$. Potom môžeme vypustiť podmienku konštantnosti volatility a prejdeme k tzv. *Black-Scholesovej rovnici s premenlivou volatilitou*

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma(S)^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-D)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0\,.$$

Nakoniec urobíme štandardnú úpravu týkajúcu sa času, a to konkrétne zavedením substitúcie, v ktorej budeme uvažovať o čase ako o čase do ukončenia platnosti opcie ($\tau = T - t$). Potom výsledný tvar Black-Scholesovej oceňovacej formuly s premenlivou volatilitou bude mať nasledujúci tvar :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}-\frac{\sigma(S)^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-(r-D)S\frac{\partial V}{\partial S}+rV=0\ . \qquad (5.1.3.1)$$

5.1.4 Algoritmus na určenie premenlivej implikovanej volatility $\sigma(S)$

- Za štartovaciu hodnotu pre premenlivú implikovanú volatilitu *sigma* zoberieme hodnotu historickej volatility *sigmahist* (pre všetky hodnoty S).
- Iteračný cyklus na postupné zlepšovanie premenlivej implikovanej volatility $\sigma(S)$.

Do[

- Výpočet hodnôt Black-Scholesovej rovnice pre premenlivú volatilitu (podrobná numerická schéma je v dodatku B)

Do[

- novesigma = sigma[[i]] – (hodnota Black-Scholesovej rovnice pre premenlivú volatilitu[[i]] – reálne dáta[[i]])*deltasigma

{ ak je skutočná cena opcie menšia ako nami vypočítaná, tak sa hodnota premenlivej implikovanej volatility σ(S) zmenší a v nasledujúcej iterácii už bude cena opcie nami vypočítanej nižšia, pretože čím menšia je volatilita akcie, tým je aj cena opcie nižšia a opačne }

- novesigma = Max [0., novesigma]

{ pretože hodnota volatility može byť len kladná alebo rovná 0 }

- sigma=ReplacePart[sigma, novesigma, i]

{i,imin,imax}]

{ kde hodnoty imin a imax sú minimálny a maximálny platný index. Hodnoty premenlivej implikovanej volatility, mimo tohto intervalu nie sú až tak veľmi podstatné ..... imin = 4 a imax = 96 pri hodnote priestorového delenia n = 100 }

- Do[sigma=ReplacePart[sigma, sigmahist, i] ,{i,1,imin-1}]
- Do[sigma=ReplacePart[sigma,sigmahist, i] ,{i,imax+1,n+1}]

{ hodnoty premenlivej implikovanej volatility mimo intervalu medzi minimálnym a maximálnym platným indexom sa budú udržiavať na hodnote historickej volatility }

- Výpočet L^1 a L^∞ chyby, kde:

$$\mathrm{L}^1 \text{ chyba} = \frac{1}{N}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \left| V_i - V_i^{\mathrm{real}} \right| \approx \int_0^{\mathrm{SM}} \left| V(S) - V^{\mathrm{real}} \right| \qquad (5.1.4.1)$$

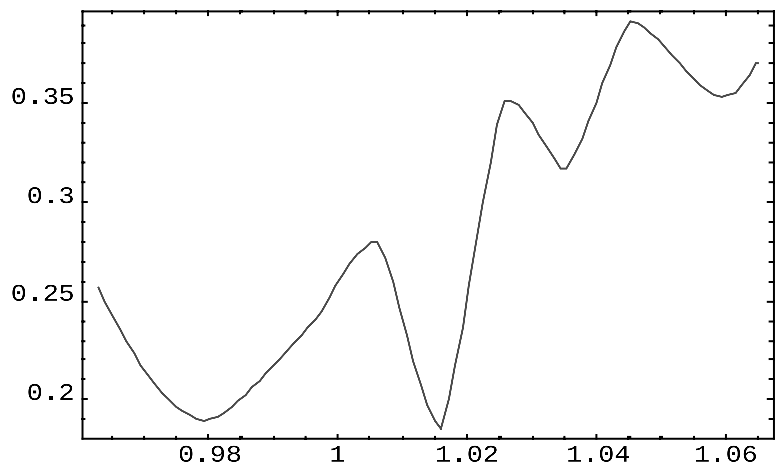
$$\mathrm{L}^\infty \text{ chyba} = \max \left| V_i - V_i^{\mathrm{real}} \right| \approx \max \left| V(S) - V^{\mathrm{real}} \right| \qquad (5.1.4.2)$$

,{i,1,zvolený počet iterácií}]

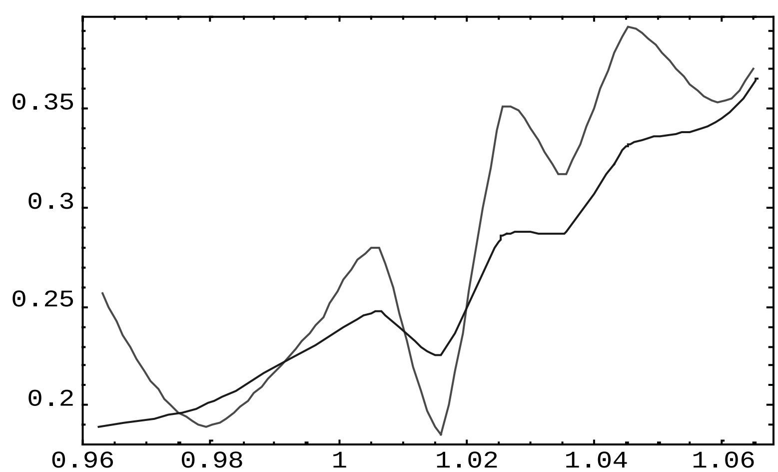
Celý program, spracovaný v Matematike 3.0, je uvedený v dodatku C.

5.1.5 Výsledky

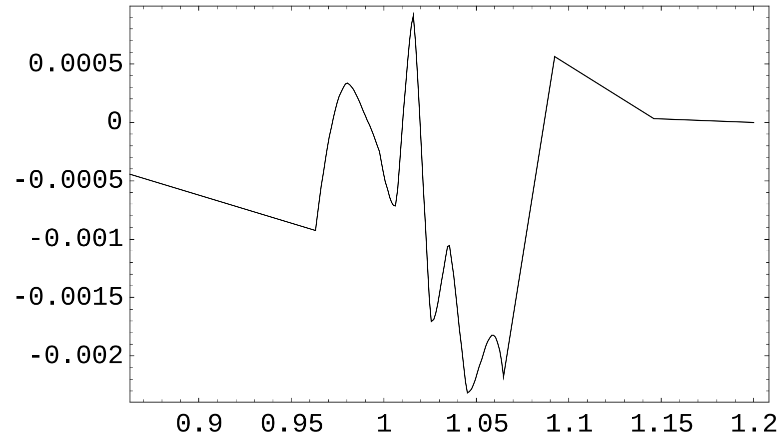
V tejto časti ukážeme graf nami získanej premenlivej implikovanej volatility, závislej od ceny akcie $\sigma(S)$. Ďalej zobrazíme porovnanie našej implikovanej volatility $\sigma(S)$ s implikovanou volatilitou vypočítanou klasickým spôsobom a nakoniec uvedieme výsledky L^1 a L^∞ chýb pre jednotlivé iterácie.



Obrázok č.14 - Graf premenlivej implikovanej volatility σ(S).



Obrázok č.15 - Porovnanie grafov premenlivej implikovanej volatility σ(S) s implikovanou volatilitou.



Obrázok č.16 - Graf odchyliek premenlivej volatility od implikovanej volatility.

Výsledky L^1 a L^∞ chýb pre jednotlivé iterácie:

Iteracia 1
L1 Chyba 0.00261524 L-nekonecno Chyba 0.00461431 MaxSigma = 0.209229
Iteracia 2
L1 Chyba 0.00244547 L-nekonecno Chyba 0.00447085 MaxSigma = 0.21817
Iteracia 3
L1 Chyba 0.00229026 L-nekonecno Chyba 0.00433133 MaxSigma = 0.226833
Iteracia 4
L1 Chyba 0.00214836 L-nekonecno Chyba 0.00419658 MaxSigma = 0.235226
Iteracia 5
L1 Chyba 0.00201864 L-nekonecno Chyba 0.0040671 MaxSigma = 0.24336
Iteracia 6
L1 Chyba 0.00190003 L-nekonecno Chyba 0.00394322 MaxSigma = 0.251247
Iteracia 7
L1 Chyba 0.00179292 L-nekonecno Chyba 0.00382505 MaxSigma = 0.258897
Iteracia 8
L1 Chyba 0.00169928 L-nekonecno Chyba 0.00371262 MaxSigma = 0.266322
Iteracia 9
L1 Chyba 0.00161557 L-nekonecno Chyba 0.00360584 MaxSigma = 0.273534
Iteracia 10
L1 Chyba 0.00154212 L-nekonecno Chyba 0.00350459 MaxSigma = 0.280543
Iteracia 11
L1 Chyba 0.00147831 L-nekonecno Chyba 0.00340867 MaxSigma = 0.28736
Iteracia 12
L1 Chyba 0.00142212 L-nekonecno Chyba 0.0033179 MaxSigma = 0.293996
Iteracia 13
L1 Chyba 0.00137228 L-nekonecno Chyba 0.00323204 MaxSigma = 0.30046
Iteracia 14
L1 Chyba 0.00132792 L-nekonecno Chyba 0.00315085 MaxSigma = 0.306762
Iteracia 15
L1 Chyba 0.00128744 L-nekonecno Chyba 0.00307411 MaxSigma = 0.31291
Iteracia 16
L1 Chyba 0.00125047 L-nekonecno Chyba 0.00300158 MaxSigma = 0.318913
Iteracia 17
L1 Chyba 0.00121749 L-nekonecno Chyba 0.00293302 MaxSigma = 0.324779
Iteracia 18
L1 Chyba 0.00118757 L-nekonecno Chyba 0.00286821 MaxSigma = 0.330516
Iteracia 19
L1 Chyba 0.00115954 L-nekonecno Chyba 0.00280694 MaxSigma = 0.33613

Iteracia	20				
L1 Chyba	0.00113344	L-nekonecno Chyba	0.002749	MaxSigma =	0.341628
Iteracia	21				
L1 Chyba	0.00110909	L-nekonecno Chyba	0.0026942	MaxSigma =	0.347016
Iteracia	22				
L1 Chyba	0.00108622	L-nekonecno Chyba	0.00264234	MaxSigma =	0.352301
Iteracia	23				
L1 Chyba	0.00106481	L-nekonecno Chyba	0.00259325	MaxSigma =	0.357487
Iteracia	24				
L1 Chyba	0.00104522	L-nekonecno Chyba	0.00254677	MaxSigma =	0.362581
Iteracia	25				
L1 Chyba	0.00102719	L-nekonecno Chyba	0.00250274	MaxSigma =	0.367586
Iteracia	26				
L1 Chyba	0.00101014	L-nekonecno Chyba	0.00246101	MaxSigma =	0.372508
Iteracia	27				
L1 Chyba	0.000994004	L-nekonecno Chyba	0.00242144	MaxSigma =	0.377351
Iteracia	28				
L1 Chyba	0.000978728	L-nekonecno Chyba	0.00238391	MaxSigma =	0.382119
Iteracia	29				
L1 Chyba	0.000964259	L-nekonecno Chyba	0.00234829	MaxSigma =	0.386816
Iteracia	30				
L1 Chyba	0.000950549	L-nekonecno Chyba	0.00231448	MaxSigma =	0.391444

S každou iteráciou môžeme sledovať pokles týchto chýb, z čoho by sa dalo usudzovať o správnosti algoritmu na výpočet premenlivej implikovanej volatility.

5.2 Priestorovo-časová závislosť volatility

Aj v tomto modeli budeme vychádzať z Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice (3.1.17), ale volatilita tu bude funkciou, závislou na cene akcie S a čase t.

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{\sigma(S,t)^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (r-D)S\frac{\partial V}{\partial S} + rV = 0 \qquad (5.2.1)$$

Predpokladajme, že máme údaje vývoja ceny opcie za posledných M dní trvania jej platnosti. V čase expirácie je cena tejto opcie daná jej pay-off diagramom. Na výpočet volatility s priestorovo-časovou závislosťou $\sigma(S,\ t)$ bude možne využiť s malými úpravami program na výpočet volatility závislej len od ceny akcie S, ktorý je celý uvedený v dodatku C, pretože budeme počítať vlastne časové rezy grafu pre premenlivú implikovanú volatilitu $\sigma(S,\ t)$.

Náznak algoritmu:

1. krok - čas do expirácie je Δt – vypočítame σ_1 (presne tým istým spôsobom, ako by sme počítali volatilitu závislú len na cene akcie $\sigma(S)$.

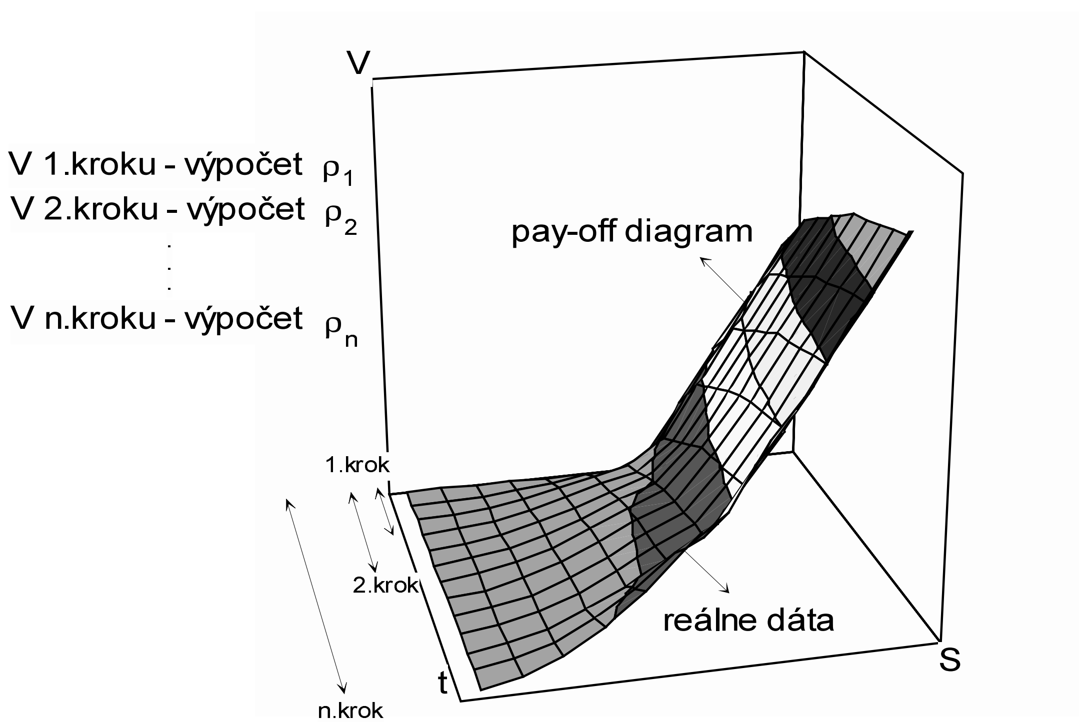
2. krok - čas do expirácie je $2\Delta t$ – na výpočet σ_2 využijeme aj získané hodnoty σ_1. Pre časový interval, v ktorom sa počítala σ_1 $(0, \Delta t)$, sa pri výpočte novej σ_2 bude používať nám už známa hodnota σ_1 a pre zostávajúci zvyšok intervalu $(\Delta t, 2\Delta t)$ sa bude σ_2 modifikovať obdobne ako pre volatilitu závislú len na cene akcie $\sigma(S)$.

.

.

n. krok - čas do expirácie je $n\Delta t = T$ – pre výpočet σ_n využijeme už všetky známe hodnoty $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ pre k nim dané príslušné časové úseky.

Takže pre hodnotu volatility v k-tom kroku platí: $\sigma(S) = \sigma_k(S, k\Delta t)$ a je určovaná algoritmom s tým, že na výpočet Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice s volatilitou závislou na cene akcie S a čase t (5.2.1) sme využívali už vypočítané hodnoty $\sigma_1(S, \Delta t)$, $\sigma_2(S, 2\Delta t)$, ... , $\sigma_{k-1}(S, (k-1)\Delta t)$. V kroku k už určujeme hodnotu $\sigma_k(S, n\Delta t)$ tak, aby odchýlka riešenia Black-Scholesovej rovnice s volatilitou závislou na cene akcie a čase $V(S, k\Delta t)$ od reálnych hodnôt v tom čase $V_{real}(S, k\Delta t)$ bola minimálna.



Obrázok č.17 – Pomocný obrázok znázorňujúci postup výpočtu $\sigma(S, t)$.