FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2001 FRANTIŠEK BRÁZDIK

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Katedra Ekonomických a Finančných Modelov

Metódy vnútorného bodu v DEA–modeloch lineárneho programovania

Diplomová práca

Diplomant: František Brázdik
Vedúci diplomovej práce: Doc.RNDr. Milan Hamala CSc.

Bratislava 2001

Prehlasujem, že som pri vypracovaní tejto práce postupoval samostatne len na základe vedomostí získaných štúdiom a uvádzam všetky literárne pramene, ktoré som použil.

František Brázdik

Ďakujem vedúcemu svojej diplomovej práce
p. Doc. RNDr. Milanovi Hamalovi CSc., za cenné rady, praktické pripomienky, trpezlivosť a poskytnutú literatúru.

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Kapitola 1

Úvod

Analýza obálky dát (Data Envelopment Analysis) je jedna z aplikácií lineárneho programovania použiteľná v ekomomických vedách. Cieľom takejto analýzy je z daného súboru organizačných jednotiek vybrať tie, ktoré sú efektívne. Budeme hovoriť o organizačných jednotkách, pretože analýza sa dá s úspechom použiť na výrobné ako aj na nevýrobné subjekty. Analýzou sa dajú získať aj údaje, na základe ktorých vieme podať odporúčania ako sa dajú organizačné jednotky vylepšiť tak, aby zvýšili svoju efektívnosť prípadne sa stali efektívnymi.

Vo svojej pôvodnej práci Charnes, Cooper a Rhodes, charakterizovali DEA metódu ako "model matematického programovania aplikovaný na pozorované dáta, ktorý poskytuje nový prístup pri získavaní empirických odhadov extremálnych vzťahov ako sú produkčné funkcie a krivky vyjadrujúce efektívne produkčné možnosti, ktoré sú základnými prvkami modernej ekonómie."

V mikroekonomickej teórii je možné efektívnosť merať pomocou produkčnej funkcie. Táto funkcia určuje hranicu množiny produčných možností. V praxi ale konkrétnu produkčnú funkciu nepoznáme, preto hľadáme spôsoby ako ju určiť. Existujú dva prístupy a to parametrický a neparametrický. Parametrický často označovaný ako aj ekonometrický, je založený na tom, že poznáme explicitné vyjadrenie produkčnej funkcie, ale nepoznáme paramatre tohto vyjadrenia. Teda napríklad vieme, že ide o Cobb – Douglasovu produkčnú funkciu, ale nepoznáme parametre tejto funkcie. Tieto sa určia z nazbieraných dát napríklad pomocou metódy najmenších štvorcov.

Neparametrický prístup zastúpený DEA modelovaním nepotrebuje poznať funkčnú formu, pretože efektívnosť je meraná relatívne k všetkým ostatným organizačným jednotkám.

Rôznorodosť aplikácií DEA modelov ilustrujeme použitím metódy pri tvorbe rozpočtu na Ben – Gurion University v Izraeli v roku 1988 [1]. Kritérium nákladov na študenta sa ukázalo ako nedostatočné vzhľadom na výrazne rozdielnu finančnú náročnosť niektorých odborov, ako napríklad priemyselný manažment a katedra geológie. Rozpočet zostavený pomocou tejto metódy viedol až k organizačným zmenám na univerzite. Ďalšími oblasťami, kde je DEA – modelovanie obľúbené je zdravotníctvo a bankovníctvo.

DEA–modelovanie je možné použiť aj na zisťovanie efektívnosti subjektov, ktoré sa neskladajú z množstva menších častí. U takýchto subjektov sa sledujú časové rady vstupov a výstupov. Za charakteristiku DMU sa považujú hodnoty vstupov a výstupov v danom čase. Ako príklad takéhoto postupu môžeme uviesť analýzu japonských štátnych telekomunikácií uvedenú v [9].

Na riešenie problémov lineárneho programovania, ktoré pri analýze zostrojíme, použijeme metódy vnútorného bodu, konkrétne primárne – duálny algoritmus. Výhodou týchto algoritmov oproti simplexovým algoritmom je nielen odstránenie problémov s bázickými riešeniami, ale aj nižšia výpočtová zložitosť.

Kapitola 2

Úvod do DEA modelov

V "DEA – modeloch" sa budeme snažiť porovnať efektívnosť homogénneho súboru "organizačných jednotiek" (tzv. Decision Making Units), ktoré sú charakterizované rovnakou štruktúrou vstupov a výstupov. Konečným cieľom je zoradiť všetky "organizačné jednotky" podľa miery efektívnosti. Miery budeme konštruovať pomocou "virtuálnych" cien vstupov a výstupov, pretože analýza obsahuje aj vstupy a výstupy, ktorých ceny neexistujú, proces modelovania vytvorí vlastné ceny a tieto sa nazývajú virtuálne ceny.

2.1 Veličiny modelov

Súbor "organizačných jednotiek" - $DMU_j \quad j = 1, \ldots, n$ je homogénny v zmysle rovnakosti štruktúry DMU, každá z nich má m vstupov a p výstupov. Pre vektory budeme používať stĺpcovú konvenciu.
Označme $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}_+^m$ vektor vstupov $DMU_j \quad j = 1, \ldots, n$.
Nech $x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad i = 1, \ldots, m$ je hodnota i-teho vstupu DMU_j , na základe tohto definujme $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, \ldots, x_{mj})^T$.
Podobne označíme $\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}_+^p$ vektor výstupov $DMU_j \quad j = 1, \ldots, n$.
Nech $y_{kj} \in \mathbb{R}_+ \quad k = 1, \ldots, p$ je hodnota k-teho vstupu DMU_j
a potom definujme $\mathbf{y}_j = (y_{1j}, \ldots, y_{pj})^T$.
Ďalej definujme maticu vstupov $\mathbf{X}_{m,n} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$
a maticu výstupov $\mathbf{Y}_{m,n} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p)$. Označením $\mathbf{X}_j, \ \mathbf{Y}_j$ rozumieme j–ty stĺpec matíc. V takomto zápise pre zložky vektora a prvky matice platí: $X_{ij} = x_{ij}, \ Y_{kj} = y_{kj}$.

2.2 Premenné modelov

Analýzu súboru DMU_j budeme vykonávať pomocou virtuálnych cien u, v. Definujme premennú $v_i \in \mathbb{R}_+$ pre "virtuálnu cenu" i–teho vstupu $i = 1, \ldots, m$ a podobne definujme premennú pre "virtuálnu" cenu $u_k \in \mathbb{R}_+$ k–teho výstupu $k = 1, \ldots, p$. Postupne budeme analyzovať všetky DMU_j . Výsledkom jednotlivých analýz budú dva vektory hodnôt "virtuálnych" cien $\hat{\mathbf{u}}_j, \hat{\mathbf{v}}_j$, ktoré pre $DMU_j \quad j = 1, \ldots, n$ tvoria vektor cien vstupov j-tej úlohy $\hat{\mathbf{v}}_j \in \mathbb{R}^m_+$ a $\hat{\mathbf{u}}_j \in \mathbb{R}^p_+$ vektor cien výstupov. Pomocou uvedených vektorov "virtuálnych" cien môžeme definovať "virtuálnu" cenu vstupu $\mathbf{x}_j$, ktorej hodnota bude $\mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{v}}_j$ a "virtuálna" cena výstupu $\mathbf{y}_j$ má hodnotu $\mathbf{y}_j^T \hat{\mathbf{v}}_j$.

2.3 Formulácia DEA - modelu

Všeobence sa efektívnosť meria ako pomer výstupu a vstupu. Za jej prirodzenú vlastnosť sa považuje, že je menšia alebo rovná 1. Ak sa chceme vyjadrovať a počítať v percentách znamená to, že môže byť najviac 100%. Efektívnosť budeme určovať ako pomer hodnoty výstupu a vstupu. Relatívnu efektívnosť $DMU_j \quad j = 1, \ldots, n$ definujeme ako funkciu virtuálnych cien takto:

$$E_j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{y}_j^T \mathbf{u}}{\mathbf{x}_j^T \mathbf{v}}.$$

Za efektívne budeme považovať tie DMU, ktoré patria do množiny

$$E = \{DMU_j \mid E_j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1;\ j = 1, \ldots, n\}$$

pre nejaké $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} > 0$. Použijeme ostrú nerovnosť, pretože ak existuje cena rovná 0, tak toto spôsobuje problémy pri interpretácii výsledkov. Tieto problémy nastanú, ak prijmeme platnosť pravidla známeho v ekonomickej teórii ako "no free lunch". Ceny $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ sa budeme snažiť určiť za podmienok $E_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq 1$ pre každé $r = 1, \ldots, n$, pretože bez týchto podmienok by $E_j(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ bolo neohraničené. Na zistenie efektívnosti DMU_j sformulujume úlohu

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p_+, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m_+} \{E_j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid E_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq 1;\ r = 1, \ldots, n, \mathbf{u} > 0, \mathbf{v} > 0\} \tag{2.1}$$

a to pre každé $j = 1, \ldots, n$. Označme $(\hat{\mathbf{u}}_j, \hat{\mathbf{v}}_j)$ optimálne riešenie j-tej úlohy, potom hodnota $E_j(\hat{\mathbf{u}}_j, \hat{\mathbf{v}}_j)$ je mierou efektívnosti $DMU_j \quad j = 1, \ldots, n$.

Ak $E_j(\hat{\mathbf{u}}_j, \hat{\mathbf{v}}_j) = 1$ tak DMU_j je považovaná za efektívnu. Súbor úloh (2.1) sa nazýva DEA model. Na vykonanie analýzy je nutné vyriešiť všetky úlohy obsiahnuté v modeli. Neorientovaný model, ktorý sme práve zostrojili, je zameraný len na zistenie efektívnosti. Poznamenávame, že pri rozbore orientovaných modelov sa ukáže, že táto podmienka je len nutnou ale nie postačujúcou.

2.4 Formulácia DEA - modelu pomocou Lineárneho Programovania

Nezvyčajnou vlastnosťou úlohy (2.1) je výskyt funkcie $E_j(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ako účelovej funkcie aj ako jedného z ohraničení. Takto formulovaná úloha je úlohou zlomkového programovania. Funkcia $E_j(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je homogénna v premennej $\mathbf{v}$, preto pridaním normalizačnej podmienky $\mathbf{x}_j^T \mathbf{v} = 1$ môžeme transformovať túto úlohu na úlohu lineárneho programovania. Vznikne nasledovná úloha:

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^p, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^m} \{\mathbf{y}_j^T \mathbf{u} \mid \mathbf{x}_j^T \mathbf{v} = 1, \mathbf{y}_r^T \mathbf{u} - \mathbf{x}_r^T \mathbf{v} \leq 0, \mathbf{u} \geq 0, \mathbf{v} \geq 0,\ r = 1, \ldots, n\}. \tag{2.2}$$

Táto úloha sa nazýva vstupne orientovaný CCR model, pretože ju odvodili A. Charnes, W.W. Cooper a E.L. Rhodes, pomocou normovania hodnoty vstupov $\mathbf{x}_j^T \mathbf{v} = 1$. Za efektívnu sa považuje DMU_j , pre ktorú platí $E_j(\hat{\mathbf{u}}_j, \hat{\mathbf{v}}_j) = 1$ a $\mathbf{u} > 0, \mathbf{v} > 0$. Použitie ostrých podmienok je zdôvodnené typom úloh, pretože každá úloha sa snaží maximalizovať efektívnosť práve jednej DMU. Nulová cena znamená, že daný vstup alebo výstup sa zanedbá. Ak tieto nulové ceny potlačia nepriaznivé vstupy alebo výstupy može sa takáto DMU stať efektívnou.

Kapitola 3

Geometrický prístup k tvorbe DEA – modelov

3.1 Odvodenie DEA modelov

V tejto časti uvedieme iný prístup k tvorbe DEA – modelov. Tento prístup sa označuje ako analýza hranice (frontier analysis). Jednotlivé DMU_j , $j = 1, \ldots, n$ umiestnime do vstupno–výstupného priestoru $\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p_+$. Vytvoríme množinu P "produkčných možností", ktorá obsahuje všetky DMU_j a tie, ktoré budú ležať na hranici F množiny P, budeme považovať za efektívne. Mierou neefektívnosti bude ich vzdialenosť od hranice F.

V mikroekonomickej teórii je množina prípustných produkčných plánov (production possibility set) danej technológie určená ako konvexná množina:

$$P = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p_+ \mid \mathbf{x} \text{ vyprodukuje } \mathbf{y}\}.$$

Produkčné možnosti vstupu $\mathbf{x}$ sú rezom konvexnej množiny P, preto tvoria konvexnú množinu:

$$P(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p_+ \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in P\}.$$

Množinu F vytvoríme z hraničných bodov množiny P, takých že $\mathbf{x} > 0$ a $\mathbf{y} > 0$. Množinu F nazývame hranicou množiny P, alebo aj hranicou množiny produkčných možností (production possibilty frontier). Hranicou množiny $P(\mathbf{x})$ je množina:

$$F(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in P(\mathbf{x}) \mid \nexists\, \mathbf{y}^* \in P(\mathbf{x}) : \mathbf{y}^* \geq \mathbf{y},\ \mathbf{y}^* \neq \mathbf{y}\}.$$

Hranica $F(\mathbf{x})$ množiny $P(\mathbf{x})$ určuje množinu Paretovsky najlepších hodnôt produkcie. Prepokladajme, že na základe nejakých "vonkajších" kritérií z danej množiny $F(\mathbf{x})$ vyberieme práve jeden bod $\mathbf{y} \in F(\mathbf{x})$. Týmto sme definovali produkčnú funkciu $f : \mathbb{R}^m_+ \rightarrow \mathbb{R}^p_+$ prislúchajúcu k určitej technológii, ktorá priraďuje každej hodnote vstupu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m_+$ hodnotu výstupu $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

Produkčná funkcia $f(\mathbf{x})$ má konštantné výnosy z rozsahu (Constant Returns to Scale),čo budeme označovať CRS, ak:

$$\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p_+ \text{ a } \xi \geq 0 : f(\xi\mathbf{x}) = \xi f(\mathbf{x}).$$

Ak rovnosť neplatí, budeme hovoriť o premenlivých výnosoch z rozsahu (Variable Returns to Scale), tento prípad budeme označovať VRS. Môžu nastať dva špeciálne prípady:

$$f(\xi\mathbf{x}) \begin{cases} \leq \xi f(\mathbf{x}) & \forall \xi \geq 0 \quad \text{tzv. nerastúce výnosy z rozsahu} \\ \geq \xi f(\mathbf{x}) & \forall \xi \geq 0 \quad \text{tzv. neklesajúce výnosy z rozsahu} \end{cases}$$

V našej analýze budeme predpokladať, že všetky organizačné jednotky používajú tú istú technológiu. Pomocou produkčnej funkcie $f(\mathbf{x})$ môžeme zostrojiť množinu produkčných možností:

$$P^{'} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p_+ \mid \mathbf{y} \leq f(\mathbf{x})\}.$$

Jednotlivé DMU_j sú realizáciami technológie, preto táto množina obsahuje $DMU_j\ ,\ \ j = 1, \ldots, n$. Tie DMU_j , pre ktoré $\mathbf{y}_j = f(\mathbf{x}_j)$ označujeme ako efektívne, t.j. efektívne DMU ležia v množine

$$F^{'} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p_+ \mid \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}.$$

Treba si všimnúť, že $P^{'} \subset P,\ F^{'} \subset F$.

Pre našu analýzu je potrebné zostrojiť množinu F. Avšak zozbierané dáta obsahujú len súbor $DMU_j\ ,\ j = 1, \ldots, n$, produkčnú funkciu $f(\mathbf{x})$ nepoznáme a musíme sa uspokojiť s jej aproximáciou pomocou aproximácie množiny P, pretože nepoznáme ani množinu P. Tu je vhodné začat deliť postup na základe typu výnosov z rozsahu produkčnej funkcie (o tom ako určiť typ výnosov z rozsahu neznámej produkčnej viac v kapitole o základných princípoch modelovania v praxi).

Množinu, ktorou budeme aproximovať množinu P označíme P_A. Podobne ako v [6],[5] bude to najmenšia konvexná množina, ktorá má tieto vlastnosti :

1. $DMU_j = (\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) \in P_A$, pre každé $j \in \{1, \ldots, n\}$
2. $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) \in P_A \Rightarrow \{(\mathbf{x}_j^*, \mathbf{y}_j^*) \in \mathbb{R}_+^{m+p} \mid \mathbf{x}_j \leq \mathbf{x}_j^*, \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}_j^*)\} \subseteq P_A$
   pre $j \in \{1, \ldots, n\}$

Tieto dve vlastnosti nám postačujú na aproximáciu množiny P, ak produkčná funkcia spĺňa predpoklad variabilných výnosov z rozsahu. Ak skúmame produkčnú funkciu s konštantnými výnosmi z rozsahu, tak musíme pridať tretiu podmienku :

3. $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) \in P_A \Rightarrow (c\mathbf{x}_j, c\mathbf{y}_j) \in P_A$ pre každé $c > 0$

Keďže požadujeme aby, $DMU_j \quad j = 1, \ldots, n$ patrili do P_A hovoríme, že P_A je generovaná súborom $DMU_j = (\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) = (x_{1j}, \ldots, x_{mj}, y_{1j}, \ldots, y_{pj})^T$. V prípade variabilných výnosov z rozsahu množina P_A je konvexná polyédrická množina :

$$M_{VRS} = \left\{ (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^p \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq x_i^* & i \in \{1, \ldots, m\} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_{kj}\lambda_j \geq y_k^* & k \in \{1, \ldots, p\} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 & \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n \end{array} \right\}$$

Množina s vlastnosťami (1) až (3) tvorí konvexný polyédrický kužeľ, ktorý možno vyjadriť takto :

$$M_{CRS} = \left\{ (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^p \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq x_i^* & i \in \{1, \ldots, m\} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_{kj}\lambda_j \geq y_k^* & k \in \{1, \ldots, p\} \\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n & \end{array} \right\}$$

V tomto prístupe, za efektívnu budeme považovať takú DMU_j , že:

$$\nexists\, (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in M \;:\; (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \neq (\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) \text{ a } \mathbf{x}_j \geq \mathbf{x}^*,\ \mathbf{y}_j \leq \mathbf{y}^*,$$

kde $M = M_{VRS}$ alebo $M = M_{CRS}$. To znamená, že DMU_j je efektívna ak neexistuje konvexná (konvexná kónická) kombinácia iných DMU_r, $r \neq j$, ktorá by mala nižšie vstupy alebo vyššie výstupy.

Ak úloha (2.1):

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^p_+,\mathbf{v}\in\mathbb{R}^m_+}\{E_j(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mid E_r(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq 1;\ r=1,\ldots,n,\mathbf{u}>\mathbf{0},\mathbf{v}>\mathbf{0}\},$$

má optimálne riešenie $(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}})$, tak riešením je aj $(\alpha\hat{\mathbf{u}},\alpha\hat{\mathbf{v}})$ pre $\alpha>0$, t.j. optimálne riešenia tvoria otvorenú polpriamku začínajúcej v počiatku súradnicovej sústavy a prechádzajúcej nejakým optimálnym riešením. To vysvetľuje, prečo sa o miere efektívnosti $E_j(\mathbf{u},\mathbf{v})$ hovorí ako o radiálnej efektívnosti. Úlohu (2.1) môžeme zmenou tvaru podmienok preformulovať na ekvivalentú úlohu tvaru:

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^p_+,\mathbf{v}\in\mathbb{R}^m_+}\{E_j(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mid \mathbf{y}_r^T\mathbf{u}-\mathbf{x}_r^T\mathbf{v}\leq 0,\mathbf{u}>\mathbf{0},\mathbf{v}>\mathbf{0},\ r=1,\ldots,n\}. \tag{3.1}$$

Pretože účelová funkcia $E_j(\mathbf{u},\mathbf{v})$ sa vyskytuje aj v ohraničeniach úlohy (3.1) je zrejmé, že (3.1) je ekvivalentá úlohe:

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^p_+,\mathbf{v}\in\mathbb{R}^m_+}\{\mathbf{y}_j^T\mathbf{u}-\mathbf{x}_j^T\mathbf{v} \mid \mathbf{y}_r^T\mathbf{u}-\mathbf{x}_r^T\mathbf{v}\leq 0,\mathbf{u}>\mathbf{0},\mathbf{v}>\mathbf{0},\ r=1,\ldots,n\}, \tag{3.2}$$

pretože účelová funkcia sa vyskytuje aj v ohraničeniach, táto nová úloha nadobúda maximum v tom istom bode ako pôvodná úloha. Úlohu transformujeme a môžeme maticovo zapísať:

$$CRS_j^M:\quad \max_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^p_+,\mathbf{v}\in\mathbb{R}^m_+}\quad \begin{array}{l}\mathbf{Y}_j^T\mathbf{u}-\mathbf{X}_j^T\mathbf{v}\\ \mathbf{Y}^T\mathbf{u}-\mathbf{X}^T\mathbf{v}\leq\mathbf{0}\\ \mathbf{u}\geq\mathbf{1},\mathbf{v}\geq\mathbf{1}.\end{array} \tag{3.3}$$

Transformácia spočíva vo zmene ostrých podmienok na neostré. Ak $(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}})$ je optimálnym riešením (3.2), tak škálovaním ho vieme previesť na optimálne riešenie (3.3). Stačí zvoliť $\alpha=\max\{\frac{1}{x_{1j}},\ldots,\frac{1}{x_{mj}},\frac{1}{y_{1j}},\ldots,\frac{1}{y_{pj}}\}$. Ak poznáme optimálne riešenie (3.3), tak násobením α takým, že $0<\alpha<\frac{1}{c}$, $\forall\, c\in\mathbb{N}$, prevedieme podmienky s neostrým ohraničením na podmienky s ostrým ohraničením v úlohe (3.2). Takáto zmena je motiváciou pre riešenie úloh metódami vnútorného bodu, pretože takéto riešenia spĺňajú ostré podmienky. Zmena podmienok $\mathbf{u}>\mathbf{0},\mathbf{v}>\mathbf{0}$ na podmienky $\mathbf{u}\geq\mathbf{1},\mathbf{v}\geq\mathbf{1}$ nám umožnuje skonštruovať duálnu úlohu:

$$CRS_j^E:\quad \min_{\mathbf{s}\in\mathbb{R}^p_+,\mathbf{e}\in\mathbb{R}^m_+,\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^n_+}\quad \begin{array}{l}-(\mathbf{1}^T\mathbf{s}+\mathbf{1}^T\mathbf{e})\\ \mathbf{Y}\lambda-\mathbf{s}=\mathbf{Y}_j\\ -\mathbf{X}\lambda-\mathbf{e}=-\mathbf{X}_j\\ \boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0},\mathbf{e}\geq\mathbf{0},\mathbf{s}\geq\mathbf{0},\end{array} \tag{3.4}$$

pričom sme definovali $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)^T$ a $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)^T$. V úlohe CRS_j^M hľadáme $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, preto sa táto úloha zvykne nazývať problémom multiplikátorov. Vykonanie analýzy obálky dát vyžaduje vyriešiť n problémov, každé z optimálnych riešení $(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j)$ $j = 1, \dots, n$, je normálovým vektorom nadroviny, ktorá prechádza začiatkom súradnicovej sústavy a definuje časť hranice množiny P_A. Táto hranica sa zvykne nazývať obálka dát (data envelope), alebo aj hranica efektívnosti (efficiency frontier) a tie DMU, ktorý ležia na tejto hranici sa nazývajú efektívne, t.j. hodnota účelovej funkcie je rovná 0. Množinu P_A získame ako prienik tých polpriestorov, ktoré sú určené nadrovinami získanými pri riešení problému obálky a obsahujú všetky DMU. Ekonomickou interpretáciou úlohy CRS_j^M po zmene na minimalizačnú úlohu, je úloha o minimalizácii straty. Duálna úloha CRS_j^E k úlohe CRS_j^M sa nazýva problémom obálky. Riešením úlohy CRS_j^E sú vektory $\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{e}, \mathbf{s}$. Vektor $\mathbf{s}$ vyjadruje nedostatok výstupov (output slack) a vektor $\mathbf{s}$ sa nazýva prebytok vstupov (input excess). V úlohe CRS_j^E sú ohraničenia formulované v tvare rovností, ktoré odvodíme z ohraničení množiny M_{CRS} pridaním doplnkových premenných do nerovností. Takto z vyjadrenia množiny M_{VRS} odvodíme úlohu:

$$
\begin{aligned}
VRS_j^E : \quad \min_{\mathbf{s}\in\mathbb{R}_+^p, \mathbf{e}\in\mathbb{R}_+^m, \boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}_+^n} \quad & -(\mathbf{1}^T\mathbf{s} + \mathbf{1}^T\mathbf{e}) \\
& \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s} = \mathbf{Y}_j \\
& -\mathbf{X}\lambda - \mathbf{e} = -\mathbf{X}_j \\
& \mathbf{1}^T\boldsymbol{\lambda} = 1 \\
& \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0},
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

čo je duálna úloha k úlohe:

$$
\begin{aligned}
VRS_j^M : \quad \max_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^p, \mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^m, \omega\in\mathbb{R}} \quad & \mathbf{Y}_j^T\mathbf{u} - \mathbf{X}_j^T\mathbf{v} + \omega \\
& \mathbf{Y}^T\mathbf{u} - \mathbf{X}^T\mathbf{v} + \mathbf{1}^T\omega \leq \mathbf{0} \\
& \mathbf{u} \geq \mathbf{1}, \mathbf{v} \geq \mathbf{1}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Tak isto v prípade konštantných výnosov z rozsahu aj v tomto prípade bude množina M_{VRS} tvorená prienikom polpriestorov. Rozdiel oproti množine M_{CRS} je, že hranicu M_{VRS} nemusia tvoriť len nadroviny prechádzajúce počiatkom súradnicovej sústavy. Tvar množiny závisí od voľby obmedzenia pre parameter omega

$$
\omega \begin{cases} \in \mathbb{R} & \text{f má variabilné výnosy z rozsahu} \\ \leq 0 & \text{f má neklesajúce výnosy z rozsahu} \\ \geq 0 & \text{f má nerastúce výnosy z rozsahu} \end{cases}
$$

Zaujímavým zistením je, že účelová funkcia je vlastne mierou vzdialenosti DMU_j k rovine, ktorá je určená rovnicou

$$\mathbf{Y}_j^T\mathbf{u} - \mathbf{X}_j^T\mathbf{v} + \mathbf{1}^T\omega = 0$$

Výsledkom riešenia n úloh, ale nemusí byť n rôznych nadrovín, pretože nadrovina, ktorá prislúcha efektívnej DMU_j , može byť najbližšou nadrovinou pre niektorú s neefektívnych DMU_j . Optimálne riešenie problému $CRS_E(3.4)$ $(VRS_E(3.5))$ pre DMU_j pozostáva z vektorov $\mathbf{s}_j, \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\lambda}_j$. Použitím vlastností duality pre optimálne riešenie zistíme, že:

$$\forall\ \lambda_{jr} > 0\ r = 1, \ldots, n \text{ platí } \mathbf{u}_j^T\mathbf{Y}_r - \mathbf{v}_j^T\mathbf{X}_r + \omega_j = 0,$$

pričom λ_{jr} je r–tá zložka vektora $\boldsymbol{\lambda}_j$. To znamená, že bod $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ leží v nadrovine s normálou $(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j)$, teda pre $r \in \{r \mid \mathbf{u}_j^T\mathbf{Y}_r - \mathbf{v}_j^T\mathbf{X}_r + \omega_j = 0\}$ je DMU_r efektívne a rovina $\mathbf{u}_j^T\mathbf{y} - \mathbf{v}_j^T\mathbf{x} + \omega_j = 0$ určuje časť hranice množiny P_A. Vektor $\boldsymbol{\lambda}_j$ určuje bod $(\tilde{\mathbf{x}}_j, \tilde{\mathbf{y}}_j) = \sum_{r=1}^{n} \lambda_{jr}(x_{jr}, y_{jr})$. Tento bod je v prípade premenných výnosov z rozsahu konvexnou kombináciou bodov patriacich do F_A, pre prípad konštantných výnosov z rozsahu je to lineárna kombinácia. Ak $\lambda_{jj} = 1$ a $\lambda_{jr} = 0$ pre každé $r \neq j$, tak toto signalizuje, že DMU_j patrí do F_A, t.j. je efektívna. To znamená $(\tilde{\mathbf{x}}_j, \tilde{\mathbf{y}}_j) = (\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$. Ak je DMU neefektívna, t.j. nepatrí do množiny F_A, tak bod $(\tilde{\mathbf{x}}_j, \tilde{\mathbf{y}}_j)$ môžeme považovať za priemet bodu $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ do množiny F_A, keďže z (3.8) vyplýva, že $(\tilde{\mathbf{x}}_j, \tilde{\mathbf{y}}_j) \in F_A$.

Riešenia problémov CRS_E a VRS_E dávajú návod ako vyjadriť DMU_j ako kombináciu DMU, patriacich do množiny F_A, pretože F_A je akýmsi obalom všetkých DMU_j vo vstupno–výstupnom priestore, preto sa tieto úlohy nazývajú problémami obálky (envelopment problem). Z vlastností komplementarity primárnej a duálnej úlohy lineárneho programovania vyplýva:

$$\begin{array}{lll} s_{jr} > 0 & \Rightarrow & u_{jr} = 1 \quad r = 1, \ldots, p \\ e_{jr} > 0 & \Rightarrow & v_{jr} = 1 \quad r = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Výsledkom takéhoto geometrického prístupu, ktorý sa snaží "obaliť" všetky DMU pomocou množiny F_A sú okrem nadrovín, ktoré určujú množinu F_A aj jednotlivé priemety DMU_j do množiny F_A. Práve body $(\tilde{\mathbf{x}}_j, \tilde{\mathbf{y}}_j)$ a $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ sú základom pre konštrukcie mier efektívnosti. Keďže $(\tilde{\mathbf{x}}_j, \tilde{\mathbf{y}}_j)$ leží v nadrovine určenej pomocou $\mathbf{u}_j,\ \mathbf{v}_j,\ \omega_j$, tak :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j^T\mathbf{Y}_j - \mathbf{v}_j^T\mathbf{X}_j + \omega_j + 0 &= (\mathbf{u}_j^T\mathbf{Y}_j - \mathbf{v}_j^T\mathbf{X}_j + \omega_j) - (\mathbf{u}_j^T\tilde{\mathbf{Y}}_j - \mathbf{v}_j^T\tilde{\mathbf{X}}_j + \omega_j) = \\ &= -\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{Y}}_j - \mathbf{Y}_j) - \mathbf{v}_j^T(\mathbf{X}_j - \tilde{\mathbf{X}}_j) = -\mathbf{u}_j^T\mathbf{s}_j - \mathbf{v}_j^T\mathbf{e}_j \leq 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Hodnota tohto výrazu zodpovedá rozdielu medzi DMU_j a jej obrazom v premietaní do F_A určenom pomocou vektora $(-\mathbf{e}, \mathbf{s})$. Úpravou rovnosti (3.7) získame:

$$\mathbf{u}_j^T(\mathbf{Y}_j + \mathbf{s}_j) - \mathbf{v}_j^T(\mathbf{X}_j - \mathbf{e}_j) + \omega_j = \mathbf{u}_j^T\tilde{\mathbf{Y}}_j - \mathbf{v}_j^T\tilde{\mathbf{X}}_j + \omega_j = 0, \tag{3.8}$$

z čoho vyplýva, že premietnutý bod leží v rovine určenej normálovým vektorov $(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j)$ a skalárom ω_j.

3.2 Orientované DEA modely

V predchádzajúcej kapitole sme odvodili neorientované modely, t.j. pri zisťovaní priemetu bodu $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ do hraničnej množiny sme neuprednostnili žiaden špeciálny smer premietania. Optimálne riešenie problému multiplikátorov pre DMU_j sme označili $(\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_j)$. Vybraním iného spôsobu konštrukcie bodu $(\tilde{\mathbf{x}}_j, \tilde{\mathbf{y}}_j)$ dáme základ konštrukciám iných typov DEA–modelov. Týmto sa môžeme lepšie prispôsobiť konkrétnemu prípadu, pre ktorý pripravujeme analýzu. Okrem zistenia miery efektívnosti, na základe polohy DMU_j a hranice množiny efektívnosti môžeme urobiť rozhodnutia, ktoré ovplyvnia efektívnosť DMU_j . Ak chceme na základe analýzy prijať rozhodnutia o tom, ako zlepšiť efektívnosť DMU_j a nemáme možnosť ovplyniť vstupy, ale iba výstupy DMU_j , tak premietanie určíme pomocou $(0, \mathbf{s}_j)$. Výsledkom bude bod $\tilde{\mathbf{y}}_j = \mathbf{y}_j + \mathbf{s}_j$ vo výstupnom priestore. Nový bod $(\mathbf{x}_j, \tilde{\mathbf{y}}_j)$ má vyššiu efektívnosť:

$$E_j(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j, \mathbf{x}_j, \tilde{\mathbf{y}}_j) = \frac{\mathbf{u}^T\tilde{\mathbf{y}}_j}{{\mathbf{v}_j}^T\mathbf{x}_j} = \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{y}_j + \mathbf{u}^T\mathbf{s}}{{\mathbf{v}_j}^T\mathbf{x}_j} \geq \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{y}_j}{{\mathbf{v}_j}^T\mathbf{x}_j} = E_j(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j).$$

Podobne, ak môžeme ovplyniť len veľkosť vstupov, premietanie na hranicu určíme pomocou vektora $(-\mathbf{e}_j, 0)$ a získame nový bod:
$(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{y}_j) = (\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) + (-\mathbf{e}_j, 0)$, pričom získaný bod má vyššiu efektívnosť:

$$E_j(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j, \tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{j}, \mathbf{y}_j) = \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{y}_j}{{\mathbf{v}_j}^T\tilde{\mathbf{x}}_j} = \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{y}_j}{{\mathbf{v}_j}^T\mathbf{x}_j - {\mathbf{v}_j}^T\mathbf{e}_j} \geq \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{y}_j}{{\mathbf{v}_j}^T\mathbf{x}_j} = E_j(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j).$$

Premietanie na hranicu množiny P_A môžeme vykonať tak, že budeme proporcionálne maximalizovať postup v smere znižovania vstupov alebo v smere zvyšovania výstupov. Proporčnú zmenu vyjadríme pomocou skalárou

$\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R},\ 0 \leq \alpha_j \leq 1,\ 0 \leq \beta_j$. Takto získané body musia patriť do množiny P_A. Premietnutie do množiny F_A vykonáme pomocou neproporčnej zmeny vyjadrenej pomocou vektorov $\boldsymbol{\delta_j} \in \mathbb{R}^m_+$ a $\boldsymbol{\sigma_j} \in \mathbb{R}^p_+$.

$$\tilde{\mathbf{X}}_j = \mathbf{X}_j - \alpha_j \mathbf{X}_j - \boldsymbol{\sigma_j} = (1-\alpha_j)\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\sigma_j} \geq \mathbf{0},$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{Y}_j + \beta_j \mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\delta_j} = (1-\beta_j)\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\delta_j} \geq \mathbf{0}.$$

Proporčná zmena je vykonaná, tak aby sa aspoň jeden zo vstupov alebo výstupov dostal na hranicu efektívnosti, čo sa prejaví aj tak, že aspoň jedna zložka vektorov $\boldsymbol{\delta}_j, \boldsymbol{\sigma}_j$ je rovná nule. Toto nám pomôže určiť proporčnú zmenu:

$$\alpha_j = \min_{r=1,\ldots,m} \frac{X_{rj} - \tilde{X}_{rj}}{X_{rj}} \geq 0,$$
$$\beta_j = \min_{r=1,\ldots,p} \frac{Y_{rj} - \tilde{Y}_{rj}}{Y_{rj}} \geq 0,$$

$\tilde{X}_{rj}$ a $\tilde{Y}_{rj}$ prislúchajú bodu $(\tilde{\mathbf{X}}_j, \tilde{\mathbf{Y}}_j)$. Zmenu vyjadríme pomocou vektorov:

$$\mathbf{e}_j = \alpha_j \mathbf{X}_j + \boldsymbol{\sigma}_j, \quad \mathbf{s}_j = \beta_j \mathbf{Y}_j + \boldsymbol{\delta}_j \ .$$

Dosadením tohto do (3.7) dostávame:

$$\begin{aligned} -\mathbf{u}_j^T \mathbf{s}_j - \mathbf{v}_j^T \mathbf{e}_j = -\alpha_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{X}_j - \beta_j \mathbf{u}_j^T \mathbf{Y}_j \\ -\mathbf{v}_j^T \boldsymbol{\sigma}_j - \mathbf{u}_j^T \boldsymbol{\delta}_j. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Z tohto vyjadrenia je zrejmé, akú časť neefektívnosti môžeme vylepšiť proporčnou zmenou a aká zostáva na neproporčnú neefektívnosť. Pomocou proporčnej zmeny určenej α_j, β_j môžeme zostrojiť nové body:

$$(\mathbf{X}_j^*, \mathbf{Y}_j) = ((1-\alpha_j)\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j),$$

$$(\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j^*) = (\mathbf{X}_j, (1+\beta_j)\mathbf{Y}_j),$$

pre ktoré platí:

$$(\tilde{\mathbf{X}}_j, \tilde{\mathbf{Y}}_j) = (\mathbf{X}_j^*, \mathbf{Y}_j) + (-\boldsymbol{\delta}_j, \mathbf{0}),$$

$$(\tilde{\mathbf{X}}_j, \tilde{\mathbf{Y}}_j) = (\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j^*) + (\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}_j).$$

Práve tu sa môžeme rozhodnúť, či sa zameriame na proporcionálne znižovanie vstupov alebo výstupov. Vstupná orientácia, zameraná na znižovanie vstupov, hľadá takú projekciu, že α_j je maximálne. Podobne výstupná orientácia hľadá takú projekciu, že proporčný parameter β_j je maximalizovaný.

Výsledkom týchto projekcií sú body $((1-\alpha_j)\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j)$ pri vstupnej orientácii a $(\mathbf{X}_j, (1+\beta_j)\mathbf{Y}_j)$ pri výstupnej orientácii. Tieto projekcie požadujú určenie maximálnych hodnôt parametrov α_j, β_j a vektorov $\boldsymbol{\delta}_j, \boldsymbol{\sigma}_j$.

Takýto postup je odvôvodnený tým, že proporčná zmena zachováva vstupno–výstupné pomery. To má za následok, že technológia, opísaná produkčnou funkciou, zostáva približne rovnaká. Maximalizáciou proporčných zmien sa snažíme minimalizovať zmeny technológie. To znamená, že výsledky analýzy sú ľahko aplikovateľné v praxi.

Označme $\theta_j = 1-\alpha_j$, $\phi_j = 1+\beta_j$. Potom maximalizácia α_j je ekvivaletná minimalizácii θ_j a β_j dosahuje svoje mimimum práve vtedy, keď ϕ_j nadobúda maximum. Pomocou tejto substitúcie môžeme urobiť transformáciu podmienok pre problém obálky.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s} = \mathbf{Y}_j \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{Y}\lambda - \phi\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\sigma}_j = 0 \\ -\mathbf{X}\lambda - \mathbf{e} = -\mathbf{X}_j \quad &\Rightarrow \quad -\mathbf{X}\lambda + \theta\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\delta}_j = 0 \end{aligned}$$

Riešenie takýchto modelov má dva kroky:

1. – vstupná orientácia, získanie pomocného bodu $(\theta\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j)$, t.j. cieľom je získanie hodnoty parametra θ
   – výstupná orientácia, získanie pomocného bodu $(\mathbf{X}_j, \phi\mathbf{Y}_j)$, t.j. cieľom , je určenie hodnoty parametra ϕ

2. získanie bodu, ktorý je priemetom do F_A pomocou riešenia úloh $CRS_E(\theta_j\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j)$, alebo $CRS_E(\mathbf{X}_j, \phi_j\mathbf{Y}_j)$, alebo $VRS_E(\theta_j\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j)$, alebo $VRS_E(\mathbf{X}_j, \phi_j\mathbf{Y}_j)$

Bod, ktorý takto získame v prvom kroku nemusí byť zhodný s bodom $(\tilde{\mathbf{X}}_j, \tilde{\mathbf{Y}}_j)$. Nasledujúca tabuľka je zhrnutím tohto postupu pre modely, ktoré sme zatiaľ odvodili. Treba si všimnúť, že θ je v prvom kroku premenná, v druhom kroku použijeme hodnotu θ_j, ktorú sme určili v prvom kroku.

Vstupná orientácia:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Prvý krok} & \text{Druhý krok} \\
\hline
VRS(\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j): & VRS_E(\theta_j \mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j): \\
\min_{\theta, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \mathbf{e}} \theta & \min_{\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \mathbf{e}} -(\mathbf{1}^T \mathbf{s} + \mathbf{1}^T \mathbf{e}) \\
\mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s} = \mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s} = \mathbf{Y}_j \\
-\mathbf{X}\lambda + \theta \mathbf{X}_j - \mathbf{e} = \mathbf{0} & -\mathbf{X}\lambda + \theta_j \mathbf{X}_j - \mathbf{e} = \mathbf{0} \\
\mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = 1 & \mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = 1 \\
\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \\
\hline
\end{array}
\tag{3.10}
$$

Výstupná orientácia:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Prvý krok} & \text{Druhý krok} \\
\hline
VRS(\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j): & VRS_E(\mathbf{X}_j, \phi_j \mathbf{Y}_j): \\
\max_{\phi, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \mathbf{e}} \phi & \min_{\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \mathbf{e}} -(\mathbf{1}^T \mathbf{s} + \mathbf{1}^T \mathbf{e}) \\
\mathbf{Y}\lambda - \phi \mathbf{Y}_j - \mathbf{s} = \mathbf{0} & \mathbf{Y}\lambda - \phi_j \mathbf{Y}_j - \mathbf{s} = \mathbf{0} \\
-\mathbf{X}\lambda - \mathbf{e} = -\mathbf{X}_j & -\mathbf{X}\lambda - \mathbf{e} = -\mathbf{X}_j \\
\mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = 1 & \mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = 1 \\
\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \\
\hline
\end{array}
\tag{3.11}
$$

Uvádzame formulácie iba pre model s premenlivými výnosmi z rozsahu, pretože ostané sa líšia iba v ohraničení $\mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = 1$ vyjadrujúcom tvar množiny, toto môže byť nahradené ohraničeniami $\mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} \leq 1$ alebo $\mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} \geq 1$. Pre modely s konštantými výnosmi táto podmienka nie je prítomná.

V dvojkrokovom prístupe sa po prvom kroku pomocou proporcionálnej redukcie dostávame k bodu $(\theta \mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j)$, alebo $(\mathbf{X}_j, \phi \mathbf{Y}_j)$, avšak tento nemusí patriť do množiny F_A. Získaním optimálneho riešenia úlohy v druhom kroku, získame projekciu do množiny F_A. Pre $VRS_E(\mathbf{X}_j, \phi_j \mathbf{Y}_j)$ získame projekciu do množiny F_A v tvare

$$\tilde{\mathbf{X}}_j = \mathbf{X}_j - \mathbf{e}_j, \quad \tilde{\mathbf{Y}}_j = \phi_j \mathbf{Y}_j + \mathbf{s}_j,$$

kde $\mathbf{s}_j$ zodpovedá $\boldsymbol{\sigma}_j$. Podobne pre $VRS_E(\theta_j \mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j)$ získame projekciu do množiny F_A v tvare

$$\tilde{\mathbf{X}}_j = \theta_j \mathbf{X}_j - \mathbf{e}_j, \quad \tilde{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{Y}_j + \mathbf{s}_j,$$

kde $\mathbf{e}_j$ zodpovedá $\boldsymbol{\delta}_j$. Tento dvojkrokový postup sa dá redukovať na postupnosť úloh lineárneho programovania. Keďže ohraničenia sú v oboch krokoch rovnaké, rôzna je len účelová funkcia, môžeme zadefinovaním parametra ϵ ako váhy pre účelovú funkciu druhého kroku, zostrojiť novú účelovú funkciu $\theta - \epsilon(\mathbf{1}^T\mathbf{s} + \mathbf{1}^T\mathbf{e})$, takto transformujeme úlohu (3.10) na (3.12). Podobne vo výstupne orientovanom probléme (3.11) transformujeme účelovú funkciu na: $\phi + \epsilon(\mathbf{1}^T\mathbf{s} + \mathbf{1}^T\mathbf{e})$ a získame úlohu (3.13). Tento postup sa nazýva nearchimediánsky, pretože ϵ musí spĺňať podmienku $0 < \epsilon < \frac{1}{i}, i \in \mathbb{N}$.

Nasledujúca tabuľka uvádza vstupne a výstupne orientované BCC modely, ktoré vo svojej originálnej práci odvodili R.D. Banker, A. Charnes a W.W. Cooper.

Vstupná orientácia:

Primárna úloha	Duálna úloha	
BCC_P^I :	BCC_D^I :	
$\min\limits_{\theta,\boldsymbol{\lambda},\mathbf{s},\mathbf{e}} \theta - \epsilon(\mathbf{1}^T\mathbf{s} + \mathbf{1}^T\mathbf{e})$	$\max\limits_{\mathbf{u},\mathbf{v},\omega} \mathbf{Y}_j^T\mathbf{u} + \omega$	(3.12)
$\mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s} = \mathbf{Y}_j$	$\mathbf{X}_j^T\mathbf{v} = 1$	
$-\mathbf{X}\lambda + \theta\mathbf{X}_j - \mathbf{e} = \mathbf{0}$	$\mathbf{Y}^T\mathbf{u} - \mathbf{X}^T\mathbf{v} + \mathbf{1}^T\omega \leq \mathbf{0}$	
$\mathbf{1}^T\boldsymbol{\lambda} = 1$		
$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{u} \geq \epsilon\mathbf{1}, \mathbf{v} \geq \epsilon\mathbf{1}$	

Výstupná orientácia:

Primárna úloha	Duálna úloha	
BCC_P^O :	BCC_D^O :	
$\max\limits_{\phi,\boldsymbol{\lambda},\mathbf{s},\mathbf{e}} \phi + \epsilon(\mathbf{1}^T\mathbf{s} + \mathbf{1}^T\mathbf{e})$	$\min\limits_{\mathbf{u},\mathbf{v},\omega} \mathbf{X}_j^T\mathbf{v} + \omega$	(3.13)
$\mathbf{Y}\lambda - \phi\mathbf{Y}_j - \mathbf{s} = 0$	$\mathbf{Y}_j^T\mathbf{u} = 1$	
$-\mathbf{X}\lambda - \mathbf{e} = -\mathbf{X}_j$	$\mathbf{Y}^T\mathbf{u} - \mathbf{X}^T\mathbf{v} + \mathbf{1}^T\omega \leq \mathbf{0}$	
$\mathbf{1}^T\boldsymbol{\lambda} = 1$		
$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{u} \geq \epsilon\mathbf{1}, \mathbf{v} \geq \epsilon\mathbf{1}$	

Vstupne a výstupne orientované CCR modely sa líšia len neprítomnosťou podmienky $\mathbf{1}^T\boldsymbol{\lambda} = 1$ v prípadoch CCR_P^O a CCR_P^I a neprítomnosťou ω v prípadoch CCR_D^O a CCR_D^I.

3.3 Modely s dodatočnými ohraničeniami

Použitím rôznych mier pre efektívnosť sa môžeme lepšie prispôsobiť požiadavkám analýzy. Napríklad, ak v modeloch (3.3) a (3.6), zmeníme podmienku $\mathbf{u} \geq \mathbf{1}, \mathbf{v} \geq \mathbf{1}$ na $\mathbf{u} \geq \mathbf{w}_1, \mathbf{v} \geq \mathbf{w}_2$, kde $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}_+^p, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}_+^m$. Dôsledkom čoho sa v duálnych úlohách (3.4) a (3.5) zmení účelová funkcia na $-(\mathbf{w}_1^T\mathbf{s} + \mathbf{w}_2^T\mathbf{e})$. Modely s takouto účelovou funkciou sa nazývajú aditívne modely s váhami. Pomocou týchto ohraničení možeme vyjadriť naše preferencie vstupov alebo výstupov a môžeme tým zabrániť vzniku reálne neinterpretovateľných výsledkov. Váhy môžeme voliť aj v závislosti od vstupných dát určujúcich jednotlivé DMU napríklad takto:

$$\begin{aligned} w_{1k} &= \frac{1}{\sqrt{D(Y^i)}} \quad Y^i = (y_{kj},\ j = 1,\ldots,n),\ k = 1,\ldots,p \\ w_{2i} &= \frac{1}{\sqrt{D(X^k)}} \quad X^k = (x_{ij},\ j = 1,\ldots,n),\ i = 1,\ldots,m \end{aligned}$$

Ak výsledkom analýzy sú virtuálne ceny, ktoré majú príliš veľký rozptyl, spôsobí to problémy pri interpretácií výsledkov v praxi. Aby sme zabránili takýmto problémom, pridáme do modelu ďalších k obmedzujúcich podmienok typu:

$$\mathbf{I}\mathbf{v} + \mathbf{O}\mathbf{u} \leq \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{I}$ je matica typu $k \times m$ a $\mathbf{O}$ je matica typu $k \times p$. Pomocou týchto podmienok vyjadrujeme požiadavky typu: cena vstupu x_{1j} má byť menšia ako cena vstupu x_{2j}, na to aby sme vyjadrili takúto podmienku stačí zvoliť $I_{11} = 1$ a $I_{12} = -1$. Tieto podmienky môžu výrazne znížiť počet DMU, ktoré by v modeloch (3.5) a (3.6) boli označené za efektívne. Uvedieme zmenu primárnej a duálnej len pre neorientovaný model typu VRS. Proces orientácie je rovnaký ako pre už spomenuté modely. V duálnej úlohe, treba zaviesť novú premennú $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$.

Problém multiplikátorov:

$$
\begin{array}{lll}
CVRS_j^M : & \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^p, \mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^m, \omega\in\mathbb{R}} & \mathbf{Y}_j^T\mathbf{u} - \mathbf{X}_j^T\mathbf{v} + \omega \\
& & \mathbf{Y}^T\mathbf{u} - \mathbf{X}^T\mathbf{v} + \mathbf{1}^T\omega \leq \mathbf{0} \\
& & u_r \geq \mathbf{1} \\
& & v_r \geq \mathbf{1} \\
& & \mathbf{Iv} + \mathbf{Ou} \leq \mathbf{0}.
\end{array}
\tag{3.14}
$$

Problém obálky:

$$
\begin{array}{lll}
CVRS_j^E : & \min\limits_{\mathbf{s}\in\mathbb{R}_+^p, \mathbf{e}\in\mathbb{R}_+^m, \mathbf{z}\in\mathbb{R}^k, \boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}_+^n} & -(\mathbf{1}^T\mathbf{s} + \mathbf{1}^T\mathbf{e}) \\
& & \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s} + \mathbf{Oz} = \mathbf{Y}_j \\
& & -\mathbf{X}\lambda - \mathbf{e} + \mathbf{Iz} = -\mathbf{X}_j \\
& & \mathbf{1}^T\boldsymbol{\lambda} = 1 \\
& & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
\tag{3.15}
$$

Špeciálny model môžeme zostrojiť v prípade, ak DMU obsahuje premenné, ktoré nemôže ovplyvniť. Takouto premennou môže byť napríklad množstvo zrážok, alebo priemerná teplota. V tomto prípade môžeme množinu premenných vyjadrujúce vstupy rozdeliť do množín I_o a I_n. Do množiny I_o tie ktoré dokážeme ovplyniť a tie, ktoré nedokážeme ovplyniť do množiny I_n. Platí $I_o \cup I_n = \{1, \ldots, m\}$ a $I_o \cap I_n = \emptyset$. Podobne pre výstupy O_n a O_o, tu tiež platí $O_o \cup O_n = \{1, \ldots, p\}$ a $O_o \cap O_n = \emptyset$. Model vytvoríme tak, že v účelovej funkcii použijeme len tie premenné, ktoré dokáže DMU ovplyvniť. Získame model:

$$
\begin{array}{lll}
VRS_j^E : & \min\limits_{\mathbf{s}\in\mathbb{R}_+^p, \mathbf{e}\in\mathbb{R}_+^m, \boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}_+^n} & -(\sum\limits_{r\in O_o} s_r + \sum\limits_{r\in I_o} e_r) \\
& & \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s} = \mathbf{Y}_j \\
& & -\mathbf{X}\lambda - \mathbf{e} = -\mathbf{X}_j \\
& & \mathbf{1}^T\boldsymbol{\lambda} = 1 \\
& & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
\tag{3.16}
$$

Tento model má duálnu úlohu:

$$
\begin{array}{lll}
VRS_j^M : & \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^p, \mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^m, \omega\in\mathbb{R}} & \mathbf{Y}_j^T\mathbf{u} - \mathbf{X}_j^T\mathbf{v} + \omega \\
& & \mathbf{Y}^T\mathbf{u} - \mathbf{X}^T\mathbf{v} + \mathbf{1}^T\omega \leq \mathbf{0} \\
& & u_r \geq \mathbf{1}, \forall\ r \in O_o \\
& & v_r \geq \mathbf{1}, \forall\ r \in I_o.
\end{array}
\tag{3.17}
$$

Uvádzame len neorientovanú verziu modelov, lebo postup orientácie je zhodný s postupom orientácie modelov (3.5) a (3.6).

V neorientovaných modeloch môžeme zmeniť postup pri určení efektívnosti. Neorientovaným modelom najprv určíme hodnoty e_j, s_j ako riešenia jednotlivých úloh pre každú DMU_j a potom mieru efektívnosti DMU_j určíme ako:

$$E_j = \frac{1}{m+p}\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}-e_{ij}}{x_{ij}} \; + \; \sum_{k=1}^{p} \frac{y_{kj}}{y_{kj}+s_{kj}}\right].$$

Tie DMU_j , ktoré boli klasifikované ako efektívne pomocou neorientovaného modelu, sú efektívne aj v novej miere efektívnosti a naopak. Teda táto nová miera nezmení rozdelenie DMU na efektívne a neefektívne.

V prípade, že model identifikuje príliš veľa DMU s rovnakou hodnotou efektívnosti a chceli by sme rozlíšiť aj medzi týmito jednotkami môžeme zaviesť pre DMU_j ďalšie dve miery a to:

> NO_j – definovanú, ako číslo udávajúce počet úloh, v ktorých bola DMU_j identifikovaná ako efektívna. Vyššia hodnota NO_j určuje vyšší rád efektívnosti DMU_j .
>
> ND_j – definovanú, ako počet DMU, ktoré boli určené ako efektívne pri riešení úlohy pre DMU_j . Ak má DMU_j nižšiu hodnotu ND_j, tak je považované za lepšie ako ostatné DMU, ktoré majú rovnakú hodnotu efektívnosti.

Takúto situáciu je možné riešit aj pomocou analýzy senzitivity na zmenu súboru DMU. Takáto analýza je založená na týchto dvoch tvrdeniach:

- Vynechanie DMU_j zo súboru všetkých DMU, ktorá bola označená ako efektívna, nemôže znížiť efektívnosť zostávajúcich DMU.
- Vynechanie DMU_j , ktorá nebola označená ako efektívna, nemení hodnoty efektívnosti ostatných DMU.

Vynechanie DMU znamená pre model zníženie počtu ohraničení, preto efektívnosť zostávajúcich DMU nemôže klesnúť. Hodnota efektívnosti sa môže zmeniť, len vtedy ak vynecháme aktívne ohraničenie, preto vynechanie neefektívnej DMU, nezmení hodnoty účelovej funkcie ostatných úloh.

3.4 Nelineárne DEA modely

Všetky modely, ktoré sme doteraz odvodili boli založené na po častiach lineárnej aproximácii množiny produkčných možností. Avšak na aproximáciu môžeme použiť aj iné tvary funkcií. Napríklad, okrem lineárnej kombinácie vstupov a výstupov, ako sme uvádzali doteraz, použijeme multiplikatívnu kombináciu vstupov a výstupov, ktorú pomocou logaritmovania tranformujeme do aditívnej formy. Výsledkom bude po častiach logaritmická hranica. Pomocou VRS modelu odvodili Charnes, Cooper, Seiford a Stutz model, ktorý obsahuje logaritmy hodnôt dát. Zápisom $\log(\mathbf{X})$, kde $\mathbf{X}$ je matica, označujeme maticu, ktorej prvky sú logaritmy prvkov matice $\mathbf{X}$.

$$
\begin{aligned}
CD_j^M : \quad \max_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^p, \mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^m, \omega\in\mathbb{R}} \quad & \log(\mathbf{Y}_j)^T\mathbf{u} - \log(\mathbf{X}_j)^T\mathbf{v} + \omega \\
& \log(\mathbf{Y})^T\mathbf{u} - \log(\mathbf{X})^T\mathbf{v} + \mathbf{1}^T\omega \leq \mathbf{0} \\
& \mathbf{u} \geq \mathbf{1}, \mathbf{v} \geq \mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
CD_j^E : \quad \min_{\mathbf{s}\in\mathbb{R}_+^p, \mathbf{e}\in\mathbb{R}_+^m, \boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}_+^n} \quad & -(\mathbf{1}^T\mathbf{s} + \mathbf{1}^T\mathbf{e}) \\
& \log(\mathbf{Y})\lambda - \mathbf{s} = \log(\mathbf{Y}_j) \\
& -\log(\mathbf{X})\lambda - \mathbf{e} = -\log(\mathbf{X}_j) \\
& \mathbf{1}^T\boldsymbol{\lambda} = 1 \\
& \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0}, \mathrm{s} \geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Modely (3.18) a (3.19), sú neorientované. Ich orientáciu neuvádzame, pretože tento postup je identický ako v prípade (3.5) a (3.6).
V súčastnosti sa skúmajú stochastické modely. Na DMU sa hľadí ako na realizácie nahodných premenných. V takejto analýze sú neznáme hustoty $g_{\mathbf{y}_j|\mathbf{x}_{ji}}(\mathbf{y}),\ \ j = 1, \ldots, n$. Hranica množiny produkčných možností je určená

$$F = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^p \mid y_j = \sup\{y \in \mathbb{R}_+ \mid g_{\mathbf{y}_j|\mathbf{x}_{ji}}(\mathbf{y}) > 0, \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^m\}\}.$$

Pre ďalšie informácie pozri [4].

Kapitola 4

Metódy vnútorného bodu

Motiváciou pre použitie metód vnútorného bodu na riešenie úloh lineárneho programovania je typ ohraničení pre premenné modelov. Tieto metódy maximalizujú počet nenulových zložiek vektorov virtuálnych cien $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, ako je uvedené v [10]. Ďalšou výhodou metód vnútorného bodu je nižšia výpočtová zložitosť oproti simplexovým metódam. Existuje niekoľko tried algoritmov vnútorného bodu. Na riešenie modelov sme použili algoritmus patriaci do triedy primárne–duálnych algoritmov.

4.1 Definícia metód vnútorného bodu

Každá úloha lineárneho programovania sa dá pretransformovať na štandardný tvar primárnej úlohy a k nej sa dá vytvoriť duálna úloha v štandardnom tvare:

$$\begin{array}{ll} \text{Primárna úloha} & \text{Duálna úloha} \\ \min\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \max\ \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c} \\ \mathbf{x} \geq 0 & \mathbf{z} \geq 0. \end{array} \tag{4.1}$$

Kde $\mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{A}$ je matica $m \times n$, $A_{ij} \in \mathbb{R}$. Každé riešenie, ktoré vyhovuje ohraničeniam sa nazýva prípustné riešenie.
Množina:

$$S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

sa nazýva množina primárne prípustných riešení. Podobne definujeme množinu duálne prípustných bodov:

$$D = \{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}.$$

Bod $\mathbf{x}$ sa nazýva primárne prípustným vnútorným bodom ak $\mathbf{x} \in S$ a $\mathbf{x} > 0$. Množinu primárne prípustných vnútorných bodov označíme:

$$S^o = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} > \mathbf{0}\}.$$

Podobne zadefinujeme množinu duálne prípustných vnútorných riešení:

$$D^o = \{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{z} > \mathbf{0}\}.$$

Ak sú polyédrické množiny S, D ohraničené, tak sa nazývajú polytopické. Duálna medzera je definovaná ako: $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ a pre prípustné riešenia platí: $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{y} = \mathbf{z}^T\mathbf{x}$.
Úlohy typu (4.1) majú niektorú z týchto vlastností:

1. $S = \emptyset$ a $D = \emptyset$, teda úlohy nemajú prípustné riešenie
2. $S = \emptyset$ alebo $D = \emptyset$, potom $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to -\infty$ alebo $\mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \infty$. To znamená, že jedna z úloh nemá prípustné riešenie a účelová funkcia druhej je neohraničená.
3. existuje konečné prípustné optimálne riešenie $\hat{\mathbf{x}}$ práve vtedy, keď existuje konečné prípustné optimálne riešenie $(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$.

Vlastnosti (2) a (3) sú dôsledkom silnej vety o dualite. Pre optimálne riešenie úloh (4.1) platí: $\mathbf{z}^T\mathbf{x} = 0$.

Úlohy lineárneho programovania možno riešiť pomocou simplexového algoritmu. Simplexový algoritmus hľadá optimálne riešenie vo vrcholoch polyédrickej množiny pomocou presunu po hranách tejto množiny. Pohyb z jedného vcholu do druhého je zabezpečený algoritmom výberom pivota, tak aby účelová funkcia zaznamenala pokles hodnoty. Riešenia získané takýmto spôsobom sa nachádzajú na hranici množiny S. Algoritmy vnútorného bodu hľadajú optimálne riešenia vo vnútri množiny S ako limitu postupnosti optimálnych riešení úloh odvodených z (4.1). Tieto algoritmy generujú nekonečnú postupnosť vnútorných bodov a algoritmus skončí, keď budeme dostatočne blízko optimálneho riešenia. Ak úloha nemá práve jedno optimálne riešenie, metódy vnútorného bodu určia jedno riešenie, ktoré má maximálny súčin kladných zložiek z množiny optimálnych riešení. V takomto prípade simplexové metódy ako riešenie určia vrcholy množiny optimálnych riešení, bázické riešenia.

Metódy vnútorného bodu patria do triedy transformačných metód konvexného programovania. Transformačnou funkciou $T(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ primárnej úlohy (4.1) lineárneho programovania nazývame funkciu, z ktorej možno generovať postupnosť funkcií $T_k(\mathbf{x}), k \in \mathbb{N}$ takú, že:

1. $T_k(\mathbf{x})$ má minimum v $\mathbf{x}_k$ na otvorenej množine S^o takej, že $S^o \subset S$.
2. Postupnosť miním $\{\mathbf{x}_k\}$ konverguje k optimálnemu riešeniu $\{\hat{\mathbf{x}}\}$ primárnej úlohy (4.1).

Príkladom transformačnej funkcie je:

$$T_k^P(\mathbf{x}, \mu_k) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mu_k \sum_{r=1}^{n} \ln(x_r),$$

kde x_r je r–tá zložka vektora $\mathbf{x}$ a postupnosť funkcíí generujeme pomnocou postupnosti $\{\mu_k\}$. Funkciu $-\ln x_r$ nazývame bariérová. Podobne definujeme transformačnú funkciu pre duálnu úlohu:

$$T_k^D(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mu_k) = \mathbf{b}^T\mathbf{y} + \mu_k \sum_{r=1}^{n} \ln(z_r).$$

Transformačné funkcie T_k^P, T_k^D zaručujú, že minimum tranformovaných úloh bude vo vnútri množín prípustných riešení. Pomocou týchto tranformačných funkcií z úloh (4.1) získame úlohy:

$$\begin{aligned} \min\{T_k^P(\mathbf{x}, \mu) \mid \mathbf{x} \in S^o\}, \\ \max\{T_k^D(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mu) \mid (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in D^o\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Hľadanie minima primárnej úlohy (4.1) pomocou postupnosti transformovaných úloh (4.2) prebieha za predpokladu:

$$\forall\ \mu > 0\ \exists\ \mathbf{x}(\mu) \in S^o : T(\mathbf{x}(\mu), \mu) = \min_{\mathbf{x} \in S^o} T(x, \mu), \tag{4.3}$$

kedže $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ je spojitá, tak $\min\limits_{\mathbf{x} \in S} \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \inf\limits_{\mathbf{x} \in S^o} \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Nech $\hat{\mathbf{x}}$ je optimálnym riešením primárnej úlohy (4.1). Transformačné metódy sú založené na platnosti nasledujúcej vety.

Veta 1 *Ak $T_k(\mathbf{x}, \mu_k)$ má vlastnosť (4.3) a $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}^T\mathbf{x} \le C, \mathbf{x} \in S\}$ je ohraničená pre $C \in R$, nech postupnosť: $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}, \mu_k \in \mathbb{R}_+$ konverguje k 0, potom:*

1. $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}(\mu_k) = \hat{\mathbf{x}}$

2. $\lim_{k\to\infty} \mathbf{c}^T\mathbf{x}(\mu_k) = \hat{f}$

3. *navyše ak platí* $\hat{f} < \infty$, *potom* $\lim_{k\to\infty} \mu_k \sum_{r=1}^{n} \ln(x_r) = 0$

Dôkaz je uvedený v [7]. Táto veta zaručuje konvergenciu riešení postupnosti transformovaných úloh k optimálnemu riešeniu pôvodnej úlohy (4.2).

4.2 Riešenie transformovaných úloh

Pomocou logaritmickej bariérovej funkcie transformujeme (4.1) na úlohy:

$$
\begin{array}{ll}
P_{\mu_k}: & D_{\mu_k}: \\
\quad \min\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mu_k \sum_{r=1}^{n} \ln(x_r) & \quad \max\ \mathbf{b}^T\mathbf{y} + \mu_k \sum_{r=1}^{n} \ln(z_r) \\
\qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c} \\
\qquad \mathbf{x} \geq 0 & \qquad \mathbf{z} \geq 0.
\end{array}
\tag{4.4}
$$

Na nájdenie optimálneho riešenia oboch úloh použijeme Lagrangeho funkcie:

$$
\begin{aligned}
L_P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mu_k) &= c^T\mathbf{x} - \mu_k \sum_{r=1}^{n} \ln(x_r) - \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}), \\
L_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mu_k) &= b^T\mathbf{y} - \mu_k \sum_{r=1}^{n} \ln(z_r) - \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{c}).
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Definujme vektor $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ a matice $\mathbf{X}, \mathbf{Z}$, kde $\mathbf{X} = diag(\mathbf{x})$ a $\mathbf{Z} = diag(\mathbf{z})$. Pomocou derivovania získame podmienky prvého rádu pre extrémy Lagrangových funkcií:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_P}{\partial \mathbf{x}} &= 0 = \mathbf{c} - \mu_k \mathbf{X}^{-1}\mathbf{e} - \mathbf{A}^T\mathbf{y}, \\
\frac{\partial L_P}{\partial \mathbf{y}} &= 0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}, \\
\frac{\partial L_D}{\partial \mathbf{x}} &= 0 = \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{c}, \\
\frac{\partial L_D}{\partial \mathbf{y}} &= 0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}, \\
\frac{\partial L_D}{\partial \mathbf{y}} &= 0 = \mu_k \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{e}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Substitúciou za $\mathbf{c}$ pomocou $\mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}$ v $\dfrac{\partial L_P}{\partial \mathbf{x}}$:

$$\frac{\partial L_P}{\partial \mathbf{x}} = 0 = \mathbf{z} + \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mu_k \mathbf{X}^{-1}\mathbf{e} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mu_k \mathbf{X}^{-1}\mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{XZe} = \mu_k \mathbf{e},$$

získame ekvivaletnú sústavu rovníc, ktoré určujú nutné podmienky pre extrém:

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{XZe} = \mu_k\mathbf{e} & \text{podmienka komplementarity} \\
\mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \text{primmárna prípustnosť} \\
\mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c} & \text{duálna prípustnosť .}
\end{array} \tag{4.7}$$

Keďže μ_k je fixované v každej iterácii, môžeme systém riešiť a tieto riešenia budú závislé od hodnoty μ_k. Teraz môžeme zadefinovať centrálnu trajektóriu ako množinu:

$$\Lambda(\mu) = \{(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{y}(\mu), \mathbf{z}(\mu)) : x_r z_r = \mu, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, 1 \le r \le n\},$$

kde $\mu > 0$. Body centrálnej trajektórie sú "centrované" vzhľadom na primárnu a duálnu hranicu. Ani jeden z x_r, z_r nemôže byť blízko hranice, kde $x_r = 0, z_r = 0$.

4.3 Primárne–duálne metódy vnútorného bodu

Primárne–duálny algorimtmus na riešenie úloh (4.1) v každej iterácii dodržuje primárnu aj duálnu prípustnosť, pričom sa snaží minimalizovať veľkosť duálnej medzery. Výsledkom každej iterácie je riešenie primárnej a duálnej úlohy. I keď to vyzerá, že náročnost tohto algorimtmu je veľká, výpočtová náročnosť je menšia ako keby sme riešili primárnu a duálnu úlohu samostatne. Optimálne riešenie $\mathbf{x}(\mu_k)$ sa nazýva centrované a množina takýchto bodov pre rôzne μ_k sa nazýva centrálna trajektória. Primárne–duálny algoritmus, ktorý použijeme patrí do skupiny tzv. "path following" algoritmov, pretože riešenie každej iterácie leží na centrálnej trajektórii.

Základná algoritmická schéma primárne–duálneho algroritmu:

1. $k := 0,\ \mu_k = \mu_0 > 0$
2. Nájdenie $\mathbf{x}(\mu_k)$, že $T(\mathbf{x}_k, \mu_k) = \min\{T(\mathbf{x}, \mu) \mid \mathbf{x}\}$
3. Vytvorenie $\mu_{k+1} = \alpha\mu_k,\ \alpha < 1,\ k = k+1$. Opakovanie 2) a 3) až kým $\mu_k \to 0$. Čo v praxi znamená, až kým $\mu_k \leq \epsilon$. Kde ϵ je nami zvolená konštanta.

Budeme sa venovať druhému kroku algoritmickej schémy. Predpokladajme, že matica A má hodnosť rovnú m a poznáme nejaké prípustné riešenia problémov $P_{\mu_{k+1}}, D_{\mu_{k+1}}$. Takéto $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ môžeme získať z predchádzajúcej iterácie. Označme $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}_k, \mathbf{y}^0 = \mathbf{y}_k, \mathbf{z}^0 = \mathbf{z}_k$. Na získanie riešenia, ktoré bude spĺňať aj podmienku komplementarity pre μ_{k+1} použijeme Newtonovu iteračnú metódu. Smery postupu budú určené vektormi $d\mathbf{x}, d\mathbf{y}, d\mathbf{z}$. Smery skonštruované Newtonovou iteračnou metódou určujú lineárnu aproximáciu centrálnej trajektórie. Nové riešenia:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{+1} &= \mathbf{x}^0 + d\mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{+1} &= \mathbf{y}^0 + d\mathbf{y} \\ \mathbf{z}^{+1} &= \mathbf{z}^0 + d\mathbf{z} \end{aligned} \tag{4.8}$$

musia tiež spĺňať podmienky primárnej a duálnej prípustnosti. Dosadením (4.8) do (4.7) a zanedbaním súčinu $d\mathbf{x}^T d\mathbf{z}$ získame nasledovnú sústavu lineárnych rovníc s neznámymi $d\mathbf{x}, d\mathbf{y}, d\mathbf{z}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^T & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{x} \\ d\mathbf{y} \\ d\mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_k\mathbf{e} - \mathbf{XZe} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Pri odvodení tejto sústavy sme použili prípustné riešenia. V nami použitom algoritme vynecháme tento predpoklad. To spôsobí, že budeme musieť pridať ďalšie podmienky pre chyby prípustnosti. Riešením systému rovníc (4.9) získame riešenia v tvare:

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= -(\mathbf{A}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Z}^{-1}(\mu_k\mathbf{e} - \mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{e}) \\ d\mathbf{z} &= -\mathbf{A}^T d\mathbf{y} \\ d\mathbf{x} &= \mathbf{Z}^{-1}(\mu\mathbf{e} - \mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{e}) - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{X}d\mathbf{z} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Aby riešenie dosiahnuté v tejto iterácii spĺňalo podmienky $\mathbf{x} > 0,\ \mathbf{z} > 0$, zavedieme ďalšie parametre. Parametre $\alpha_P,\ \alpha_D$, určujú maximálny prípustný krok v danom smere. Definujeme ich :

$$\begin{aligned} \alpha_P &= \max\left\{ \frac{x_{kr}}{dx_{kr}} : \forall\ dx_{kr} < 0,\ 1 \le r \le n \right\}, \\ \alpha_D &= \max\left\{ \frac{z_{kr}}{dz_{kr}} : \forall\ dz_{zr} < 0,\ 1 \le r \le n \right\}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Keby sme na tvorbu nového riešenia použili vektory $\alpha_P d\mathbf{x}, \alpha_D d\mathbf{y}, \alpha_D d\mathbf{z}$, nové riešenie bude síce prípustné, ale nebude vnútorným bodom množiny prípustných riešení. Preto zavedieme parameter $\rho,\ 0 < \rho < 1$, ktorým redukujeme maximálny prípustný krok.
Takýto prípustný primárne–duálny algoritmus môžeme zhrnúť do nasledovnej schémy:

1. k:=0, majme prípustné riešenie $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0)$
2. určenie μ_k
3. určenie smerov $d\mathbf{x},\ d\mathbf{y},\ d\mathbf{z}$ z (4.10)
4. nájdenie parametrov $\alpha_P,\ \alpha_D$ maximálneho prípustného kroku
5. vytvorenie riešenia k–tej iterácie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \rho\alpha_P d\mathbf{x} \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \rho\alpha_D d\mathbf{y} \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{z}_k + \rho\alpha_D d\mathbf{z} \end{aligned} \tag{4.12}$$

6. Ak sú splnené kritéria konca iteračného procesu tak koniec, ináč k=k+1 a GOTO 2

Možnosti tvorby rôznych typov primárne–duálnych algoritmov mám dáva tvorba rôznych kritérii presnosti, tvorba postupnosti centrovacích parametrov μ_k a voľba paramtra ρ.

4.4 Mehrotrov predictor-corrector algoritmus

V predchádzajúcej časti sme odvodili základnú algoritmickú schému primárne–duálneho algoritmu. Nevýhodou uvedeného algoritmu je nutnosť získať aspoň jedno prípustné riešenie úloh (4.1). Mehrotrov algoritmus odstránil podmienku prípustného riešenia, preto patrí do triedy "neprípustných" primárne–duálnych algoritmov (infeasible primal–dual).

Zadefinujeme vektory chýb (error vectors) $\boldsymbol{\xi}^x \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\xi}^z \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_k^x &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}, \\ \boldsymbol{\xi}_k^z &= \mathbf{A}^T\mathbf{y}_k + \mathbf{z}_k - \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Označme $\mathbf{Z}_k^{-1}\mathbf{X}_k$ ako $\mathbf{D}_k$, kde $\mathbf{Z}_k = diag(\mathbf{z}_k)$ a $\mathbf{X}_k = diag(\mathbf{x}_k)$ sú kladné diagonálne matice rozmeru $n \times n$. Matica $\mathbf{D}_k = diag\left(\frac{x_r}{z_r}, 1 \leq r \leq n\right)$ sa nazýva primárne–duálna škálovacia matica. Pridáme predpoklad pre centrálnu trajektóriu:

$$\forall\ \mu_k > 0 : \Lambda(\mu_k) \neq \emptyset.$$

Z centrálnej trajektórie odvodíme pojem primárne–duálnej (neprípustnej) trajektórie. Definujme primárne–duálnu trajektóriu ako množinu:

$$\Gamma(\mu, \boldsymbol{\xi}_k^x, \boldsymbol{\xi}_k^z) = \left\{ (\mathbf{x}(\mu), \mathbf{y}(\mu)\mathbf{z}(\mu)) \;\middle|\; \begin{array}{r} \mathbf{X}(\mu)\mathbf{z}(\mu) = \mu\mathbf{X}_k\mathbf{z}_k \\ \mathbf{A}\mathbf{x}(\mu) = \mathbf{b} + \mu\boldsymbol{\xi}_k^x \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y}(\mu) + \mathbf{z}(\mu) = \mathbf{c} + \mu\boldsymbol{\xi}_k^z \\ \mathbf{x}(\mu) \geq 0,\ \mathbf{z}(\mu) \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Trajektória začína v bode, kde platí $\mathbf{x} > 0, \mathbf{z} > 0$ a smeruje k optimálnemu riešeniu úloh (4.1). Algoritmus používa na určenie smeru prvú a druhú deriváciu. Pomocou týchto derivácií skonštrujeme Taylorov polynóm druhého stupňa, ktorým aproximujeme primárne–duálnu trajektóriu. Algoritmus obsahuje test na primeranosť redukcie hodnoty účelovej funkcie. Tento test je vykonaný pomocou funkcie (4.28), ktorá ohodnocuje polohu bodu voči hranici množiny prípustných riešení. Vlastnosťou tejto funkcie je, že v každej iterácii môže byť redukovaná konštantným pomerom, za podmienky existencie prípustného riešenia. Túto vlastnosť využijeme pri konštrukcii podmienok pre skončenie iteračného procesu. Sledovaním postupností hodnôt tejto funkcie môžeme identifikovať prípad, keď úloha (4.1) nemá prípustné riešenia.

Najprv uvedieme schému algoritmu, jednotlivé kroky algoritmu vzápätí vysvetlíme a zdôvodníme.. Algoritmus má dve hlavné časti: určenie štarto-

vacieho bodu a samotný iteračný cyklus.
Algoritmická schéma Mehrotrovho algoritmu:

Štart Konštrukcia štartovacieho bodu $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ takého, že $\mathbf{x}_0 > 0,\ \mathbf{z}_0 > 0$, parametra μ_0 a nastavenie počítadla $k = 0$

Cyklus Pokiaľ nie sú splnené podmienky skončenia algoritmu opakuj:

(a) Inicializácia vektorov chýb a škálovacej matice:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_k^x &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b},\\ \boldsymbol{\xi}_k^z &= \mathbf{A}^T\mathbf{y}_k + \mathbf{z}_k - \mathbf{c}\\ \mathbf{D}_k &= (\mathbf{Z}_k)^{-1}\mathbf{X}_k\end{aligned}$$

(b) Výpočet prvej derivácie primárne–duálnej trajektórie

$$\begin{aligned}d^1\mathbf{y} &= (\mathbf{A}\mathbf{D}_k\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{D}_k\boldsymbol{\xi}_k^x)\\ d^1\mathbf{z} &= \boldsymbol{\xi}_k^z - \mathbf{A}^T d^1\mathbf{y}\\ d^1\mathbf{x} &= \mathbf{x}_k - \mathbf{D}_k d^1\mathbf{z}\end{aligned}$$

(c) Určenie centrovacieho parametra μ_k

(d) Výpočet druhej derivácie primárne–duálnej trajektórie pomocou pomocného vektora $\boldsymbol{\nu}$:

$$\begin{aligned}\nu_r &= -2 * ((d^1\mathbf{x})_r(d^1\mathbf{z})_r - \mu_k)/(\mathbf{z}_k)_r,\ \ r = 1, 2, \ldots, n\\ d^2\mathbf{y} &= (\mathbf{A}\mathbf{D}_k\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\nu}\\ d^2\mathbf{z} &= \mathbf{A}^T d^2\mathbf{y}\\ d^2\mathbf{x} &= \boldsymbol{\nu} - \mathbf{D}_k d^2\mathbf{z}\end{aligned}$$

(e) Určenie parametrov α_x, α_z maximálneho prípustného kroku pozdĺž krivky určenej pomocou Taylorovho polynómu druhého stupňa (4.22)

(f) Výpočet prípustných smerov:

$$\begin{aligned}d\mathbf{z} &= \alpha_z d^1\mathbf{z} - \tfrac{1}{2}{\alpha_z}^2 d^2\mathbf{z}\\ d\mathbf{y} &= \alpha_z d^1\mathbf{y} - \tfrac{1}{2}{\alpha_z}^2 d^2\mathbf{y}\\ d\mathbf{x} &= \alpha_x d^1\mathbf{x} - \tfrac{1}{2}{\alpha_x}^2 d^2\mathbf{x}\end{aligned}$$

(g) Výpočet škálovacích parametrov: ρ_x, ρ_z.

(h) Konštrukcia testovacieho bodu $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}_k - \rho_x d\mathbf{x} \\ \mathbf{y}^* &= \mathbf{y}_k - \rho_z d\mathbf{y} \\ \mathbf{z}^* &= \mathbf{z}_k - \rho_z d\mathbf{z} \end{aligned}$$

(i) Test bodu $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$, či zaručuje prijateľný postup pri hľadaní riešenia. Ak áno, tak :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}^* \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{z}^*, \end{aligned}$$

zvýšenie počítadla $k = k + 1$. Ak nie, tak sa použije nejaký "iný" spôsob výpočtu bodu $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$.

Algoritmická schéma Mehrotrovho "predictor–corrector" algoritmu je odvodená zo všeobecnej schémy primárne–duálneho algorimtu vnútorných bodov. Keďže tento algoritmus patrí do triedy neprípustných algoritmov obsahuje niekoľko zmien, ktorým sa budeme venovať podrobnejšie. Teraz sa budeme podrobnejšie venovať jednotlivým krokom alogorimtu:

Konštrukcia štartovacieho bodu

Najprv určíme vektory :

$$\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{c},\ \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{y}},\ \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b} \tag{4.13}$$

a skaláre

$$\delta_x = \max\{-1.5 \min_{1\le r\le n}\{\tilde{x}_r\}, 0\} \ge 0,$$

$$\delta_z = \max\{-1.5 \min_{1\le r\le n}\{\tilde{z}_r\}, 0\} \ge 0.$$

Z tohto určíme:

$$\tilde{\delta_x} = \delta_x + 0.5\frac{(\tilde{\mathbf{x}} + \delta_x\mathbf{1})^T(\tilde{\mathbf{z}} + \delta_z\mathbf{1})}{\sum_{r=1}^n(\tilde{z_r} + \delta_z)} > 0,$$

$$\tilde{\delta_z} = \delta_z + 0.5\frac{(\tilde{\mathbf{x}} + \delta_x\mathbf{1})^T(\tilde{\mathbf{z}} + \delta_z\mathbf{1})}{\sum_{r=1}^n(\tilde{x_r} + \delta_x)} > 0.$$

Zostrojíme štartovacie body:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_0 &= \tilde{\mathbf{y}}\\ \mathbf{z}_0 &= \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta_z}\mathbf{1}\\ \mathbf{x}_0 &= \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\delta_x}\mathbf{1}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Z uvedeného postupu vyplýva, že ak platí $\delta_z = 0,\ \delta_x = 0$ tak body $\tilde{\mathbf{y}},\ \tilde{\mathbf{z}},\ \tilde{\mathbf{x}}$ sú prípustným riešením úlohy (4.1). Ak navyše platí $\tilde{\mathbf{x}}^T\tilde{\mathbf{z}} = 0$ tak tieto body sú optimálnym riešením problému, ináč platí $\tilde{\mathbf{x}}^T\tilde{\mathbf{z}} > 0$ a to znamená, že $\tilde{\delta_z} > 0,\ \tilde{\delta_x} > 0$. Z konštrukcie vyplýva, že: $\mathbf{z}_0 = \tilde{\mathbf{z}}+\tilde{\delta_z}\mathbf{1} > 0,\ \mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\delta_x}\mathbf{1} > 0$. Uvažujme ešte prípad $\delta_z > 0,\ \delta_x = 0$. Aby platilo $\delta_x = 0$ musí platiť $x_r = 0$ pre každé $r,\ 1 \le r \le n$, teda z (4.13) vyplýva: $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Teda úloha sa redukuje na nájdenie prípustného riešenia duálnej úlohy. Analogicky ak $\delta_z = 0,\ \delta_x > 0$.

Výhodou takéhoto postupu je invariantnosť bodov $\mathbf{y}_0,\ \mathbf{z}_0,\ \mathbf{x}_0$ voči násobeniu matice ohraničení $\mathbf{A}$ a vektorov $\mathbf{b},\ \mathbf{c}$ nenulovým skalárom. Rôzne štartovacie body možno škonštruovať zmenou konštánt "1.5" a "0.5", "1.5" môžeme nahradiť ľubovolnou konštantou väčšou ako 1 a "0.5" môžme nahradiť ľubovolnou kladnou konštantou.

Teraz sa budeme podrobne venovať jednotlivým krokom cyklu s podmienkou na začiatku. Tieto podmienky okrem testovania presnosti riešenia obsahujú aj kontrolu maximálneho počtu iterácií, čo zaručuje konečnosť algoritmu.

(a) Inicializácia vektorov chýb a škálovacej mnatice

Keďže algoritmus pracuje s neprípustnými bodmi, musíme v každej iterácii určiť vektory chýb. Matica $\mathbf{D}_k$ sa nazýva škálovacia matica, jej určenie mám zníži počet násobením matíc v každej iterácii.

(b) Výpočet prvej derivácie

Skúmajme pre $\mathbf{x}_k > 0, \mathbf{z}_k > 0$ a $\mathbf{y}_k$ nasledujúci parametrický systém závislý od parametra $\mu,\ 0 \le \mu$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{X}(\mu)\mathbf{z}(\mu) = \mu\mathbf{X}_k\mathbf{z}_k\\ &\mathbf{A}\mathbf{x}(\mu) = \mathbf{b} + \mu\boldsymbol{\xi}_k^x\\ &\mathbf{A}^T\mathbf{y}(\mu) + \mathbf{z}(\mu) = \mathbf{c} + \mu\boldsymbol{\xi}_k^z\\ &\mathbf{x}(\mu) \ge 0,\ \mathbf{z}(\mu) \ge 0\end{aligned} \tag{4.15}$$

Nech $\mathbf{w}(\mu) = (\mathbf{x}(\mu), \mathbf{y}(\mu), \mathbf{z}(\mu))$ je riešením (4.15) pre dané μ. Pre riešenie $\mathbf{w}(\mu)$ platí veta:

Veta 2 *Ak systém (4.15) má riešenie $\mathbf{w}(\mu)$ pre $\mu = 0$, potom má riešenie pre každé $\mu \in [0, 1]$. Toto riešenie je jednoznačné pre každé $\mu \in (0, 1]$.*

Dôkaz je uvedený v [8]
Derivácia $\partial\mathbf{w}(\mu)/\partial\mu$ trajektórie $\mathbf{w}(\mu)$ je určená ako riešenie derivovaného systému (4.15) :

$$\mathbf{Z}(\mu)\frac{\partial\mathbf{x}(\mu)}{\partial\mu} + \mathbf{X}(\mu)\frac{\partial\mathbf{z}(\mu)}{\partial\mu} = \mathbf{X}_k\mathbf{z}_k,$$

$$\mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{x}(\mu)}{\partial\mu} = \boldsymbol{\xi}_k^x, \tag{4.16}$$

$$\mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{y}(\mu)}{\partial\mu} + \frac{\partial\mathbf{z}(\mu)}{\partial\mu} = \boldsymbol{\xi}_k^z.$$

Riešením (4.16) pre $\mu = 1$ je:

$$\frac{\partial\mathbf{y}(1)}{\partial\mu} = -(\mathbf{ADA}^T)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{AD}\boldsymbol{\xi}_k^z),$$

$$\frac{\partial\mathbf{z}(1)}{\partial\mu} = \boldsymbol{\xi}_k^z - \mathbf{A}^T\frac{\partial\mathbf{y}(1)}{\partial\mu}, \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial\mathbf{x}(1)}{\partial\mu} = \mathbf{x}_k - \mathbf{D}\frac{\partial\mathbf{z}(1)}{\partial\mu}.$$

V ďalšom budeme označovať $\frac{\partial\mathbf{y}(1)}{\partial\mu} = d^1\mathbf{y}$, $\frac{\partial\mathbf{z}(1)}{\partial\mu} = d^1\mathbf{z}$, $\frac{\partial\mathbf{x}(1)}{\partial\mu} = d^1\mathbf{x}$. Krok určený pomocou týchto smerov sa nazýva afine–škálovací krok (affine–scaling step).

(c) Určenie centrovacieho parametra μ_k

V kroku (b) sme skonštruovali smer vychádzajúci z bodu $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k)$ za účelom aproximácie smeru idúceho k optimálnemu riešeniu. Rýchlosť konvergencie k optimálnemu riešeniu závisí od toho ako dobre Taylorov polynóm nízkeho stupňa aproximuje trajektóriu idúcu do optimálneho riešenia. Tejto snahe podriadime voľbu parametra μ_k a zároveň v tomto kroku urobíme odhad ϵ_A^x, ϵ_A^z pre parametre ϵ_x, ϵ_z. Na to použijeme tento heuristický postup:

1.

$$l_x = argmin\left\{\frac{(\mathbf{x}_k)_r}{(d^1\mathbf{x})_r} \mid (d^1\mathbf{x})_r > 0\right\}, \quad \epsilon_A^x = \min\left\{\frac{(\mathbf{x}_k)_{l_x}}{(d^1\mathbf{x})_{l_x}}, 1\right\}$$

$$l_z = argmin\left\{\frac{(\mathbf{z}_k)_r}{(d^1\mathbf{z})_r} \mid (d^1\mathbf{z})_r > 0\right\}, \quad \epsilon_A^z = \min\left\{\frac{(\mathbf{z}_k)_{l_x}}{(d^1\mathbf{z})_{l_z}}, 1\right\}$$

2. $mdg = (\mathbf{x}_k - \epsilon_A^x d^1\mathbf{x})^T(\mathbf{z}_k - \epsilon_A^z d^1\mathbf{z})$

3. $\mu_k = \dfrac{\mathbf{x}_k^T\mathbf{z}_k}{n}\left(\dfrac{mdg}{\mathbf{x}_k^T\mathbf{z}_k}\right)^v$

4. $ef = \dfrac{(d^1\mathbf{x})^T\mathbf{D}^{-1}(d^1\mathbf{x}) + (d^1\mathbf{z})^T\mathbf{D}(d^1\mathbf{z})}{\mathbf{x}_k^T\mathbf{z}_k}$

5. Ak $ef > 1.1 \Rightarrow \mu_k = \mu_k/\min\{\epsilon_A^x, \epsilon_A^z\}$

Parameter $v \in \mathbb{N}$ sa zvyčajne volí rovný 1. Väčšie hodnoty už nemajú taký výrazný vplyv na zníženie počtu iterácií. Pomer $\frac{mdg}{\mathbf{x}_k^T\mathbf{z}_k}$ je indikárom dobrej aproximácie primárne–duálnej trajektórie. Ak je blízko 1, znamená to, že lokálna aproximácia nie je dobrá, naopak ak je blízko 0 tak táto aproximácia je dobrá.

(d) Výpočet druhej derivácie primárne–duálnej trajektórie Derivovaním systému (4.16) získame druhú deriváciu systému (4.15):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\mathbf{x}(\mu))_r}{\partial\mu}\frac{\partial^2(\mathbf{z}(\mu))_r}{\partial\mu^2} + 2\frac{\partial(\mathbf{x}(\mu))_r}{\partial\mu}\frac{\partial(\mathbf{z}(\mu))_r}{\partial\mu} + \frac{\partial^2(\mathbf{x}(\mu))_r}{\partial\mu^2}\frac{\partial(\mathbf{z}(\mu))_r}{\partial\mu} = 0,\\
&\hspace{20em} r = 1, 2, \ldots, n,\\
&\mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{x}(\mu)}{\partial\mu^2} = \mathbf{0},\\
&\mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{y}(\mu)}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\mathbf{z}(\mu)}{\partial\mu^2} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Položme:

$$u_r = -2\left(\frac{\partial\mathbf{x}(1)}{\partial\mu}\right)_r\left(\frac{\partial\mathbf{z}(1)}{\partial\mu}\right)_r,\ r = 1, 2, \ldots, n$$

Potom pre $\mu = 1$ je riešenie sústavy (4.18) má tvar:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\mathbf{y}(1)}{\partial\mu^2} &= -(\mathbf{A}\mathbf{X}_k\mathbf{Z}_k^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Z}_k^{-1}\mathbf{u},\\
\frac{\partial^2\mathbf{z}(1)}{\partial\mu^2} &= \mathbf{A}^T\frac{\partial^2\mathbf{y}(1)}{\partial\mu^2},\\
\frac{\partial^2\mathbf{z}(1)}{\partial\mu^2} &= \mathbf{Z}_k^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{Z}_k^{-1}\mathbf{X}_k\frac{\partial^2\mathbf{z}(1)}{\partial\mu^2},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Označením $\mathbf{Z}_k^{-1}\mathbf{X}_k = \mathbf{D}_k$ a centrovaním $\mathbf{u}$ pomocou μ_k získame:

$$\nu_r = -2\left(\left(\frac{\partial\mathbf{x}(1)}{\partial\mu}\right)_r\left(\frac{\partial\mathbf{z}(1)}{\partial\mu}\right)_r - \mu_k\right)/(\mathbf{z}_k)_r,\ r = 1,2,\ldots,n,$$

a potom (4.18) môžeme transformovať na tvar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathbf{y}(1)}{\partial\mu^2} &= -(\mathbf{A}\mathbf{D}_k\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\nu},\\ \frac{\partial^2\mathbf{z}(1)}{\partial\mu^2} &= \mathbf{A}^T\frac{\partial^2\mathbf{y}(1)}{\partial\mu^2},\\ \frac{\partial^2\mathbf{z}(1)}{\partial\mu^2} &= \boldsymbol{\nu} - \mathbf{D}_k\frac{\partial^2\mathbf{z}(1)}{\partial\mu^2}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

V ďalšom budeme označovať $\dfrac{\partial^2\mathbf{y}(1)}{\partial\mu^2} = d^2\mathbf{y}$, $\dfrac{\partial^2\mathbf{z}(1)}{\partial\mu^2} = d^2\mathbf{z}$, $\dfrac{\partial^2\mathbf{x}(1)}{\partial\mu^2} = d^2\mathbf{x}$. Krok $(d^2\mathbf{x}, d^2\mathbf{y}, d^2\mathbf{z})$ sa nazýva centrujúci krok (corrector-centering step). Derivácie $\mathbf{w}(\mu)$ vyššieho rádu získame postupným derivovaním systému (4.16) a jeho derivácií. Bod $\mathbf{w}(1-\epsilon),\ 0 < \epsilon < 1$, môžeme aproximovať Taylorovým polynómom j–tého rádu:

$$\mathbf{w}(1-\epsilon, j) = \mathbf{w}(1) + \sum_{r=1}^{j}\frac{(-\epsilon)^r}{r!}\frac{\partial^j\mathbf{w}(1)}{\partial\mu^r}.\tag{4.21}$$

Mehrotrov algoritmus používa Taylorov polynóm stupňa 2. Prvú deriváciu určíme v cykle v kroku (b) a druhú v kroku (d). Voľbou dĺžky kroku ϵ môžeme ovplyvniť výkonnosť celého algorimtu. My budeme voliť ϵ, tak aby sa zachovala prípustnoť riešení, preto budeme mať dva parametre ϵ_x, ϵ_z jeden pre primárnu a druhý pre duálnu úlohu.

(e) Určenie parametrov maximálne prípustného kroku

Zostrojíme aproximačné polynómy druhého rádu:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\epsilon^x) &= \mathbf{x}_k - \epsilon^x d^1\mathbf{x} + (\epsilon^x)^2 d^2\mathbf{x},\\ \mathbf{z}(\epsilon^z) &= \mathbf{z}_k - \epsilon^z d^1\mathbf{z} + (\epsilon^z)^2 d^2\mathbf{z}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Riešením kvadratických rovníc $\mathbf{x}(\epsilon^x) = \mathbf{0},\ \mathbf{z}(\epsilon^z) = \mathbf{0}$ nájdeme $\alpha^x,\ \alpha^z$ také, že:

$$\begin{aligned}\alpha^x &= \max_{\epsilon}\{0 \le \epsilon \le 1,\ \mathbf{x}(\epsilon)\text{je prípustné}\},\\ \alpha^z &= \max_{\epsilon}\{0 \le \epsilon \le 1,\ \mathbf{z}(\epsilon)\text{je prípustné}\}.\end{aligned}$$

(f) Konštrukcia prípustných smerov
Pomocou smerov získaných prvou deriváciou $d^1\mathbf{x}, d^1\mathbf{y}, d^1\mathbf{z}$ a druhou deriváciou $d^2\mathbf{x}, d^2\mathbf{y}, d^2\mathbf{z}$ a parametrov $\alpha_x,\ \alpha_z$. Určíme prípustné smery:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \alpha_x d^1\mathbf{x} - \tfrac{1}{2}(\alpha_x)^2 d^2\mathbf{x} \\ d\mathbf{y} &= \alpha_z d^1\mathbf{y} - \tfrac{1}{2}(\alpha_z)^2 d^2\mathbf{y} \\ d\mathbf{z} &= \alpha_z d^1\mathbf{z} - \tfrac{1}{2}(\alpha_z)^2 d^2\mathbf{z} \end{aligned} \tag{4.23}$$

(g) Výpočet škálovacích parametrov dĺžky kroku
Tieto koeficienty sa zvyčajne volia rovné 0.95 alebo 0.995. V praxi sa ukázalo výhodnejšie meniť tieto koeficienty počas iteračného procesu. Na ich určenie použijeme nasledovný postup:

1. Určíme pomocné premenné:

$$\begin{aligned} l_x &= argmin \left\{ \frac{(\mathbf{x}_k)_r}{(d\mathbf{x})_r} \mid (d\mathbf{x})_r > 0 \right\}, \\ l_z &= argmin \left\{ \frac{(\mathbf{z}_k)_r}{(d\mathbf{z})_r} \mid (d\mathbf{z})_r > 0 \right\} \end{aligned}$$

2. Určenie parametrov ρ_x, ρ_z:

$$\rho_x = \max\left\{ \frac{1}{(d\mathbf{x})_{l_x}} \left[(\mathbf{x}_k)_{l_x} - \frac{(\mathbf{x}_k - d\mathbf{x})^T(\mathbf{z}_k - d\mathbf{z})}{n\nu_a} \frac{1}{(\mathbf{x}_k)_{l_x} - (d\mathbf{z})_{l_x}} \right], \nu_\rho \right\},$$

$$\rho_z = \max\left\{ \frac{1}{(d\mathbf{z})_{l_z}} \left[(\mathbf{z}_k)_{l_z} - \frac{(\mathbf{z}_k - d\mathbf{z})^T(\mathbf{x}_k - d\mathbf{z})}{n\nu_a} \frac{1}{(\mathbf{z}_k)_{l_z} - (d\mathbf{x})_{l_z}} \right], \nu_\rho \right\}$$

Parametrom $0 < \nu_\rho < 1$ sa zaisťujeme voči použitiu veľmi malých alebo "záporných" smerov. Koeficient dĺžky kroku sa v primárnom priestore vyberá tak, aby premenná $(\mathbf{x})_{l_x}$ a jej zodpovedajúca duálna premenná mali súčin približne rovnaký ako keby boli na centrálnej trajektórii, kde hodnota duálnej medzery je rovná $(\mathbf{x} - d\mathbf{x})^T(\mathbf{z} - d\mathbf{z})/(n\nu_a),\ \nu_a > 1$. Prakticky sa volí hodnota $\nu_a = 1/(1-\nu_\rho)$. V [8] je uvedené, že počet iterácií je relatívne necitlivý na zmeny parametrov $\nu_a,\ \nu_\rho$.

(h) Konštrukcia testovacieho bodu $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}_k - \rho_x d\mathbf{x} \\ \mathbf{y}^* &= \mathbf{y}_k - \rho_z d\mathbf{y} \\ \mathbf{z}^* &= \mathbf{z}_k - \rho_z d\mathbf{z} \end{aligned}$$

(i) Test bodov na primeranú redukciu účelovej funkcie

Rôzne smery môžeme skonštruovať pomocou voľby stupňa Taylorovho polynómu (4.21). Pomocou rôznych smerov môžeme určiť rôzne body $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$. Tieto body zabezpečujú redukcie účelovej funkcie a veľkosti vektorov chýb o rôzne hodnoty. Preto zadefinujeme funkciu, ktorou budeme merať veľkosť redukcie účelovej funkcie a vektorov chýb. Na základe hodnoty tejto funkcie sa rozhodneme, či získaný bod zabezpečuje dostatočný postup pri hľadaní optimálneho riešenia. Túto hodnotu budeme porovnávať s hodnotami v predchádzajúcich iteráciach, čo nám umožní sledovať iteračný proces. Špeciálnou vlastnosťou, ktorú budeme od funkcie požadovať je, že jej hodnota sa dá v každej iterácii konštantne redukovať faktorom menším ako jedna. Ak hodnota vhodnostnej funkcie nových funkčných bodoch nie je redukovaná s takýmto faktorom oproti predchádzajúcej iterácii, použijeme inú metódu výberu nových bodov, napríklad zvýšenie stupňa aproximačného polynómu, alebo použijeme metódu podmienených konjugovaných gradientov na riešenie systému (4.16). Neexistencia bodov, ktoré takto redukujú vhodnostnú funkciu, môže poslúžiť na zistenie, či úlohy majú prípustné riešenie. Táto časť sa v niektorých variáciach algoritmu vynecháva výmenou za rýchlejšie generovanie iterácií.

Nech $\mathbf{x}_0 > 0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0 > 0$ sú dané body a vektory chýb sú: $\boldsymbol{\xi}_0^x = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}_0^z = \mathbf{A}^T\mathbf{y}_0 + \mathbf{z}_0 - \mathbf{c}$. Riešenie systému úloh (4.1) je ekvivalentné riešeniu úlohy:

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\lambda} \lambda \\
&\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\xi}_0^x = \mathbf{b} \\
&\mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} - \lambda\boldsymbol{\xi}_0^z = \mathbf{c} \\
&\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{y} + \lambda(\mathbf{b}^T\mathbf{y}_0 - \mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 = 0 \\
&\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{z} \geq 0, \lambda \geq 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Prípustným vnútorným riešením takéhoto systému je $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0, 1)$. Nech $\mathbf{W}$ je matica, ktorej stĺpce sú bázou nulového priestoru matice $\mathbf{A}$. Násobme maticou $[\mathbf{A}^T : \mathbf{W}]^T$ druhú a tretiu podmienku v úlohe (4.24) a vyjadrime vektor $\mathbf{y}$ ako :

$$\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{A}\mathbf{z} + \lambda\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_0^z).$$

Získame tak ekvivalentú úlohu k úlohe (4.24):

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\lambda} \lambda \\
&\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\xi}_0^x = \mathbf{b} \\
&\mathbf{W}^T\mathbf{z} - \lambda\mathbf{W}^T\boldsymbol{\xi}_0^z = \mathbf{W}^T\mathbf{c} \\
&\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{b}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{z} + \lambda\boldsymbol{\xi}_0^A = \mathbf{b}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{c} \\
&\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{z} \geq 0, \lambda \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

kde

$$
\boldsymbol{\xi}_0^A = (\mathbf{b}^T\mathbf{y}_0 - \mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_0^z).
$$

Uvažujme vhodnostnú funkciu definovanú ako:

$$
F(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \lambda) = \rho \ln \lambda - \sum_{r=1}^{n} \ln x_r z_r, \tag{4.26}
$$

kde $\rho = 2n + \sqrt{2n+1}$. V [8] je dokázané, že hodnota tejto funkcie môže byť v každom prípustnom riešení (4.25) redukovaná koeficientom 0.25. Označme $\boldsymbol{\xi}_k = ((\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k)^T, (\mathbf{c} - \mathbf{z}_k)^T\mathbf{W}, (\mathbf{b}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{c} - \mathbf{z}_k) - \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k))^T$. Pre $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k, \lambda_k$ a $\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1}, \lambda_{k+1}$ prípustné riešenia (4.25) platí:

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1}, \lambda_{k+1}) - F(\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k, \lambda_k) &= \rho \ln \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \sum_{r=1}^{n} \ln \frac{(\mathbf{x}_{k+1})_r(\mathbf{z}_{k+1})_r}{(\mathbf{x}_k)_r(\mathbf{z}_k)_r} = \\
&= \rho \ln \frac{\|\mathbf{Q}\boldsymbol{\xi}_{k+1}\|}{\|\mathbf{Q}\boldsymbol{\xi}_k\|} - \sum_{r=1}^{n} \ln \frac{(\mathbf{x}_{k+1})_r(\mathbf{z}_{k+1})_r}{(\mathbf{x}_k)_r(\mathbf{z}_k)_r},
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

pre nejakú regulárnu maticu $\mathbf{Q}$ rozmeru $(n+1)\times(n+1)$. Dôležitou vlastnosťou je, že funkcia tvaru:

$$
G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi}_k) = \rho \ln \|\mathbf{Q}\boldsymbol{\xi}_k\| - \sum_{r=1}^{n} \ln x_r z_r
$$

má tiež vlastnosť, že môže byť konštantne redukovaná faktorom 0.25 v každej iterácii. Ak je splnená podmienka konštantnej redukcie funkčnej hodnoty v každej iterácii, tak toto zaručuje ohraničenosť $\sum_{r=1}^{n} \ln x_r z_r$. Ak nedokážeme redukovať funkčnú hodnotu tak primárna alebo duálna úloha nemá riešenie. Nemožnosť takejto redukcie spozorujeme ako prudký nárast hodnoty funkcie (4.27) počas vykonávania iteračného cyklu.

Mehrotrov algoritmus používa vhodnostnú funkciu:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) = \rho \ln \|\boldsymbol{\xi}\| - \sum_{r=1}^{n} \ln x_r z_r, \tag{4.28}$$

kde vektor $\boldsymbol{\xi} = (\kappa_x \boldsymbol{\xi}^{xT}, \kappa_z \boldsymbol{\xi}^{zT}, \boldsymbol{\xi}^{A})^T$, a kde κ_x, κ_z sú konštanty určené ako: $\kappa_x = 100 * \max_{1 \le r \le n} \{(\mathbf{z}_0)_r\}$, $\kappa_z = 100 * \max_{1 \le r \le n} \{(\mathbf{x}_0)_r\}$.

4.5 Použitý algorimtus

Náš program riešiaci úlohy lineárneho programovania súvisiace s DEA–modelmi je založený na procedúrach z Optimization Technology Center v Argonne National Laboratory a Northwestern University. Tento balík procedúr, z ktorého sa dá zostaviť funkčný program na riešenie úloh lineárneho programovania sa nazýva "PCx linear solver" [11]. Najväčšia časť zdrojového kódu je napísaná v jazyku C. Časť kódu zaoberajúca sa riešením riedkych sústav lineárnych rovníc pomocou Choleského algoritmu je naprogramovaná Esmond G. Ng a Barry W. Peytonom v jazyku Fortran 77. Procedúry sú naprogramovné modulárne, preto sa nevyskytol väčší problém s ich modifikáciou a ich použitím (pri dodržaní štruktúry dát predávaných medzi procedúrami). Oproti klasickému Mehrotrovmu predictor–corrector algoritmu [8], ktorý sme uviedli v (4.4), obsahuje implementovaný algoritmus niekoľko zmien, ktoré stručne opíšeme.

4.5.1 Presolver

Základnou požiadavkou primárne–duálneho algoritmu je aby matica $\mathbf{A}$ mala plnú hodnosť. Na zabezpečenie tejto požiadavky použijeme procedúry súhrnne označené ako "presolver". Presolver to zabezpečí vylučovaním lineárne závislých riadkov a elimináciou jednoznačne určených premenných. Tieto úpravy znižujú rozmer matice ohraničení, preto sú vhodné aj pri použití simplexového algoritmu. Procedúra vykonáva nasledovné úpravy matice:
Neprípustnosť. Kontrola, či nulovému riadku v matici $\mathbf{A}$ zodpovedá nulová zložka vo vektore pravej strany a riadku kde sa vysktytujú len záporné koeficienty zodpovedá záporný koeficient vo vektore $\mathbf{b}$.
Nulový riadok. Vynechaním nulového riadku, ktorému zodpovedá nulový koefiecient na pravej strane sa môže vynechať a tým znížiť rozmer.

Rovnaké riadky. Ak v matici sú dva riadky, z ktorých je jeden len nenulovým násobkom druhého môžeme jeden z nich vynechať.
Rovnaké stĺpce. Ak jeden stĺpec je násobkom iného, jeden z nich môžeme vylúčiť. Typ ohraničenia takto získanej premennej sa určí podľa typu ohraničení pôvodných premenných.
Fixovaná premenná. Ak horné aj dolné ohraničenie premennej sú rovnaké, takúto premennú môžeme vylúčiť a jej hodnotu určíme z ohraničení.
Určená premenná. Ak riadok matice obsahuje jedinú nenulovú hodnotu, premenú možno určiť a vyradiť z úlohy.

Presolver cyklicky prebieha cez zadanú maticu ohraničení a snaží sa vykonať niektorú s úprav. Presolver skončí svoju činnost ak prejde celú maticu a nevykoná žiadnu úpravu matice. Celková úprava je výrazne menej výpočtovo náročná ako jedna iterácia algoritmu vnútorného bodu. Program obsahuje možnosť nepoužitia presolveru.

4.5.2 Škálovanie matice ohraničení

Dôležitou časťou algoritmu sú výpočty inverzných matíc k maticiam $\mathbf{AD}_k\mathbf{A}^T$, ktoré sa počítajú v každej iterácii algoritmu. Pomocou škálovania prvkov matice $\mathbf{A}$ sa dá znížiť číslo podmienenosti matice $\mathbf{AD}_k\mathbf{A}^T$ a tým zlepšiť numerické vlastnosti algoritmu. Škálovanie prvkov matice $\mathbf{A}$ sa realizuje technikou Curtisa a Reida. Táto technika má za úlohu minimalizovať odchýlky nenulových prvkov matice $\mathbf{A}$ od 1. Vo všeobecnosti škálovanie vylepší efektívnosť algorimtu, ale sú prípady, pre ktoré to neplatí, preto je možné túto úpravu vynechať. Odchýlky sú merané hodnotou funkcie $\sum_{A_{ij}\neq 0} \log^2|A_{ij}|$. Technika nájde koeficienty ρ_i, $i = 1,2,\dots,m$ pre riadky a ξ_j, $j = 1,2,\dots,n$ pre stĺpce matice, ktorými sa preškálujú prvky matice. Nová matica bude mať prvky $A_{ij}/(\rho_i\xi_j)$. Vektory koeficientov $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\xi}$ sa určia tak, aby sa minimalizovala hodnota funkcie

$$\varphi(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{A_{ij}\neq 0} \log^2\left|\frac{A_{ij}}{\rho_i\xi_j}\right|.$$

Na určenie koeficientov škálovania sa použije metóda konjugovaných gradientov, ktorá dáva prijateľnú presnosť už po niekoľkých iteráciach.

4.5.3 Podmienky skončenia algoritmu

Algoritmus môže skončiť v jednom zo štyroch stavov:

1. Optimálne riešenie bolo dosiahnuté s vopred požadovanou presnosťou.
2. Identifikácia neexistencie prípustného riešenia.
3. Neurčitý stav, t.j. stav, ktorý vopred identifikuje ukončenie algoritmu dosiahnutím maximálneho počtu iterácií.
4. Dosiahnutie maximálneho počtu iterácií, bez toho aby nastal niektorí z predchádzajúcich stavov.

Optimálne riešenie. Algoritmus ukončíme v stave optimálneho riešenia ak sú splnené tieto tri podmienky:

$$\frac{\|\boldsymbol{\xi}_k^x\|}{1+\|\mathbf{b}^T\|} \leq prifeastol, \tag{4.29}$$

$$\frac{\|\boldsymbol{\xi}_k^z\|}{1+\|\mathbf{c}\|} \leq dualfeastol, \tag{4.30}$$

$$\frac{|\mathbf{c}^T\mathbf{x}_k - \mathbf{b}^T\mathbf{y}_k|}{1+|\mathbf{c}^T\mathbf{x}_k|} \leq opttol, \tag{4.31}$$

kde prifeastol, dualfeastol sú tolerancie primárnej a duálnej prípustnosti a opttol je tolerancia rozdielu účelových funkcií primárnej a duálnej úlohy. Tieto hodnoty sú nastavené na hodnotu 10^{-8}, čo sa dá samozrejme zmeniť. Tento stav je vo výstupe programu označený ako "optimal".

Pre stavy (2),(3)a (4) sa vyhodnocuje funkcia:

$$\phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_k^x, \boldsymbol{\xi}_k^z) = \frac{\|\boldsymbol{\xi}_k^x\|}{\max\{1, \|\mathbf{b}\|\}} + \frac{\|\boldsymbol{\xi}_k^z\|}{\max\{1, \|\mathbf{c}\|\}} + \frac{|\mathbf{c}^T\mathbf{x}_k - \mathbf{b}^T\mathbf{y}_k|}{\max\{1, \|\mathbf{b}\|, \|\mathbf{c}\|\}}, \tag{4.32}$$

ktorú použijeme namiesto vhodnostnej funkcie (4.27), ale táto funkcia nemá vlastnosť redukcie konštantným koeficientom za predpokladu existencie optimálneho riešenia. Vlastnosťou tejto funkcie je, že pre optimálne riešenie úlohy (4.1) je jej hodnota rovná 0. Počas iteračného procesu vytvárame pole $\boldsymbol{\phi}$, ktorého k–ty prvok je definovaný:

$$\boldsymbol{\phi}[k] = \min_{r=1,2,\ldots,k} \phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_k^x, \boldsymbol{\xi}_k^z).$$

Teda v poli $\boldsymbol{\phi}$ uchovávame históriu najmenších dosiahnutých hodnôt funkcie $\phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_k^x, \boldsymbol{\xi}_k^z)$, ktoré sa dosiahli počas iteračného procesu.
Neprípustné riešenie. Tento stav má vo výstupe označenie "infeasible" a nastáva ak aspoň jedna z úloh (4.1) nemá prípustné riešenie, potom hovoríme o neprípustnom riešení primárne–duálneho problému. Takéto riešenie sa celkom spoľahlivo dá určiť z prudkého nárastu hodnoty funkcie $\phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_k^x, \boldsymbol{\xi}_k^z)$ počas iteračného procesu. Algoritmus ukončíme v stave neprípustného riešenia v k–tej iterácii, ak test na optimálne riešenie bol neúspešný a platí:

$$\phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_k^x, \boldsymbol{\xi}_k^z) \geq \max\{10^{-8}, 10^5 \boldsymbol{\phi}[k]\}.$$

Neurčitý výsledok. Ak predchádzajúce testy nedokážu nerozhodnúť o optimalite a neprípustnosti, môže nastať prípad, že iteračný proces konverguje veľmi pomaly. Ak platí, že $\phi[k-30] \geq \frac{1}{2}\phi[k],\ k \geq 30$, tak iteračný proces konverguje pomaly. Testovať začíname až po vykonaní tridsiatich iterácií, pretože spočiatku môže funkcia $\phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_k^x, \boldsymbol{\xi}_k^z)$ aj oscilovať. V tomto stave skončíme aj vtedy, ak zmenšovanie hodnoty μ_k výraznejšie neovplyvňuje veľkosť vektorov chýb. Tento stav nastane, ak je splnená podmienka

$$\frac{\max\{\|\boldsymbol{\xi}_k^x\|, \|\boldsymbol{\xi}_k^z\|\}/\mu_k}{\max\{\|\boldsymbol{\xi}_0^x\|, \|\boldsymbol{\xi}_0^z\|\}/\mu_0} \geq 10^6$$

a zároveň nie je splnená aspoň jedna z podmienok (4.30) a (4.29). Tento stav označíme kódom "unknown".
Maximálny počet iterácií. Tento stav nastane ak prekročíme maximálny počet iterácií a označíme ho kódom "suboptimal". Maximálny počet iterácií je nastavený na hodnotu 100.

4.5.4 Maticové operácie

Najviac času pri určení novej iterácie zaberie výpočet matice $\mathbf{M} = \mathbf{ADA}^T$ a k nej inverznej matice. Matica $\mathbf{A}$ problému obálky je v našom prípade DEA-modelov, zložená z niekoľkých blokov. Pre vstupne orientovaný BCC–model má táto matica podmienok rozmer $(m + p + 1) \times (n + 1 + p + m)$ a vyzerá takto:

$$
\begin{pmatrix}
-x_{1j} & \dots & -x_{nj} & x_1j & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-x_{mj} & \dots & -x_{mn} & x_mj & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\
y_{1j} & \dots & y_{nj} & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_{pj} & \dots & y_{pn} & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\
1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}
\tag{4.33}
$$

Niektoré z týchto blokov sú riedke matice. Na uľahčenie výpočtu použijeme metódu Choleského rozkladu. Výsledkom je určenie rozkladu v tvare $\mathbf{P}(\mathbf{ADA}^T)\mathbf{P}^T = \mathbf{LL}^T$, kde $\mathbf{P}$ je permutačná matica závislá od štruktúry rozkladanej matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{L}$ je dolná trojuholníková matica. Kedže štruktúra nenulových prvkov matice $\mathbf{M}$ sa nemení, tak sa nemení ani matica $\mathbf{P}$, preto stačí určiť maticu $\mathbf{P}$ práve raz, a to hneď pri výpočte štartovacieho bodu. V každej primárne–duálnej iterácii sa Choleského rozklad numericky vyjadrí práve raz a potom sa použije pri výpočte afine–škálovacieho a opravne–centrovacieho kroku v bodoch (b) a (d) iteračného cyklu. Označme podmaticu zostávajúca po (i-1) krokoch Choleského rozkladu ako $\mathbf{M}^{(i-1)}$. Prvok $\mathbf{M}_{ii}^{(i-1)}$ je označný ako príliš malý ak $\mathbf{M}_{ii}^{(i-1)} \leq 10^{-30} \max\limits_{1 \leq r \leq m} \mathbf{M}_{rr}^2$. Tieto príliš malé prvky sú nahradené číslom 10^{128}. Toto spôsobí, že prvky mimo diagonály v i–tom stĺpci matice $\mathbf{L}$ Choleského rozkladu budú veľmi malé, oproti hodnotám na diagonále. Dôsledkom tohto bude i–ta zložka vektora, ktorý je riešením, veľmi malá.

Ak matica $\mathbf{A}$ obsahuje stĺpce, ktoré nie sú riedke, výsledkom $\mathbf{ADA}^T$ môže byť hustá matica. V tomto prípade maticu $\mathbf{A}$ rozložíme na "riedke" a "husté" komponenty podľa stĺpcov. Riedke stĺpce označíme $\mathbf{A}_R$ a husté $\mathbf{A}_H$. Teda $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_R : \mathbf{A}_H]$. Inverznú maticu k matici $[\mathbf{A}_R : \mathbf{A}_H]$ budeme vyjadrovať pomocou Woodburyho formule pre inverzné matice. Rozloženie na riedku a hustú časť vykonáme pri výpočte štartovacieho bodu. Maticu $\mathbf{D}$ možno rozdeliť na zodpovedajúce matice $\mathbf{D}_R$, $\mathbf{D}_H$. Za účelom určenia "hustoty stĺpcov" zostrojíme pole, ktorého prvky budú vyjadrovať počet nenulových prvkov v stĺpci. Potom pole usporiadame zostupne. Zameriame sa na stĺpce, ktoré majú pomer nenulových prvkov k celkovému počtu prvkov τ. Kde $\tau = 1$ pre $m \leq 500$, $\tau = 0.1$ pre $500 < m \leq 2000$ a $\tau = 0.05$ pre $2000 < m$. Nájdeme stĺpec, ktorý má tento pomer menší a stĺpce, ktoré sú v takto usporiadanom poli pred ním, budeme považovať za husté. Z tohto dostaneme:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}_R\mathbf{D}_R\mathbf{A}_R^T + \mathbf{A}_H\mathbf{D}_H\mathbf{A}_H^T = \mathbf{M}_R + \mathbf{A}_H\mathbf{D}_H\mathbf{A}_H^T, \tag{4.34}$$

kde $\mathbf{M}_R$ je riedka matica. Použitím Woodburyho formule pre inverzné matice na (4.34) dostaneme:

$$[\mathbf{M}_R + \mathbf{A}_H\mathbf{D}_H\mathbf{A}_H^T]^{-1} = \mathbf{M}_R^{-1} - (\mathbf{M}_R^{-1}\mathbf{A}_H)[\mathbf{D}_H^{-1} + \mathbf{A}_H^T\mathbf{M}_R^{-1}\mathbf{A}_H]^{-1}\mathbf{A}_H^{-1}\mathbf{M}_R^{-1}. \tag{4.35}$$

Použitím Choleského rozkladu na maticu $\mathbf{M}_R$ získame: $\mathbf{P}_R\mathbf{M}_R\mathbf{P}_R^T = \mathbf{L}_R\mathbf{L}_R^T$. Na základe tohto rozkladu môžeme písať:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1} &= [\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T]^{-1} = \\ &= \mathbf{P}_R^T\mathbf{L}_R^{-1^T} \\ &\quad \{\mathbf{I} - \mathbf{L}_R^{-1}\mathbf{P}_R\mathbf{A}_H[\mathbf{D}_H^{-1} + \mathbf{A}_H^T\mathbf{P}_R^T\mathbf{L}_R^{-1^T}\mathbf{L}_R^{-1}\mathbf{P}_R\mathbf{A}_H]^{-1}\mathbf{A}_H^T\mathbf{P}_R^T\mathbf{L}_R^{-1^T}\} \\ &\quad \mathbf{L}_R^{-1}\mathbf{P}_R. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Výpočtovo najnáročnejší je výpočet matice $\mathbf{L}_R^{-1}\mathbf{P}_R\mathbf{A}_H$. Ak pri výpočte smerov v bode (b) iteračného cyklu nenastane zmenšenie veľkosti primárneho vektora chýb aspoň o hodnotu $prifeastol$ (presnosť primárneho riešenia) a v Choleského rozklade sme nenahradzovali žiadne malé prvky, aktivujeme metódu podmienených konjugovaných gradientov (PCG (preconditioned conjugate gradient)) na zlepšenie presnosti riešení systému (4.16). Ako štartovací bod použijeme riešenia získané pomocou Choleského rozkladu. Ak sme zistili prítomnosť n_H hustých stĺpcov v matici $\mathbf{A}$, tak PCG algoritmus zastavíme, ak vykonáme $10n_H$ iterácií, alebo dosiahneme zníženie veľkosti vektora chýb aspoň o hodnotu $prifeastol$. Ak sú v matici $\mathbf{A}$ len riedke stĺpce, tak vykonáme najviac 10 iterácií pomocou PCG algoritmu.

4.5.5 Náročnosť algoritmu

Náš program bol skompilovaný a spúšťaný pod operačným systémom Red Hat LINUX release 7.0, pracujúci na počítači s procesorom INTEL PENTIUM 200 MHz, 64 MB operačnej pamäte a so swapovacím súborom veľkosti 300 MB. Navrhnuté dátové štruktúry sú vhodné na riešenie rozsiahlych úloh. Tieto štruktúty sú založené na formáte dátového typu MPS, ktorý uchováva len nenulové prvky. Do programu boli vložené procedúry na meranie dĺžky

Počet DMU	Tvorba	Úpravy	Riešenie	Počet iterácií
50	1.60	0.38	12.86	643
100	4.03	1.45	106.31	1431
150	7.48	3.22	536.47	2233
200	12.48	5.59	1030.58	3066
250	17.58	8.26	1867.77	3818
300	26.44	12.67	4148.30	4655
350	33.36	17.13	8155.95	6413
400	41.52	21.96	11785.40	6491

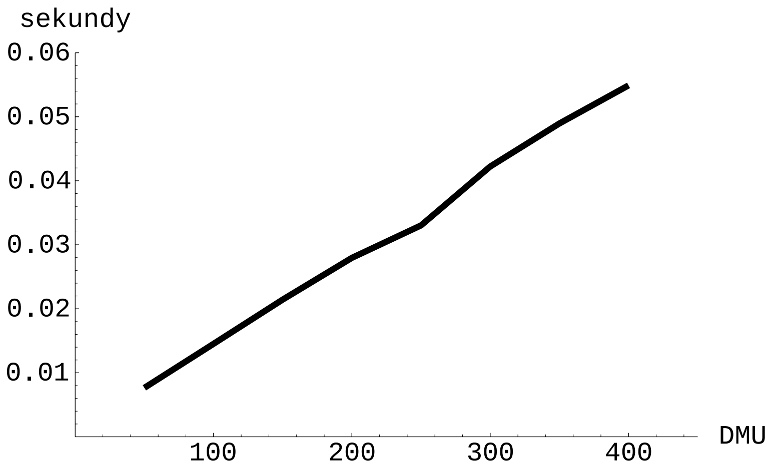
Tabuľka 4.1: Priemerné časy a počty iterácií

strojového času spotrebovaného v jednotlivých častiach riešenia úloh.
Časy sme merali v týchto častiach programu:

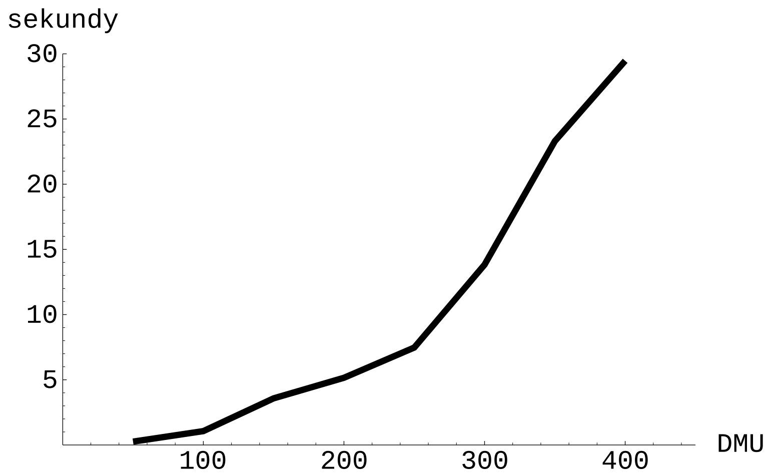
Tvorba	časť, v ktorej sa zostavovala úloha lineárneho programovania
Úpravy	procedúry presolvera a škálovania matíc ohraničení úlohy
Riešenie	samotné riešenie úlohy lineárneho programovania

Riešili sme DEA–modely s rôznym počtom DMU. V každej sérii sme vyriešili 8 modelov s rovnakým počtom DMU. Parametre *opttol*, $prifeastol$ a $dualfeasol$ boli nastavené na hodnotu 10^{-8}. Pri riešení každého modelu sme zisťovali celkový čas, ktorý bol spotrebovaný v určitých častiach programu. Podobne sme zistili celkový počet iterácií potrebných na vyriešenie DEA–modelu. Celkové priemerné časy a priemerné počty iterácií pre rôzne rozmery sú uvedené v nasledujúcej tabuľke (4.1):

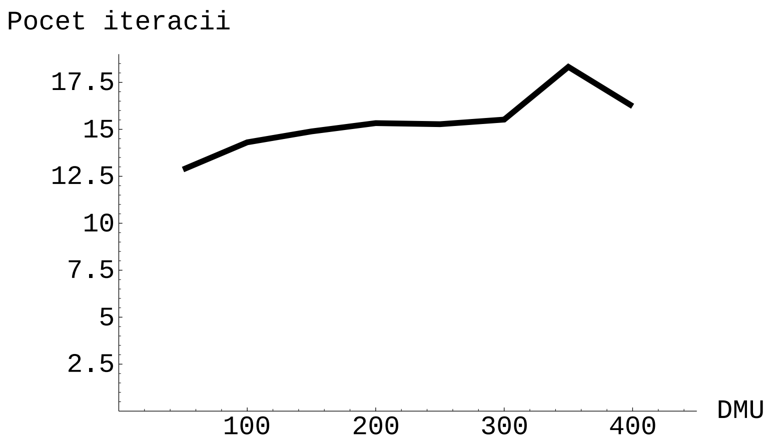
Nasledujúce grafy zobrazujú priemerné časy a priemerné počty iterácií potrebné pre riešenie úlohy pre jednu DMU pri rôznych rozmeroch DEA–modelov. Čas potrebný na zostavenie úloh pre jednotlivé DMU má lineárny trend, preto graf neuvádzame. Graf (4.1) zobrazuje časovú závislosť počiatočných úprav vykonaných pri riešení jednej úlohy DEA–modelu v závislosti od počtu DMU. Graf (4.2) zobrazuje priemerné časy riešenia jednej úlohy modelovania, na ktoré bolo potrebné vykonať priemerný počet iterácií, počet týchto iterácií je zobrazený v grafe (4.3). Priemerný čas potrebný na vykonanie jednej iterácie pri riešení úlohy v závislosti od rozmeru úlohy je zobrazený na obrázku (4.4).



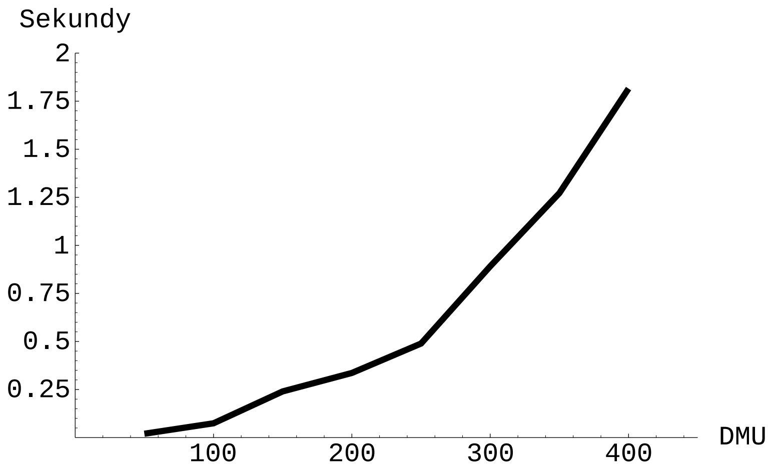
Obr. 4.1: Počiatočné úpravy



Obr. 4.2: Riešenie úlohy



Obr. 4.3: Počet iterácií



Obr. 4.4: Dĺžka jednej iterácie

4.5.6 Ukážka výstupu programu

Nasleduje ukážka výstupu programu pre vstupne orientovaný CCR model s desiatimi DMU. Tento výpis je len základným typom výstupov programu. Ďalšie typy výstupov obsahujú zoznamy hodnôt primárnych a duálnych premenných.

```
**************************** DEA ANALYSIS RESULTS *************************

 Number of DMU's = 10
 Number of Inputs = 3  Number of Outputs = 4
 Model orientation : Input.
 Returns to scale type : Constant


Problem #'0' terminated with OPTIMAL status after 8 iterations

Primal Objective =  1.000e-00 Dual Objective =  1.000e+00
Duality Gap = -2.96796e-10
Complementarity  =  2.97e-10 Relative Complementarity =  1.48e-10
Relative Infeas.: Primal = 2.154e-14,    Dual = 2.961e-18.
Time: Read = 0.01     Preprocess = 0.00     Solution = 0.01 seconds

Problem #'1' terminated with OPTIMAL status after 10 iterations

Primal Objective =  1.000e-00 Dual Objective =  1.000e+00
Duality Gap = -3.21276e-11
Complementarity  =  2.33e-11 Relative Complementarity =  1.16e-11
Relative Infeas.: Primal = 2.152e-11,    Dual = 2.461e-18.
Time: Read = 0.00     Preprocess = 0.00     Solution = 0.03 seconds

Problem #'2' terminated with OPTIMAL status after 10 iterations

Primal Objective =  7.613e-01 Dual Objective =  7.613e-01
Duality Gap = 8.65974e-14
Complementarity  =  8.17e-16 Relative Complementarity =  4.64e-16
Relative Infeas.: Primal = 5.127e-12,    Dual = 2.097e-16.
Time: Read = 0.01     Preprocess = 0.00     Solution = 0.03 seconds

Problem #'3' terminated with OPTIMAL status after 6 iterations

Primal Objective =  1.000e-00 Dual Objective =  1.000e+00
Duality Gap = -3.66402e-10
Complementarity  =  3.66e-10 Relative Complementarity =  1.83e-10
Relative Infeas.: Primal = 1.627e-13,    Dual = 1.482e-16.
Time: Read = 0.00     Preprocess = 0.01     Solution = 0.01 seconds

Problem #'4' terminated with OPTIMAL status after 7 iterations

Primal Objective =  1.000e+00 Dual Objective =  1.000e+00
Duality Gap = -2.22045e-16
Complementarity  =  1.03e-15 Relative Complementarity =  5.14e-16
Relative Infeas.: Primal = 1.029e-13,    Dual = 2.376e-17.
Time: Read = 0.01     Preprocess = 0.00     Solution = 0.02 seconds
```

```
Problem #'5' terminated with OPTIMAL status after 7 iterations

Primal Objective =  1.000e+00 Dual Objective =  1.000e+00
Duality Gap = 0.00000e+00
Complementarity  =  6.90e-16 Relative Complementarity =  3.45e-16
Relative Infeas.: Primal = 2.640e-14,    Dual = 2.132e-16.
Time: Read = 0.00     Preprocess = 0.01     Solution = 0.00 seconds

Problem #'6' terminated with OPTIMAL status after 7 iterations

Primal Objective =  1.000e-00 Dual Objective =  1.000e+00
Duality Gap = -1.28231e-13
Complementarity  =  1.30e-13 Relative Complementarity =  6.49e-14
Relative Infeas.: Primal = 1.428e-13,    Dual = 1.202e-16.
Time: Read = 0.00     Preprocess = 0.00     Solution = 0.02 seconds

Problem #'7' terminated with OPTIMAL status after 7 iterations

Primal Objective =  1.000e-00 Dual Objective =  1.000e+00
Duality Gap = -1.75415e-14
Complementarity  =  2.22e-15 Relative Complementarity =  1.11e-15
Relative Infeas.: Primal = 7.772e-13,    Dual = 1.486e-16.
Time: Read = 0.01     Preprocess = 0.00     Solution = 0.02 seconds

Problem #'8' terminated with OPTIMAL status after 10 iterations

Primal Objective =  8.778e-01 Dual Objective =  8.778e-01
Duality Gap = -8.78719e-11
Complementarity  =  8.74e-11 Relative Complementarity =  4.65e-11
Relative Infeas.: Primal = 3.753e-10,    Dual = 1.600e-16.
Time: Read = 0.01     Preprocess = 0.00     Solution = 0.03 seconds

Problem #'9' terminated with OPTIMAL status after 8 iterations

Primal Objective =  1.000e+00 Dual Objective =  1.000e+00
Duality Gap = -2.66631e-11
Complementarity  =  3.08e-11 Relative Complementarity =  1.54e-11
Relative Infeas.: Primal = 4.216e-12,    Dual = 3.396e-18.
Time: Read = 0.00     Preprocess = 0.00     Solution = 0.01 seconds

************ Total Time of Analysis  ****************************************

Total Read Time       = 0.05 seconds
Total Preprocess time = 0.02 seconds
Total Solution time   = 0.18 seconds
Used for 80 iterations
```

Kapitola 5

DEA modelovanie

V tejto kapitole sa budeme zaoberať praktickou tvorbou DEA–modelov. Pokúsime sa porovnať výsledky získané z rovnakých modelov pomocou simplexovej metódy a upraveného Mehrotrovho primárne–duálneho algoritmu.

5.1 Určenie vstupov x a výstupov y

Tu uvedieme všeobecné ustálené postupy používané pri vytváraní DEA–modelov. Analýza je založená meraní efektívnosti pomocou pomeru vstupov a výstupov. Vo všeobecnosti rozhodnutie o tom, ktoré charakteristiky DMU budú reprezentovať vstupy (vektor $\mathbf{x}$) a výstupy (vektor $\mathbf{y}$) sa použijú pri analýze nie je jednoduchá úloha. Niekedy je otázne, či daný materialový tok je vstupom alebo výstupom. Na základe praktických skúseností sa ustálili tieto princípy:

1. Celkový počet vstupov aj výstupov $(p + m)$ sa snažíme minimalizovať v záujme zvýšenia diskriminačných vlastností modelu, pretože s rastom rozmeru vstupno–výstupného priestoru potrebujeme viac podmienok na vymedzenie obálky. Odporúča sa, aby tento celkový počet neprekročil 1/3 množstva skúmaných DMU, t.j. $p + m < \frac{n}{3}$.

2. Vysoko korelované vstupy alebo výstupy sú zbytočné. Všetky, až na jeden z nich, môžu byť vynechané bez zhoršenia výsledkov modelu. Túto úpravu však treba robiť opatrne, najlepšie je rozhodnúť z porovnania výsledkov analýzy s takýmito vstupmi alebo výstupmi s výsledkami po

ich vynechaní. Vylúčenie príliš veľa vstupov môže spôsobiť, že efektívna DMU sa môže stať neefektívnou ako je uvedené v [1]

3. Vstup, ktorý neovplyvňuje žiadny výstup, signalizuje, že množina výstupov je neúplná. Tento vstup reprezentuje použité zdroje, ktoré produkujú nemerateľné výstupy. Kedže takéto výstupy nemôžu byť merané, tak tento vstup sa vynechá z ďalšej analýzy.

4. Dostupnosť dát nesmie ovplyvniť výber vstupov a výstupov. Výsledkom analýzy môže byť aj zdôvodnenie potreby ďalších dát.

5. Ak nie je jednoznačné, či daný materiálový tok je vstupom alebo výstupom, tak tok, ktorý svojou redukciou vylepší efektívnosť DMU, sa považuje za vstup. Ak je potrebné daný tok rozšíriť aby sa vylepšila efektívnosť DMU, tak tento sa považuje sa výstup.

6. Vstupy a výstupy uvažované v modeli musia obsahovať všetky s analýzou súvisiace aktivity všetkých DMU. Môže stať, že DMU bude podhodnotená, keď niektorý z jej dobrých výkonov nebude v analýze zahrnutý.

5.2 Výber typu modelu

V texte sme odvodili len niekoľko základných modelov, v dostupnej literatúre ich je o mnoho viac. Prvým kritériom na výber typu modelu je to, s akým typom výnosov z rozsahuje daný model uvažuje. Toto rozhodnutie je často intuitívne, ale naše rozhodnutie môžme podporiť ekonometrickou analýzou. Orientácia modelu a ohraničenia týkajúce sa virtuálnych cien závisia od cieľov, ktoré chceme analýzou dosiahnuť.

5.3 Analýza

Na porovnanie výsledkov získanými simplexovou metódou a našim algoritmom sme použili dáta, ktoré boli použité v analýze bankových pobočiek v [3] a sú voľne dostupné. Na základe korelačnej analýzy sme pre analýzu použili vstupne orientovaný model s konštantými výnosmi z rozsahu, t.j. vstupne orientovaný CCR model. Takýto model je určený dvojicou úloh:

Primárna úloha	Duálna úloha	
CCR_P^I : $\begin{aligned} \min_{\theta,\boldsymbol{\lambda},\mathbf{s},\mathbf{e}} & \ \theta \\ \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s} &= \mathbf{Y}_j \\ -\mathbf{X}\lambda + \theta\mathbf{X}_j - \mathbf{e} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$	CCR_D^I : $\begin{aligned} \max_{\mathbf{u},\mathbf{v}} & \ \mathbf{Y}_j^T\mathbf{u} \\ \mathbf{X}_j^T\mathbf{v} &= 1 \\ \mathbf{Y}^T\mathbf{u} - \mathbf{X}^T\mathbf{v} &\leq \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$	(5.1)

Celkovo sme skúmali efektivitu 106–tich DMU, ktoré reprezentujú jednotlivé pobočky bankového ústavu. Každú z nich sme charakterizovali pomocou troch vstupov a štyroch výstupov:

Vstupy

- Prevádzkové náklady ... celkové náklady spojené s prevádzkou filiálky
- Osobné náklady ... osobné náklady
- Ostatné náklady ... ostatné prevádzkové náklady

Výstupy

- Účty ... suma všetkých typov zostatkov na účtoch vedených pobočkou
- Počet účtov ... celkový počet všetkých účtov vedených pobočkou
- Vklady ... suma zostatkov všetkých typov vkladov spolu ku koncu mesiaca
- Počet vkladov ... počet všetkých typov účtov agendy vkladov spolu ku koncu mesiaca

Tabuľky (5.1) a (5.2) obsahujú zhrnutie dát, ktoré sme analyzovali. Údaje sú zoradené podľa poradového čísla jednotlivých filiálok.

Úlohy sme riešili s presnosťou 10^{-12}, a hodnoty menšie ako 10^{-10} považovali za nulu. Na tvorbu úloh DEA–modelovania sme spotrebovali 2.79 sekundy strojového času, na úpravu matice ohraničení pomocou škálovania a presolveru sme spotrebovali 1.69 sekundy. Celkový čas riešenia 106 úloh bol 113.39 sekúnd, počas ktorých sa vykonalo 1205 iterácií. Tabuľka (5.3) a jej pokračovanie (5.4) obsahujú vypočítanú efektívnosť pre jednotlivé DMU a rozmiestnenie virtuálnych cien, ktoré sme klasifikovali ako nulové. Pobočky sú zoradené podľa efektívnosti (hodnoty účelovej funkcie) zostupne, ako druhé kritérium je použitý počet nenulových prvkov, podľa ktorého sú usporiadané tiež zostupne.

Model identifikoval 14 efektívnych DMU. Ani jedna z nich neobsahuje nulovú zložku. Ak by sme úlohy riešili simplexovým algoritmom, tento tiež označí 14 DMU ako efektívne, ale len 3 z nich budú mať všetky zložky nenulové. Vyhodnotením pomocou mier uvedených v (3.3) môžeme tieto podrobnejšie analyzovať. Ak na výpočet použijeme primárne–duálny algoritmus, tak priemerný počet nenulových zložiek je 5.53 so štandardnou odchýlkou 1.15. Pri použití simplexového algoritmu je priemerný počet nenulových zložiek 5.28 so štandardnou odchýlkou 1.14. Oproti riešeniu simplexovou metódou sme zistili o 27 viac nenulových virtuálnych cien.

Tabuľky (5.5), (5.6) obsahujú hodnoty virtuálnych cien, ktoré sme získali ako výstup nášho programu. Na základe týchto údajov sme sa snažili zistiť virtuálne ceny, ktoré najviac ovplyvňujú efektívnosť DMU. Akou časťou vplýva k–ta virtuálna cena výstupu na efektívnosť danej DMU_j sme určili pomocou pomeru:

$$\frac{y_{kj}\hat{u}_{kj}}{\sum_{r=1}^{p} y_{rj}\hat{u}_{rj}},$$

kde $\hat{u}_{rj}$ je hodnota k–tej virtuálnej ceny zistenej pri riešení j–tej úlohy analýzy. Podobne pre výstupy sme vplyv určili pomocou pomeru:

$$\frac{x_{ij}\hat{v}_{ij}}{\sum_{r=1}^{m} x_{rj}\hat{v}_{rj}}.$$

Zistili sme, že efektívnosť najviac ovplyvňujú ceny "Osobných nákladov" a "Počtu vkladov". V týchto virtuálnych cenách sme určili menší počet cien, ktoré mali hodnotu rovnú 0.

Na záver sme uskutočnili testovanie ohraničení v každej úlohe, či vyhovujú ohraničeniam pôvodnej úlohy (2.1) v transformovanom tvare (3.1). Pomocou ďalšieho programu sme otestovali všetky ohraničenia vo všetkých 106 úlohách analýzy. V tabuľke (5.7) uvádzame výsledok testovania všetkých 106 ohraničení prislúchajúce úlohe pre DMU_1. V tabuľke (5.8) uvádzame výsledky testov j–teho ohraničenia v úlohe pre DMU_j . Uvádzame aj testovanie rozdielom, pretože pri tomto teste sa chyba výsledku nezmešuje. Pri tomto testovaní ohraničení sme nezistili žiadnu neprípustnosť.

5.3.1 Tabuľky

Os. náklady	Prev. náklady	Ost. náklady	Účty	Poč. účtov	Vklady	Poč. vkladov
2582618	2530099	37027,4	34359033	8381	2,82E+08	37523
1122877	1244833	28099,8	20602647	3061	71228122	9630
32082,1	24944,4	1038,01	171113	37	4446894	642
48123,4	34386,4	1502,1	304461	95	12570405	1178
80205,5	76182,4	1643,12	1462297	679	9691587	1840
80205,5	79774,2	2182,01	1108206	334	17472629	2057
80205,5	56588,8	1474,09	907319	386	15499026	2107
48123,4	35339,7	1290,43	138017	67	12539199	1263
16041,2	13198,7	491,152	22776,1	5	2916802	370
894722	1259935	399901	22656464	4823	1,71E+08	23935
492620	641552	151323	7261338	2455	82077207	12708
70684,2	118807	31297,8	610384	249	20859214	3540
52235,9	60675	13449,9	550215	156	8617529	1498
25732,2	32304,3	11110,6	1370037	102	8200879	1701
44915,4	59379,8	23196,2	2013678	321	17556491	1855
52992,5	73335,7	24723,4	1032907	288	19428458	2459
31744,7	27648,7	6507,53	418417	125	4175177	846
145382	337408	50611,3	2177445	841	22489604	3443
25686,7	63907,4	19909,3	96924,7	32	13545322	1119
27618,5	53217	1037,05	54396,9	18	9875785	1034
1323045	1826462	392794	18993263	5112	1,79E+08	26161
157023	402344	87853,5	1637349	700	45061978	7009
687750	936786	200217	9884102	2443	94985470	14031
494860	916414	165839	7996342	2099	46837951	7974
97842,7	242870	57614,1	1010954	445	32136525	4687
177342	163293	31194,4	1341089	467	11789708	2450
61410,3	214859	50293	1107863	345	22065391	3304
70598,9	182710	32467,6	2185990	645	11144099	1643
61953,6	162020	31512,7	1079633	415	11917309	1715
21087,4	92946,5	14642,3	595595	222	4101715	787
23697,5	69391,6	9867,61	318495	133	3934960	564
76454,2	168386	25464,8	1136600	416	9464850	1361
72255,1	199899	39788,7	1488032	524	12559071	1637
909619	1101674	426335	14779263	3851	1,32E+08	14928
2718794	1702806	1037737	51570192	10700	2,89E+08	38055
63873	55623,7	29435,1	847128	544	13548352	2637
73810,7	150671	46796,3	864620	436	30472886	3538
59871,5	94412,6	20563,1	1123746	439	8602447	1344
49718,7	99104,2	30312,7	567637	170	7518404	1166
12206,9	35713,1	8899,31	5376,7	5	6685698	800
50776,5	127117	31223,7	184447	134	6453338	948
51432,8	85556	25446,3	86206,8	86	5600404	894
61288,7	134941	28723	5403,44	11	22269971	2200
64305,9	86897,6	21173,7	419495	200	3556432	642
42745,8	117585	23192,7	147077	110	1638183	429
460913	801479	162701	5062784	2270	62188974	11500
176630	337056	109941	1522207	546	33314664	4676
200121	332936	121891	2242495	1003	42618608	6603
88235,5	133476	20320,6	648557	281	11989221	1939
10345,1	146138	2628,28	769734	540	85870,7	23
114146	131232	17790,3	500385	212	10496355	1482
152702	194423	48359	4444498	1525	24811310	5237
409533	876475	153744	8418839	3311	65393661	10510
68326,2	172584	39209,9	1525115	388	22852472	3398

Tabuľka 5.1: Vstupné údaje

Os. náklady	Prev. náklady	Ost. náklady	Účty	Poč. účtov	Vklady	Poč. vkladov
345601	349121	106899	5256143	1561	64054017	8727
57518,3	96080,1	36913	652260	251	23370309	3179
10326	8122,36	9760,34	41640	33	6757539	1021
7612,7	8156,52	7990,85	30462,5	23	7027801	922
4390,77	16055,6	5407,73	6830,15	11	3998370	648
3595,31	4239,79	5581,91	106717	8	4685010	625
10223,2	10045	6953,31	17286,7	13	5673869	766
4604,03	6489,92	3632,84	2325,54	1	2886547	476
162856	262891	27114	4098769	981	40615219	5280
1243541	621928	122549	40241029	5727	89524115	14131
147187	100648	12326,6	415063	143	22819414	5079
909333	506115	154984	13156110	3129	1,32E+08	17211
897953	668424	139945	15529368	3461	60421316	8700
85262,5	45907,3	9179,42	541100	254	34135633	5386
1209774	680372	138646	18636275	5162	1,63E+08	22253
142205	134649	14987,9	1645612	368	33425539	5195
582873	650767	176475	6988834	2750	77281684	13270
182433	181321	98877,6	1163065	457	60548946	8647
139345	170156	48443,9	952486	367	23553302	3567
111724	24833,6	29146	638883	235	20045301	2240
138712	55052,3	21597	573429	188	10816977	2089
420908	688309	121278	4600941	680	7716152	1182
218820	319895	47059,6	915525	388	15928236	3203
96927,9	81282,3	34303,3	192752	138	17613428	2696
331658	467898	162839	3303239	1337	52259928	7797
399903	937983	291966	7326081	3032	98481679	15247
157392	540962	150765	2417783	1010	35933922	5184
125511	248643	92439,4	873407	402	17843942	2729
70959,5	181281	31495,5	645054	282	11700928	1888
72476	146713	49460,9	1143105	418	25632900	2990
68476,1	111020	24337,7	507851	245	10721896	1677
46789	23554,3	9716,73	185461	12	7317749	1041
16812,8	11817,9	1145,92	99421	42	26436,3	23
16814,7	19412,4	3427,56	157212	58	1358510	268
59505,8	124566	49233,3	755461	272	20002855	2650
60901,3	161392	31244,3	460308	198	11346222	1922
700580	1132447	89056,4	8740505	1584	1,24E+08	15170
777476	1038393	87793,7	10427844	2447	1,3E+08	16993
59429,4	110211	1635,79	479038	208	33851615	3242
365804	375990	62984,9	3506427	1347	56348759	8116
71155	76666,8	3327,93	1995699	1071	926437	145
67292,3	104677	3182,78	690798	321	4128497	816
39395,3	47784	1462,63	120269	51	20537580	1510
25686,7	63907,4	19909,3	96924,7	32	13545322	1119
27618,5	53217	1037,05	54396,9	18	9875785	1034
63552,5	154477	2920,81	1661330	452	19819657	3529
427301	639949	201148	9066166	2330	83283649	12392
156177	170471	41366,3	2761633	854	25434093	3499
337642	654059	133294	6604983	1835	44328135	7553
377148	455522	184802	7779614	2296	86963697	11150
329378	561379	151210	6742462	1925	58425886	8412
57671,4	146919	10868,7	608040	163	6164547	1083

Tabuľka 5.2: Vstupné údaje, pokračovanie tab. (5.1)

DMU_j	Efektívnosť %	v_1	v_2	v_3	u_1	u_2	u_3	u_4	nenulové prvky
1	100,00								7
5	100,00								7
7	100,00								7
14	100,00								7
15	100,00								7
50	100,00								7
60	100,00								7
64	100,00								7
68	100,00								7
74	100,00								7
93	100,00								7
95	100,00								7
97	100,00								7
100	100,00								7
57	99,30			0	0		0		4
59	98,94		0		0		0		4
36	95,17			0	0		0		4
4	94,22	0				0		0	4
58	94,00				0			0	5
6	93,98					0		0	5
8	93,25	0			0				5
2	92,08		0			0	0	0	3
62	89,62		0		0	0	0		3
52	88,56						0		6
63	81,72							0	6
69	78,02	0						0	5
16	71,50								7
70	70,38					0			6
61	70,32				0	0			5
66	69,57							0	6
28	68,58			0					6
9	67,66	0			0	0			4
20	67,30		0		0	0	0		3
99	67,30		0		0	0	0		3
35	65,31			0				0	5
37	63,57				0			0	5
65	62,29				0	0	0		4
54	61,33								7
10	60,63			0					6
56	60,60				0				6
104	60,55			0					6
40	60,38		0		0	0		0	3
102	59,62							0	6
53	59,20						0		6
30	59,13			0			0		5
12	59,12				0		0		5
3	58,67				0	0	0		4
38	57,72						0		6
19	56,75		0		0	0		0	3
98	56,75		0		0	0		0	3
84	56,10				0			0	5
17	56,04						0		6
55	55,83							0	6

Tabuľka 5.3: Výstupné dáta

DMU_j	Efektívnosť %	v_1	v_2	v_3	u_1	u_2	u_3	u_4	nenulové prvky
80	55,76			0	0		0		4
101	55,21			0					6
92	54,38								7
67	53,74							0	6
105	53,31			0					6
72	52,93				0		0		5
11	52,63						0		6
25	52,27				0		0		5
27	50,86		0				0		5
33	50,37			0					6
22	50,01				0		0		5
94	48,64								7
71	48,49						0		6
91	48,20							0	6
29	48,00						0		6
103	47,67			0			0		5
13	47,63						0		6
18	46,66						0		6
43	46,48		0		0	0		0	3
89	46,46				0				6
48	46,41				0		0		5
46	45,64						0		6
96	44,12				0		0		5
75	43,98	0					0		5
34	43,85			0				0	5
21	43,34								7
23	43,08								7
32	42,25								7
31	41,06								7
86	41,02	0				0		0	4
81	40,98			0			0		5
85	39,25				0		0		5
49	38,97						0		6
24	38,62								7
79	38,42				0		0		5
73	37,99						0		6
88	37,74						0		6
83	36,92						0		6
90	36,59				0		0		5
78	35,44				0		0		5
26	32,66						0		6
106	32,65						0		6
47	32,40						0		6
39	32,36						0		6
82	27,39				0		0		5
87	26,93	0					0		5
51	26,20								7
44	25,23				0		0		5
77	24,55						0		6
76	23,79						0	0	5
41	23,22				0		0		5
42	21,73				0		0		5
45	17,03				0		0		5

Tabuľka 5.4: Výstupné dáta, pokračovanie tab. (5.3)

DMU_j	v_1	v_2	v_3	u_1	u_2	u_3	u_4
1	4,47E-08	4,55E-08	2,08E-05	2,18E-08	6,53E-07	8,53E-10	1,28E-07
2	4,73E-07	5,61E-20	1,67E-05	4,47E-08	2,19E-17	6,73E-23	1,04E-18
3	2,86E-06	1,92E-05	4,14E-04	1,33E-14	2,39E-13	1,20E-16	9,14E-04
4	1,97E-16	2,27E-05	1,45E-04	6,38E-07	5,69E-14	5,95E-08	4,84E-15
5	5,72E-07	3,25E-07	5,66E-04	1,60E-07	9,09E-04	1,19E-08	1,83E-05
6	4,11E-06	5,57E-06	1,03E-04	4,76E-07	2,83E-17	2,36E-08	1,44E-17
7	2,99E-07	2,82E-06	5,54E-04	2,45E-07	2,79E-04	2,42E-10	3,16E-04
8	2,06E-19	1,80E-05	2,81E-04	5,99E-19	1,36E-04	2,92E-08	4,41E-04
9	9,07E-17	4,64E-05	7,89E-04	1,26E-18	4,00E-15	5,75E-08	1,38E-03
10	8,72E-07	1,74E-07	3,04E-26	1,42E-08	4,36E-05	2,78E-10	1,14E-06
11	1,22E-06	2,69E-07	1,50E-06	1,15E-08	8,09E-05	9,68E-25	1,92E-05
12	8,61E-06	5,51E-07	1,04E-05	8,03E-21	3,59E-04	5,06E-23	1,42E-04
13	1,22E-05	2,68E-06	1,49E-05	1,15E-07	8,07E-04	3,84E-24	1,92E-04
14	1,22E-05	1,92E-05	5,73E-06	6,25E-07	1,05E-04	5,08E-09	5,38E-05
15	1,51E-05	4,00E-06	3,68E-06	2,87E-07	7,24E-04	1,07E-08	1,10E-06
16	1,04E-05	1,89E-06	1,26E-05	1,82E-07	5,08E-04	1,84E-08	9,05E-06
17	1,00E-05	2,10E-05	1,58E-05	3,83E-07	1,47E-03	4,46E-22	2,56E-04
18	3,69E-06	7,36E-07	4,26E-06	3,48E-08	2,39E-04	3,30E-19	5,52E-05
19	2,33E-05	3,38E-18	2,02E-05	1,57E-19	4,44E-16	4,19E-08	1,68E-16
20	3,36E-05	3,22E-16	7,00E-05	4,10E-16	1,57E-13	1,39E-17	6,51E-04
21	4,57E-07	8,49E-08	6,13E-07	6,73E-09	2,49E-05	5,98E-10	2,73E-06
22	3,46E-06	2,21E-07	4,19E-06	5,26E-17	1,44E-04	4,83E-18	5,70E-05
23	8,84E-07	1,64E-07	1,19E-06	1,30E-08	4,82E-05	1,16E-09	5,29E-06
24	1,16E-06	2,11E-07	1,40E-06	2,04E-08	5,67E-05	2,06E-09	1,01E-06
25	5,46E-06	3,50E-07	6,61E-06	5,83E-26	2,28E-04	9,03E-26	8,99E-05
26	3,98E-06	8,75E-07	4,87E-06	3,76E-08	2,64E-04	3,68E-23	6,25E-05
27	8,93E-06	4,08E-22	8,98E-06	9,21E-08	7,86E-05	1,32E-26	1,15E-04
28	9,33E-06	1,87E-06	4,69E-15	1,52E-07	4,67E-04	2,98E-09	1,22E-05
29	7,65E-06	1,53E-06	8,83E-06	7,23E-08	4,95E-04	3,23E-19	1,15E-04
30	2,50E-05	5,08E-06	5,36E-25	3,69E-07	1,33E-03	1,70E-27	9,84E-05
31	2,01E-05	3,73E-06	2,70E-05	2,96E-07	1,09E-03	2,63E-08	1,20E-04
32	7,26E-06	1,32E-06	8,77E-06	1,27E-07	3,55E-04	1,29E-08	6,32E-06
33	8,91E-06	1,78E-06	3,99E-18	1,45E-07	4,46E-04	2,84E-09	1,16E-05
34	6,10E-07	4,04E-07	9,54E-19	1,55E-08	4,02E-05	4,11E-10	8,32E-18
35	3,89E-08	5,25E-07	9,94E-18	3,87E-09	3,27E-05	3,61E-10	3,59E-14
36	1,45E-06	1,63E-05	5,12E-22	2,30E-23	1,25E-03	9,94E-25	1,03E-04
37	6,50E-06	1,44E-06	6,47E-06	1,01E-19	5,44E-04	1,31E-08	2,21E-16
38	9,76E-06	1,95E-06	1,13E-05	9,22E-08	6,32E-04	4,27E-25	1,46E-04
39	9,57E-06	1,91E-06	1,10E-05	9,04E-08	6,19E-04	2,79E-19	1,43E-04
40	5,03E-05	2,76E-18	4,34E-05	1,67E-19	2,51E-15	9,03E-08	1,98E-13
41	8,95E-06	1,98E-06	9,41E-06	8,01E-26	7,47E-04	1,61E-27	1,39E-04
42	1,03E-05	2,28E-06	1,08E-05	4,41E-22	8,59E-04	2,62E-23	1,60E-04
43	1,16E-05	1,92E-23	1,00E-05	3,57E-27	7,62E-22	2,09E-08	1,31E-23
44	9,46E-06	2,09E-06	9,94E-06	7,96E-20	7,89E-04	1,45E-23	1,47E-04
45	1,07E-05	2,37E-06	1,13E-05	7,50E-20	8,96E-04	3,80E-21	1,67E-04
46	1,22E-06	2,49E-07	1,45E-06	9,06E-09	8,42E-05	2,46E-20	1,91E-05
47	2,66E-06	5,41E-07	3,16E-06	1,97E-08	1,83E-04	4,99E-27	4,15E-05
48	2,49E-06	5,50E-07	2,62E-06	2,76E-28	2,08E-04	5,86E-30	3,88E-05
49	7,17E-06	1,46E-06	8,52E-06	5,31E-08	4,93E-04	2,34E-30	1,12E-04
50	4,04E-05	2,09E-06	1,05E-04	1,44E-07	1,65E-03	3,56E-09	2,52E-05
51	6,07E-06	1,20E-06	8,41E-06	5,49E-08	4,00E-04	6,39E-09	5,58E-05
52	4,04E-06	8,07E-07	4,67E-06	3,82E-08	2,62E-04	8,48E-23	6,05E-05
53	1,31E-06	2,62E-07	1,51E-06	1,24E-08	8,49E-05	2,06E-19	1,97E-05

Tabuľka 5.5: Virtuálne ceny

DMU_j	v_1	v_2	v_3	u_1	u_2	u_3	u_4
53	1,31E-06	2,62E-07	1,51E-06	1,24E-08	8,49E-05	2,06E-19	1,97E-05
54	6,53E-06	1,21E-06	8,78E-06	9,63E-08	3,56E-04	8,55E-09	3,91E-05
55	1,34E-06	7,36E-07	2,61E-06	3,43E-08	8,26E-05	3,89E-09	8,55E-20
56	8,03E-06	1,75E-06	1,00E-05	3,59E-24	6,72E-04	1,01E-08	6,37E-05
57	9,80E-06	1,11E-04	4,15E-21	3,01E-23	8,48E-03	6,94E-25	6,99E-04
58	4,29E-05	2,09E-05	6,29E-05	6,12E-29	4,44E-03	1,19E-07	2,67E-25
59	8,61E-05	1,45E-21	1,15E-04	1,19E-22	1,07E-03	2,29E-23	1,51E-03
60	5,06E-05	1,66E-04	2,02E-05	2,64E-06	8,00E-04	1,02E-07	3,72E-04
61	3,68E-05	1,42E-05	6,92E-05	4,89E-22	7,97E-18	9,01E-08	2,51E-04
62	1,03E-04	1,44E-17	1,44E-04	7,54E-21	6,85E-16	3,13E-22	1,88E-03
63	3,86E-06	6,05E-07	7,83E-06	9,90E-08	1,34E-04	6,90E-09	1,05E-20
64	2,97E-07	5,36E-07	2,43E-06	2,21E-08	8,56E-06	3,07E-10	2,54E-06
65	3,83E-07	2,58E-06	5,55E-05	4,20E-25	4,07E-22	6,63E-27	1,23E-04
66	1,00E-07	1,67E-06	4,23E-07	1,17E-08	1,04E-04	1,65E-09	2,62E-20
67	5,30E-07	5,48E-07	1,13E-06	1,84E-08	4,22E-05	1,76E-09	3,64E-16
68	7,56E-07	1,22E-05	4,08E-05	9,00E-08	2,90E-04	6,21E-09	1,24E-04
69	1,33E-24	1,36E-06	5,31E-07	8,13E-09	8,29E-05	1,23E-09	7,51E-27
70	3,45E-06	1,78E-06	1,80E-05	1,59E-07	2,41E-17	6,07E-09	4,60E-05
71	1,06E-06	2,34E-07	1,30E-06	1,00E-08	7,03E-05	5,58E-21	1,67E-05
72	3,06E-06	6,77E-07	3,22E-06	1,01E-22	2,56E-04	5,94E-23	4,77E-05
73	4,32E-06	8,79E-07	5,13E-06	3,20E-08	2,97E-04	5,82E-18	6,74E-05
74	2,80E-07	3,06E-05	7,16E-06	9,26E-08	1,46E-03	2,64E-08	2,98E-05
75	3,54E-15	1,70E-05	2,97E-06	9,10E-08	1,04E-03	6,21E-20	9,16E-05
76	1,32E-06	1,82E-07	2,63E-06	4,91E-08	1,73E-05	1,10E-23	1,31E-20
77	2,94E-06	5,99E-07	3,50E-06	2,18E-08	2,02E-04	3,38E-20	4,59E-05
78	6,63E-06	1,46E-06	6,96E-06	4,71E-21	5,53E-04	5,73E-23	1,03E-04
79	1,65E-06	3,65E-07	1,73E-06	9,47E-19	1,38E-04	1,08E-22	2,57E-05
80	1,61E-06	3,78E-07	4,28E-15	1,26E-16	1,33E-04	5,97E-20	1,02E-05
81	3,74E-06	7,60E-07	7,80E-24	5,52E-08	1,98E-04	3,14E-26	1,47E-05
82	3,60E-06	7,96E-07	3,79E-06	2,33E-19	3,01E-04	1,97E-20	5,61E-05
83	6,88E-06	1,40E-06	8,18E-06	5,10E-08	4,74E-04	2,10E-21	1,07E-04
84	6,48E-06	1,44E-06	6,46E-06	5,14E-26	5,42E-04	1,30E-08	1,78E-23
85	8,43E-06	1,86E-06	8,86E-06	1,64E-20	7,03E-04	2,10E-23	1,31E-04
86	5,11E-15	3,42E-05	2,00E-05	4,93E-07	2,23E-13	4,36E-08	2,77E-15
87	3,28E-15	8,46E-05	3,59E-10	4,88E-07	5,11E-03	1,91E-17	2,63E-04
88	3,96E-05	8,70E-06	4,84E-05	3,74E-07	2,62E-03	5,02E-17	6,22E-04
89	6,75E-06	1,47E-06	8,43E-06	3,56E-16	5,65E-04	8,45E-09	5,35E-05
90	9,17E-06	5,87E-07	1,11E-05	7,89E-18	3,82E-04	3,83E-18	1,51E-04
91	7,80E-07	2,05E-07	2,48E-06	2,84E-08	2,00E-05	1,63E-09	1,19E-22
92	6,07E-07	2,99E-07	2,49E-06	2,28E-08	2,51E-05	1,13E-09	5,75E-06
93	2,50E-06	3,88E-07	4,95E-04	7,31E-08	1,98E-04	1,41E-08	1,37E-04
94	1,82E-06	4,32E-07	2,74E-06	2,63E-08	1,07E-04	2,24E-09	1,52E-05
95	4,22E-06	8,56E-07	1,91E-04	2,04E-07	5,51E-04	1,24E-09	7,40E-06
96	8,35E-06	2,70E-06	4,88E-05	9,90E-26	8,73E-04	5,36E-27	1,97E-04
97	1,94E-06	1,02E-05	2,99E-04	4,19E-08	1,79E-04	4,65E-08	2,05E-05
98	2,33E-05	3,38E-18	2,02E-05	1,57E-19	4,44E-16	4,19E-08	1,68E-16
99	3,36E-05	3,22E-16	7,00E-05	4,10E-16	1,57E-13	1,39E-17	6,51E-04
100	4,54E-06	1,77E-07	2,34E-04	3,42E-07	3,84E-05	5,80E-09	8,49E-05
101	1,80E-06	3,60E-07	9,96E-18	2,93E-08	9,01E-05	5,75E-10	2,35E-06
102	3,03E-06	1,66E-06	5,90E-06	7,75E-08	1,86E-04	8,77E-09	7,67E-16
103	2,13E-06	4,32E-07	1,28E-14	3,13E-08	1,13E-04	1,29E-17	8,36E-06
104	2,14E-06	4,27E-07	9,41E-13	3,47E-08	1,07E-04	6,81E-10	2,78E-06
105	2,26E-06	4,53E-07	7,06E-16	3,68E-08	1,13E-04	7,22E-10	2,95E-06
106	1,01E-05	2,01E-06	1,16E-05	9,49E-08	6,50E-04	5,56E-21	1,50E-04

Tabuľka 5.6: Virtuálne ceny, pokračovanie tab. (5.5)

DMU_j	$E_j(\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_j)$	$\mathbf{y}_j^T\mathbf{u} - \mathbf{x}_j^T\mathbf{v}$	$\mathbf{x}_j^T\mathbf{v}$	$\mathbf{y}_j^T\mathbf{u}$
1	1,000	-1,1356E-04	1,000E+00	1,000E+00
2	0,743	-1,7762E-01	6,909E-01	5,133E-01
3	0,316	-1,6517E-02	2,415E-02	7,630E-03
4	0,503	-1,7369E-02	3,494E-02	1,757E-02
5	0,991	-3,6993E-04	4,121E-02	4,084E-02
6	0,752	-1,3022E-02	5,257E-02	3,955E-02
7	0,911	-3,2745E-03	3,680E-02	3,353E-02
8	0,455	-1,6676E-02	3,058E-02	1,391E-02
9	0,263	-8,4929E-03	1,153E-02	3,035E-03
10	0,077	-7,7647E+00	8,411E+00	6,465E-01
11	0,072	-2,9656E+00	3,197E+00	2,316E-01
12	0,048	-6,2752E-01	6,592E-01	3,172E-02
13	0,069	-2,6507E-01	2,847E-01	1,964E-02
14	0,159	-1,9645E-01	2,336E-01	3,716E-02
15	0,122	-4,2762E-01	4,870E-01	5,934E-02
16	0,076	-4,8010E-01	5,197E-01	3,960E-02
17	0,093	-1,2509E-01	1,380E-01	1,288E-02
18	0,063	-1,0064E+00	1,074E+00	6,766E-02
19	0,033	-4,0414E-01	4,180E-01	1,383E-02
20	0,387	-1,5461E-02	2,521E-02	9,752E-03
21	0,069	-7,7349E+00	8,308E+00	5,734E-01
22	0,041	-1,7763E+00	1,852E+00	7,549E-02
23	0,071	-3,9359E+00	4,236E+00	3,000E-01
24	0,062	-3,2948E+00	3,512E+00	2,167E-01
25	0,041	-1,1629E+00	1,213E+00	5,034E-02
26	0,060	-6,2395E-01	6,639E-01	3,992E-02
27	0,041	-1,0145E+00	1,058E+00	4,363E-02
28	0,084	-6,2865E-01	6,865E-01	5,781E-02
29	0,051	-6,3108E-01	6,653E-01	3,420E-02
30	0,054	-2,9285E-01	3,096E-01	1,673E-02
31	0,050	-1,9890E-01	2,094E-01	1,046E-02
32	0,062	-5,0718E-01	5,405E-01	3,331E-02
33	0,052	-7,9581E-01	8,395E-01	4,371E-02
34	0,049	-8,5148E+00	8,954E+00	4,394E-01
35	0,064	-2,0391E+01	2,177E+01	1,383E+00
36	0,050	-5,8662E-01	6,173E-01	3,072E-02
37	0,046	-9,3746E-01	9,830E-01	4,558E-02
38	0,074	-4,0217E-01	4,345E-01	3,230E-02
39	0,030	-6,1787E-01	6,369E-01	1,905E-02
40	0,032	-1,8126E-01	1,872E-01	5,924E-03
41	0,015	-6,4745E-01	6,572E-01	9,734E-03
42	0,013	-5,2839E-01	5,352E-01	6,826E-03
43	0,032	-5,8663E-01	6,060E-01	1,940E-02
44	0,028	-4,3463E-01	4,470E-01	1,239E-02
45	0,010	-4,8470E-01	4,894E-01	4,731E-03
46	0,048	-3,2732E+00	3,440E+00	1,664E-01
47	0,027	-2,2463E+00	2,309E+00	6,256E-02
48	0,034	-2,4714E+00	2,558E+00	8,675E-02
49	0,057	-4,0767E-01	4,325E-01	2,480E-02
50	0,279	-4,4529E-02	6,175E-02	1,722E-02
51	0,053	-3,6073E-01	3,809E-01	2,019E-02
52	0,117	-9,0128E-01	1,021E+00	1,198E-01
53	0,075	-3,0116E+00	3,254E+00	2,429E-01

Tabuľka 5.7: Výsledky testov

DMU_j	$E_j(\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_j)$	$\mathbf{y}_j^T\mathbf{u} - \mathbf{x}_j^T\mathbf{v}$	$\mathbf{x}_j^T\mathbf{v}$	$\mathbf{y}_j^T\mathbf{u}$
54	0,065	-7,7263E-01	8,261E-01	5,344E-02
55	0,076	-2,0823E+00	2,254E+00	1,714E-01
56	0,045	-7,3963E-01	7,744E-01	3,472E-02
57	0,033	-1,9693E-01	2,037E-01	6,823E-03
58	0,041	-1,6005E-01	1,668E-01	6,790E-03
59	0,032	-1,0970E-01	1,134E-01	3,649E-03
60	0,055	-1,0999E-01	1,164E-01	6,408E-03
61	0,037	-1,4015E-01	1,455E-01	5,322E-03
62	0,034	-7,3454E-02	7,603E-02	2,574E-03
63	0,215	-4,5758E-01	5,829E-01	1,253E-01
64	0,365	-1,6721E+00	2,632E+00	9,595E-01
65	0,109	-2,3816E-01	2,674E-01	2,925E-02
66	0,123	-2,8823E+00	3,286E+00	4,034E-01
67	0,132	-2,5864E+00	2,980E+00	3,936E-01
68	0,212	-1,5497E-01	1,967E-01	4,176E-02
69	0,186	-2,4154E+00	2,967E+00	5,520E-01
70	0,201	-2,5877E-01	3,241E-01	6,530E-02
71	0,060	-3,5027E+00	3,725E+00	2,218E-01
72	0,038	-1,9937E+00	2,072E+00	7,840E-02
73	0,041	-9,7955E-01	1,021E+00	4,155E-02
74	0,051	-5,8060E-01	6,121E-01	3,147E-02
75	0,048	-4,3558E-01	4,577E-01	2,212E-02
76	0,042	-2,4639E+00	2,571E+00	1,075E-01
77	0,034	-9,6847E-01	1,003E+00	3,421E-02
78	0,027	-7,0153E-01	7,212E-01	1,966E-02
79	0,035	-3,3030E+00	3,422E+00	1,185E-01
80	0,040	-5,8828E+00	6,130E+00	2,477E-01
81	0,027	-3,0813E+00	3,166E+00	8,470E-02
82	0,018	-1,9038E+00	1,939E+00	3,488E-02
83	0,037	-6,4173E-01	6,662E-01	2,447E-02
84	0,046	-9,9075E-01	1,038E+00	4,744E-02
85	0,040	-4,9349E-01	5,141E-01	2,059E-02
86	0,051	-1,9475E-01	2,052E-01	1,043E-02
87	0,088	-2,2891E-02	2,511E-02	2,221E-03
88	0,064	-6,8233E-02	7,289E-02	4,659E-03
89	0,033	-9,9783E-01	1,032E+00	3,405E-02
90	0,030	-6,3953E-01	6,596E-01	2,009E-02
91	0,155	-1,6350E+00	1,934E+00	2,993E-01
92	0,179	-1,5652E+00	1,907E+00	3,419E-01
93	0,957	-1,8077E-03	4,167E-02	3,986E-02
94	0,094	-1,2164E+00	1,343E+00	1,264E-01
95	0,594	-3,0817E-02	7,585E-02	4,503E-02
96	0,256	-5,5033E-02	7,393E-02	1,890E-02
97	0,593	-1,3977E-02	3,434E-02	2,036E-02
98	0,033	-4,0414E-01	4,180E-01	1,383E-02
99	0,387	-1,5461E-02	2,521E-02	9,752E-03
100	0,763	-1,6702E-02	7,058E-02	5,388E-02
101	0,064	-3,9582E+00	4,230E+00	2,719E-01
102	0,095	-7,9180E-01	8,747E-01	8,292E-02
103	0,065	-2,6320E+00	2,816E+00	1,840E-01
104	0,064	-3,6328E+00	3,880E+00	2,468E-01
105	0,063	-2,9847E+00	3,184E+00	1,992E-01
106	0,080	-2,1645E-01	2,352E-01	1,876E-02

Tabuľka 5.8: Výsledky testov, pokračovanie tab. (5.7)

DMU_j	$E_j(\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_j)$	$\mathbf{y}_j^T\mathbf{u} - \mathbf{x}_j^T\mathbf{v}$	$\mathbf{x}_j^T\mathbf{v}$	$\mathbf{y}_j^T\mathbf{u}$
1	1,000	0,000	1,000	1,000
2	0,921	-0,079	1,000	0,921
3	0,587	-0,413	1,000	0,587
4	0,942	-0,058	1,000	0,942
5	1,000	0,000	1,000	1,000
6	0,940	-0,060	1,000	0,940
7	1,000	0,000	1,000	1,000
8	0,933	-0,067	1,000	0,932
9	0,677	-0,323	1,000	0,676
10	0,606	-0,394	1,000	0,606
11	0,526	-0,474	1,000	0,526
12	0,591	-0,409	1,000	0,591
13	0,476	-0,524	1,000	0,476
14	1,000	0,000	1,000	1,000
15	1,000	0,000	1,000	1,000
16	0,715	-0,285	1,000	0,715
17	0,560	-0,439	1,000	0,560
18	0,467	-0,533	1,000	0,467
19	0,568	-0,432	1,000	0,568
20	0,673	-0,327	1,000	0,673
21	0,433	-0,567	1,000	0,433
22	0,500	-0,500	1,000	0,500
23	0,431	-0,569	1,000	0,431
24	0,386	-0,614	1,000	0,386
25	0,523	-0,477	1,000	0,523
26	0,327	-0,673	1,000	0,327
27	0,508	-0,492	1,000	0,508
28	0,686	-0,314	1,000	0,686
29	0,480	-0,520	1,000	0,480
30	0,591	-0,409	1,000	0,591
31	0,411	-0,589	1,000	0,411
32	0,423	-0,577	1,000	0,423
33	0,504	-0,496	1,000	0,504
34	0,439	-0,561	1,000	0,439
35	0,653	-0,347	1,000	0,653
36	0,952	-0,048	1,000	0,952
37	0,636	-0,364	1,000	0,636
38	0,577	-0,423	1,000	0,577
39	0,324	-0,676	1,000	0,324
40	0,604	-0,396	1,000	0,604
41	0,232	-0,768	1,000	0,232
42	0,217	-0,783	1,000	0,217
43	0,465	-0,535	1,000	0,465
44	0,252	-0,748	1,000	0,252
45	0,170	-0,830	1,000	0,170
46	0,457	-0,543	1,000	0,456
47	0,324	-0,676	1,000	0,324
48	0,464	-0,536	1,000	0,464
49	0,390	-0,610	1,000	0,390
50	1,000	0,000	1,000	1,000
51	0,262	-0,738	1,000	0,262
52	0,886	-0,114	1,000	0,886
53	0,592	-0,408	1,000	0,592

Tabuľka 5.9: Výsledky testov

DMU_j	$E_j(\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_j)$	$\mathbf{y}_j^T\mathbf{u} - \mathbf{x}_j^T\mathbf{v}$	$\mathbf{x}_j^T\mathbf{v}$	$\mathbf{y}_j^T\mathbf{u}$
54	0,613	-0,387	1,000	0,613
55	0,558	-0,442	1,000	0,558
56	0,606	-0,394	1,000	0,606
57	0,993	-0,007	1,000	0,993
58	0,940	-0,060	1,000	0,940
59	0,990	-0,010	1,000	0,990
60	1,000	0,000	1,000	1,000
61	0,703	-0,297	1,000	0,703
62	0,896	-0,104	1,000	0,896
63	0,817	-0,183	1,000	0,817
64	1,000	0,000	1,000	1,000
65	0,623	-0,377	1,000	0,623
66	0,696	-0,304	1,000	0,696
67	0,537	-0,463	1,000	0,537
68	1,000	0,000	1,000	1,000
69	0,780	-0,220	1,000	0,780
70	0,704	-0,296	1,000	0,704
71	0,485	-0,515	1,000	0,485
72	0,529	-0,471	1,000	0,529
73	0,380	-0,620	1,000	0,380
74	1,000	0,000	1,000	1,000
75	0,440	-0,560	1,000	0,440
76	0,238	-0,762	1,000	0,238
77	0,246	-0,755	1,000	0,246
78	0,354	-0,646	1,000	0,354
79	0,384	-0,616	1,000	0,384
80	0,558	-0,442	1,000	0,558
81	0,410	-0,590	1,000	0,410
82	0,274	-0,726	1,000	0,274
83	0,369	-0,631	1,000	0,369
84	0,561	-0,439	1,000	0,561
85	0,393	-0,607	1,000	0,393
86	0,410	-0,590	1,000	0,410
87	0,269	-0,731	1,000	0,269
88	0,377	-0,623	1,000	0,377
89	0,465	-0,535	1,000	0,465
90	0,366	-0,634	1,000	0,366
91	0,482	-0,518	1,000	0,482
92	0,544	-0,456	1,000	0,544
93	1,000	0,000	1,000	1,000
94	0,487	-0,513	1,000	0,486
95	1,000	0,000	1,000	1,000
96	0,441	-0,559	1,000	0,441
97	1,000	0,000	1,000	1,000
98	0,568	-0,432	1,000	0,568
99	0,673	-0,327	1,000	0,673
100	1,000	0,000	1,000	1,000
101	0,552	-0,448	1,000	0,552
102	0,596	-0,404	1,000	0,596
103	0,477	-0,523	1,000	0,477
104	0,605	-0,394	1,000	0,605
105	0,533	-0,467	1,000	0,533
106	0,326	-0,674	1,000	0,326

Tabuľka 5.10: Výsledky testov, pokračovanie tab. (5.9)

Kapitola 6

Záver

Diplomová práce je venovaná DEA–modelom, ich zostrojeniu pomocou úloh lineárneho programovania a následnému riešeniu týchto úloh. V tejto práci je uvedený len zlomok modelov, ktoré sa používajú v praxi. Modely sú väčšinou odvodené zo základných modelov typu BCC alebo CCR, preto nie je problém s modifikáciou programu, ktorý rieši základné úlohy.

Ťažiskom našej práce bolo vytvoriť program na riešenie veľkého množstva úloh lineárneho programovania, ktoré majú veľký rozmer. Na tvorbu programu sme použili primárne–duálny algoritmus pomocou, ktorého riešime problémy týkajúce sa základných modelov typu BCC a CCR. Program sme aplikovali na konkrétne údaje z praxe a získané výsledky sme potom podrobili dodatočným testom. Vypočítané virtuálne ceny sa dajú použiť na analýzu efektívnosti jednotlivých DMU. My sme tieto výsledky sme analyzovali z hľadiska počtu nenulových prvkov. Na základe týchto výsledkov by sme mohli urobiť rozsiahlu analýzu efektívnosti ako je uvedené v [3].

V budúcnosti by na [2] mali byť dostupné dáta, s pomocou ktorých bude možné realizovať porovnávanie a testovanie algoritmov, pretože analýza týchto údajov sa už uskutočnila.

Literatúra

[1] Zilla Sinuany-Stern, Abraham Mehrez, Arieh Barboy,, *Academic departments efficiency via DEA*, Computer Ops Res **21** (1994), no. 5, 543–556.

[2] Ali Emrouznejad, *Ali Emrouznejad's Data Envelopment Analysis Homepage*, http://www.warwick.ac.uk/~bsrlu/, 1995.

[3] Pavol Brunovský, Margaréta Halická, Daniel Ševčovič,, *Data Envelopment Analýza efektívnosti bankových pobočiek*, Tech. report, Matematicko fyzikálna fakulta Univerzity Komenského, August 1999, http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/dea.

[4] Dieter Gstach, *Technical efficiency in noisy multi–output settings*, Tech. report, Vienna University of Economics, VW6, Augasse 2–6, 1090 Vienna, Austria, August 1998.

[5] Margaréta Halická, *Geometrická interpretácia DEA modelov*, Tech. report, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského, Mlynská dolina, Bratislava, Október 1999.

[6] ______, *Úvod do DEA modelov*, Tech. report, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského, Mlynská dolina, Bratislava, Október 1999.

[7] Milan Hamala, *Konspekt 22. prednášky z Nelineárneho Programovania*, Tech. report, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského, December 1998.

[8] Sanjay Mehrotra, *On the implementation of a Primal–Dual interior point method*, Siam Journal on Optimization **2** (1992), no. 4, 575–601.

[9] Toshiyuki Sueyoshi, *Divestiture of Nippon Telegraph and Telephone*, Management Science **42** (1996), no. 9, 1326–1351.

[10] María D. González-Lima, Richard A. Tapia, Robert M. Thrall,, *On the construction of strong complementatiry slackness solutions for DEA linear programming using a primal–dual interior–point method*, Annals of Operations Research **66** (1996), 139–162.

[11] Joseph Czyzyk, Sanjay Mehrotra, Michael Wagner, and Stephen Wright, *PCx User Guide (version 1.1)*, technical report 96/01, Optimization Technology Center, November 1997.