Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského
v Bratislave

Diplomová Práca

Martin Jandačka

Bratislava 2001

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského
v Bratislave

Ekonomická a finančná matematika

Uplatnenie Parciálnych Diferenciálnych Rovníc v Oceňovaní Finančných Derivátov

Diplomová práca

Diplomant: Martin Jandačka

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2001

Obsah

Úvod

Oceňovanie finančných derivátov je v praxi často skúmaný problém. Existuje viacero prístupov k ich riešeniu. Základom pre väčšinu metód je Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica. Táto rovnica bude východiskom aj v tejto práci. Jej odvodenie a niektoré výsledky v oceňovaní európskych call opcií priblížime v prvej kapitole. Našim cieľom je odvodiť oceňovaciu rovnicu, v ktorej do ceny derivátu zahrnieme transakčné náklady a riziko vyplývajúce z vlastníctva spomínaného derivátu. V tejto práci nadviažeme na model odvodený M.Kratkom v práci [1], ktorý sa ako prvý zaoberal s oboma spomínanými faktormi. Ukážeme, že tento model je závislý na voľbe jednotiek.

V druhej kapitole navrhneme dve nové metódy zahrnutia rizika do oceňovania derivátov a odvodíme k nim prislúchajúce parciálne diferenciálne rovnice. Do oboch modelov zaradíme aj transakčné náklady a ukážeme, že takto navrhnuté modely budú invariantné vzhľadom na zmenu jednotiek.

V tretej kapitole sa zameriame na vlastnosti jedného z modelov, ktoré nám umožnia v štvrtej kapitole navrhnúť stabilnú numerickú schému na riešenie daného modelu a ukážeme, že daná numerická schéma má podobné vlastnosti ako skúmaný model. Nakoniec uvedieme niektoré výsledky numerickej aproximácie hodnoty derivátov aktív.

Ďakujem svojmu vedúcemu diplomovej práce RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za odborné vedenie a cenné rady, ktorými mi pomohol k napísaniu tejto práce.

1 Klasické modely oceňovania derivátov aktív

V prvej kapitole pripomenieme niektoré základné definície, predpoklady a vzťahy medzi nimi. Ďalej uvedieme základný model oceňovania derivátov, Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu a jej riešenie pre niektoré deriváty. Uvedieme aj Lelandov model predstavujúci rozšírenie Black-Scholesovho modelu o transakčné náklady. Podrobnejšie sa touto problematikou zaoberujú napr. práce [3] a [4].

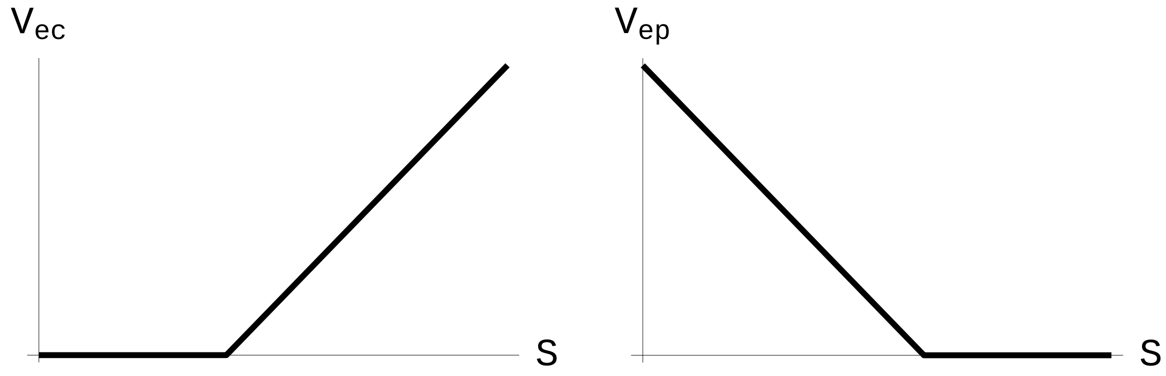
1.1 Základné pojmy

Základným pojmom v teórii finančných trhov je opcia. **Opcia** je právo na kúpu alebo predaj aktíva za vopred dohodnutú cenu. **Európska call opcia** je kontrakt, v ktorom kupujúci získava právo, nie povinnosť, kúpiť akciu v presne určenom čase (**expiračný čas**, označme T) za vopred dohodnutú cenu (**expiračná cena**, označme E). Vypisovateľ opcie je povinný vyhovieť kupujúcemu, pričom za túto službu dostane prémiu (cenu opcie) v čase podpísania kontraktu. Európska call opcia má v expiračnom čase hodnotu závislú od ceny akcie S. Ak je vtedy cena akcie menšia ako expiračná cena, tak vlastník opcie neuplatní svoje právo kúpiť akciu za cenu E, pretože môže získať akciu lacnejšie priamo na trhu. V opačnom prípade, keď je cena akcie väčšia ako expiračná cena, tak vlastník opcie uplatnením svojho práva a následným predajom akcie na trhu získa rozdiel medzi cenou akcie a expiračnou cenou. Teda ak hodnotu európskej call opcie v čase expirácie označíme $V_{ec}(S,T)$ (t.j. value of european call), tak dostávame

$$V_{ec} = \max(S - E, 0). \tag{1.1}$$

Európska put opcia je kontrakt, v ktorom kupujúci získava právo, nie povinnosť, predať akciu v presne určenom čase za vopred dohodnutú cenu. Vypisovateľ opcie je povinný vyhovieť druhej strane, pričom za túto službu dostane prémiu (cenu opcie) v čase podpísania kontraktu. Európska put opcia má v expiračnom čase hodnotu závislú od ceny akcie S, ktorú označíme $V_{ep}(S,T)$,

$$V_{ep} = \max(E - S, 0).$$



Obr. 1: Payoff diagram pre európsku call opciu (vľavo) a pre európsku put opciu (vpravo).

1.2 Black-Scholesov model

Black-Scholesov model je vybudovaný na základe veľkého množstva teoretických predpokladov, ktoré výrazne zjednodušujú pohľad na realitu. Základným predpokladom Black-Scholesovho modelu je, že akcia, na ktorú je derivát vypísaný, sleduje **log-normálny** proces

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \tag{1.2}$$

kde S je cena akcie, t je čas, μ je očakávaná návratnosť akcie, σ je jej volatilita, dS predstavuje zmenu ceny akcie za malý časový okamžik dt a dw označuje zmenu Wienerovho procesu za čas dt. **Wienerov proces** je spojitý systém náhodných premenných $\{w(t), t \geq 0\}$, pre ktorý platí:

1. $w(0) = 0$,
2. $dw = \phi\sqrt{dt}$, pričom ϕ má normalizované normálne rozdelenie,
3. prírastky dw pre rôzne časy sú navzájom nezávislé.

Na odvodenie Black-Scholesovej formuly potrebujeme ešte Itôovu lemu.

Lema 1.1 *(Itôova lema)*

Nech $f(x,t)$ je hladká funkcia premenných x, t, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw,$$

kde dw je diferenciál Wienerovho procesu. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dw + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt.$$

Poznámka: Pre diskrétnu verziu Itôovej lemy dostávame

$$\triangle f = \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}\triangle w + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\phi^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\triangle t.$$

Ak predpokladáme, že cena derivátu $V(S,t)$ je hladkou funkciou premenných S, t a premenná S sleduje log-normálny proces, tak podľa Itôovej lemy dostávame pre strednú hodnotu zmeny ceny derivátu za čas dt stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dV = S\frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt. \tag{1.3}$$

Ďalej vytvoríme portfólio P pozostávajúce z jedného derivátu a δ akcií

$$P = V + \delta S.$$

Zmena hodnoty portfólia za malý časový interval dt, pričom $d\delta = 0$ (hovoríme o takzvaných samofinancovaných stratégiach), je

$$dP = dV + \delta dS,$$

po dosadení rovnice (1.3) dostávame stochastickú rovnicu pre portfólio

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S}S + \delta S\right)dS.$$

Jediný náhodný prvok v tejto stochastickej rovnici je dS, ktorý však môžeme vhodným zvolením δ vynulovať. To sa nám podarí, ak zvolíme

$$\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}.$$

Potom pre zmenu hodnoty portólia dostávame už deterministickú diferenciálnu rovnicu v tvare

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \tag{1.4}$$

Poznámka: Takýto spôsob zaisťovania portfólia sa nazýva spojitý δ hedging, pri ktorom musí investor spojite meniť počet akcií v portfóliu. Zároveň musia byť akcie dokonale deliteľné a musí existovať možnosť vlastniť záporné množstvo akcií (short position).

Aby na trhu nevznikol priestor pre arbitráž (bezrizikový zisk bez vlastnenia peňazí, ktorý je možný len po krátku dobu, pretože účastníci trhu ho svojim využívaním eliminujú), musí byť prírastok portfólia rovný prírastku, ktorý by sme získali investovaním do bezrizikového dlhopisu, teda

$$dP = rPdt,$$

kde r je bezrizikový úrok dlhopisu. Nasledovným dosadením do (1.3) dostávame **Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) = 0. \tag{1.5}$$

Príklad: Ak má akcia sledujúca log-normálne rozdelenie v čase t hodnotu $S = 0$, tak podľa (1.2) sú prírastky ceny akcie nulové a preto bude ďalej cena akcie stále nulová. To znamená, že už v danom čase t poznáme hodnotu, ktorú bude mať derivát v čase expirácie a preto súčasná hodnota derivátu pri cene akcie $S = 0$ musí byť bezrizikovým úrokom diskontovaná hodnota, ktorú nadobudne derivát v čase expirácie, teda

$$V(0,t) = V(0,T)e^{-r(T-t)}.$$

Potom pre európsku call opciu dostávame

$$V_{ec}(0,t) = 0.$$

Ak cena akcie rastie nad všetky ohraničenia, tak cena call opcie je rovná cene akcie zníženej o diskontovanú expiračnú cenu

$$V_{ec}(S,t) = S - Ee^{-r(T-t)} \text{ ak } S \to \infty.$$

Tým sme definovali okrajové podmienky pre európsku call opciu, pričom ešte máme koncovú podmienku (1.1). Pre európsku call opciu existuje explicitné riešenie Black-Scholesovho modelu v tvare

$$V_{ec} = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{1.6}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

a

$$N(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2/2} dx.$$

Hodnotu európskej put opcie v čase expirácie môžeme vypočítať pomocou takzvanej **put-call parity**

$$S - V_{ec}(S,T) + V_{ep}(S,T) = E,$$

teda portfólio zložené z jednej akcie, jednej put opcie a mínus jednej call opcie má v čase expirácie hodnotu E, nezávisle na cene akcie. Takže dané portfólio musí mať v každom čase hodnotu dlhopisu s nominálnou hodnotou E, vyplácanou v čase expirácie a preto

$$V_{ep}(S,t) = Ee^{-r(T-t)} + V_{ec}(S,t) - S.$$

1.3 Lelandov model

Možnosť nakupovať a predávať ľubovoľné množstvo akcií za cenu S je jedným z predpokladov Black-Scholesovho modelu, ktorý nie je možné na skutočnom trhu zabezpečiť. Preto predpokladáme, že na trhu môžeme nakupovať akcie za cenu S_{ask} a predávať za cenu S_{bid}. Ako cenu akcie S označíme priemer cien S_{ask} a S_{bid}. Potom

$$S_{ask} = S\left(1 + C/2\right),$$

$$S_{bid} = S\left(1 - C/2\right),$$

kde C reprezentuje konštantné percentuálne náklady na predaj a kúpu jednej akcie. Teda ak uvažujeme nákup alebo predaj akcie za cenu S, tak musíme počítať s dodatočnými nákladmi vo výške $\frac{C}{2}S$ jednotiek. Ďalej predpokladáme, že cena akcie sleduje log-normálny proces

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw.$$

Syntetizujeme derivát V voľbou portfólia zloženého z δ akcií a jedného bezrizikového dlhopisu B s bezrizikovou mierou návratnosti r, pričom portfólio je zaisťované samofinancovanou stratégiou. V čase t máme

$$V_t = \delta_t S_t + B_t.$$

Ak časový interval medzi dvoma zaisťovaniami portfólia označíme $\triangle t$, tak pre zmenu hodnoty portfólia od času t do $t + \triangle t$ dostávame

$$V_{t+\triangle t} - V_t = \delta_t(S_{t+\triangle t} - S_t) + (B_t e^{r\triangle t} - B_t) + \frac{C}{2}|\delta_{t+\triangle t} - \delta_t| S_{t+\triangle t},$$

kde prvý člen pravej strany rovnice predstavuje zisk (resp. stratu) spôsobený zmenou ceny akcie, druhý člen úrok získaný z dlhopisu a posledný člen predstavuje transakčné náklady vyplývajúce zo zmeny počtu akcií v portfóliu, teda súčin dodatočných nákladov na nákup alebo predaj jednej akcie a počtu akcií, ktoré nakupujeme alebo predávame. Túto rovnosť môžeme prepísať do diferenčného tvaru

$$\frac{\partial V}{\partial S}\triangle S + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\triangle t = \delta \triangle S + rB\triangle t + \frac{C}{2} S|\triangle \delta|,$$

pričom na člen $\triangle V$ sme aplikovali Itôovu lemu (1.1). Voľbou počtu akcií v portfóliu

$$\delta = \frac{\partial V}{\partial S} \tag{1.7}$$

eliminujeme člen $\triangle S$, avšak v rovnici stále ostane stochastický člen $\triangle \delta$, teda

$$rB\triangle t + \frac{C}{2} S|\triangle \delta| = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\triangle t. \tag{1.8}$$

Podľa (1.7) je množstvo akcií v portfóliu funkciou aktuálnej ceny akcie S a času, teda aplikovaním Itôovej lemy dostávame

$$\triangle \delta \approx \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \triangle w,$$

až na členy rádu $\triangle t$ a menšie. Odvolaním sa na zákon veľkých čísiel a s prihliadnutím na fakt, že pre očakávanú hodnotu $|\triangle w|$ platí

$$E[|\triangle w|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}\triangle t},$$

dostávame pre $\triangle t \to 0$

$$\frac{1}{2}CS|\triangle\delta| \approx \frac{1}{2}C\sigma S^2 \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| E\left[|\triangle w|\right] = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{C}{\sigma\sqrt{\triangle t}}\triangle t.$$

Nasledovným dosadením do (1.8) získame **Lelandov model** na oceňovanie finančných derivátov v tvare

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left(1 - \operatorname{sign}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{C}{\sigma\sqrt{\triangle t}}\right) + r\left(S\frac{\partial V}{\partial S} - V\right) = 0, \tag{1.9}$$

pričom sme do rovnice dosadili aj vzťah

$$B = V - \delta S.$$

Poznámka: V nelineárnych modeloch oceňovania derivátov zahrňujúcich transakčné náklady sa vo všeobecnosti nedajú použiť výsledky ako je napríklad put-call parita, ktorá je dôsledkom linearity základného Black-Scholesovho modelu. Táto metóda vychádzala z rozdelenia derivátu na dva subderiváty tak, aby v čase expirácie dávali spolu požadovaný derivát. Každý z týchto subderivátov sme potom syntetizovali samostatne, čím mohol nastať prípad, že sme z jedného portfólia akcie predávali a do druhého sme akcie nakupovali, pričom by postačovalo presunúť akcie z jedného portfólia do druhého bez toho, aby sme museli platiť transakčné náklady.

2 Riziko zahrňujúca metóda oceňovania

V klasických modeloch na oceňovanie finančných derivátov sa stretávame s mnohými predpokladmi, ktoré viac, či menej odďalujú samotný model od reality. Každý investor na opčnom trhu je vystavený transakčným nákladom, či už vo forme poplatkov za obchodovanie, alebo vo forme rozdielu v cene, za ktorú môže akciu predať, alebo kúpiť. Napriek tomu sme sa v Black-Scholesovom modeli stretli s predpokladom o neexistencii transakčných nákladov. Rovnako neexistuje na svete investor, ktorý by mohol splniť ďalší predpoklad Black-Scholesovho modelu, a to predpoklad o možnosti nepretržitého hedgovania portfólia, ani investor, ktorý by bol schopný vytvoriť bezrizikové portfólio. Teda na skutočnom trhu investor snažiaci sa syntetizovať derivát vlastní rizikové portfólio a preto by mal byť kompenzovaný za riziko, ktorému sa držaním tohto portfólia vystavuje.

V tejto kapitole priblížime Black-Scholesov model k realite zavedením transakčných nákladov, s ktorými sme sa už stretli pri Lelandovom modeli. Navyše zavedieme diskrétny čas hedgovania, ktorý však vystavuje investora riziku, pretože na rozdiel od Black-Scholesovho modelu nebude možné synteticky vytvoriť bezrizikové portfólio. Preto do modelu zavedieme aj rizikovú prémiu, ktorá predstavuje kompenzáciu za riziko, ktorému sa investor držbou stochastického portfólia vystavuje. Ďalej sa budeme podrobnejšie zaoberať voľbou rizikovej prémie.

Základným predpokladom je finančný derivát vypísaný na akciu S, nevyplácajúcu dividendy. Pričom akcia sleduje log-normálny proces

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw,$$

kde μ predstavuje trend, teda strednú hodnotu relatívnej zmeny ceny akcie za čas dt,

σ je štandardná odchýľka relatívnej zmeny ceny akcie a

dw je Wienerov proces, pričom $dw = \phi\sqrt{dt}$, $\phi \sim$N(0,1), teda ϕ má normalizované normálne rozdelenie.

Štandardným postupom pri oceňovaní ostáva vytvorenie syntetického portfólia P z jedného derivátu V a δ akcií S, teda $P = V + \delta S$. Aplikovaním diskrétnej verzie Itôovej lemy 1.1 na hodnotu finančného derivátu V dostávame

$$\triangle P = \triangle V + \delta \triangle S = \frac{\partial V}{\partial t}\triangle t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \phi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\triangle t + \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta\right)\triangle S.$$

Očakávaná zmena hodnoty portfólia musí pokryť nárast hodnoty o bezrizikové zúročenie, ako aj zúročenie o rizikovú prémiu, ktorá kompenzuje investorovi riziko vyplývajúce z vlastnenia stochastického portfólia. Nárast hodnoty musí zároveň pokryť aj transakčné náklady vyplývajúce z potreby hedgovania portfólia. Teda

$$\begin{aligned} \triangle P &= \frac{\partial V}{\partial t}\triangle t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \phi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\triangle t + (V + \delta S)\triangle S \\ &= r_{TC} S \triangle t + r P \triangle t + \ \mathit{Rizikova\, premia}. \end{aligned}$$

V tomto momente nechávame rizikovú prémiu vo všeobecnom tvare, pretože neskôr sa budeme zaoberať niekoľkými modelmi zohľadňujúcimi rôznu voľbu rizikovej prémie.

2.1 Transakčné náklady

V Black-Scholesovom modeli sme sa stretli s predpokladom, že investor môže predávať a nakupovať ľubovoľné množstvo akcií za cenu S. Na trhu je však cena, za ktorú investor nakupuje rôzna od ceny, za ktorú môže akciu predať. Navyše musí investor platiť rôzne poplatky (napr. provízie) spojené s nákupom a predajom akcií. Označme

C transakčné náklady na jeden kontrakt,

S_{ask} cenu, za ktorú investor predáva akcie,

S_{bid} cenu, za ktorú investor nakupuje akcie.

Na trhu sú transakčné náklady závislé aj od počtu akcií, s ktorými obchodujeme. V tomto modeli predpokladáme konštantné transakčné náklady vyplývajúce z rozdielu v cene nákupnej a predajnej ceny, potom je C definované vzťahom

$$S_{bid} - S_{ask} = CS.$$

Použitá miera transakčných nákladov z Lelandovho modelu sa riadi vzťahom

$$r_{TC} = C\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma S \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| \frac{1}{\sqrt{\triangle t}}. \tag{2.1}$$

Poznámka: Takto definované transakčné náklady zahŕňajú iba náklady vyplývajúce z rozdielu v cene predaja a nákupu akcií. Nato, aby sme rozšírili model o transakčné poplatky vo výške $k\%$ z ceny akcie stačí uvažovať nové transakčné náklady na jeden kontrakt v tvare $C \equiv C + k$.

2.2 Prémia za vystavenie sa riziku

Ako by mal byť kompenzovaný investor za nenulovú varianciu portfólia? Opatrne povedané, čím je väčšia variancia portfólia, tým by mala byť väčšia aj prémia za podstúpené riziko. V tejto časti uvedieme tri modely zohľadňujúce riziko v cene derivátu. Klasický RAPM model bol odvodený v [1]. Ďalej navrhneme dva modely s cieľom získať metódu oceňovania zohľadňujúcu riziko, ktorá bude zároveň invariantná vzhľadom na zmenu jednotiek.

RAPM-K *model*

Prvým modelom zohľadňujúcim riziko bol model Milana Kratku publikovaný v práci [1], kde zvolil pre rizikovú prémiu tvar

$$E[\triangle P] = rP\triangle t + (r_{TC} + r_{VAR})\,\triangle t,$$

kde

$$r_{VAR} = R\frac{Var(\triangle P)}{\triangle t},$$

pričom R predstavuje averziu k riziku daného investora a r_{VAR} je riziková prémia počítaná v absolútnych jednotkách, ktorou má byť investor kompenzovaný za čas dt. Poznamenajme, že transakčné náklady v takto zvolenom modeli nie sú v súlade s Lelandovym modelom. Navyše, ako neskôr ukážeme, táto voľba rizikovej prémie spôsobuje závislosť modelu na zmene jednotiek, v ktorých ohodnocujeme danú akciu a derivát. Model označíme RAPM-K.

Poznámka: Gréckym písmenom Γ ďalej označujeme funkciu $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$.

Variancia portfólia medzi dvomi zaisťovacími bodmi môže byť odhadnutá ako

$$\begin{aligned} Var(\triangle P) &= E\left[(\triangle P - E[\triangle P])^2\right] \\ &= E\left[\left(\left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta\right)\sigma S \triangle w + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma\left(\phi^2 - 1\right)\triangle t\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\sigma^4 S^4 \Gamma^2 \triangle t^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta\right)^2 \sigma^2 S^2 \triangle t \end{aligned}$$

a rizikovú prémiu dostaneme v tvare

$$r_{VAR} = \frac{1}{2} R \sigma^4 S^4 \Gamma^2 \triangle t + R\left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta\right)^2 \sigma^2 S^2.$$

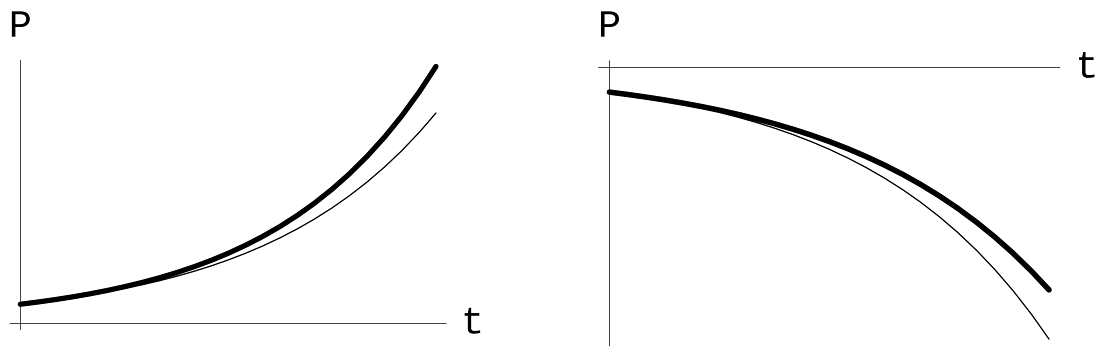
SI-RAPM-P *model*

Z dôvodu odstránenia spomínaných nedostatkov uvažujeme model, ktorý označíme ako SI-RAPM-P. Neskôr ukážeme, že tento model je nezávislý na zmene jednotiek (scale invariant). Pre strednú hodnotu zmeny portfólia predpokladáme tvar

$$E[\triangle P] = rP\triangle t + r_{VAR}|P|\triangle t + r_{TC} S \triangle t,$$

v ktorom r_{VAR} predstavuje rizikovú prémiu, o ktorú sa navyšuje bezrizikový úrok ako kompenzácia za vystavenie sa riziku. Absolútna hodnota portfólia v rovnici je z dôvodu, aby aj v prípade portfólia so zápornou hodnotou predstavovalo r_{VAR} kompenzáciu za vystavenie sa riziku. Investor vlastní takéto portfólio napríklad v prípade, keď sa snaží syntetizovať call opciu. Teda riziková prémia musí zvyšovať hodnotu záporného portfólia a preto musí v takomto prípade znižovať úrokovú mieru portfólia.

Jedným z dôvodov závislosti modelu RAPM-K od voľby jednotiek je aj voľba rizikovej prémie. Môžeme sa ľahko presvedčiť, že ak zmeníme jednotky z korún na haliere, tak riziková prémia RAPM-K modelu vzrastie až 10 000 násobne. V našom modeli predstavuje riziková prémia navýšenie bezrizikového úroku, teda predstavuje úrok, ktorý nemôže závisieť od voľby jednotiek. Nemôžeme predsa žiadať, aby mal mať investor hodnotiaci svoje portfólio v halieroch väčšiu rizikovú prémiu, ako ten, ktorý počíta v korunách. Preto je rozumnejšie predpokladať, že riziková prémia je funkiou relatívnej zmeny hodnoty portfólia a nie len samotnej hodnoty portfólia. V našom modeli rizikovú prémiu odhadneme



Obr. 2: Príklad vplyvu rizikovej prémie na hodnotu deterministického portfólia (hrubšia krivka) a bez prémie (tenká krivka).

lineárnou funkciou variancie relatívnej zmeny hodnoty portfólia, pričom konštantná zložka je nulová, pretože je rozumné predpokladať, že s nulovou varianciou investor nedostáva žiadnu rizikovú prémiu. Teda

$$r_{VAR} = R\frac{Var\left(\frac{\triangle P}{P}\right)}{\triangle t},$$

kde R je koeficient averzie k riziku. S rastúcou averziou k riziku požaduje investor väčšiu kompenzáciu za podstupované riziko. Riziková prémia môže byť odvodená podobným postupom ako v predchádzajúcom prípade a to v tvare

$$r_{VAR} = \frac{R}{2P^2}\sigma^4 S^4 \Gamma^2 \triangle t + \frac{R}{P^2}\left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta\right)^2 \sigma^2 S^2.$$

SI-RAPM-S *model*

Alternatívna voľba rizikovej prémie je

$$r_{VAR} = R\frac{Var\left(\frac{\triangle P}{S}\right)}{\triangle t},$$

kde člen $\frac{\triangle P}{S}$ predstavuje počet akcií, ktoré sme získali (stratili) práve vďaka náhodnému vývoju hodnoty portfólia. Investor by mal dostávať väčšiu kompenzáciu s rastúcou varianciou tohoto členu. Aj v tomto modeli predstavuje R averziu investora k riziku. Model označíme ako (SI-RAPM-S). Keďže r_{VAR} v tomto modeli predstavuje počet akcií, ktorými by mal byť investor kompenzovaný, tak by mal za čas dt dostať $r_{VAR}Sdt$ v peňažných jednotkách a preto pre strednú hodnotu portfólia predpokladáme tvar

$$E[\triangle P] = rP\triangle t + r_{VAR}S\triangle t + r_{TC}S\triangle t.$$

Rizikovú prémiu odvodíme podobne ako v modeli RAPM-K a to v tvare

$$r_{VAR} = \frac{1}{2} R\sigma^4 S^2 \Gamma^2 \triangle t + R\sigma^2 \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta \right)^2 .$$

2.3 Optimálna hedgovacia stratégia

Investor obchodujúci na trhu v konkurenčnom prostredí je práve konkurenciou nútený používať stratégiu, ktorá mu zabezpečí minimálnu cenu, za ktorú je schopný syntetizovať derivát. Ak investor zvolí čas hedgovania blízky nule, minimalizuje tým riziko vyplývajúce z vlastnenia stochastického portfólia, ale neúmerne tým zvýši transakčné náklady. Na druhej strane, ak investor minimalizuje transakčné náklady, tak narastá riziko z vlastnenia portfólia. Teda investor voľbou času zaisťovania portfólia musí minimalizovať súčet rizikovej prémie a transakčných nákladov. Ďalšie zníženie tohto súčtu dosiahne investor v uvedených modeloch pomocou δ hedgingu.

RAPM-K *model*

Ak predpokladáme konkurenčné prostredie, tak investor musí minimalizovať hodnotu derivátu. V modeli RAPM-K to investor dosiahne voľbou času zaisťovania tak, že minimalizuje súčet rizikovej prémie a transakčných nákladov

$$r_{VAR} + r_{TC} = R \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta \right)^2 \sigma^2 S^2 + \frac{1}{2} R\sigma^4 S^4 \Gamma^2 \triangle t + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C}{\sqrt{\triangle t}} \mid \Gamma \mid \sigma S. \tag{2.2}$$

Na nájdenie optimálneho hedgovacieho času postačuje položiť deriváciu výrazu (2.2), chápaného ako funkciu $\triangle t$, rovnú nule a dostaneme optimálny hedgovací prírastok času

$$\triangle t = \frac{k^2}{\sigma^2 S^2 \mid \Gamma \mid^{\frac{2}{3}}} , \qquad k = \left(\frac{C}{R} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^{\frac{1}{3}} .$$

Dôsledok 2.1 *Optimálnu hedgovaciu stratégiu môžeme interpretovať tak, že pri každej zmene akcie o prírastok*

$$\triangle S \approx \pm \sigma S \sqrt{\triangle t} = \pm \sigma S \frac{k}{\sigma S |\Gamma|^{\frac{1}{3}}} = \pm k |\Gamma|^{-\frac{1}{3}}$$

je nutné pristúpiť k hedgovaniu portfólia.

SI-RAPM-P *model*

Ak predpokladáme konkurenčnú hedgovaciu stratégiu, ktorú investor v modeli SI-RAPM-P dosahuje voľbou času zaisťovania portfólia, tak hľadáme prírastok času, ktorý minimalizuje hodnotu portfólia, teda minimalizujeme člen

$$\begin{aligned} & rP + r_{VAR}|P| + r_{TC}S \\ & = rP + \frac{R}{|P|}\left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta\right)^2 \sigma^2 S^2 + \frac{R}{2|P|}\sigma^4 S^4 \Gamma^2 \triangle t + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C}{\sqrt{\triangle t}} \mid \Gamma \mid \sigma S^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Na nájdenie optimálneho hedgovacieho času opäť postačuje položiť deriváciu výrazu (2.3), chápaného ako funkciu $\triangle t$, rovnú nule a dostaneme optimálny hedgovací prírastok času

$$\triangle t = \frac{k^2}{\sigma^2}\left(\frac{|P|}{S^2|\Gamma|}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad k = \left(\frac{C}{R}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Dôsledok 2.2 *Zmeny v modeli ovplyvnia aj hedgovaciu stratégiu, ktorú môžeme interpretovať tak, že pri každej zmene akcie o*

$$\triangle S \approx \pm\sigma S\sqrt{\triangle t} = \pm k S\left(\frac{|P|}{S^2|\Gamma|}\right)^{\frac{1}{3}}$$

je nutné pristúpiť k hedgovaniu portfólia.

SI-RAPM-S *model*

Konkurenčné prostredie v modeli SI-RAPM-S znamená minimalizáciu hodnoty portfólia voľbou času zaisťovania. Teda investor musí voľbou času zaisťovania portfólia minimalizovať člen

$$r_{VAR}S + r_{TC}S = R\left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta\right)^2 \sigma^2 S^3 + \frac{1}{2}R\sigma^4 S^3 \Gamma^2 \triangle t + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{C}{\sqrt{\triangle t}} \mid \Gamma \mid \sigma S^2. \tag{2.4}$$

Na nájdenie optimálneho hedgovacieho času opäť postačuje položiť deriváciu výrazu (2.4), chápaného ako funkciu $\triangle t$, rovnú nule a dostaneme optimálny hedgovací prírastok času

$$\triangle t = \frac{k^2}{\sigma^2|S\Gamma|^{\frac{2}{3}}}, \qquad k = \left(\frac{C}{R}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Dôsledok 2.3 *Optimálnu hedgovaciu stratégiu môžeme interpretovať tak, že pri každej zmene akcie o*

$$\triangle S \approx \pm \sigma S \sqrt{\triangle t} = \pm k \left(\frac{S^2}{|\Gamma|} \right)^{\frac{1}{3}}$$

je nutné pristúpiť k zaisteniu portfólia.

2.4 Rovnica RAPM modelu

Oceňovaciu rovnicu daného modelu získame dosadením optimálneho hedgovacieho času do rizikovej prémie, do transakčných nákladov a nasledovným dosadením rizikovej prémie a transakčných nákladov do rovnice pre očakávanú zmenu hodnoty portfólia. Pre nájdenie riešenia týchto rovníc potrebujeme ešte počiatočné a okrajové podmienky. Tieto sú totožné s tými, ktoré sme uvažovali v základnom Black-Scholesovom modeli.

Takže pre model RAPM-K dostávame oceňovaciu rovnicu v tvare

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma \left(1 - 3Rk^2 \Gamma^{\frac{1}{3}}\right) = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S\right). \tag{2.5}$$

Podobne pre model SI-RAPM-P odvodíme oceňovaciu rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma \left(1 - 3Rk^2 \left(\frac{S^2 \Gamma}{|V - S\frac{\partial V}{\partial S}|}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S\right). \tag{2.6}$$

A pre model SI-RAPM-S získame oceňovaciu rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma \left(1 - 3Rk^2 (S\Gamma)^{\frac{1}{3}}\right) = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S\right). \tag{2.7}$$

Poznámka: V tejto práci označujeme treťou odmocninou funkciu definovanú ako

$$x^{\frac{1}{3}} = |x|^{\frac{1}{3}} \mathrm{sign}(x).$$

2.5 Škálová invariantnosť modelu

V tejto časti ukážeme závislosť, či nezávislosť jednotlivých modelov, reprezentovaných oceňovacími parciálnymi diferenciálnymi rovnicami, na zmene jednotiek, v ktorých ohodnocujeme finančný derivát. Nezávislosť oceňovania vzhľadom na zmenu jednotiek predstavuje dôležitú vlastnosť modelu, pretože hodnota derivátu nemôže závisieť na tom, či cenu akcie uvádzame v halieroch, v korunách, alebo v desiatkach korún.

Označme cenu akcie v iných jednotkách $\widetilde{S}$, pričom $\widetilde{S} = \kappa S$, kde κ predstavuje pomer medzi novými a pôvodnými jednotkami. Potom cena derivátu v nových jednotkách musí byť $\widetilde{V}(\widetilde{S}, t) = \kappa V(S, t)$. Pre takéto označenie dostávame derivovaním

$$\frac{\partial \widetilde{V}(\widetilde{S}, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial V(S, t)}{\partial t}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \widetilde{V}(\widetilde{S}, t)}{\partial \widetilde{S}} = \frac{\partial V(S, t)}{\partial S}, \tag{2.9}$$

$$\kappa \widetilde{\Gamma}(\widetilde{S}, t) = \Gamma(S, t). \tag{2.10}$$

Vzťah medzi hodnotou portfólia pred a po zmene jednotiek dostávame priamo zo vzťahov (2.8) až (2.10)

$$\widetilde{P}(\widetilde{S}, t) = \widetilde{V}(\widetilde{S}, t) - \frac{\partial \widetilde{V}(\widetilde{S}, t)}{\partial \widetilde{S}} \widetilde{S} = \kappa \left(V(S, t) - \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} S \right) = \kappa P(S, t). \tag{2.11}$$

Škálová invariantnosť modelu znamená, že ak $V(S, t)$ je riešením príslušnej oceňovacej rovnice, tak aj $\widetilde{V}(\widetilde{S}, t)$, definované v (2.8), vyhovuje tejto rovnici. Teda ak hodnota derivátu je riešením oceňovacej rovnice, tak aj hodnota derivátu po zmene jednotiek je opäť jej riešením.

Veta 2.1 *Model RAPM-K, reprezentovaný oceňovacou rovnicou (2.5), je závislý na zmene jednotiek, v ktorých ohodnocujeme derivát a akciu.*

Dôkaz: Nech $V(S, t)$ je riešením oceňovacej rovnice (2.5) a $\widetilde{V}(\widetilde{S}, t)$ definované v (2.8) je taktiež riešením, potom po dosadení vzťahov (2.8) až (2.10) do oceňovacej rovnice pre $\widetilde{V}$ dostávame

$$\kappa \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma \left(1 - 3Rk^2 \kappa^{-\frac{1}{3}} \Gamma^{\frac{1}{3}} \right) - r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) \right) = 0.$$

Po vydelení s κ a odčítaní oceňovacej rovnice pre $V(S, t)$ dostaneme

$$3Rk^2 \Gamma \left(1 - \kappa^{-\frac{1}{3}} \right) = 0.$$

Vzhľadom na nenulovosť $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ je táto rovnica splnená len pre triviálne škálovanie $\kappa = 1$. To je ale v spore s požiadavkou na invariantosť modelu pre ľubovolné škálovanie, teda aj pre $\kappa \neq 1$. $\square$

Veta 2.2 *Model SI-RAPM-S, reprezentovaný oceňovacou rovnicou (2.7) je nezávislý na zmene jednotiek, v ktorých ohodnocujeme derivát a akciu.*

Dôkaz: Nech $V(S,t)$ je riešením oceňovacej rovnice (2.7), potom dosadením vzťahov (2.8) až (2.11) do oceňovacej rovnice pre V dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma \left(1 - 3Rk^2 \left(S\Gamma\right)^{\frac{1}{3}}\right) - rP \\ &= \frac{1}{\kappa}\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\widetilde{S}^2}{\kappa^2}\kappa\widetilde{\Gamma} \left(1 - 3Rk^2 \left(\frac{\widetilde{S}}{\kappa}\kappa\widetilde{\Gamma}\right)^{\frac{1}{3}}\right) - r\frac{\widetilde{P}}{\kappa} \\ &= \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \widetilde{S}^2\widetilde{\Gamma} \left(1 - 3Rk^2 \left(\widetilde{S}\widetilde{\Gamma}\right)^{\frac{1}{3}}\right) - r\widetilde{P}\right), \end{aligned}$$

čo predstavuje oceňovaciu rovnicu pre $\widetilde{V}$, preto aj $\widetilde{V}(\widetilde{S},t)$ je riešením rovnice (2.7). Teda oceňovacia rovnica je škálovo invariantná. □

Veta 2.3 *Model SI-RAPM-P, reprezentovaný oceňovacou rovnicou (2.6) je nezávislý na zmene jednotiek, v ktorých ohodnocujeme derivát a akciu.*

Dôkaz: Dôkaz vety je analogický ako dôkaz predchádzajúcej vety. □

3 Vlastnosti SI-RAPM-S modelu

V tejto kapitole sa zameriame na vlastnosti a správanie sa riešenia modelov zahrňujúcich riziko. V našej analýze sa konkrétne budeme zaoberať modelom SI-RAPM-S, reprezentovaným oceňovacou rovnicou (2.7). Postup, ktorý uvedieme, sa dá aplikovať aj na ostatné RAPM modely, avšak vedie k podstatne zložitejším úloham, pričom ich výsledok neposkytuje nový pohľad, ani vysvetlenia v oblasti oceňovania derivátov.

3.1 Nelineárny parabolický operátor

Pri odvodení vlastností modelu potrebujeme niektoré definície a vety z oblasti nelineárnych parabolických operátorov. Nasledujúce definície a vety sú prevzaté z [2].

Definícia 3.1 *Uvažujme nelineárny diferenciálny operátor*

$$L[u] \equiv F\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u}{\partial x}(x,t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t). \tag{3.1}$$

Funkciu $F(x,t,u,p,r)$ vystupujúcu v (3.1) nazývame **eliptickou** *vzhľadom na funkciu $u(x,t)$ v danom bode (x,t), ak je spojite diferencovateľnou funkciou svojich premenných a navyše platí*

$$\frac{\partial F}{\partial r}(x,t,u,p,r) > 0,$$

kde používame označenie $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ a $r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Hovoríme, že F je eliptická na oblasti E, ak je eliptickou funkciou v každom bode oblasti E. Ďalej hovoríme, že nelineárny operátor definovaný v (3.1) je **parabolický** *práve vtedy, keď F je eliptická.*

Veta 3.1 *(Princíp maxima a porovnávania riešení [2, Veta 12])*
Nech D je interval, $D \subset \mathbb{R}$, a nech $E = D \times (0,T]$. Predpokladajme, že u je riešenie $L(u) = f(x,t)$ v oblasti E spĺňajúce počiatočné a okrajové podmienky

$$u(x,0) = g_1(x) \text{ v } D,$$

$$u(x,t) = g_2(x,t) \text{ } na \text{ } \partial D \times (0,T).$$

Ďalej predpokladáme, že funkcie z a Z spĺňajú nerovnosť

$$L[Z] \leq f(x,t) \leq L[z] \text{ } v \text{ } E,$$

a L je parabolická vzhľadom na funkcie $\theta u + (1-\theta)z$ a $\theta u + (1-\theta)Z$ pre $0 \leq \theta \leq 1$. Ak

$$z(x,0) \leq g_1(x) \leq Z(x,0) \text{ } v \text{ } D, \quad z \leq g_2 \leq Z \text{ } na \text{ } \partial D \times (0,T),$$

potom $z(x,t) \leq u(x,t) \leq Z(x,t)$ v E.

3.2 Model SI-RAPM-S ako nelineárny parabolický operátor

V predchádzajúcej kapitole sme odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu pre hodnotu finančného derivátu zahrňujúcu riziko v tvare variancie počtu získaných (stratených) akcií z dôvodu rizikovosti portfólia. Oceňovaciu rovnicu SI-RAPM-S modelu (2.7) môžeme prepísať do tvaru $L[V] = 0$, kde

$$L[V] \equiv F\left(S, t, V, \frac{\partial V}{\partial S}, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) + \frac{\partial V}{\partial t},$$

pričom

$$F\left(S, t, V, \frac{\partial V}{\partial S}, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) \equiv \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left(1 - 3Rk^2\left(S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) - r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right).$$

Nájsť hodnotu derivátu znamená nájsť funkciu $V(S,t)$ spĺňajúcu koncové podmienky a vyhovujúcu oceňovacej rovnici (2.7). Úlohu môžeme jednoduchou zámenou premenných $\tau = T - t$ previesť na nelineárnu parabolickú úlohu $L[V] = 0$ s počiatočnou podmienkou, kde

$$L[V] \equiv F\left(S, T-\tau, V, \frac{\partial V}{\partial S}, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) - \frac{\partial V}{\partial \tau},$$

teda na úlohu v tvare, ktorý potrebujeme na aplikovanie Vety 3.1. Podľa definície 3.1 je $L[V]$ parabolickým operátorom práve vtedy, keď

$$\frac{\partial F}{\partial \Gamma} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(1 - 4Rk^2(S\Gamma)^{\frac{1}{3}}\right) > 0,$$

teda ak

$$S\Gamma < \left(\frac{1}{4Rk^2}\right)^3.$$

Ako vidíme dôležitý vplyv na vlastnosti riešenia má práve člen $S\Gamma$, ktorého správanie budeme ďalej skúmať. Označme $G = S\Gamma$. Po zderivovaní oceňovacej rovnice (2.7) podľa ceny akcie dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial S^2}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 SG\left(1 - 3Rk^2G^{\frac{1}{3}}\right) - r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right) - \frac{\partial V}{\partial \tau}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2\left(1 - 4Rk^2G^{\frac{1}{3}}\right)\left(2\frac{\partial G}{\partial S} + S\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\right) - r\frac{\partial G}{\partial S} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nasledovným prenásobením s cenou akcie S a dosadením vzťahu

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}(S\Gamma) = S\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}$$

do rovnice (3.2) získame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre funkciu $G = S\Gamma(S,\tau)$ v tvare

$$\frac{1}{2}\sigma^2\left(1 - 4Rk^2G^{\frac{1}{3}}\right)\left(2S\frac{\partial G}{\partial S} + S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\right) - rS\frac{\partial G}{\partial S} - \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0, \tag{3.3}$$

ktorá je parabolickou diferenciálnou rovnicou práve vtedy, keď

$$S\Gamma = G < \left(\frac{1}{4Rk^2}\right)^3.$$

Dôsledok 3.1 *Nech $G(S,\tau)$ je riešením (3.3) a nech existuje τ_0 také, že*

$$G(S,\tau_0) \le \alpha < \left(\frac{1}{4Rk^2}\right)^3,$$

potom pre každé $\tau > \tau_0$ je taktiež $G(S,\tau) \le \alpha$, pretože $G \equiv const$ je riešením (3.3) a teda môžeme použiť Vetu 3.1.

Dôsledok 3.2 *Nech $V(S,\tau)$ je riešením rovnice (2.7), pričom existuje τ_0 také, že*

$$G(S,\tau_0) \equiv S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,\tau_0) \le \alpha < \left(\frac{1}{4Rk^2}\right)^3,$$

potom pre $\tau \ge \tau_0$ predstavuje oceňovacia rovnica (2.7) parabolickú parciálnu diferenciálnu rovnicu a teda môžeme aplikovať Vetu 3.1 (princíp maxima a porovnávania riešení).

Poznámka: Riešenie $V(S,\tau)$ rovnice (2.7) spĺňajúce nerovnosť

$$G(S,\tau_0) \equiv S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,\tau_0) \leq \alpha < \left(\frac{1}{4Rk^2}\right)^3$$

je napríklad funkcia $V(S,\tau) = ce^{-r\tau}$, ak $c \leq \alpha$.

Poznamenajme, že s výnimkou vyššie spomenutého dlhopisu, žiaden bežný derivát nespĺňa požadovanú podmienku

$$S\Gamma \leq \alpha < \left(\frac{1}{4Rk^2}\right)^3$$

ani na počiatku, ani v čase blízkom k expirácii. Na odstránenie tohto problému nahradíme model SI-RAPM-S v čase blízkom času expirácie Black-Scholesovym modelom, vlastnosti ktorého nám zabezpečia pokles členu $S\Gamma$ pod ľubovoľnú konštantu a možnosť pokračovať s modelom SI-RAPM-S. Táto zmena v modeli spôsobí zmenu správania sa investora v čase blízkom expirácie, ktorú je možné pozorovať aj na reálnom trhu.

Definícia 3.2 *Definujme čas prepínania modelu ako čas τ_{switch} taký, že pre riešenie základného Black-Scholesovho modelu $V(S,\tau)$ a pre $S > 0$ platí*

$$S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,\tau_{switch}) \leq \left(\frac{1-\varepsilon}{4Rk^2}\right)^3,$$

pre dostatočne malé $\varepsilon > 0$.

Teda nakoniec dostávame model

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left(1 - m(\tau)\left(S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) - r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right) - \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0, \tag{3.4}$$

kde spojitá, rastúca funkcia $m(\tau)$ reprezentuje spôsob zmeny oceňovania. Pričom pre nejaké $\nu \geq 0$ platí

$$m(\tau) = \begin{cases} 0 & pre \;\; \tau \leq \tau_{switch} \\ 3Rk^2 & pre \;\; \tau > \tau_{switch} + \nu \end{cases} \tag{3.5}$$

Teda na intervale $[0, \tau_{switch}]$ uvažujeme Black-Scholesov model, ktorý od času $\tau_{switch} + \nu$ plynule nahradíme modelom SI-RAPM-S. V praktickej analýze postačuje uvažovať skokovitú funkciu $m(\tau)$ s $\nu = 0$, pričom hlavná zmena je v nespojitosti parciálnej derivácie riešenia podľa času v bode τ_{switch}.

Dôsledok 3.3 *Ak hodnota derivátu v čase expirácie je ohraničená, teda*

$$a \leq V(S,T) \leq b,$$

potom hodnota derivátu získaná riešením nami navrhovaného modelu bude splňať

$$ae^{T-t} \leq V(S,t) \leq be^{T-t}.$$

Príklad: Pre európsku call, ale aj put opciu získame derivovaním vzťahu (1.6) podľa ceny akcie rovnicu pre $S\Gamma$

$$S\Gamma_{ep} = S\Gamma_{ec} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}N'(d_1) \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}$$

a teda čas prepínania modelu je v okamihu keď $\tau = \tau_{switch}$,

$$\tau_{switch} = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\left(\frac{4Rk^2}{1-\varepsilon}\right)^6.$$

R	C	σ	ε	$\tau_{siwtch}10^6$
0.6	1%	0.3	0.05	14.38
0.6	1%	0.3	0.01	11.23
0.6	1%	0.5	0.05	5.18
0.6	1%	0.5	0.01	4.04
0.6	2%	0.3	0.05	230.02
0.6	2%	0.3	0.01	179.60
0.6	2%	0.5	0.05	82.81
0.6	2%	0.5	0.01	64.65

Tabuľka 1: Príklady času prepínania modelu pre európske put a call opcie s rôznymi parametrami

4 Numerická analýza SI-RAPM-S modelu

V tejto kapitole navrhneme metódu na numerický výpočet hodnoty derivátu. Predpokladáme, že derivát vyhovuje oceňovacej rovnici (3.4). Keďže podľa tohto modelu cena derivátu medzi prepínacím a expiračným časom vyhovuje Black-Scholesovmu modelu, ktorého riešenie na $[0, \tau_{switch}]$ vieme nájsť v explicitnom tvare a navyše vlastnosťami jeho numerickej aproximácie sa zaoberá napríklad práca [5], tak sa zameriame iba na čas $\tau \geq \tau_{switch}$. Teda použijeme transformáciu $\tau = T - \tau_{switch} - t$. Počiatočnú podmienku pre $\tau = 0$ získame riešením Black-Scholesovej diferenciálnej rovnice, t.j. vypočítaním $V_{BS}(S, T - \tau_{switch})$.

4.1 Taylorov polynóm

Definícia 4.1 *Nech $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f(x) \in \mathbb{R}$ pre x patriace otvorenému okoliu bodu α (t.j. $x \in O(\alpha)$) a zároveň $f(x)$ má v bode α deriváciu až do rádu n, potom polynóm definovaný vzťahom*

$$T_n(x) = f(\alpha) + \frac{\partial f(\alpha)}{\partial x}(x - \alpha) + ... + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(\alpha)}{\partial x^n}(x - \alpha)^n$$

nazývame **Taylorov polynóm**.

Veta 4.1 *Nech $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f(x) \in \mathbb{R}$ pre $x \in O(\alpha)$ a zároveň $f(x)$ má v bode α deriváciu až do rádu n. Ďalej nech $P_n(x)$ je polynóm rádu n, potom existuje také okolie bodu α, označme $\tilde{O}(\alpha)$, že pre všetky $x \in \tilde{O}(\alpha)$*

$$|T_n(x) - f(x)| \leq |P_n(x) - f(x)|.$$

Teda Taylorov polynóm predstavuje najlepšiu možnú lokálnu aproximáciu hladkej funkcie polynómom stupňa n.

4.2 Numerická schéma

Na numerické riešenie použijeme tzv. metódu sietí, kde danú oblasť pokryjeme delením (sieťou), pričom celé riešenie odhadneme iba v uzloch delenia. Parciálne derivácie aproximujeme konečnými diferenciami.
Priestorový interval $[S_{min}, S_{max}]$ rozdelíme rovnomerne na $n+1$ deliacich intervalov s krokom $h = \frac{S_{max}-S_{min}}{n+1}$, pričom deliace body označíme S_i, $i = 0, 1, ..., n+1$.
Časový interval $[0, T]$ rozdelíme podobne na m deliacich intervalov s krokom $l = \frac{T}{m}$, s označením deliacich bodov τ_j, $j = 0, 1, ..., m$, čím získame spomínanú sieť s uzlami v bodoch (S_i, τ_j), $i = 0, 1, ..., n+1$, $j = 0, 1, ..., m$.

Rozviňme funkciu $V(S_i, \tau)$ do Taylorovho polynómu prvého rádu v bode τ_j, teda

$$V(S_i, \tau) \approx V(S_i, \tau_j) + \frac{\partial V(S_i, \tau_j)}{\partial \tau}(\tau - \tau_j),$$

po dosadení $\tau = \tau_{j-1}$ dostávame aproximáciu derivácie podľa času pomocou spätnej diferencie

$$\frac{\partial V(S_i, \tau_j)}{\partial \tau} \approx \frac{V(S_i, \tau_j) - V(S_i, \tau_{j-1})}{\tau_j - \tau_{j-1}} = \frac{V(S_i, \tau_j) - V(S_i, \tau_{j-1})}{l}.$$

Pre aproximáciu derivácie podľa ceny akcie rozvinieme funkciu $V(S, \tau_j)$ do Taylorovho polynómu druhého rádu v bode S_i, t.j.

$$V(S_{i-1}, \tau_j) \approx V(S_i, \tau_j) + \frac{\partial V(S_i, \tau_j)}{\partial S}(S_{i-1} - S_i) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(S_i, \tau_j)}{\partial S^2}(S_{i-1} - S_i)^2, \quad (4.1)$$

$$V(S_{i+1}, \tau_j) \approx V(S_i, \tau_j) + \frac{\partial V(S_i, \tau_j)}{\partial S}(S_{i+1} - S_i) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(S_i, \tau_j)}{\partial S^2}(S_{i+1} - S_i)^2. \quad (4.2)$$

Po odčítaní rovnice (4.1) od rovnice (4.2) dostávame aproximáciu prvej derivácie podľa ceny akcie v tvare centrálnej diferencie

$$\frac{\partial V(S_i, \tau_j)}{\partial S} \approx \frac{V(S_{i+1}, \tau_j) - V(S_{i-1}, \tau_j)}{S_{i+1} - S_{i-1}} = \frac{V(S_{i+1}, \tau_j) - V(S_{i-1}, \tau_j)}{2h}.$$

Sčítaním rovníc (4.1) a (4.2) dostaneme aproximáciu druhej derivácie podľa ceny akcie, ktorú budeme označovať ako Γ_i^j

$$\Gamma_i^j = \frac{\partial^2 V(S_i, \tau_j)}{\partial S^2} \approx \frac{V(S_{i-1}, \tau_j) - 2V(S_i, \tau_j) + V(S_{i+1}, \tau_j)}{h^2}.$$

Pre jednoduchosť zápisu budeme používať zápis $V(S_i, \tau_j) = V_i^j$.

Pri numerických výpočtoch poznáme hodnoty funkcie na počiatočnom časovom reze a na okraji uvažovaného priestorového delenia, na ich základe spočítame hodnoty na nasledujúcom časovom reze. Jednoduchou numerickou schémou na výpočet hodnoty funkcie je nahradenie parciálnych derivácií ich aproximáciami v tvare konečných diferencií, pričom nelineárnu časť nahradíme konečnými diferenciami na známom časovom reze, teda dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{V_{i-1}^j - 2V_i^j + V_{i+1}^j}{h^2}\left(1 - m(\tau_j)(S\Gamma_i^{j-1})^{\frac{1}{3}}\right) \\ &\quad - r\left(V_i^j - S\frac{V_{i-1}^j - V_{i+1}^j}{2h}\right) - \frac{V_i^j - V_i^{j-1}}{l}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Veta 4.2 *Nech existujú konštanty $a, b \in \mathbb{R}$ také, že pre počiatočnú podmienku platí $a \le V_i^0 \le b$ pre $i = 0, 1, .., n$, okrajové podmienky spĺňajú pre všetky j*

$$\frac{a}{(1+rl)^j} \le V_0^j \le \frac{b}{(1+rl)^j}\ , \quad \frac{a}{(1+rl)^j} \le V_{n+1}^j \le \frac{b}{(1+rl)^j}$$

a nech pre riešenie numerickej schémy (4.3) platí $S\Gamma = G \le \alpha < \frac{1}{4Rk^2}$.
Potom existuje h_m také, že pre riešenie získané numerickou schémou (4.3) s priestorovým krokom $h \le h_m$ platí

$$ae^{-rlj} \approx \frac{a}{(1+rl)^j} \le V_i^j \le \frac{b}{(1+rl)^j} \approx be^{-rlj},$$

pre $j = 0, 1, ..., m$ a $i = 1, 2, ..., n$.

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že predpoklad Vety 4.2, t.j. $G < \left(\frac{1}{4Rk^2}\right)^3$, riešenie oceňovacej rovnice (3.4) spĺňa. Túto podmienku však numerickou schémou (4.3) nie sme schopný zabezpečiť. Dôkaz tejto vety neuvedieme, pretože v nasledujúcej časti odvodíme schému, ktorá zabezpečí splnenie problematického predpokladu Vety 4.2.

4.3 Alternatívna numerická schéma

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že člen $S\Gamma$ výrazne vplýva na správanie sa riešenia. Pre zistenie jeho vlastností sme odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu (3.3) pre $G \equiv S\Gamma$. Vo Vete 4.2 sme ukázali, že tento člen zohráva dôležitú úlohu aj v numerickej analýze modelu. Preto uvažujeme pre G samostatnú numerickú schému, odvodenú z diferenciálnej rovnice (3.3)

$$\frac{1}{2}\sigma^2\left(1-4Rk^2G^{\frac{1}{3}}\right)\left(2S\frac{\partial G}{\partial S}+S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\right)-rS\frac{\partial G}{\partial S}-\frac{\partial G}{\partial \tau}=0.$$

Prvým krokom je logaritmická transformácia premennej S, teda označme novú funkciu

$$G(S,\tau)=H(x,\tau), \tag{4.4}$$

kde $x=\ln(S)$. Postupným derivovaním funkcie podľa jej premenných dostávame

$$\begin{aligned} S\frac{\partial G}{\partial S}(S,\tau) &= \frac{\partial H}{\partial x}(x,\tau), &(4.5)\\ S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(S,\tau) &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,\tau)-\frac{\partial H}{\partial x}(x,\tau), &(4.6)\\ \frac{\partial G}{\partial \tau}(S,\tau) &= \frac{\partial H}{\partial \tau}(x,\tau), &(4.7)\end{aligned}$$

pričom platí

$$\forall S>0\ \ G(S,\tau)<k \iff \forall x\in\mathbb{R}\ \ H(x,\tau)<k.$$

Dosadením vzťahov (4.4) až (4.7) do rovnice (3.3) získame

$$\frac{1}{2}\sigma^2\left(1-4Rk^2H^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial H}{\partial x}\right)-r\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial \tau}=0.$$

Numerickú schému uvažujeme až pre takto transformovanú rovnicu, pričom rozdelenie priestorového intervalu $[S_{min}, S_{max}]$ je ekvivalentné s rozdelením transformovaného priestorového intervalu $[x_{min}, x_{max}]$, kde $x_{min}=\ln(S_{min})$ a $x_{max}=\ln(S_{max})$. Rovnako, ako pri predchádzajúcej numerickej schéme nahradíme derivácie ich aproximáciami pomocou konečných diferencií. Nelineárnu časť rovnice odhadneme údajmi z predchádzajúceho časového rezu, potom pre člen G dostávame nasledovnú numerickú schému

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\sigma^2\left(1-4Rk^2(H_i^{j-1})^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{H_{i-1}^j-2H_i^j+H_{i+1}^j}{h^2}+\frac{H_{i+1}^j-H_{i-1}^j}{2h}\right)\\ &\quad -r\frac{H_{i+1}^j-H_{i-1}^j}{2h}-\frac{H_i^j-H_i^{j-1}}{l}, \qquad (4.8)\end{aligned}$$

s počiatočnou podmienkou H_i^0 a okrajovými podmienkami H_0^j a H_{n+1}^j.

Veta 4.3 *Nech $1 > \varepsilon > 0$ a existujú konštanty $a, b \le \left(\frac{1-\varepsilon}{4Rk^2}\right)^3$ také, že pre $i = 0, 1, ..., n$ platí $a \le H_i^0 \le b$ a zároveň pre $j = 0, 1, ..., m$ platí $a \le H_0^j \le b$, $a \le H_{n+1}^j \le b$ (teda počiatočné, aj okrajové podmienky sú ohraničené).*
Potom pre riešenie získané numerickou schému (4.8) s priestorovým krokom

$$h \le h_m = \frac{2\sigma^2\varepsilon}{2|r| + \sigma^2\left(1 - 4Rk^2a^{\frac{1}{3}}\right)},$$

platí:

$$a \le H_i^j \le b, \quad pre \;\; j = 0, 1, ..., m \quad a \;\; i = 1, 2, ..., n.$$

Dôkaz: Dôkaz uvedieme pomocou matematickej indukcie. Pre $j = 0$ je veta triviálne splnená na základe jej predpokladov. Nech veta platí pre $j - 1$. Označme

$$\lambda_i^j = 1 - 4Rk^2(H_i^{j-1})^{\frac{1}{3}}.$$

Pre takéto označenie dostávame

$$\lambda_i^j = 1 - 4Rk^2(H_i^{j-1})^{\frac{1}{3}} \ge 1 - 4Rk^2b^{\frac{1}{3}} \ge 1 - 4Rk^2\frac{1-\varepsilon}{4Rk^2} = \varepsilon.$$

Ďalej preusporiadame numerickú schému na tvar

$$\begin{aligned} H_i^j = H_i^{j-1} \;\; &+ \;\; (H_{i-1}^j - H_i^j)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{2h} + r\frac{l}{2h}\right) \\ &+ \;\; (H_{i+1}^j - H_i^j)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h^2} + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{2h} - r\frac{l}{2h}\right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Nech sa maximum na časovom reze j nadobúda v uzle k. Ak $k = 0$, alebo $k = n + 1$, tak priamo z predpokladu na ohraničenie okrajových podmienok dostávame

$$H_i^j \le \max_s(H_s^j) = H_k^j \le b.$$

Teda nech sa maximum nadobúda vo vnútornom bode uvažovaného delenia, potom

$$H_{k-1}^j - H_k^j \le 0,$$

$$H_{k+1}^j - H_k^j \le 0.$$

Ak navyše platí

$$2\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h^2} - \sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h} + 2r\frac{l}{h} \ge 0, \tag{4.10}$$

$$2\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h^2}+\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h}-2r\frac{l}{h}\geq 0, \tag{4.11}$$

tak vzhľadom na (4.9) dostávame

$$H_i^j \leq \max_s(H_s^j) = H_k^j \leq H_k^{j-1} \leq b.$$

Podmienky (4.10) a (4.11) sú splnené, ak

$$h \leq \frac{2\sigma^2\lambda_i^j}{|2r-\sigma^2\lambda_i^j|},$$

pričom

$$\frac{2\sigma^2\lambda_i^j}{|2r-\sigma^2\lambda_i^j|} \geq \frac{2\sigma^2\lambda_i^j}{|2r|+\sigma^2|\lambda_i^j|} \geq \frac{2\sigma^2\varepsilon}{2|r|+\sigma^2\left(1-4Rk^2a^{\frac{1}{3}}\right)} = h_m,$$

teda pre $h \leq h_m$ sú splnené. Analogicky môžeme dokázať aj platnosť nerovnosti $a \leq H_i^j$ na časovomo reze j. $\square$

Teda pre člen $H(\ln(S),\tau) = G(S,\tau) = S\Gamma$ sme navrhli takú numerickú schému, pre ktorú platí

$$\forall i,j \quad \min_k G(S_k,\tau_0) \leq G(S_i,\tau_j) \leq \max_k(G(S_k,\tau_0)),$$

za predpokladu, že na počiatočnom časovom reze platí

$$\max_k(G(S_k,\tau_0)) \leq \left(\frac{1-\varepsilon}{4Rk^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Pripomeňme, že práve takúto vlastnosť sme potrebovali na zabezpečenie predpokladov vety maxima pre numerickú schému (4.3), ktorú teraz upravíme tak, že v nelineárnom člene z predchádzajúceho časového rezu $1-4Rk^2(S_i\Gamma_i^{j-1})^{\frac{1}{3}}$ nahradíme časť $S\Gamma$ riešením numerickej schémy (4.8), ktoré označíme ako G. Teda chceme navrhnúť numerickú schému pre rovnicu

$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\left(1-3Rk^2G^{\frac{1}{3}}\right)-r\left(V-\frac{\partial V}{\partial S}S\right)-\frac{\partial V}{\partial\tau}=0.$$

Opäť pristúpime k logaritmickej transformácii premenných $x = \ln(S)$ a označíme $U(x,\tau) = V(S,\tau)$, potom pre U získame rovnicu v tvare

$$\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial x}\right)\left(1-3Rk^2H^{\frac{1}{3}}\right)-r\left(U-\frac{\partial U}{\partial x}\right)-\frac{\partial U}{\partial\tau}=0.$$

Nahradením parciálnych derivácií ich aproximáciami v tvare konečných diferencií dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - 3Rk^2 (H_i^j)^{\frac{1}{3}}\right) \left(\frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2} - \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{h}\right) \\ &\quad -r\left(U_i^j - \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{h}\right) - \left(\frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{l}\right). \end{aligned}$$

Ak označíme $\lambda_i^j = 1 - 3Rk^2 (H_i^j)^{\frac{1}{3}}$, tak dostaneme konečnú numerickú schému

$$\begin{aligned} U_i^j \left(1 + rl + \sigma^2 \lambda_i^j \frac{l}{h^2}\right) &- U_{i-1}^j \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \lambda_i^j \frac{l}{h^2} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2 \lambda_i^j) \frac{l}{2h}\right) \\ &- U_{i+1}^j \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \lambda_i^j \frac{l}{h^2} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2 \lambda_i^j) \frac{l}{2h}\right) = U_i^{j-1}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Pri označení

$$\begin{aligned} a_i^j &= 1 + rl + \sigma^2 \lambda_i^j \frac{l}{h^2}, \\ b_i^j &= -\frac{1}{2}\sigma^2 \lambda_i^j \frac{l}{h^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \lambda_i^j\right) \frac{l}{2h}, \\ c_i^j &= -\frac{1}{2}\sigma^2 \lambda_i^j \frac{l}{h^2} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \lambda_i^j\right) \frac{l}{2h}, \end{aligned}$$

môžeme použiť maticový zápis

$$\begin{pmatrix} a_1^j & c_1^j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2^j & a_2^j & c_2^j & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3^j & a_3^j & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-2}^j & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1}^j & a_{n-1}^j & c_{n-1}^j \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n^j & a_n^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^j \\ U_2^j \\ U_3^j \\ \vdots \\ U_{n-1}^j \\ U_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{j-1} - b_1^j U_0^j \\ U_2^{j-1} \\ U_3^{j-1} \\ \vdots \\ U_{n-1}^{j-1} \\ U_n^{j-1} - c_n^j U_{n+1}^j \end{pmatrix}.$$

Veta 4.4 *Nech $1 > \varepsilon > 0$ a existujú konštanty $c, d \in \mathbb{R}$ také, že pre počiatočnú podmienku platí $c \le U_i^0 \le d$ pre $i = 0, 1, .., n$, okrajové podmienky spĺňajú*

$$\frac{c}{(1+rl)^j} \le U_0^j \le \frac{d}{(1+rl)^j} \quad , \quad \frac{c}{(1+rl)^j} \le U_{n+1}^j \le \frac{d}{(1+rl)^j}$$

pre $j = 0, .., m$ a nech sú splnené predpoklady Vety 4.3.

Potom pre riešenie získané numerickou schémou (4.12) s priestorovým krokom

$$h \le \frac{2\sigma^2 \varepsilon}{2|r| + \sigma^2 \left(1 - Rk^2 \min\left(4a^{\frac{1}{3}}, 3a^{\frac{1}{3}}\right)\right)} \le h_m$$

platí

$$ce^{-rlj} \approx \frac{c}{(1+rl)^j} \leq U_i^j \leq \frac{d}{(1+rl)^j} \approx de^{-rlj},$$

pre $j = 0, 1, ..., m$ *a* $i = 1, 2, ..., n$.

Dôkaz: Dôkaz uvedieme opäť pomocou matematickej indukcie. Pre $j = 0$ je veta triviálne splnená. Nech veta platí pre $j-1$, podľa Vety 4.3 dostávame

$$\lambda_i^j = 1 - 3Rk^2(H_i^j)^{\frac{1}{3}} \geq \varepsilon.$$

Ďalej preusporiadame numerickú schému na tvar

$$\begin{aligned}(1+rl)U_i^j = U_i^{j-1} \quad &+ \quad (U_{i-1}^j - U_i^j)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h^2} + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{2h} - r\frac{l}{2h}\right) \\ &+ \quad (U_{i+1}^j - U_i^j)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{2h} + r\frac{l}{2h}\right).\end{aligned}$$

Nech sa maximum na časovom reze j nadobúda v uzle k. Ak $k = 0$, alebo $k = n+1$, tak priamo z predpokladu na ohraničenie okrajových podmienok dostávame

$$U_i^j \leq \max_s(U_s^j) = U_k^j \leq \frac{d}{(1+rl)^j}.$$

Teda nech sa maximum nadobúda vo vnútornom bode uvažovaného delenia, potom

$$U_{k-1}^j - U_k^j \leq 0,$$

$$U_{k-1}^j - U_k^j \leq 0.$$

Ak navyše platí

$$2\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h^2} - \sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h} + 2r\frac{l}{h} \geq 0,$$

$$2\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h^2} + \sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h} - 2r\frac{l}{h} \geq 0,$$

čo môžeme ukázať podobne ako vo Vete 4.3, tak dostávame

$$U_i^j \leq \max_s(U_s^j) = U_k^j \leq \frac{U_k^{j-1}}{1+rl} \leq \frac{d}{(1+rl)^j}.$$

Analogicky môžeme dokázať aj platnosť druhého ohraničenia, t.j. $c(1+rl)^{-j} \leq U_i^j$, na časovom reze j. □

Dôsledok 4.1 *V limitnom prípade, pre $l \to 0$ resp. $m \to \infty$ dostávame: Nech počiatočná podmienka spĺňa $a \leq U(x,0) \leq b$ pre $\forall x \in [x_{min}, x_{max}]$ a okrajové podmienky spĺňajú*

$$ae^{-r\tau} \leq U(x_{min},\tau) \leq be^{-r\tau} \quad , \quad ae^{-r\tau} \leq U(x_{max},\tau) \leq be^{-r\tau},$$

nech sú navyše splnené predpoklady Vety 4.3, tak pre všetky $(x,\tau) \in [x_{min}, x_{max}] \times [0,T]$ platí

$$ae^{-r\tau} \leq U(x,\tau) \leq be^{-r\tau}.$$

Zhrnutie: Pre sústavu parciálnych diferenciálnych rovníc

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left(1 - 3Rk^2 G^{\frac{1}{3}}\right) - r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right) - \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0,$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2\left(1 - 4Rk^2 G^{\frac{1}{3}}\right)\left(2S\frac{\partial G}{\partial S} + S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\right) - rS\frac{\partial G}{\partial S} - \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0,$$

s prislúchajúcimi počiatočnými a okrajovými podmienkami, sme po ich logaritmickej transformácii navrhli stabilný systém numerických schém

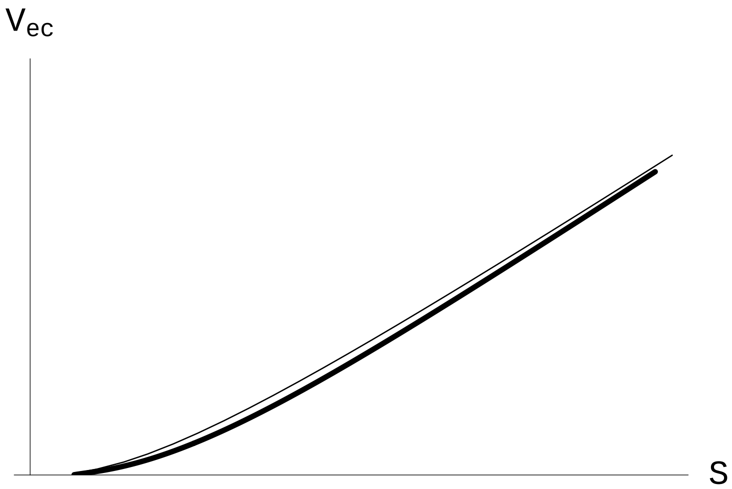
$$\begin{aligned}
H_i^j = H_i^{j-1} \quad &+ \quad (H_{i-1}^j - H_i^j)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{2h} + r\frac{l}{2h}\right)\\
&+ \quad (H_{i+1}^j - H_i^j)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{h^2} + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda_i^j\frac{l}{2h} - r\frac{l}{2h}\right),\\
(1+rl)U_i^j = U_i^{j-1} \quad &+ \quad (U_{i-1}^j - U_i^j)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\eta_i^j\frac{l}{h^2} + \frac{1}{2}\sigma^2\eta_i^j\frac{l}{2h} - r\frac{l}{2h}\right)\\
&+ \quad (U_{i+1}^j - U_i^j)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\eta_i^j\frac{l}{h^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\eta_i^j\frac{l}{2h} + r\frac{l}{2h}\right),
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
\lambda_i^j &= 1 - 4Rk^2(H_i^{j-1})^{\frac{1}{3}} \quad a\\
\eta_i^j &= 1 - 3Rk^2(H_i^j)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

4.4 Výsledky numerických výpočtov

V tejto časti uvedieme niektoré výsledky získané riešením modelu (3.4) s funkciou $m(\tau)$ a $\nu = 0$. Na čas od expirácie do času t_{switch} použijeme explicitné riešenie Black-Scholesovho modelu, inak použijeme systém numerických schém (4.8) a (4.12) na riešenie SI-RAPM-S modelu. Na riešenie numerických schém sme navrhli program uvedený v prílohe, ktorý po zadaní počiatočných podmienok, okrajových podmienok a ostatných parametrov umožňuje nájsť numerickú aproximáciu ceny derivátu podľa SI-RAPM-S modelu. Zamerali sme sa na nájdenie hodnoty európskej call opcie, pričom porovnanie tohto odhadu s riešením Black-Scholesovho modelu je uvedené na nasledovnom obrázku:



Obr. 3: Porovnanie ceny európskej call opcie vypočítanej podľa modelu (3.4) (hrubá krivka) a Black-Scholesovho modelu (tenká krivka).

4.5 Volatility smile v SI-RAPM-S modeli

Jediným nejednoznačným parametrom Black-Scholesovho modelu je variancia lognormálneho procesu, ktorú však môžeme získať spätne, ak poznáme hodnotu derivátu na trhu pri danej cene akcie. Takto získaná volatilita sa nazýva implikovaná volatilita. Uvažujme európske opcie, ktorých na trhu existuje väčšie množstvo z dôvodu rôznej expiračnej ceny. Keď spočítame implikovanú volatilitu opcií pre rôzne expiračné ceny, zistíme, že tieto sú významne rôzne, pričom bežne tvoria konvexnú funkciu expiračnej ceny podobajúcu sa úsmevu, preto volatility smile. Pripomeňme, že volatilita v Black-Scholesovom modeli sa vzťahuje na cenu akcie a teda nemôže závisieť od derivátu s ktorým obchodujeme.

Poznamenajme, že SI-RAPM-S model predstavuje modifikáciu Black-Scholesovho modelu, kde konštantnú volatilitu v oceňovacej rovnici nahradíme výrazom

$$\widetilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 - 3Rk^2(S\Gamma)^{\frac{1}{3}}\right). \tag{4.13}$$

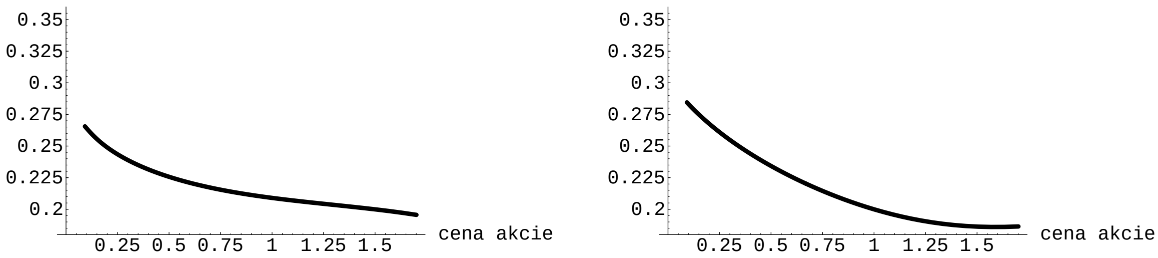
Poznámka: Vzhľadom na invariantnosť modelu na zmenu jednotiek môžeme získať hodnotu európskych opcií s ľubovoľnou expiračnou cenou priamo z hodnôt opcie s jednotkovou expiračnou cenou a to jednoduchou zmenou jednotiek, pretože transformáciou $\widetilde{S} = \frac{1}{E}S$ získame derivát s jednotkovou expiračnou cenou v nových jednotkách. Teda ak $V_{ec}(S,t,E)$ označíme cenu opcie v čase t, s expiračnou cenou E, pri cene akcie S, tak dostávame

$$V_{ec}(S,t,E) = E \times V_{ec}(S/E,t,1).$$

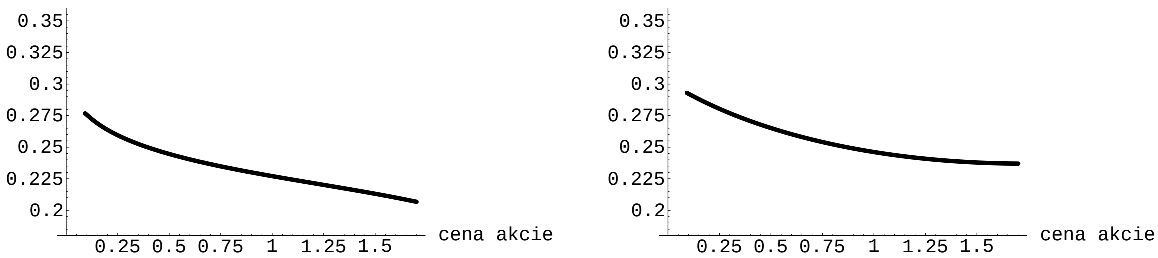
Keď poznáme hodnoty európskych call opcií na trhu, môžeme pomocou tejto rovnosti spätne spočítať hodnotu opcie s jednotkovou expiračnou cenou ako funkciu ceny akcie, ktorá je podľa nášho modelu konvexnou funkciou ceny akcie rovnako ako je tomu v Black-Scholesovom modeli. Napriek tomu sa niekedy vyskytne na trhu prípad, keď ceny opcií implikujú nekonvexný tvar. Práve na vyhladávaní nekonvexných priebehov hodnoty opcií sú založené aj niektoré aktívne stratégie obchodovania, ktoré vychádzajú z predpokladu, že ide len o krátkodobý výkyv v cene opcií.

Porovnanie volatility vypočítanej podľa (4.13) (na obrázku vpravo) a implikovanej volatility získanej z numerického riešenia pomocou vzťahu (1.6) (na obrázku vľavo) pre rôzne hodnoty parametra $m = 3Rk^2$:

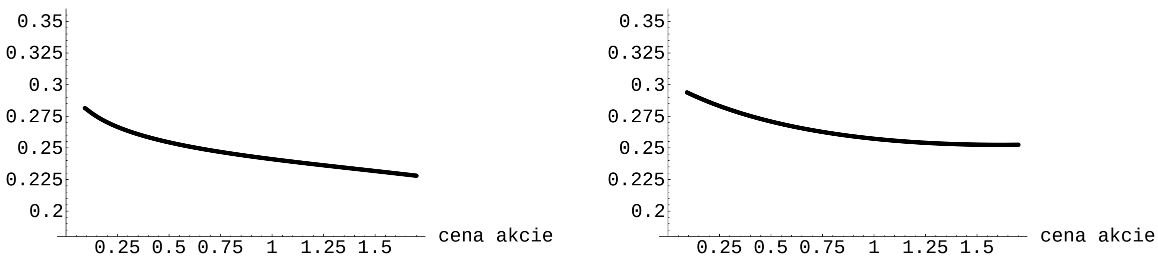
$m = 0.9$



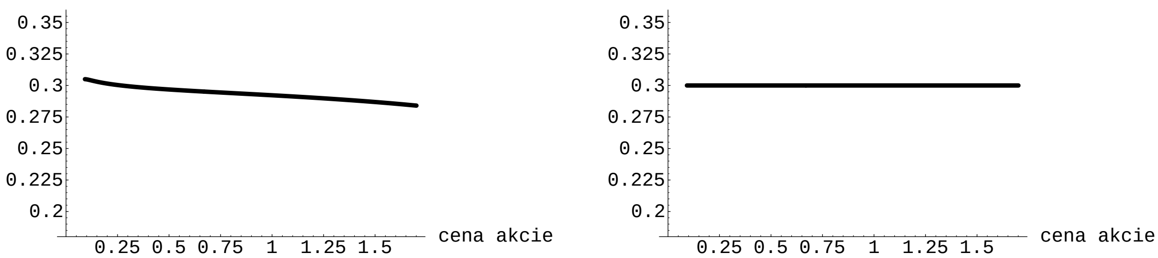
$m = 0.5$



$m = 0.3$



$m = 0.1$



Záver

Ako sme ukázali, Black-Scholesov model výrazne zjednodušuje realitu a to hlavne predpokladmi o nulových transakčných nákladoch a existencii bezrizikového sveta. V našej práci sme sa zaoberali modelmi oceňovania zahrňujúcimi transakčné náklady a riziko. Prvý model uvažujúci oba faktory bol uvedený v práci [1]. Ukázali sme, že tento model je závislý na voľbe jednotiek, v ktorých ohodnocujeme. Ďalej sme navrhli dva nové modely invariantné vzhľadom na zmenu jednotiek. Oba spomínané modely zahrňujú riziko aj transakčné náklady vyplývajúce zo zaisťovania stochastického portfólia. Následnou úpravou jedného z modelov sme získali numericky riešiteľný model, pričom parciálna diferenciálna rovnica reprezentujúca daný model spĺňa princíp maxima a porovnávania riešení.

Pre túto nelineárnu PDR sme navrhli systém numerických schém vychádzajúci z metódy sietí a aproximácie derivácií pomocou konečných diferencií. Ukázali sme, že takto navrhnutý systém má podobné vlastnosti ako samotná parciálna diferenciálna rovnica. Nami uvedený systém spĺňa princíp maxima ako sme dokázali vo štvrtej kapitole.

Nakoniec sme ukázali, že tento model vysvetluje aj jednu anomáliu Black-Scholesovho modelu, premenlivú volatilitu akcie. Numerická aproximácia hodnoty európskych call opcií potvrdila konvexný priebeh implikovanej volatility a teda predstavuje podporu aktívnych stratégii, ktoré vyhľadávajú nekonvexný priebeh implikovanej volatility a predpokladajú návrat ku konvexnému tvaru. Ako sme ukázali v tretej kapitole, náš model podobne ako Black-Scholesov model vylučuje možnosť zmien z konvexnej na konkávnu funkciu ceny akcie počas života daného derivátu a preto náš model podporuje aj stratégie obchodovania založené na anomáliach tohto charakteru.

Literatúra

[1] M. Kratka: *No mystery behind the smile* ;-).
Risk primer, Vol 9/No, 1997.

[2] M. Protter, H.F. Weinberger: *Maximum principles in differential equations.*
SpringerVerlag, 1984.

[3] Y. K. Kwok: *Mathematical Models of Financial Derivatives.*
Springer Verlag, 1998.

[4] J. Hull: *Options, Futures and Other Derivative Securities.*
Prentice Hall, 1989.

[5] C. Ungvarský: *Metóda konečných objemov a oceňovanie opcií.*
Diplomová práca MFF UK, 2000.

Príloha

Program na numerický výpočet hodnoty derivátu v programe Mathematica podľa numerických schém (4.8) a (4.12).

```
Needs["LinearAlgebra`Tridiagonal`"];
SIRAPMS[sigma_,r_,R_,k_,H0_,U0_,Hl_,Ul_,Hr_,Ur_,
       m_,n_,Smax_,Smin_,tau_] :=
 Module[{h, l, lm, Hol, Hnew, Uol, Unew, xi},
   h=N[Log[Smax/Smin]/(n + 1)];  l=(tau/m);
   TR[x_]:=Abs[x]^(1/3)*Sign[x];
   x    = Table[N[Log[Smin]+i*h], {i,1,n}];
   H ol = Table[N[H0[x[[i]]]],    {i,1,n}];
   Uold = Table[N[U0[x[[i]]]],    {i,1,n}];
   For[j = 1, j <= m, j++,
     lm=Table[N[(1-4R*k^2TR[Hol[[i]]])*l/(2h)*sigma^2],{i,1,n}];
     a=Table[N[1+2lm[[i]]/h],                 {i,1,n  }];
     b=Table[N[-lm[[i]]/h+lm[[i]]/2-r*l/(2h)],{i,2,n  }];
     c=Table[N[-lm[[i]]/h-lm[[i]]/2+r*l/(2h)],{i,1,n-1}];
     Hol[[1]]-=Hl[j*l]*(-lm[[1]]/h+lm[[1]]/2-r*l/(2h));
     Hol[[n]]-=Hr[j*l]*(-lm[[n]]/h-lm[[n]]/2+r*l/(2h));
     Hnew=TridiagonalSolve[b,a,c,Hol];
     lm=Table[N[(1-3R*k^2TR[Hnew[[i]]])*l/(2h)*sigma^2],{i,1,n}];
     a=Table[N[1+r*l+2lm[[i]]/h],             {i,1,n  }];
     b=Table[N[-lm[[i]]/h-lm[[i]]/2+r*l/(2h)],{i,2,n  }];
     c=Table[N[-lm[[i]]/h+lm[[i]]/2-r*l/(2h)],{i,1,n-1}];
     Uold[[1]]-=Ul[j*l]*(-lm[[1]]/h-lm[[1]]/2+r*l/(2h));
     Uold[[n]]-=Ur[j*l]*(-lm[[n]]/h+lm[[n]]/2-r*l/(2h));
     Unew=TridiagonalSolve[b,a,c,Uold]; Hol=Hnew;   Uold=Unew;
   ];
   Return[{Table[Exp[x[[i]]],Uold[[i]]},{i,1,n}]];
 ]
```

Navrhnutý program vypočíta riešenie SI-RAPM-S modelu vyhovujúce oceňovacej rovnici (2.7) s prislúchajúcimi počiatočnými a okrajovými podmienkami. Na nájdenie riešenia európskej call opcie vyhovujúcej rovnici (3.4) so skokovitou funkciou $m(\tau)$ definovanou vzťahom (3.5) sme navrhli funkciu

```
EuropeanCall[X_,r_,R_,C_,sigma_,Smin_,Smax_,tau_,m_,n_,epsilon_]:=
  Module[{tswitch,H0,U0,Hr,Ur,Hl,Ul,k},k=(C/R)*(2/Pi)^(1/2);
    tswitch=((4R*k^2)/(1-epsilon))^6/(2Pi*sigma^2);
    If[tswitch>=tau,Return[Table[{Smin+i*(Smax-Smin),
         BSEuroCall[Smin+i*(Smax-Smin)/n,X,sigma,r,tau]},{i,0,n}]],
       H0[u_]:=BSEuroCallG[Exp[u],X,sigma,r,tswitch];
       Hr[t_]:=0; Hl[t_]:=0;
       U0[u_]:=BSEuroCall[Exp[u],X,sigma,r,tswitch];
       Ur[t_]:=Smax-X*Exp[-r*(t+tswitch)]; Ul[t_]:=0;
       Return[SIRAPMS[sigma,r,R,k,H0,U0,Hl,Ul,
                       Hr,Ur,m,n,Smax,Smin,tau-tswitch]];
    ]
  ]
```

pričom funkcia *BSEuroCall* predstavuje riešenie Black-Scholesovej rovnice a *BSEuroCallG* predstavuje člen $G = S\Gamma$ z Black-Scholesovej rovnice.

```
NormalCDF[u_]:=(1/2)*(1+Erf[u/Sqrt[2]]);
BSEuroCall[S_,X_,sigma_,r_,tau_]:=
  Module[{d1,d2},d1=(Log[S/X]+(r+sigma^2/2)*tau)/(sigma*Sqrt[tau]);
    d2=d1-sigma*Sqrt[tau];
    Return[S*NormalCDF[d1]-X*Exp[-r*tau]*NormalCDF[d2]]
  ];
BSEuroCallG[S_,X_,sigma_,r_,tau_]=
  Simplify[D[BSEuroCall[S,X,sigma,r,tau],{S,2}]*S];
```

Parametre funkcie:

X	expiračná cena,
r	úroková miera bezrizikového dlhopisu,
R	averzia k riziku,
C	transakčné náklady,
m	počet delení časového intervalu,
n	počet delení priestorového intervalu,
tau	čas do expirácie,
sigma	volatilita akcie,
epsilon	parameter vystupujúci v definícii 3.2
Smin,Smax	priestorový interval, na ktorom je hodnota derivátu aproximovaná.