Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Univerzity Komenského v Bratislave

Katedra ekonomických a finančných modelov

Optimalizácia portfólia

Diplomová práca

Vedúci diplomovej práce : PhD. Daniel Ševčovič

Diplomant : Tomáš Kapusta

Bratislava 2001 Tomáš Kapusta

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som predloženú diplomovú prácu vypracoval samostatne na základe svojich vedomostí a s použitím uvedenej literatúry.

………………………

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce PhD. Danielovi Ševčovičovi za jeho cenné rady, starostlivý dohľad nad mojou diplomovou prácou a pomoc pri odladení programu. Taktiež ďakujem RNDr. Alene Kuklišovej za zadanie úlohy, usmerňujúce pripomienky a poskytnutie dát.

Obsah

Úvod

V ekonómii sa pojem portfólio používa na označenie súboru aktív, pričom pod aktívom rozumieme v užšom zmysle ľubovoľný cenný papier obchodovaný na kapitálovom trhu, v širšom význame aktívum obchodované na finančných trhoch. Cieľom každého racionálne zmýšľajúceho držiteľa portfólia je byť ziskový alebo v nepriaznivom prípade aspoň nebyť stratový. Vytvorenie portfólia obsahuje dva aspekty. Prvým aspektom je výber konkrétnych aktív z celkového množstva na trhu disponibilných aktív do portfólia. Druhým aspektom je určenie pomerného zastúpenia vybraných aktív v danom portfóliu, s čím súvisí optimalizácia portfólia. Tak ako aj v iných oblastiach aj v ekonomike nič nie je isté a každá investícia je spojená s rizikom. Investor, ktorý investuje do kúpy resp. predaja aktív robí tak za cieľom zisku. Rizikom takejto investície sa rozumie neistota z návratu peňazí a ziskom sa rozumie výnos z investície alebo návratnosť investície, tj. čistý zisk. Veľkosť výnosu investície úzko súvisí s rizikom investície. Čím väčší je požadovaný výnos investície tým väčšie riziko investícia obnáša. Optimalizácia portfólia je teda výber takého pomerného zastúpenia aktív do portfólia, ktoré má pri požadovanom výnose minimálne riziko resp. pri stanovenom riziku maximálny výnos. Takéto portfólio nazývame optimálne portfólio, v texte tiež ako rizikovo optimálne portfólio.

Prvá kapitola je venovaná teoretickým podkladom pre praktickú aplikáciu optimalizácie portfólia. Je v nej uvedený teoretický model s istými predpokladmi a následnými implikáciami, ktoré sa týkajú rovnováhy na kapitálových trhoch. V modeli je tiež zahrnutá teória tvorby portfólia Markowitzovým prístupom. V závere tejto kapitoly sú zhrnuté praktické dôsledky tohto modelu. Zdrojom informácií je [1]. Druhá kapitola je venovaná definovaniu úlohy zadanej z NBS. V tretej kapitole sú matematické podklady pre riešenie úlohy. Štvrtá kapitola obsahuje matematickú formuláciu úlohy a konkrétny postup pri jej riešení. Na záver kapitoly je uvedený popis vytvoreného programu, porovnanie výsledkov a riešenie úlohy s konkrétnymi reálnymi ohraničeniami. Výsledky numerických experimentov ako aj riešenia úlohy sú v prílohe.

1 CAPM

1.1 The Capital Asset Pricing Model.

Uvedený model je jednou zo základných častí modernej ekonómie. Model nám dáva precíznu predstavu vzťahu medzi rizikom aktíva a jeho očakávanou návratnosťou. Pod rizikom rozumieme prirodzené riziko z návratnosti investície, pretože nič nie je isté a každá investícia má svoje riziko[1]. Tento vzťah má dva hlavné dôsledky. Po prvé, umožnuje nám urobiť výpočet odhadu miery návratnosti možných investícii. Napr. pri analyzovaní cenných papierov nás môže zaujímať, či očakávaná návratnosť, ktorú predpokladáme resp. predpovedáme pre nejaký CP, je menšia alebo väčšia ako „spravodlivá“ návratnosť k danému riziku. Po druhé, model nám pomáha urobiť kvalifikovný odhad hodnoty aktíva, ktoré ešte nebolo obchodované na trhu vzhľadom na jeho očakávanú návratnosť, alebo odhadnúť ako ovplyvní nový investičný projekt resp. nová investičná stratégia investormi požadovanú návratnosť z investície do akcie spoločnosti. Hoci CAPM nespĺňa úplne empirické testy, je široko používaný, pretože poskytuje hlbší pohľad do veci a svojou presnosťou postačuje pre mnohé aplikácie.

CAPM je súbor predikcií týkajúcich sa rovnováhy očakávaných návratností rizikových aktív. K CAPM pristúpime postulovaním otázky „čo ak“, kde časť „ak“ odkazuje na zjednodušený svet. Postavením nepochybne nerealistického sveta nám umožňuje relatívne ľahký prechod k „tak“ časti.

Zjednodušujúce predpoklady vedúce k základnej verzii CAPM môžeme sumarizovať do nasledujúceho zoznamu pozostávajúceho zo šiestich bodov [1, str. 237]. Týmito podmienkami sa pokúšame zaistiť to, aby si jednotliví účastníci boli vzájomne podobní tak, ako je to len možné, s citeľnou výnimkou rozdielneho počiatočného bohatstva a tolerancie rizika. Uvidíme, že zhoda investorovho správania sa značne zjednodušuje našu analýzu.

[1] Štátne dlhopisy sú považované za bezrizikové, t.j. návratnosť investície je istá.

1. Je veľa investorov, každý so základným bohatstvom, ktoré je v porovnaní s celkovým bohatstvom všetkých investorov malé. Investori sú price-takers, t.j. jednajú aj keď ceny CP nie sú ovplyvnené ich vlastnými obchodmi. To je obvyklá podmienka dokonalej súťaže v mikroekonómii.
2. Všetci investori plánujú pre jedno identické časové obdobie. Takéto správanie investora sa niekedy označuje ako myopické v tom zmysle, že investor ignoruje všetko, čo by sa mohlo stať za koncom tohto časového úseku. Myopické správanie sa nie je vo všeobecnosti optimálne.
3. Investície sú limitované na súbor verejne obchodovaných aktív ako sú akcie a dlhopisy a na bezrizikové požičiavanie a vypožičiavanie. Tento predpoklad vylučuje investovanie do neobchodovaných aktív akými sú ľudský kapitál, súkromné podniky, vládou rezervované aktíva atď. Tiež sa predpokladá, že investori si môžu požičiavať a vypožičiavať ľubovoľnú sumu pri fixnom bezrizikovom úroku.
4. Investori neplatia dane z návratnosti investície a transakčné náklady z obchodovania s aktívami. V realite sú investori v rôznych daňových skupinách a to môže ovplyvňovať typ aktíva, do ktorého investujú. Daň môže závisieť od toho, či je príjem z úroku, z dividendy alebo z kapitálového výnosu. Naviac, obchodovanie je nákladné a provízie a poplatky závisia od objemu obchodu a od pozície individuálneho investora.
5. Všetci investori sú racionálnymi optimalizátormi v tom zmysle, že všetci pri voľbe portfólia používajú Markowitzov[2] model.
6. Všetci investori analyzujú aktíva tým istým spôsobom a zdieľajú ten istý ekonomický pohľad na svet. Výsledkom je identické odhadovanie distribúcie pravdepodobnosti budúceho toku penazí z investovania do prístupných aktív, t.j. pre ľubovoľný súbor cien aktív všetci odvodia ten istý vstupný list do Markowitzovho modelu. So súborom cien aktív a bezrizikovou úrokovou mierou, všetci investori používajú tie isté očakávané návratnosti a kovariančnú maticu z návratností aktív na generovanie efektívnej hranice a jedinečného rizikovo

[2] Harry Markowitz odvodil základy moderného manažmentu portfólia v r. 1952, za čo mu bola v r. 1990 udelená Nobelova cena za ekonomiku. CAPM bol vyvinutý 12 rokov neskôr v článkoch od W. Sharpe, J. Lintner a J. Mossin.

optimálneho portfólia. Tento predpoklad je často označovaný ako homogénne očakávania.

Tieto predpoklady reprezentujú „ak“ z našej „ak“ - „tak“ analýzy. Samozrejme ignorujú väčšinu zložitostí reálneho sveta. S týmito predpokladmi však môžme získať nadhľad na podstatu rovnováhy na trhu akcií.

Môžeme teda zhrnúť dôsledky vedúce k rovnováhe, ktorá bude prevládať v tomto hypotetickom svete aktív a investorov. Nasledujúce časti tejto kapitoly vysvetľujú a pracujú s týmito implikáciami [1, str. 238].

1. Všetci investori si vyberú k držbe portfólio rizikových aktív v takom zložení, ktoré je kópiou zloženia aktív v trhovom portfóliu obsahujúceho všetky obchodovateľné aktíva. Zastúpenie každého aktíva v portfóliu trhu odpovedá trhovej hodnote predmetného aktíva (cena jedného aktíva násobená počtom obchodovaných aktív) delené celkovou trhovou hodnotou všetkých aktív.
2. Nielen trhové portfólio bude na hranici výkonnosti - efficient frontier, ale taktiež portfólio určené čiarou alokácie kapitálu - CAL ako dotyčnicou k hranici výkonnosti odvodenou každým jedným investorom (viď obr. č. 4.). Výsledkom je čiara kapitálového trhu - CML, vychádzajúca z bezrizikového úroku cez trhové portfólio, M (viď obr. č. 6.), ktorá je tiež najlepšie dosiahnuteľnou CAL. Všetci investori držia $\boldsymbol{M}$ ako svoje rizikovo optimálne portfólio s rozdielom iba v pomere investovaného do neho a do bezrizikového aktíva.
3. Riziková prémia z trhového portfólia bude proporcionálna k jeho riziku a stupňom averzie k riziku daného investora. Matematicky :

$$E(r_M) - r_f = 0{,}01.\overline{A}\sigma_M^2 \ , \tag{1.1}$$

kde σ_M^2 je variancia trhového portfólia M, $\overline{A}$ je priemerný stupeň averzie k riziku priemerovaný cez všetkých investorov, r_f je bezriziková úroková miera, resp.

úroková miera z T-Bill[3] a $E(r_M)$[4] je očakávaná návratnosť trhového portfólia. Pretože M je optimálne portfólio, ktoré je efektívne diverzifikované cez všetky aktíva, tak σ_M^2 je systematické riziko[5] takéhoto sveta.

4. Riziková prémia individuálnych aktív bude proporcionálna rizikovej prémii trhového portfólia M a beta koeficientu aktíva vzťahujúcemu sa k trhovému portfóliu. Formálne je beta definovaná ako

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} \tag{1.2}$$

Môžeme teda napísať

$$E(r_i) - r_f = \frac{\operatorname{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}[E(r_M) - r_f] = \beta_i [E(r_M) - r_f] \tag{1.3}$$

kde i je index aktíva.

Vzťah (1.1) je odvodený z úžitkovej funkcie definovanej v časti 1.2.2. Vzťahy (1.2) a (1.3) sú odvodené v časti 1.3.4.

[3] T-Bill = bezrizikový cenný papier (CP s nulovým rizikom straty návratnosti investície)
[4] $E(r_M)$ je stredná hodnota z návratnosti trhového portfólia
[5] Pozri časť 1.2.3. Diverzifikácia a riziko portfólia

1.2 Teória portfólia

Teraz odhliadneme od efektíveho trhového portfólia a pozrieme sa na to, ako vytvárajú svoje portfólio jednotliví investori.

Pri vytváraní optimálneho portfólia je snaha dosiahnuť čo najlepší pomer medzi rizikom a výnosom. Vo všeobecnosti je kapitálové portfólio tvorené rizikovými a bezrizikovými aktívami. Pomer, akým investor alokuje svoj kapitál do rizikovej a bezrizikovej časti portfólia závisí od jeho averzie k riziku. Čím averznejší je investor k riziku, tým väčšiu časť svojho kapitálu umiestni do bezrizikovej časti portfólia a opačne. Určenie rizikovej čati portfólia tak, aby bola optimálna, je záležitosť čisto matematická. Investor iba určí, ktoré rizikové aktíva z celkového množstva rizikových aktív na trhu majú byť v tejto časti portfólia zahrnuté.

1.2.1 Portfólio z jedného rizikového a jedného bezrizikového aktíva

Predpokladáme, že investor sa už rozhodol, aké aktívum bude obsahovať riziková časť optimálneho portfólia. Nasleduje určenie pomeru, akým rozdelí svoj kapitál medzi rizikovú časť a bezrizikovú časť. Povedzme, že do rizikovej časti ***P*** alokuje ***y*** a zvyšok, t.j. (1 - ***y***) do bezrizikovej časti ***F***. Miera návratnosti celkového portfólia *C* je potom daná ako

$$r_C = \boldsymbol{y} r_{\boldsymbol{P}} + (1 - y) r_f \,, \tag{1.4}$$

Vzhľadom k tomu, že r_f je daná trhom a k dispozícii máme len očakávanú mieru návratnosti rizikovej časti $\boldsymbol{E}(r_p)$:

$$E(r_C) = \boldsymbol{y} E(r_{\boldsymbol{P}}) + (1 - y) r_f \tag{1.5}$$

Riziko portfólia je dané jeho štandartnou odchýlkou ako

$$\sigma_C = y\sigma_P \ , \tag{1.6}$$

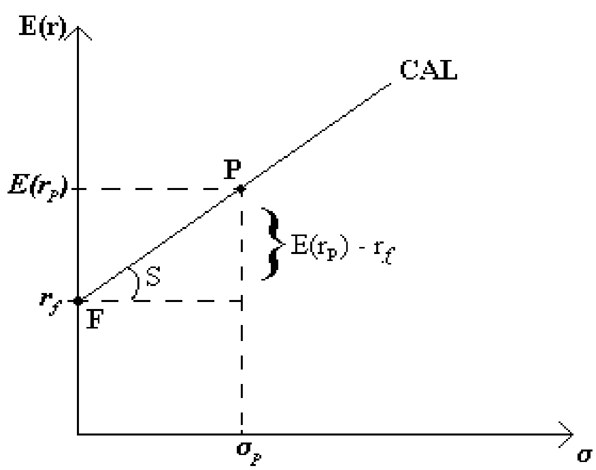
keďže $\sigma_f = 0$. Na tomto mieste je vhodné poznamenať, že vo veľkej časti modernej ekonomickej teórie sa predpokladá normálne, resp. lognormálne rozdelenie miery návratnosti aktív, pretože je dobre popísané svojou strednou hodnotou a disperziou[6]. Vyjadrením y zo vzťahu (1.6) a dosadením do (1.5) dostávame

$$E(r_C) = r_f + \frac{\sigma_C}{\sigma_P}\left[E(r_p) - r_f\right], \tag{1.7}$$

odkiaľ definujeme

$$S = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_P} \ , \tag{1.8}$$

čo je sklon čiary alokácie kapitálu CAL (Obr. č. 1.), tiež označovaný ako pomer odmeny k riziku.



Obr. č. 1.

[6] [1, str. 162] uvádza, že návratnosť a riziko portfólio s 32 akciami a 1-ročnou návratnosťou majú dostatočne blízko k parametrom normálnemu rozdeleniu.

1.2.2 Miera tolerancie rizika a alokácia aktív

V predošlej časti sme ukázali možné kombinácie alokácie kapitálu, t.j kombinácie návratnosti a rizika, čoho zobrazením je CAL. Teraz nasleduje určenie pomeru $\boldsymbol{y}$ - alokácie kapitálu do rizikovej časti portfólia. To je determinované mierou averzie k riziku jednotlivého investora. Úžitok investora z jeho portfólia je daný jeho úžitkovou funkciou definovanou ako [7]

$$U = \boldsymbol{E}(r_c) - 0.005\boldsymbol{A}\sigma_C^2, \tag{1.9}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je koeficient averzie k riziku (0.01 je prevod medzi % a dekadickým vyjadrením čísla). Dosadením (1.5) a (1.6) do (1.9) dostávame

$$U = r_f + \boldsymbol{y}[E(r_p) - r_f] - 0.005\boldsymbol{A}y^2\sigma_P^2, \tag{1.10}$$

Z maximalizácie úžitkovej funkcie, t.j. postavením $\partial U / \partial \boldsymbol{y} = 0$ a následným vyjadrením $\boldsymbol{y}$ máme

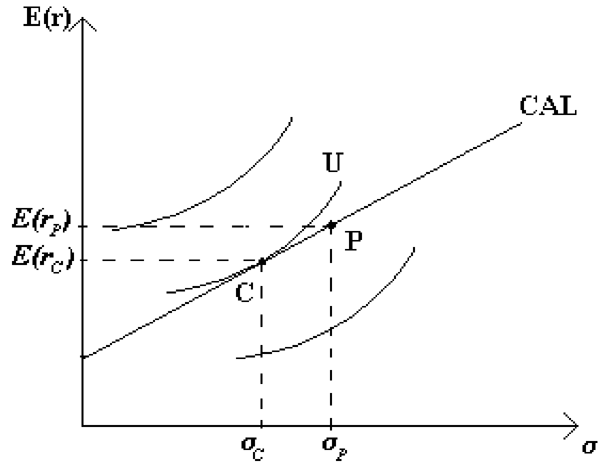
$$\boldsymbol{y}^* = \frac{E(r_p) - r_f}{0.01\boldsymbol{A}\sigma_P^2}, \tag{1.11}$$

čo je hľadaný pomer. Následné nájdenie optimálneho portfólia C je zobrazené na obr. č. 2.

Čiara alokácie kapitálu tvorená jedným bezrizikovým aktívom a trhovým indexom[8] sa nazýva čiara kapitálového trhu - CML a predstavuje pasívnu stratégiu investovania diskutovanú v časti 1.3.2.

---

[7] Táto definícia je z [1, str. 146]. Vo všeobecnosti je možné použiť aj inak definovanú úžitkovú funkiu.
[8] Trhovým indexom sú balíky akcií spoločností ako napr. S&P 500, NASDAQ



Obr. č. 2.

1.2.3 Diverzifkácia a riziko portfólia

Ak predpokladáme, že portfólio je zložené iba z akcií firiem, rozlišujeme dva druhy zdrojov rizika. Prvým je trhové riziko (systematiké, nediverzifikovateľné), ktoré vzniká z neistôt vyplývajúcich z úrokových sadzieb, inflácie a iných ekonomických činiteľov. Druhým je špecifické (firemné, nesystematické, diverzifikovateľné) riziko plynúce z rizika firmy. Diverzifikácia je proces pridávania akcií do portfólia za účelom zníženia špecifického rizika. Čím väčší počet akcií portfólio obsahuje, tým nižšie je jeho špecifické riziko, teda aj jeho celkové riziko. Avšak trhové riziko diverzifikáciou znížené nemôže byť.

1.2.4 Portfólio z dvoch rizikových aktív

Teraz predpokladajme, že portfólio može byť zostavené len z dvoch akív, pričom prvé aktívum má v portfóliu zastúpenie w_1 a druhá $w_2 = 1-w_1$. Miera návratnosti takéhoto portfólia je

$$r_P = w_1 r_1 + w_2 r_2 , \tag{1.12}$$

kde r_1 a r_2 sú návratnosti z akív a r_P je návratnosť portfólia. Opäť máme k dispozícii iba očakávané návratnosti akív, preto (1.12) prepíšeme na

$$E(r_P) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) \tag{1.13}$$

Variancia portfólia je daná ako

$$\sigma_P^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \operatorname{cov}(r_1, r_2) \tag{1.14}$$

Keďže $\operatorname{cov}(r_1, r_1) = \sigma_1^2$ môžeme (1.14) prepísať na

$$\sigma_P^2 = w_1^2 \operatorname{cov}(r_1, r_1) + w_2^2 \operatorname{cov}(r_2, r_2) + 2 w_1 w_2 \operatorname{cov}(r_1, r_2) \tag{1.15}$$

z čoho vidieť, že variancia portfólia je váženým priemerom kovariancií. Pripomeňme, že $\operatorname{cov}(r_1, r_2) = \operatorname{cov}(r_2, r_1)$ čo znamená, že kovariancie akív sú usporiadané v symetrickej matici, v tomto prípade rozmeru 2x2. Kovarianciu dvoch náhodných veličín X a Y možno napísať ako

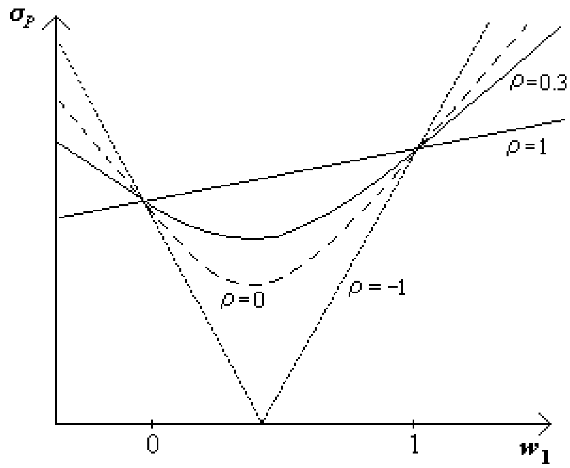
$$\operatorname{cov}(r_X, r_Y) = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y \,, \tag{1.16}$$

kde $\rho_{XY} \in$ <-1,1> je korelačný koeficient predstavujúci mieru závislosti X od Y. Všimnime si, že variancia portfólia je najvyššia, ak sú aktíva perfektne kladne korelované, t.j. $\rho_{12} = 1$. V každom inom prípade je nižšia. Vzhľadom k tomu, že návratnosť portfólia je daná ako vážený priemer návratností, vzťah (1.13), portfólio tvorené z akív, ktorých $0 < \rho < 1$, dáva vždy lepší pomer návratnosti ku riziku ako portfólio tvorené perfektne korelovanými aktívami. Takéto portfólio by mohlo byť interpretované ako držanie dvoch akív „oddelene“ Dosadením (1.16) do (1.14) a s prihliadnutím na $\rho_{12} = 1$ vidieť, že variancia portfólia je štvorec vážených štandardných odchýlok. Analogicky, najnižšia dosiahnuteľná hodnota variancie portfólia je pre $\rho_{12} = -1$.

Pri optimalizácii nás zaujíma, aké pomerné zastúpenia majú aktíva v portfóliu mať, aby toto bolo optimálne. Dosadením $w_2 = 1-w_1$ do (1.14) a položením $\partial\sigma_P^2 / \partial w_1 = 0$ a následnou úpravou dostávame

$$w_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \mathrm{cov}(r_1, r_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mathrm{cov}(r_1, r_2)}, \tag{1.17}$$

čo je hľadané pomerné zastúpenie prvého aktíva. Pre rôzne hodnoty ρ_{12} dostávame samozrejme rôzne hodnoty pomerného zastúpenia akív v portfóliu, čo je názorne ukázané na nasledovnom obrázku.



Obr. č. 3.

1.2.5 Portfólio z dvoch rizikových a jedného bezrizikového aktíva

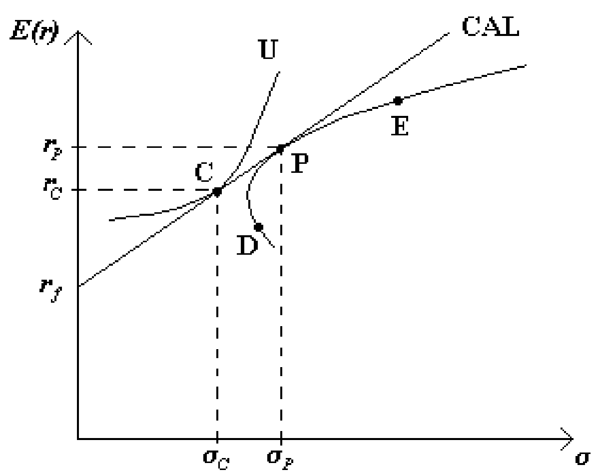
Ak by sme uvažovali portfólio zložené z dvoch rizikových aktív tvoriacich rizikové portfólio ***P*** a jedného bezrizikového aktíva ***F***, tak analogicky ako v časti 1.2.1, snažíme sa získať čo najlepší pomer odmeny k riziku, t.j.

$$\max_{w_i} S_P = \frac{E(r_P) - r_f}{\sigma_P}, \tag{1.18}$$

kde $E(r_P)$ a σ_P sú dané z (1.13) a (1.14) pričom opäť $w_2 = 1-w_1$. Položením $\partial S_P / \partial w_1 = 0$ dostávame

$$w_1^* = \frac{[E(r_1)-r_f]\sigma_2^2 - [E(r_2)-r_f]\mathrm{cov}(r_1,r_2)}{[E(r_2)-r_f]\sigma_1^2 + [E(r_1)-r_f]\sigma_2^2 - [E(r_1)-E(r_2)-2r_f]\mathrm{cov}(r_1,r_2)} \tag{1.19}$$

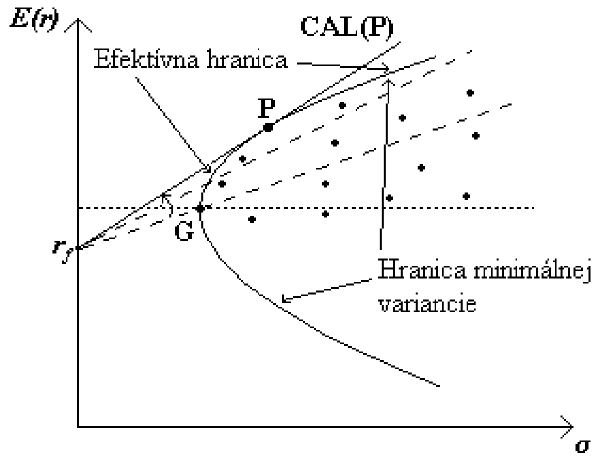
Ostáva už len určiť pomer, akým podelíme kapitál medzi časti ***P*** a ***F***. Tento pomer závisí od koeficientu averzie k riziku *A* a je daný vzťahom (1.11). Návratnosť celkového portfólia *C* je daná vzťahom (1.5) a zobrazená na obr. č. 4. Body *D* a *E* predstavujú jednotlivé aktíva a *U* je úžitková funkcia investora definovaná v časti 1.2.2.



Obr. č. 4.

1.2.6 Markowitzov model výberu portfólia

Teraz zovšeobecníme prípad výberu dvoch rizikových aktív na výber viac rizikových aktív. Prvým krokom je nájdenie množiny kombinácii rizika a návratnosti. Táto množina predstavuje krivku, ktorá sa nazýva bariéra alebo hranica minimálnej variancie rizikových aktív. Táto hranica je graf najnižšieho možného rizika ktoré môže byť dosiahnuté pri danej návratnosti portfólia a jeho zobrazením je parabola na obr. č. 5. Poznamenajme, že všetky individuálne aktíva ležia na pravej strane od tejto hranice, prinajmenšom ak je povolený krátky predaj. Ak by bol krátky predaj zakázaný, niektoré z aktív môžu ležať aj na hranici. Bod *G* ležiaci na vrchole paraboly je globálnym variančným minimom. Všetky body ležiace na hranici a nad bodom *G* sú najlepšími možnými kombináciami rizika a návratnosti portfólia a tvoria efektívnu hranicu. Pre ľubovoľné portfólio ležiace na hranici a pod bodom *G* existuje portfólio na efektívnej časti hranici, ktoré má k prislúchajúcemu riziku väčšiu návratnosť, preto spodná časť krivky tvorí neefektívnu hranicu (obr. č. 5.). Druhý krok optimalizácie zahŕňa bezrizikové aktívum. Tak ako v predchádzajúcej časti, hľadáme CAL s najväčším pomerom odmeny k riziku, t.j. najstrmšiu CAL. Poslednou časťou optimalizácie je problém individuálneho investora, ktorý sa rozhoduje pre časť investovanú do rizikového portfólia a zvyšok do bezrizikového aktíva, ako je to na obr. č. 4.



Obr. č. 5

Teraz sa bližšie pozrieme na prvý krok optimalizácie. Pre nájdenie hranice minimálnej variancie potrebujeme ako vstup súbor odhadov očakávanej návratnosti každého aktíva a odhad kovariančnej matice. Predpokladáme, že investor plánuje pre jeden časový horizont, napr. jeden rok a má vybraných ***n*** akív. Teraz, v čase *0* vieme ceny akív $\boldsymbol{P_1^0},\ldots,P_n^0$. Pre každé aktívum urobíme odhad očakávanej návratnosti za zvolené obdobie, v tomto prípade jeden rok. Tá je určená pomocou strednej hodnoty ceny $E(\boldsymbol{P_1^0}),\ldots,E(\boldsymbol{P_n^0})$ a dividendy aktíva $E(D_1),\ldots,E(D_n)$ ako[9]

$$E(R_i)=\frac{E(\boldsymbol{P}_i^1)+E(D_i)-\boldsymbol{P}_i^0}{\boldsymbol{P}_i^0}, \tag{1.20}$$

[9] [1, str 212]. Samozrejme to nie je jediný spôsob určenia očakávanej návratnosti.

Kovariancie medzi výnosovými mierami analyzovaných aktív sú zvyčajne určované z historických dát. S danými odhadmi môžme formulovať očakávanú navratnosť a varianciu rizikového portfólia zloženého z aktív, z ktorých má každá váhu w_i :

$$\begin{aligned} E(r_P) &= \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) \\ \sigma_P^2 &= \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \operatorname{cov}(r_i, r_j) \end{aligned}, \qquad (1.21)$$

ktoré vyplývajú priamo z (1.13) a (1.14) sumovaním cez n aktív.

Idea nájdenia hranice optimálne rizikových portfólií spočíva v nájdení najväčšej očakávanej návratnosti pre ľubovoľnú hodnotu rizika, resp. nájdenie minimálneho rizika pre každú hodnotu očakávanej návratnosti. Tieto dva postupy sú ekvivalentné. Avšak z matematického hľadiska je postup hľadania minimálnej variancie jednoduchší, pretože voľba očakávanej návratnosti portfólia je ohraničená nejakým intervalom, ktorého hranice závisia od maximálnej a minimálnej očakávanej návratnosti zo súboru jednotlivých akív. Pri postupe hľadania maximálnej návratnosti sa dané riziko volí v princípe z intervalu $(0,+\infty)$.

V praxi sa môžeme stretnúť s ohraničeniami na akcie. Napríklad nejaká inštitúcia môže mať zakázané mať krátku pozíciu v niektorých aktívach, teda váhy týchto akív musia byť v jej portfóliu kladné. Alebo investor môže požadovať, aby dividendy z vybraných akív dosahovali nejakú požadovanú hodnotu. Takéto ohraničenia sa pridávajú do optimalizačného problému, avšak každé ďalšie pridané ohraničenie znižuje strmosť CAL, t.j. pomer odmeny k riziku.

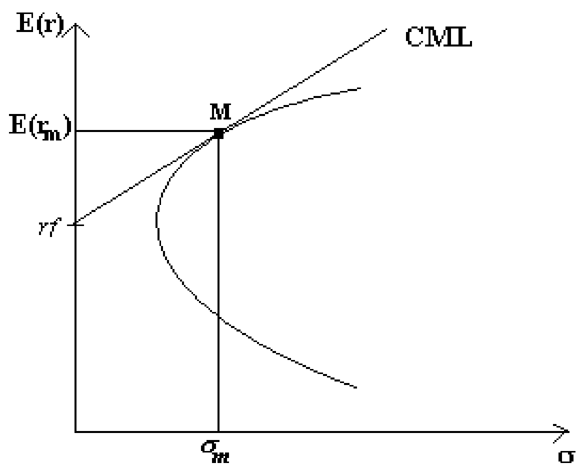
Druhým a tretím krokom sú zohľadnenie bezrizikového aktíva, teda nájdenie optimálnej CAL a proporcionálne zahrnutie bezrizikového aktíva do celkového portfólia individuálnym investorom. Tieto kroky sa uskutočnia analogicky ako v časti 1.2.1 resp. 1.2.2.

Ďalším reálnym ohraničením je ohraničenie na bezrizikové aktívum. Ak pripustíme, že nie všetci invetori si možu požičiavať za tú istú bezrizikovú mieru r_f, tak dospejeme k záveru, že nie všetci investori odvodia to isté optimálne portfólio pre daný súbor aktív. Podrobnejšie je táto časť popísaná v [1].

1.3 Rovnováha na kapitálových trhoch

1.3.1 Prečo všetci investori držia trhové portfólio ?

Z predpokladu z časti 1.1 je ľahko vidieť, že všetci investori si budú želať vlastniť rovnaké rizikové portfólio. Ak všetci investori použijú tú istú Markowitzovu analýzu (predpoklad 5) aplikovaný na ten istý súbor cenných papierov (predpoklad 3) pre ten istý časový horizont (predpoklad 2) a použijú ten istý vstupný list (predpoklad 6), všetci musia dospieť k rovnakému určeniu rizikovo optimálneho portfólia. Toto portfólio leží na hranici výkonnosti a je určené dotyčnicou CML, vychádzajúcou z bezrizikového aktíva, k efektívnej hranici, ako je to na nasledujúcom obrázku.



Obr. č. 6.

To implikuje, že ak váha rizikových akcií, napr. General Motors, v každom bežnom rizikovom portfóliu je 1%, potom aby sme dostali agregátne trhové portfólio, sumujeme cez portfóliá všetkých investorov a trhové portfólio bude tiež obsahovať 1% GM. Ten istý princíp je aplikovateľný na ktorékoľvek proporcionálne zastúpenie akcií v rizikovom portfóliu každého investora. Ako výsledok teda máme optimálne rizikové portfólio, ktoré drží každý z investorov a ktoré je jednoducho podiel z trhového portfólia *M*.

Pripusťme, že optimálne portfólio našich investorov neobsahuje akcie nejakej spoločnosti, napr. Delta Airlines. Ak sa všetci investori vyhnú akciám tejto spoločnosti, dopyt bude nulový a cena akcií DA bude prudko klesať. Keď akcia progresívne zlacnie, stane sa viac atraktívnou pre investovanie a dostatočne atraktívnou na to, aby bola zahrnutá do optimálneho akciového portfólia. Takýto proces garantuje to, že všetky akcie budú zahrnuté v optimálnom portfóliu. Jedinou otázkou ostáva cena, pri ktorej sú investori ochotní zaradiť akciu do ich rizikovo optimálneho portfólia.

1.3.2 Efektívna je pasívna stratégia

V jednoduchom svete CAPM, *M* je optimálne portfólio určené dotyčnicou k efektívnej hranici (obr. č. 6.). Tým, že investor drží trhové portfólio M, môže vynechať robenie špecifickej analýzy a získava efektívne portfólio držaním trhového portfólia. Samozrejme, ak by každý sledoval túto stratégiu, nikto by nevykonával analýzu akcií a takýto stav by nebol dlhodobo udržateľný. Teda pasívna stratégia je investovať do trhového, indexového, portfólia. Tento výsledok sa niekedy nazýva teoréma spoločného fondu - mutual fund theorem [1, str. 240]. Na základe predpokladu, že všetci investori volia držanie indexového spoločného fondu, môžeme rozdeliť výber portfólia na dva komponenty :

- technologický problém, t.j. vytvorenie spoločných fondov profesionálnymi manažérmi
- osobný problém závisiaci na investorovej averzii k riziku, t.j. alokácia celého portfólia medzi spoločný fond a bezrizikové aktíva.

Samozrejme v realite rôzni manažéri investovania robia rizikové portfóliá, ktoré sa líšia od trhového indexu. Napriek tomu významnosť teorémy spoločného fondu je tá, že pasívny investor môže vidieť trhový index ako prvú aproximáciu optimálne rizikového portfólia.

1.3.3 Riziková prémia z trhového portfólia.

Každý individuálny investor si vyberá pomer ***y***, umiestnený v optimálnom portfóliu ***M*** podľa (1.11). Jednoduchá CAPM teória bezrizikového investovania zahŕňa požičiavanie a vypožičiavanie si medzi investormi. Hociktorá vypožičaná pozícia musí byť vyrovnaná požičanou pozíciou veriteľa. To znamená, že čisté vypožičiavanie a požičiavanie cez všetkých investorov musí byť nulové, čoho dôsledkom je, že priemerná pozícia v rizikovom portfóliu je 100%. Ekvivalentne, dosadením $y = 1$ a $P = M$ vo vzťahu (1.11) dostávame vzťah (1.1), čo znamená, že riziková prémia trhového portfólia je funkciou svojej variancie a priemerného stupňa averzie k riziku.

1.3.4 Očakávané návratnosti z jednotlivých aktív.

Príslušná riziková prémia aktíva je determinovaná jej podielom na celkovom riziku portfólia. Riziko portfólia je to, čo má význam pre investorov a je tým, čo ovláda rizikovú prémiu, ktorú investori požadujú. Pripomeňme, že všetci investori používajú ten istý vstupný list, t.j. rovnaké odhady očakávaných návratností, disperzií a kovariancií. Kovariancie môžu byť usporiadané do kovariančnej matice, v ktorej v i-tom riadku a j-tom stĺpci je člen $cov(r_i, r_j)$, čo je kovariancia medzi priemernými mierami návratností i-teho a j-teho aktíva. Podiel i-teho aktíva na variancii portfólia môže byť vyjadrený ako

$$w_i \sum_{j=1}^{n} w_j \operatorname{cov}(r_j, r_i) \tag{1.22}$$

Výraz v sume predstavuje kovarianciu i-teho aktíva s trhovým portfóliom. Inými slovami, najlepšie môžeme zmerať podiel aktíva na riziku portfólia jeho kovarianciou k tomuto portfóliu, t.j. podiel i-teho aktíva na riziku portfólia je

$$w_i \operatorname{cov}(r_i, r_M) \tag{1.23}$$

Ak je kovariancia medzi i-tym aktívom a zvyškom trhu negatívna, tak i-te aktívum má negatívny podiel na riziku portfólia a opačne. Pripomeňme, že mieru návratnosti trhového portfólia môžme zapísať ako

$$r_M = \sum_{k=1}^{n} w_k r_k \tag{1.24}$$

Preto môžeme napísať

$$\operatorname{cov}(r_i, r_M) = \operatorname{cov}(r_i, \sum_{k=1}^{n} w_k r_k) = \sum_{k=1}^{n} w_k \operatorname{cov}(r_i, r_k) \tag{1.25}$$

Porovnaním výrazu za poslednou rovnosťou vo vzťahu (1.25) a sumačného člena zo vzťahu (1.22) vidíme, že kovariancia *i*-teho aktíva s trhovým portfóliom je skutočne proporcionálna k jeho podielu na variancii trhového portfólia.

Zmeraním tohto podielu na trhovej variancii môžeme určiť príslušnú rizikovú prémiu pre toto aktívum. Poznamenajme, že trhové portfólio má rizikovú prémiu $E(r_M)$-r_f a varianciu σ_M^2, a podiel odmeny za riziko

$$\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2} \tag{1.26}$$

Tento podiel je často nazývaný trhová cena rizika, pretože vyjadruje extra návratnosť, ktorú investori požadujú pri znášaní trhového rizika. Podiel rizikovej prémie a variancie nám hovorí, koľko extra návratnosti musí pripadať na jednotku rizika portfólia. Uvážme teraz, že investor by si vytvoril portfólio z týchto troch prvkov: pozícia na trhu s návratnosťou r_M, krátka, záporná, pozícia „maličkej“ veľkosti δ v bezrizikovom aktíve, napr. bezrizikové vypožičanie si peňazí, s návratnosťou $-\delta r_f$, a dlhá pozícia veľkosti δ v trhu s návratnosťou δr_M. Miera návratnosti tohto portfólia bude $r_M + \delta(r_M - r_f)$ a zmena očakávanej návratnosti bude $\Delta E(r) = \delta\,[E(r_M) - r_f]$. Toto nové portfólio má váhu $(1+\delta)$ v trhu a $-\delta$ v bezrizikovom aktíve a jeho variancia bude

$$\sigma^2 = (1+\delta)^2\sigma_M^2 = (1+2\delta+\delta^2)\sigma_M^2 = \sigma_M^2+(2\delta+\delta^2)\sigma_M^2.$$

Keďže δ je veľmi malé, δ^2 bude v porovnaní s 2δ „zanedbateľne“ malé, čo do aproximácie, teda $\sigma^2=\sigma_M^2+2\delta\sigma_M^2 \Rightarrow \Delta\sigma^2=2\delta\sigma_M^2$. Zosumarizovaním týchto vzťahov dostávame

$$\frac{\Delta E(r)}{\Delta\sigma^2} = \frac{E(r_M) - r_f}{2\sigma_M^2}\ , \tag{1.27}$$

čo je polovica trhovej ceny rizika vzťahu (1.26). Aplikovaním tejto úvahy na konkrétnu *i*-te aktívum dostávame vzťah

$$\frac{\Delta E(r)}{\Delta\sigma^2}=\frac{E(r_i)-r_f}{2\operatorname{cov}(r_i,r_M)} \tag{1.28}$$

čo nazývame hraničná cena rizika *i*-teho aktíva. Aby platila rovnováha, musí byť rovnosť medzi hraničnou cenou rizika *i*-teho aktíva a cenou rizika trhového portfólia, inak by investori menili podiel tohto aktíva vo svojom portfóliu, pokým by sa tieto cenové riziká nevyrovnali. Musí teda platiť

$$\frac{E(r_i)-r_f}{2\operatorname{cov}(r_i,r_M)}=\frac{E(r_M)-r_f}{2\sigma_M^2} \tag{1.29}$$

Z čoho môžeme určit spravodlivú prémiu z rizika investovania do *i*-teho aktíva ako

$$E(r_i)=\frac{\operatorname{cov}(r_i,r_M)}{\sigma_M^2}E(r_M) \tag{1.30}$$

Vzťah $\operatorname{cov}(r_i,r_M)/\sigma_M^2$ vyjadruje podiel *i*-teho aktíva na variancii trhového portfólia ako časť z totálnej variancie trhového portfólia, nazývame ho *beta aktíva* a označujeme β. Vzťah (1.30) môžme prepísať na :

$$E(r_i)=r_f+\beta[E(r_M)-r_f] \tag{1.31}$$

Tento vzájomný vzťah medzi očakávanou návratnosťou a beta je zvyčajným vyjadrením CAPM pre praktických užívateľov.

Keby niektorý investor nedržal trhové portfólio, ale napriek tomu by mal dobre diverzifikované portfólio, bolo by toto v silnej korelácii s trhovým portfóliom a beta aktíva by bola stále dobrým meradlom rizika. Taktiež vzťah (1.31) by platil (v nejakej modifikovanej forme).

Ak vzťah (1.31) platí pre ľubovoľnú aktívum, musí platiť aj pre kombináciu akív, pretože kombináciu akív si možno tiež predstaviť ako aktívum. Predpokladajme, že aktíva sú v portfóliu zastúpené váhami $w_{i,}$ $i = 1,...,n$. Aplikovaním vzťahu (1.31) na každé aktívum a prenásobením každej rovnosti váhou prislúchajúcou k danému akívu dostávame :

$$\begin{aligned} w_1 E(r_1) &= w_1 r_f + w_1 \beta [E(r_M) - r_f], \\ &\vdots \\ w_n E(r_n) &= w_n r_f + w_n \beta [E(r_M) - r_f] \end{aligned} \tag{1.32}$$

Z čoho následným sumovaním stĺpcov vidieť, že :

$$E(r_p) = \quad r_f \ + \ \beta_M [E(r_M) - r_f] \tag{1.33}$$

To je ale tautológia, pretože $\beta_M = 1$, čo možno nahliadnuť z definície bety :

$$\beta_M = \frac{\mathrm{cov}(r_M, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_M^2} \tag{1.34}$$

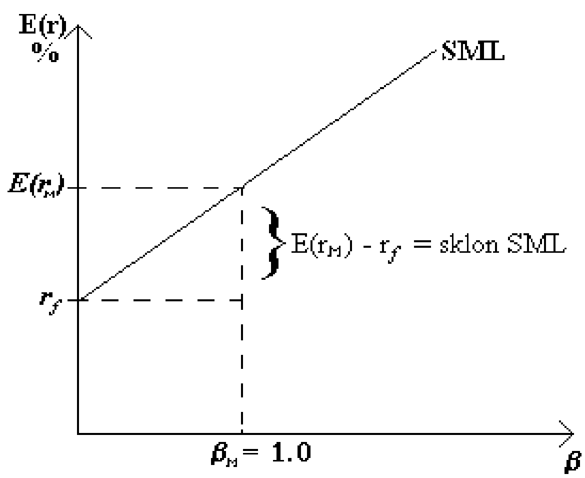
Ak beta trhu je 1 a trh zahrňuje všetky aktíva v ekonomike, tak vážený priemer bety cez všetky aktíva musí byť 1. Teda bety s hodnotou väčšou ako 1 sú považované za agresívne, v zmysle investovania do akív s vysokým beta, čo znamená nadpriemernú citlivosť na trhové kolísanie. Bety s hodnotou niššou ako 1 sú považované za defenzívne.

Ceny akív odrážajú verejnú informovanosť o prosperite firmy, ale iba risk spoločnosti, v koncepte CAPM meraný betou, by mal ovplyvňovať očakávanú návratnosť. Racionálni trhoví investori dostávajú vysoké návratnosti, ak znášajú tomu primerané riziko.

1.3.5 Bezpečná trhová čiara

Beta aktíva je vhodné meradlo rizika aktíva pretože, beta je proporcionálna riziku, ktorým aktívum prispieva do celkového rizika optimálneho portfólia. Riziko - averzní investori merajú riziko rizikovo optimálneho portfólia pomocou jeho variancie. V tomto prostredí budeme očakávať odmenu alebo prémiu z rizika individuálneho aktíva v závislosti na riziku, ktorým prispieva do portfólia. Preto predpokladáme, že riziková prémia ľubovoľného aktíva alebo portfólia je funkciou bety. CAPM potvrdzuje tento predpoklad - riziková prémia akcie je proporcionálna ako k bete tak k rizikovej prémii trhového portfólia, t.j. riziková prémia aktíva je rovná $\beta\,[E(r_M)\text{-}r_f]$.

Vzájomný vzťah medzi očakávanou návratnosťou a beta možno vyobraziť graficky ako bezpečnú trhovú čiaru - SML, obr. č. 7. Pretože beta je 1, sklon predstavuje rizikovú prémiu trhového portfólia. Užitočné je porovnanie SML a CML. CML znázoňuje rizikovú prémiu



Obr. č.7.

efektívneho portfólia, t.j. portfólia zostaveného trhom a bezrizikovým aktívom, ako funkciu smerodajnej odchýlky portfólia. Toto je opodstatnené, pretože smerodajná odchýlka je prijateľným meradlom rizika pre efektívne diverzifikované portfóliá, ktoré sú kandidátmi na celkové portfóliá investorov. Oproti tomu, SML znázoňuje rizikovú prémiu individuálneho akíva ako funkciu rizika tohto aktíva. Relevantným meradlom rizika individuálneho aktíva, ktoré je časťou dobre diverzifikovaného portfólia nie je jeho smerodajná odchýlka alebo variancia, ale príspevok aktíva do variancie portfólia meraný betou aktíva.

SML poskytuje kritérium pre ohodnotenie uskutočnenej investície. S daným rizikom investície, meraným jeho betou, SML udáva rovnako, ako časová hodnota peňazí, požadovanú mieru návratnosti z investície ako kompenzáciu za investorove riziko. Pretože SML je grafickým znázornením vzťahu medzi očakávanou návratnosťou a beta, „spravodlivo ocenené“ aktíva ležia presne na SML, t.j. ich očakávané návratnosti sú úmerné ich riziku. Podhodnotené aktíva teda ležia nad SML, s daným beta sú ich očakávané návratnosti väčšie, ako predikuje CAPM a nadhodnotené aktíva ležia pod SML. Rozdiel medzi spravodlivou a aktuálnou očakávanou mierou návratnosti aktíva sa nazýva alfa aktíva, ozn. α.

Reálne je CAPM takisto použiteľný pri rozhodnutiach o investičnom rozpočte. Pre firmu vytvárajúcu nový projekt môže CAPM poskytnúť požadovanú mieru návratnosti, ktorú potrebuje projekt „zarobiť“, aby bol akceptovaný investormi. Manažéri môžu použiť CAPM na získanie vnútornej miery návratnosti - IRR projektu.

1.3.6 Rozšírenia CAPM

Predpoklady, ktoré nám umožnili odvodiť túto jednoduchú verziu CAPM sú nepochybme neralistické. Odkedy bol CAPM vynájdený, bola snaha priblížiť model realite. Sú dva typy rozšírenia základnej verzie CAPM. Prvý sa týka zoslabenia predpokladov, ktoré sme uviedli na začiatku. Zoslabenie je v predpoklade, že nie všetci investori si môžu požičiavať za tú istú bezrizkovú úrokovú mieru r_f resp. sú dané isté ohraničenia pre požičiavanie a vypožičiavanie si za r_f. To je model s nulovou beta. Druhé rozšírenie sa týka likvidity niektorých aktív a model má názov Teória likviditných prémií[10].

[10] Viac o týchto modeloch je možné sa dočítať v [1] na str. 249 - 259

1.3.7 Zhrnutie dôsledkov modelu pre praktické využitie

Predpoklady postulované pri definovaní CAPM zavádzajú predstavu rovnováhy na kapitálovom trhu. Zmiernením niektorých striktných predpokladov sa síce od teoretickej rovnováhy trhu vzďaľujeme, avšak vytváranie rizikových portfólií Markowitzovým prístupom je prakticky použiteľné. Rovnako aj zistené hodnoty alfa a beta aktíva majú určitú vypovedaciu hodnotu.

2 Definovanie úlohy

2.1 Zadanie úlohy

V prvej kapitole sa uvažovalo portfólio tvorené aktívami, resp. akciami. V našom prípade je úlohou nájsť krivku efektívnych menových portfólií z mien v devízovej rezerve NBS za platnosti istých špecifických ohraničení, ktoré sú definované nižšie. Devízová rezerva teda predstavuje portfólio a jednotlivé meny akcie v portfóliu. Podobne ako pri akciách, vychádzame z historických údajov. Údaje sú dané výmenným kurzom slovenskej koruny oproti cudzím menám úrokovou sadzbou na jednotlivé meny. Prvá vzorka dát sú denné výmenné kurzy cudzej meny oproti SK určované NBS a sú z časového obdobia rokov 1994 - 1998. Tieto poslúžili pri testovaní programu. Druhá vzorka dát je z časového obdobia Január 1995 až Február 2001. Sú to mesačné výmenné kurzy a príslušné mesačné úrokové sadzby. Vzorku dát možno nájsť v prílohe.

Keďže výmenný kurz nejakej meny oproti inej mene v čase si možno predstaviť ako meniacu sa cenu akcie v čase, preto možno na optimalizáciu menového portfólia použiť teoretickú CAPM analýzu a úlohu formulovať ako Markowitzovu úlohu.

2.2 Matematický model

Úloha teda spočíva v nájdení spočítateľnej množiny bodov M, ktorá obsahuje dvojice bodov $[r_i,\sigma_i]$ resp. $[E(r_i),\sigma_i]$, $i\in\mathbf{N}$. Tieto body tvoria parabolu (viď obr. č. 5.). Úlohu nájdenia portfólia ležiaceho na krivke efektívnych portfólií historicky ako prvý sformuloval H. Markowitz.

2.2.1 Matematická formulácia Markowitzovej úlohy

Matematická formulácia Markowitzovej úlohy vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} &\underset{x}{Min}\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Q\, \boldsymbol{x}, \\ &\text{za podmienok}: \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \sum_{i=1}^{n} x_i . r_i = E_r \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde

$\boldsymbol{n}$ – počet aktív v portfóliu

Q – kovariančná matica $Q \in \nabla^{n \times n}$

$\boldsymbol{x}$ – vektor váh (riešenie), $\boldsymbol{x} \in \nabla^{n}$, $\boldsymbol{x} = (x_1,..,x_n)$

r – vektor návratností, $r \in \nabla^{n}$, $r = (r_1,..,r_n)$

E_r – požadovaná návratnosť portfólia

Bližšia špecifikácia výpočtu matice Q, vektora návratností r je popísaná v časti 4.4.

2.2.2 Určenie špecifických ohraničení

Špecifickosť ohraničení sa týka úlohy (2.1), kde sa tieto nevyskytujú. Z matematického hľadiska sa dajú považovať za bežné. Požiadavka na tieto ohraničenia vychádza z predpisov a stanovení NBS, ktoré určujú pomerné zastúpenie jednotlivých mien v devízovej rezerve. Ohraničenia sú taktiež ovplyvňované aktuálnymi pasívami NBS.

Špecifické ohraničenia :

I. Nie je povolená krátka pozícia, t.j. požiadavka nezápornosti riešenia : $x_i \geq 0\ \forall i=1,..n$
II. Jednotlivé zložky riešenia sa musia nachádzať vo vopred stanovenom intervale t.j. $x_i \in \langle a_i, b_i \rangle$

Pridaním ohraničení I. a II. k úlohe (2.1) dostávame požadovanú matematickú formuláciu úlohy :

$$\begin{aligned}
&\underset{x}{Min}\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Q\, \boldsymbol{x},\ \text{za podmienok:} \\
&(\mathrm{P1})\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
&(\mathrm{P2})\ a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1,2,\ldots,n \\
&(\mathrm{P3})\ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = E_r \\
&(\mathrm{P4})\ x_i \ge 0,\ \forall i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned} \tag{2.2}$$

3 Kvadratické programovanie a metódy vnútorného bodu

V tejto kapitole sa oboznámime s úlohou kvadratického programovania a spôsobom jej riešenia metódou vnútorného bodu. Keďže úloha (2.2) definovaná v predchádzajúcej kapitole je úlohou kvadratického programovania, je potrebné oboznámiť sa s teóriou riešenia takejto úlohy.

3.1 Úlohy kvadratického programovania - QP

Úlohou kvadratického programovania je nájsť minimum konvexnej kvadratickej funkcie $\boldsymbol{n}$ premenných na množine prípustných riešení, ktorá je zadaná sústavou lineárnych rovníc a nerovníc. Táto sústava sa nazýva sústava s lineárnymi ohraničeniami. Každú sústavu s lineárnymi ohraničeniami možno previesť na ekvivalentnú sústavu rovníc s nezápornými premennými. Z tohto dôvodu sa stačí zaoberať iba úlohou s ohraničeniami v práve popísanom tvare, t.j. úlohou formulovanou nasledovne :

$$\text{Minimalizovať } f(\boldsymbol{x}) = ½\, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Q x + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}, \tag{3.1}$$

$$\text{za podmienok } Ax = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0 \tag{3.2}$$

Kvadratickú funkciu (3.1) nazývame účelová funkcia a tá je konvexná práve vtedy, keď matica Q je kladne semidefinitná. Každú maticu Q možno prepísať tak, aby bola symetrická, pričom úloha sa nezmení. Úlohu kvadratického programovania možno teda skrátene zapísať ako

$$\underset{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{M}in} \{\tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Qx - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}, \tag{3.3}$$

kde $Q \in \nabla^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ je symetrická a kladne semidefinitná, $A \in \nabla^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{c}, x \in \nabla^{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{b} \in \nabla^{\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{n}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ sa nazýva prípustné riešenie, ak spĺňa podmienky (3.2). Prípustné riešenie, ktoré minimalizuje účelovú funkciu (3.1) sa nazýva optimálne riešenie a označujeme ho $\hat{\boldsymbol{x}}$. Množinu prípustných riešení úlohy (3.3) označíme ako $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{x} \in \nabla^{\boldsymbol{n}} \mid \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$. Je zrejmé, že táto je konvexná. „Relatívne” vnútro množiny K označme $K^0 = \{\boldsymbol{x} \in \nabla^n \mid Ax = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} > 0\}$. Množinu optimálnych riešení označujeme $\hat{K}$. Predpokladáme, že matica A má plnú hodnosť a množina $\hat{K} \neq 0$ je ohraničená. Úloha v tvare (3.3) sa nazýva primárnou úlohou. Formuláciu duálnej a primárno-duálnej úlohy možno nájsť v [2].

3.2 Podmienky optimality pre primárnu úlohu QP

Lagrangeova analýza nám dáva podmienky optimality pre úlohu na viazaný extrém s ohraničeniami v tvare rovností. Kuhn a Tucker zovšeobecnili túto analýzu pre úlohu na viazaný extrém s nerovnostnými ohraničeniami resp. so zmiešanými ohraničeniami. Napíšeme si Lagrangeovu funkciu pre funkciu (3.1) s prvou podmienkou (3.2) majúc na zreteli druhú časť podmienky (3.2):

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Qx + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(Ax\text{-}\boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{x} \geq 0 \tag{3.4}$$

Kuhn-Tuckerove podmienky pre sedlový bod úlohy (3.4) majú tvar :

$$\begin{aligned} &\nabla_{\boldsymbol{x}} L \geq 0 \\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla_{\boldsymbol{x}} L = 0 \\ &\boldsymbol{x} \geq 0 \\ &\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Teda aby riešenie úlohy (3.3) mohlo byť optimálnym, musí spĺňať podmienky (3.5) Odvodenie Kuhn-Tuckerových podmienok pre rôzne typy úloh ako aj ich overenie možno nájsť v [2].

3.3 Metódy vnútorného bodu

3.3.1 Základná charakteristika

Metódy vnútorného bodu sú moderné (existujú zhruba 15 rokov) iteračné metódy používané hlavne na riešenie úloh lineárneho ako aj kvadratického programovania. Princíp metódy vnútorného bodu spočíva v generovaní postupnosti bodov – riešení, ktoré sa nachádzajú vo “vnútri” množiny prípustných riešení. Jednotlivé iterácie algoritmu metód vnútorného bodu $\boldsymbol{x}^k \in \boldsymbol{K}^0$ sa približujú k optimálnemu riešeniu. Toto približovanie je riadené “vylepšovaním” hodnoty účelovej funkcie. Algoritmus začína zo štartovacieho bodu $\boldsymbol{x}^0 \in K^0$. Prechod od $\boldsymbol{x}^k \in K^0$ k $\boldsymbol{x}^{k+1} \in K^0$, $\boldsymbol{k} = 0,1,\dots$, je realizovaný iteračnou schémou

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha^k \boldsymbol{s}^k, \tag{3.6}$$

kde $\boldsymbol{s}^k \in \nabla^n$, $\boldsymbol{s}^k \neq 0$ označuje smerový vektor a $\alpha^k \in \nabla$, $\alpha^k > 0$ je kladný skalár označujúci dĺžku kroku v smere $\boldsymbol{s}^k$. Smerový vektor $\boldsymbol{s}^k$ musí zabezpečiť prípustnosť pre ďalšiu iteráciu, teda musí platiť $As^k = 0$ a zároveň musí byť spádový, teda pozdĺž neho musí hodnota účelovej funkcie klesať. Voľbou dĺžky kroku α^k zaručujeme, aby aj $\boldsymbol{x}^{k+1}$ bol vnútorným bodom, t.j. $\boldsymbol{x}^{k+1} \in K^0$ a zároveň ho volíme tak, aby sme minimalizovali účelovú funkciu v danom smere $\boldsymbol{s}^k$. Výpočet spádového smeru obyčajne vyžaduje riešenie systému lineárnych rovníc, zatiaľ čo výber dĺžky kroku sa realizuje ako jednorozmerná minimalizácia.

Teraz pristúpime k formulácii účelovej funkcie. Riešenie úlohy (3.3) vyžaduje vhodnú formuláciu účelovej funkcie. Formulácia v tvare (3.1) nie vhodná, pretože pri riešení nevieme zabezpečiť splnenie druhej časti podmienky (3.2), t.j. nezápornosť riešenia a to v každej iterácii.

3.3.2 Bariérové metódy

Bariérové metódy sú vhodný spôsob riešenia úloh s nerovnostnými ohraničeniami. Princíp spočíva v pridaní funkcie – bariéry – do účelovej funkcie s cieľom odstránenia nerovnostných ohraničení. Úlohu zapísanú v tvare (3.1), (3.2) prepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad T(\boldsymbol{x},\mu) = ½\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Q x + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} + \mu \sum_{i=1}^{n} \Gamma(x_i) \, , \\ &\text{za podmienok } Ax = \boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{3.7}$$

kde $\mu > 0$ je riadiaci parameter a $\Gamma(\xi)$ je rýdzo konvexná, klesajúca a spĺňa bariérovú vlastnosť

$$\lim_{\xi \to 0_+} \Gamma(\xi) = +\infty \tag{3.8}$$

Transformačná funkcia $T(\boldsymbol{x},\mu)$ je teda definovaná na $\boldsymbol{K}^0$ a má nasledovné vlastnosti. Je rýdzo konvexná na K^0, a teda pre každú pevnú hodnotu parametra $\mu > 0$ má najviac jedno minimum $\boldsymbol{x}_\mu \in K^0$ a ak je množina optimálnych riešení $\hat{K}$ úlohy (3.3) neprázdna a ohraničená, tak $T(\boldsymbol{x},\mu)$ má vždy minimum. Na hranici množiny K nadobúda transformačná funkcia, vzhľadom k vlastnosti (3.8), nekonečnú hodnotu, teda na hranici je vytvorená bariéra, ktorá zaručuje, že minimum $\boldsymbol{x}_\mu$ bude ležať „dostatočne“ ďaleko od hranice. Množina miním $\boldsymbol{x}_\mu$ bariérovej funkcie $\mathrm{T}(\boldsymbol{x},\mu)$ pre všetky hodnoty parametra $\mu > 0$ vytvára centrálnu trajektóriu. Centrálna trajektória je spojitá krivka, ktorá začína v analytickom strede[11] $\boldsymbol{x}_a$ množiny $\boldsymbol{K}$ a končí v optimálnom riešení danej optimalizačnej úlohy. Pohyb v správnom, spádovom, smere po centrálnej trajektórii nám zabezpečuje nájdenie optimálneho riešenia. Takejto metóde približovania sa k optimálnemu riešeniu po centrálnej trajektórii hovoríme metóda sledovania centrálnej trajektórie.

Hlavná myšlienka algoritmu metód vnútorného bodu, keďže minimalizujeme účelovú funkciu, je v postupnom zmenšovaní hodnoty parametra μ. Kladný parameter μ

[11] Rigorózny dôkaz tohto tvrdenia bol spravený len pre logaritmickú bariérovú funkciu. Za začiatok centrálnej trajektórie možno považovať štartovací bod $\boldsymbol{x}^0 \in K^0$.

slúži ako váha priradená bariérovej funkcii pri snahe o udržanie riešenia od hranice $\boldsymbol{x}_i = 0$ pre každé i. S klesajúcou hodnotou parametra μ klesá váha bariérovej funkcie a rastie váha pôvodnej účelovej funkcie. Pre každé μ predstavuje iteračná schéma (3.6) vnútorné iterácie algoritmu metódy vnútorného bodu, ktorá pre zvolené μ dáva optimálne riešenie úlohy (3.7). Algoritmus končí, ak pre nejaké μ^k spočítame riešenie x^k, ktoré je optimálnym riešením úlohy (3.7) resp. (3.3). Pri praktickom použití algoritmu nevyžadujeme vzhľadom na zaokrúhľovacie chyby, aby jednotlivé riešenia ležali priamo na centrálnej trajektórii, ale uspokojíme sa s riešeniami ležiacimi v jej „tesnej“ blízkosti. To isté platí o optimálnom riešení úlohy (3.3), t.j. stačí nám, aby riešenie ležalo v „dostatočnej“ blízkosti optimálneho riešenia.

Bariérové metódy sa rozlišujú podľa voľby funkcie $\Gamma(\xi)$. Najpoužívanejšou funkciou je $\Gamma(\xi) = -\ln(\xi)$, podľa ktorej sa potom metóda nazýva logaritmická bariérová metóda. Ďalšou používanou funkciou je $\Gamma(\xi) = 1/\xi$ a metóda sa nazýva Fiacco - McCormickovou bariérovou metódou.

3.3.3 Logaritmické bariérové metódy

Voľbou bariérovej funkcie $\Gamma(\xi) = -\ln(\xi)$ dostávame logaritmickú bariérovú transformačnú účelovú funkciu a úlohu (3.7) teda môžeme zapísať ako

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad T(\boldsymbol{x},\mu) = ½\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Qx + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \mu\sum_{i=1}^{n}\ln(\boldsymbol{x}_i)\,, \\ &\text{za podmienok } \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.3.4 Schématický algoritmus

Po oboznámení sa s predchádzajúcim môžeme pristúpiť k napísaniu schématického algoritmu. Je vhodné ozrejmiť pojem „dostatočne“ blízko spomínaný na konci časti 3.2.2. „Dostatočne“ znamená, že algoritmus končí, ak norma rozdielu dvoch posledných po sebe idúcich riešení (alebo funkčných hodnôt) je menšia ako vopred zvolená presnosť δ. Parameter $\theta \in <0,1>$ je deliacou konštantou, ktorá sa volí na začiatku.

Vstup : Q, $\boldsymbol{c}$, A, $\boldsymbol{b}$, δ

Nastavenie štartovacieho bodu $\boldsymbol{x}^0$ a parametra μ^0, a konštanty θ

$\boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{x}^{k+1} = 0$

Opakuj

Rieš úlohu (3.9) pre dané μ^k - dostávame riešenie $\boldsymbol{x}^k$

$\mu^{k+1} = \mu^k * \theta$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}+1$, (3.10)

Pokiaľ $(\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\| > \delta)$

Hlavným problémom je riešenie úlohy (3.9). Je to úloha na viazaný extrém, no podmienky sú v tvare rovností, teda na nájdenie optimálneho riešenia možno použiť Lagrangeovu metódu.

4 Numerická implementácia

4.1 Formulácia úlohy

4.1.1 Zápis úlohy

Úloha (2.1) s ohraničením I. je úlohou kvadratického programovania a teda úloha (2.2) je ňou tiež. V úlohe (2.2) sa však linárny člen $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ nenachádza, t.j. $\boldsymbol{c}$ je nulový vektor. Matica A a vektor pravej strany $\boldsymbol{d}$ majú tvar :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ r_1 & . & . & . & r_n \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{E}_r \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

kde $r = (r_1,..,r_n)$ je vektor návratností a $\boldsymbol{Er}$ je požadovaná návratnosť. Úlohu (2.2) možno zapísať v tvare :

$$\underset{x}{Min}\left\{½\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Qx \,|\, \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a} \geq 0, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{x} \geq 0, \boldsymbol{x} \geq 0\right\}, \tag{4.3}$$

kde $\boldsymbol{a} = (a_1,..,a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1,..,b_n)$ sú ohraničenia pre $\boldsymbol{x} = (x_1,..,x_n)$ a Q je kovariančná matica, ktorá je symetrická a kladne definitná.

4.1.2 Voľba bariérovej funkcie

Nerovnostné podmienky odstránime transformovaním úlohy zavedením logaritmickej bariérovej funkcie $\Gamma(\xi)$ do účelovej funkcie. V našom prípade máme tri nerovnostné ohraničenia. Podmienku nezápornosti riešenia vieme zabezpečiť voľbou $\Gamma(\boldsymbol{x}) = -\ln(\boldsymbol{x})$ resp.

$$\Gamma(x) = -\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \tag{4.4}$$

Na základe požiadavky nezápornosti riešenia (P4) je vhodné zaviesť naslednovné predpoklady :

$$a_i \geq 0,\ \ b_i \geq 0,\quad i = 1,..,n\,, \tag{4.5a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1,\ \ \sum_{i=1}^{n} b_i \geq 1\,, \tag{4.5b}$$

aby úloha mala riešenie. Zosumovaním podmienky (P2) úlohy (2.2) dostávame

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i\,, \tag{4.6}$$

z čoho následnou úpravou dostávame dve nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - a_i \geq 0,\ \ \sum_{i=1}^{n} b_i - x_i \geq 0\ \ , \tag{4.7}$$

čo sú ostávajúce dve podmienky úlohy (4.3), ktoré možno splniť súčastne voľbou bariérovej funkcie

$$\Gamma(x) = -\sum_{i=1}^{n} \left[\ln(x_i - a_i) + \ln(b_i - x_i)\right] \tag{4.8}$$

Vzhľadom na podmienky (4.5a) a (4.7) je zrejmé, že je automaticky splnená podmienka nezápornosti riešenia (P4), z čoho vyplýva, že pre splnenie nerovnostných ohraničení úlohy (4.3) nám stačí voľba logaritmickej bariérovej funkcie (4.8). Úlohu (4.3) teda môžeme zapísať nasledovne :

$$\underset{x}{Min}\left\{ ½\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Qx-\mu\sum_{i=1}^{n}[\ln(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{a}_i)+\ln(\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{x}_i)] \mid \boldsymbol{A}x=\boldsymbol{d}\right\} \tag{4.9}$$

4.2 Podmienky optimality

Lagrangeova funkcia pre úlohu (4.9) má tvar

$$L(\boldsymbol{x},\lambda) = ½\boldsymbol{x}^T Qx - \mu\sum_{i=1}^{n}[\ln(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{a}_i)+\ln(\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{x}_i)] + \lambda(\boldsymbol{A}x-\boldsymbol{d}) \quad (*) \tag{4.10}$$

resp. s prihliadnutím na (4.1) a (4.2) ju možno rozpísať ako

$$L(\boldsymbol{x},\lambda) = ½\boldsymbol{x}^T Qx - \mu\sum_{i=1}^{n}[\ln(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{a}_i)+\ln(\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{x}_i)] + \lambda_1(r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-E_r) + \lambda_2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{I}-1), \tag{4.11}$$

kde I je jednotkový vektor. Teda podmienkou optimality pre úlohu (4.9) je $\nabla L(\boldsymbol{x},\lambda_1,\lambda_2) = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{x}_i} &= \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{q}_{ij}\boldsymbol{x}_j - \mu\left(\frac{1}{\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{a}_i}-\frac{1}{\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{x}_i}\right)+\lambda_1 r_i+\lambda_2=0, \quad i=1,..,\boldsymbol{n}\\
\frac{\partial L(\boldsymbol{y})}{\partial \lambda_1} &= r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-E_r=0 \qquad ,\\
\frac{\partial L(\boldsymbol{y})}{\partial \lambda_2} &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{I}-1=0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

kde $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x},\lambda_1,\lambda_2)$, $\boldsymbol{q}_{ij} \in Q$.

4.3 Popis algoritmu

Algoritmus sa po sémantickej stránke zhoduje s algoritmom (3.10) uvedeným v časti 3.3.4.

4.3.1 Newtonova metóda

Základným krokom je Newtonova iteračná schéma pre výpočet nového bodu

$$\boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{y}^{k} - [F'(\boldsymbol{y}^{k})]^{-1}.F(\boldsymbol{y}^{k}), \qquad (4.13)$$

kde $\boldsymbol{F} : \nabla^{n} \rightarrow \nabla^{n}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = 0$. V našom prípade je $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = \nabla \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\lambda_1,\lambda_2)$. Z výpočtového hľadiska je jednoduchšie počítať nový bod $\boldsymbol{y}^{k+1}$ ekvivalentnou iteračnou schémou

$$\boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{y}^{k} + \alpha^{k}\boldsymbol{s}^{k}, \qquad (4.14)$$

kde $\boldsymbol{s}^k$ je riešením lineárneho systému

$$\boldsymbol{H}^{k}\boldsymbol{s}^{k} = -F(\boldsymbol{y}^{k}),\ H^{k} = [\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{y}^{k})] \qquad (4.15)$$

Vzťahy uvedené v (4.15) nie sú jednokrokovou záležitosťou Predstavujú vnútorné iterácie algoritmu, t.j. jedno prípustné riešenie úlohy (4.9) pre dané μ, teda jedno priblíženie sa k centrálnej trajektórii. Toto priblíženie je dané hodnotou $\varepsilon > 0$ a predstavuje dostačujúcu presnosť riešenia lineárneho systému rovníc z (4.15). Vonkajšou iteráciou je opätovné riešenie úlohy (4.9) s redukovanou hodnotou transformačného parametra μ.. Táto redukcia sa uskutočnuje vzťahom

$$\mu^{k+1} = \theta.\mu^{k}, \qquad (4.16)$$

kde $\theta \in <0,1>$ je konštanta redukcie, ktorú volíme na začiatku. Voľba dĺžky kroku α^k a štartovacích hodnôt je popísaná v časti 4.3.2. Algoritmus končí, ak rozdiel dvoch po sebe idúcich riešeniach úlohy (4.9) je v absolútnej hodnote menší ako $\delta > 0$, ktorú tak isto volíme na začiatku. Ostáva výpočet matice H^k. Získame ju parciálnym derivovaním vektora (4.12) a v $\boldsymbol{k}$-tej iterácii má tvar (4.17).

$$\begin{pmatrix} D_1+q_{11} & q_{12} & . & . & . & . & q_{1n} & r_1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ q_{i1} & . & . & D_i+q_{ii}. & . & . & q_{in} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & .. \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ q_{n1} & . & . & . & . & . & D_n+q_{nn} & .r_n & 1 \\ r_1 & . & . & . & . & . & r_n & 0 & 0 \\ 1 & . & . & . & . & . & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

kde $D_i = \mu\left(\frac{1}{(x_i-a_i)^2}+\frac{1}{(b_i-x_i)^2}\right)$

Formálne zapísaný algoritmus vyzerá nasledovne :

Vstup : $Q, A, d, a, b, E_r, \varepsilon, \delta$

Nastavenie $\boldsymbol{x}^0, \mu^0, \theta, \boldsymbol{k} = 0, \boldsymbol{x}^{k+1} = 0$

Opakuj

Rieš úlohu (4.9) pre dané μ^k :

- riešime SLR (4.15) - dostávame riešenie $\boldsymbol{s}^k$ s presnosťou ε
- Výpočet kroku α^k
- $\boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{y}^k + \alpha^k \boldsymbol{s}^k$

$\mu^{k+1} = \theta.\mu^k, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}+1,$

Pokiaľ ($||y^{k+1}-y^k|| > \delta$)

4.3.2 Voľba štartovacích hodnôt

Prvoradou úlohou je určenie štartovacieho bodu $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0,...x_n^0)$. Tak ako každé iné prípustné riešenie, musí aj bod $\boldsymbol{x}^0$ spĺňať podmienky (P1) - (P4) úlohy (2.2).S prihliadnutím na (4.5a) možno teda (P1) - (P4) prepísať na (PP1) – (PP3), ktoré pre štartovací bod $\boldsymbol{x}^0$ vyzerajú nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&\text{(PP1)} \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i^{\,0} = 1 \\
&\text{(PP2)} \quad 0 \le \boldsymbol{a}_i \le \boldsymbol{x}_i^{\,0} \le \boldsymbol{b}_i \,, \qquad i = 1,..,\boldsymbol{n}\,, \\
&\text{(PP3)} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{x}_i^{\,0} = E_r
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Tieto podmienky spolu tvoria úlohu lineárneho programovania a pre zadanú požadovanú návratnosť E_r nám dávajú presnú špecifikáciu štartovacieho bodu $\boldsymbol{x}^0$. Štandardný zápis úlohy lineárneho programovania s rovnostnými ohraničeniami a dolným a horným ohraničením na riešenie $\boldsymbol{x}$ je

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Max}_{x}\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
&Ax = \boldsymbol{d} \\
&\alpha \le \boldsymbol{x} \le \beta
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Podmienky (4.18) prepísané do tvaru úlohy LP vyzerajú nasledovne :

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Max}_{x}\ 1 \\
&\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{d} \quad , \\
&\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

kde matica $\boldsymbol{A}$ je definovaná vzťahom (4.1), vektor $\boldsymbol{d}$ vzťahom (4.2) a vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ sú definované za úlohou (4.3). Štartovací bod $\boldsymbol{x}^0$ je teda daný ako prípustné resp. optimálne riešenie úlohy (4.20).

Ďalšia podmienka sa týka požadovanej návratnosti E_r. Aby bolo vôbec možné splniť podmienku (PP3) za podmienky (PP1), musí platiť :

$$
\min r_i \le E_r \le \max\ r_i \ , \qquad i = 1,..,\boldsymbol{n} \ , \tag{4.21}
$$

čo je prvou podmienku kladenou na E_r. Druhá podmienka súvisí s riešením úlohy (4.20). Úloha (4.20) nemá prípustné riešenie pre ľubovoľné $\boldsymbol{E_r}$, ale iba pre $\boldsymbol{E_r}$ z určitého intervalu. Násobením vzťahu (4.6) hodnotou r_i dostávame

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{a}_i \leq \sum_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{x}_i \leq \sum_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{b}_i , \tag{4.22}$$

odkiaľ s využitím podmienky (PP3) dostávame ohraničenia pre hodnotu požadovanej návratnosti E_r

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{a}_i \leq E_r \leq \sum_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{b}_i , \tag{4.23}$$

To znamená, že aby úloha (4.20) mohla mať prípustné riešenie, musí sa E_r nachádzať v intervale určenom vzťahom (4.23). Vo všeobecnosti sa podmienka (P4) v úlohe (2.2) nemusí nachádzať. Vtedy je možné určiť $\boldsymbol{E_r}$ ako minimalizáciu dolneho ohraničenia a maximalizáciu horného ohraničenia :

$$\min_{x} \sum_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{x}_i \leq \boldsymbol{E}_r \leq \max_{x} \sum_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{x}_i , \tag{4.24}$$

Vzťah (4.25) s (P1) nám dáva dve úlohy LP, ktorých riešením dostávame interval pre voľbu E_r. Tento postup je tiež použiteľný s podmienkou (PP2).

Ďalšími parametrami, ktoré je potrebné určiť pred spustením algoritmu sú transformačný parameter $\mu^0 > 0$ a konštanta redukcie $\theta \in (1,0)$. Vo všeobecnosti rozlišujeme algoritmy používajúce[12]

- krátky krok : $\theta = \dfrac{v}{\sqrt{n}}$, kde v je malá konštanta, ktorá umožní takú redukciu parametra μ, že na vrátenie sa do okolia centrálnej trajektórie stačí jedna Newtonova iterácia,

[12] Toto členenie je prebrané z [6]

- krátky krok : $\theta = \frac{\nu}{\sqrt{n}}$, kde ν nezávisí od rozmeru n ani od presnosti δ a na vrátenie sa do okolia centrálnej trajektórie je potrebných niekoľko Newtonových iterácii,
- dlhý krok : $\theta \in (1,0)$ nezávisí od ν ani od n a teda rýchlosť redukcie parametra μ je väčšia, čo vedie k viacerým Newtonovým iteráciám.

Keďže spočiatku by mala byť váha bariérovej funkcie väčšia, volíme μ^0 „dostatočne" veľké. Presné určenie týchto parametrov je netriviálnou záležitosťou[13] a závisí od charakteru úlohy. Experimentálne zistenia voľby týchto parametrov pre našu úlohu sú popísané v časti 4.5.

Posledným parametrom je veľkosť Newtonovho kroku reprezentovaná hodnotou α^k, ktorá sa určuje v každej Newtonovej iterácii. $\alpha^k < \alpha^{k-1}$ predstavuje zjemnenie kroku a opačná nerovnosť predstavuje posilnenie kroku oproti predošlej iterácii. Vo všeobecnosti je možné v Newtonovej iteračnej metóde α^k zväčšovať, pokiaľ je hodnota účelovej funkcie spádová.

4.4 Výpočet kovariančnej matice *Q* a vektora návratností *r*

Pre začiatok by bolo vhodné pripomenúť, že ceny aktív resp. výmenné kurzy jednej meny oproti iným menám sú náhodnými veličinami, t.j. za určité časové obdobie vykazujú stochastický charakter. Návratnosti z nich počítané sú teda tiež stochastickými veličinami a následovný postup výpočtu kovariančnej matice je opodstatnený.

Výpočet matice Q pozostáva z nasledujúcich troch základných krokov :

1. Zostavenie historických, chronologicky usporiadaných, dát predstavuje maticu rozmeru $m \times n$, kde m je počet časových údajov a n je počet aktív. V našom prípade sú dáta výmenné kurzy jednotlivých mien oproti SK a mena je aktívum.
2. Výpočet percentuálnych prírastkov jednotlivých aktív za jednotlivé medziobdobia :

[13] Existujú heuristické odvodenia pre niektoré typy úloh.

$$p_{ij} = (h_i - h_{i-1}) / h_{i-1} + u_i \,,\; i = 1,..,m-1,\; j = 1,..,n \,, \tag{4.25}$$

kde h_i je hodnota aktíva v čase i a u_i je dividenda resp. úroková sadzba vyplácaná za dané časové obdobie. (4.19) teda tvorí maticu P rozmeru $(m\text{-}1) \times n$

3. Výpočet kovariančnej matice Q, ktorej prvky sú definované nasledovne:

$$q_{ij} = Cov(X_i, X_j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_i^k - \mu_i)(x_j^k - \mu_j)\,, \tag{4.26}$$

kde X_i je i-ty stĺpec matice P, x_i^k je k-ty prvok vektoru X_i, μ_i je stredná hodnota vektora X_i, t.j. $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$ je vektor jednotlivých návratností.

4.5 Numerický experiment

4.5.1 Voľba parametrov a popis programu

Program je implementáciou algoritmu z časti 4.3.1. Voľba veľkosti Newtonovho kroku je $\alpha^k = 1$, teda je to Newtonova metóda s jednotkovým krokom. Ako už bolo písané v časti 4.3.2, presné určenie parametrov μ a θ nie je jednoduchou záležitosťou. Numerické experimenty s prvou vzorkou dát (súbor `alldata.xls`), kde prvky kovariančnej matice (súbor `relprir.xls`) sú rádovo veľkosti 0.1×10^{-2} až 0.1×10^{-7} a jednotlivé návratnosti 0.1×10^{-4}, ukázali, že vhodná voľba počiatočného μ^0 je z intervalu (0.01, 0.1) a $\theta = ½$. Z povahy dát a z rozmeru riešenej úlohy vychádza aj voľba absolútnej presnosti Newtonových iterácii $\delta = 0.1 \times 10^{-7}$ a vnútorných iterácii, čo je riešenie lineárneho systému rovníc (ďalej SLR), $\varepsilon_{ls} = 0.1 \times 10^{-8}$. Tieto presnosti možno s rastúcim rozmerom úlohy zväčšiť. Avšak požadovanú presnosť nemožno znížiť na ľubovoľne malú hodnotu a to z dvoch hlavných dôvodov. Prvým dôvodom je chyba vznikajúca zo zaokrúhlenia čísla, či už počítačom alebo kompilátorom. Druhý dôvod vyplýva z presnosti zadaných čísel vo vstupných dátach. Absolútna presnosť riešenia nie je jediným kritériom pre zastavenie iterovania. Iterovanie, ako vonkajšie tak aj vnútorné, možno obmedziť počtom iterácií. Správanie sa programu potvrdzuje pravidlo : čím väčšia je požadovaná presnosť, tým väčší je počet iterácií. Na riešenie SLR je použitá metóda združených gradientov, ktorej popis a schématický algoritmus možno nájsť v [5].

Program je napísaný v Borland C++ a skladá sa z hlavnej časti `ipa.cpp` a pomocných častí `algebra.h`, `read.h`, `rest.h`, `set.h` a `cg.h`. Je dostatočne komentovaný a možno ho nájsť na priloženej diskete. Výpis hlavného algoritmu je v prílohe. Komunikácia programu s užívateľom je pomocou vstupných súborov s dátami a výstupného súboru s výsledkami iterácií. Program si na začiatku vypýta mená týchto súborov, pričom organizácia dát vo vstupných súboroch má fixnú formu (viď prílohu). Kompilácia programu pri numerických experimentoch bola uskutočnená na dvoch rôznych platformách (DOS, UNIX) pričom program dával porovnateľné výsledky.

Nevýhodou programu je, že nepočíta štartovací bod, ktorý musí spĺňať podmienky prípustného riešenia a preto je tento potrebné zadať v súbore so vstupnými údajmi. Výpočet štartovacieho bodu, ako je ukázané v časti 4.3.2, je úlohu lineárneho programovania, ktorá je ľahko formulovateľná v bežne dostupnom software ako `MS Excel Solver` alebo `Mathematica`. Výhodou programu je, že na riešenie SLR nemusíme nutne používať metódu združených gradientov reprezentovanú časťou `cg.h`, ale možno ju nahradiť ľubovoľnou inou metódou na riešenie SLR.

4.5.2 Porovnanie výsledkov

V závislosti od požadovanej presnosti, rozmeru úlohy a voľby ohraničení sa výsledky poskytované Solverom mierne líšia od výsledkov C++ programu `ipa.cpp`. Pri správnom nastavení parametrov vstupujúcich do programu je možné dosiahnuť lepší výsledok ako dáva Solver. Podstatným faktom je, že Solveru trvá riešenie úlohy niekoľkonásobne dlhšie ako uvedenému programu, čo je pozorovateľné zvlášť pri úlohách rozmeru väčších ako 4. Ukážka porovnania výsledku programu so Solverom je v prílohe. Riešenia, ktoré poskytuje program `ipa.cpp` a Solver možno porovnávať pomocou súborov a dát, ktoré sú na diskete.

4.5.3 Úloha NBS

Úlohou nie je nájdenie iba jedného optimálneho portfólia, ale nájdenie krivky optimálnych portfólií - efektívnej hranice. Z definície úlohy z kapitoly 2 vieme, že táto krivka je definovaná dvojicami bodov $[E(r_i),\sigma_i]$, $i\in\mathbf{N}$. Tieto dvojice získame odlišnými voľbami E_r z povoleného intervalu daného vzťahom (4.23) resp. (4.25) a opätovným spustením programu pre zvolené E_r.

Meny nachádzajúce sa v devízovom portfóliu NBS a ohraničenia na ich percentuálne zastúpenie sú nasledovné : USD $\in$ <20,50>, EUR $\in$ <40,80>, AUD, JPY, GBP a CHF $\in$ <0,20>. Tieto ohraničenia spĺňajú podmienky (4.5a) a (4.5b) a požadovanú návratnosť možno voliť z intervalu $E_r \in (0.006215, 0.008636)$, čo je interval získaný riešením (4.25) pomocou Solvera. Mesačné výmenné kurzy týchto mien oproti SKK ako aj mesačné úrokové sadzby pre tieto meny sú v súbore `NBSkurzy.xls`. Riešenie úlohy a nájdenie štartovacieho bodu sú v súbore `NBSuloha.xls`. Porovnania riešení programu `ipa` a Solvera pre rôzne hodnoty požadovanej návratnosti E_r sú v prílohe v tabuľke. Z tabuľky tiež vidieť, že dané riešenia sú porovnateľné. V prílohe je tiež hľadaný graf krivky efektívnych menových portfólií.

Pri riešení tejto úlohy programom `ipa.cpp` je pri presnosti Newtonových iterácií $\delta = 0.1 \times 10^{-7}$ a presnosti riešení SLR $\varepsilon_{ls} = 0.1 \times 10^{-7}$ dostačujúcou voľbou počtu vnútorných aj vonkajších iterácií 40, čo možno tiež sledovať vo výstupných súboroch pre túto úlohu `vyst6_1.txt` až `vyst6_6.txt`.

V praxi sa možno stretnúť aj s inými ohraničeniami ako sú ohraničenia na riešenie. Takéto ohraničenie môže byť napr. požiadavka, aby sa výnosy vyplácané aktívami resp. výnosy z úrokových sadzieb pre meny nachádzali v nejakom intervale. V takom prípade na odvodenie úlohy a podmienok optimality možno použiť analogickú úvahu ako v častiach 4.1 a 4.2 a podľa toho upraviť program.

Záver

Táto diplomová práca vznikla na podnet NBS ako úloha nájsť krivku optimálnych menových portfólií na základe historických dát mesačného výmenného kurzu slovenskej koruny k cudzej mene a príslušných úrokových sadzieb za súčasnej platnosti istých obmedzení týkajúcich sa pomerného zastúpenia mien v portfóliu.

Prvá kapitola poskytuje pomerne stručný prehľad o teoretickej rovnováhe na kapitálovom trhu a o teórii tvorby portfólia. Pre túto prácu je z tejto kapitoly najdôležitejšou časťou tvorba portfólia Markowitzovým prístupom, čo sa využíva v druhej kapitole pri definovaní úlohy a jej následnom riešení v štvrtej kapitole. V závere štvrtej kapitoly je numerický experiment a aplikácia vytvoreného programu na konkrétnu reálnu úlohu NBS.

Krivka optimálnych menových portfólií stanovená na základe dodaných dát a ohraničení začína pri návratnosti portfólia 0.006215 a prebieha podľa optimálnych portfólií, ako je vidieť na priloženom grafe a z tabuľky v prílohe, až po hodnotu návratnosti 0.008636.

Prakticky použiteľným výsledkom tejto práce je program v jazyku C++ na priloženej diskete. Výsledky programu možno porovnať s riešením Solveru MS Excel. Program je použiteľný na ľubovoľnú úlohu definovanú v 2. kapitole.

Príloha

Vzorka mesačných výmenných kurzov mien v devízovom portfóliu NBS :

Dátum	USD	EUR	AUD	JPY	GBP	CHF
30.12.1994	31.277	38.086	24.321	31.346	48.62	23.704
31.1.1995	30.74	38.348	23.347	31.091	48.824	24.091
28.2.1995	30.064	38.223	22.277	31.055	47.519	24.294
31.3.1995	28.995	38.343	21.03	32.893	46.711	25.524
28.4.1995	28.958	38.789	21.105	34.743	46.863	25.604
31.5.1995	29.271	38.828	21.11	35.118	46.793	25.569
30.6.1995	29.35	38.73	21.038	34.436	46.408	25.28
31.7.1995	29.194	39.146	21.437	32.95	46.608	25.34
31.8.1995	30.329	38.381	22.859	30.697	46.843	24.962
29.9.1995	29.538	38.521	22.251	29.648	46.708	25.831
31.10.1995	29.437	38.298	22.337	28.917	46.34	25.797
30.11.1995	29.71	38.299	22.268	29.282	45.551	25.537
29.12.1995	29.569	37.872	22.088	28.834	46.006	25.647
31.1.1996	30.198	37.285	22.389	28.286	45.502	25.034
29.2.1996	29.856	37.908	22.661	28.592	45.951	25.169
29.3.1996	30.184	37.745	23.604	28.307	45.825	25.17
30.4.1996	30.649	37.864	24.115	29.142	46.326	24.881
31.5.1996	30.974	38.203	24.692	28.853	47.592	24.635
28.6.1996	31.007	38.464	24.443	28.402	47.822	24.667
31.7.1996	30.249	38.495	23.776	28.052	47.137	25.13

Vzorka mesačných úrokových sadzieb na meny v devízovom portfóliu NBS :

Dátum	USD	EUR	AUD	JPY	GBP	CHF
31.1.1995	6.09375	5.9375	7.875	2.2813	6.4375	3.8125
28.2.1995	6.125	6.25	7.71875	2.375	6.5	3.625
31.3.1995	6.125	6.625	7.625	1.8594	6.42969	3.5
28.4.1995	6.0625	6.27734	7.6875	1.4375	6.5625	3.4375
31.5.1995	6.0625	6.25	7.5	1.3125	6.375	3.25
30.6.1995	6.125	6.25	7.5625	1.3125	6.6875	3.125
31.7.1995	5.875	6.02734	7.5	0.875	6.875	2.625
31.8.1995	5.875	5.6875	7.5	0.90625	6.75	2.875
29.9.1995	5.875	5.75	7.4375	0.46875	6.8125	2.46875
31.10.1995	5.83203	5.75	7.54688	0.46875	6.77344	2
30.11.1995	5.97656	5.5625	7.53125	0.5	6.78125	2.3125
29.12.1995	5.6875	5.1875	7.40625	0.4375	6.5625	1.8125
31.1.1996	5.4375	4.75	7.48438	0.51563	6.375	1.76563
29.2.1996	5.3125	4.71875	7.5	0.84375	6.3125	1.57813
29.3.1996	5.4375	4.65625	7.5625	0.59375	6.07031	1.76563
30.4.1996	5.4375	4.35547	7.5625	0.55078	6.0625	1.875
31.5.1996	5.4375	4.48828	7.5625	0.51172	6.09375	2.70313
28.6.1996	5.49609	4.4375	7.5625	0.52344	5.83594	2.5
31.7.1996	5.46484	4.4375	7.0625	0.50781	5.8125	2.5
30.8.1996	5.4375	4.33594	6.9375	0.49609	5.81641	2.11719

Výpis hlavného algoritmu z programu ipa.cpp :

```
      // Vonkajsie (Newtonove) iteracie
for(ni=1;ni<=niiter;ni++)
 {    // Kriteria zastavenia (podla nacitanej hodnoty kstop) :
      // AK Euklidovska norma rozdielu poslednych dvoch po sebe
      // iducich rieseni je mensia ako zadana presnost
  if (kstop==1) { if ( norma < keps ) Koniec(6); }
      // Ak rozdiel dvoch po sebe iducich hodnout sigma je mansi
      // ako zadana presnost
   else if (kstop==2) { if ( fabs(srozd) < keps ) Koniec(7); }
      // Ak rozdiel dvoch po sebe iducich hodnout ucelovej funkcie je
      // mensi ako zadana presnost
       else if ( fabs(hurozd) < keps ) Koniec(8);
  fprintf(s,"\n\n%d. Newton Iteracia : \n",ni);
      // Vypocet novej matice H a vektora Fy
  set_H(y);
  set_Fy(y);
      // Riesenie linearneho systemu H.z = Fy
  cgi = cgiter;
  cgco = cg(H,Fy,z,cgi,cgeps);
      // Vypocet noveho Newtonovho bodu - nove riesenie ynn
  for (i=1;i<=rozmer;i++) ynn[i] = y[i] - z[i];
      // Vypocet Euklidovskej normy rozdielu poslednych dvoch po sebe
      // iducich rieseni
  for(i=1;i<=rozmer;i++) pomv[i] = ynn[i] - y[i];
  norma = norm(pomv,rozmer-2);
      // Vypocet hodnoty ucelovej funkcie s novym riesenim ynn
  hu = hoduc(ynn);
      // Vypis vysledkov iteraie do suboru
  Vypis_iter();
      // Testovanie noveho bodu na splnenie podmienok
  co = Test(ynn);
  if (co!=0) Koniec(co);
   else
    { // Vypocet noveho mi a zapametanie si aktualneho riesenia
      mi = mi*th;
      for(i=1;i<=rozmer;i++) y[i] = ynn[i];
    }
 }
if (ni-1 == niiter) Koniec(9);
 else Koniec(0);
return(0);
}
```

Príklad vstupného súboru s maticou (matica 4x4):

0.0000594428077360; 0.0000011120287159; 0.0000023724601155; 0.0000044582451261
0.0000011120287159; 0.0000136127539662; 0.0000128866495145; 0.0000117174343057
0.0000023724601155; 0.0000128866495145; 0.0000133644106192; 0.0000120441619781
0.0000044582451261; 0.0000117174343057; 0.0000120441619781; 0.0000175055618957

Príklad vstupného súboru s dátami :

0.0001495658995473; 0.0000933593802676; 0.0001046324082336; 0.0001504490553145
0.200; 0.300; 0.200; 0.100
0.250; 0.400; 0.300; 0.200
0.250000000000000; 0.30000000000000; 0.2881346562829430; 0.1618653437170520
0.0001199; 0.06; 0.50; 1
0.0000001000; 60; 20; 0.000000100

kde prvý 1.riadok je vektor návratností, 2. riadok je vektor dolných ohraničení a 3. riadok vektor horných ohraničení, 4. riadok je štartovací bod. Ďalšie čísla predstavujú hodnoty parametrov v nasledovnom poradí : požadovaná návratnosť E_r, transformačný parameter μ, konštanta redukcie θ, voľba kritéria zastavenia (1 - absolutna presnosť riešenia, 2 - absolútna presnosť $\sigma^2 = x^T Qx$, 3 - absolútna presnosť hodnoty účelovej funkcie (4.11)), požadovaná presnosť pre danú voľbu kritéria, maximálny povolený počet vonkajších - Newtonových - iterácií, maximálny povolený počet iterácií pri riešení SLR, absolútna presnosť pri riešení SLR.

Vzorka výstupného súboru :

```
Parametre IPA :
Rozmer kovariancnej matice (pocet aktiv) = 4
Transformacny parameter              mi = 0.060000
Kriterium zastavenia Newton iteracii (kstop = 1) :
        a) Absolutna presnost nieps      = 1.0e-07
        b) Max. povoleny pocet iteracii  = 60

Parametre Linear Solver (CG - Metoda zdruzenych gradientov) :
Kriterium zastavenia CG iteracii :
        a) Absolutna presnost (cgeps)    = 1.0e-07
        b) Max. povoleny pocet iteracii  = 20

VSTUPY :
Kovariancna matica (matica4.csv):
5.94428077360e-05 1.11202871591e-06 2.37246011551e-06 4.45824512617e-06
1.11202871591e-06 1.36127539662e-05 1.28866495145e-05 1.17174343058e-05
2.37246011551e-06 1.28866495145e-05 1.33644106192e-05 1.20441619781e-05
4.45824512617e-06 1.17174343058e-05 1.20441619781e-05 1.75055618957e-05

Startovaci bod :
2.50000000000e-01 3.00000000000e-01 2.88134656282e-01 1.618653437171e-01

Vektor navratnosti' :
1.49565899547e-04 9.33593802676e-05 1.04632408233e-04 1.50449055314e-04
```

```
Pozadovana navratnost = 1.199000000000e-04

Ohranicenia na riesenie :
x[1] je z <0.200000, 0.250000>
x[2] je z <0.300000, 0.400000>
x[3] je z <0.200000, 0.300000>
x[4] je z <0.100000, 0.200000>

Menim startovaci bod (odlepenie od hranice intervalu) :
2.40000000000e-01 3.10000000000e-01 2.88134656282e-01 1.61865343717e-01
Startovacie podmienky splnene.

1. Newton Iteracia :

Newton mi : 6.000000e-02
CG Pripad 0 - presnost : 1.000000e-07 (9 iteracii)
CG : Riesenie z = 5.770162e-03 -1.013300e-02 8.191807e-03 -3.828967e-03
1.000149e+00 1.821537e+00
Newton RIESENIE ynn = 0.23422983784137235697 0.32013300198261651630
0.27994284957202558717 0.16569431084014801803 -0.00014937280771687433 -
0.82153728389724545167
Rozdiel dvoch poslednych rieseni : 1.568214e-05 1.016740e-05 1.041806e-05
1.106764e-05 -1.000149e+00 -1.821537e+00
Norma rozdielu dvoch poslednych rieseni : 1.5e-02
Hodnota ucelovej funkcie : 0.08577586242080453838
Rozdiel poslednych dvoch : 1.5e-02 [-Hodnota ucelovej funkcie klesla]
Sigma : 0.00001167845153949010
Rozdiel poslednych dvoch : 1.2e-05
```

.
. *(Zvyšné iterácie)*
.

```
39. Newton Iteracia :

Newton mi : 2.182787e-13
CG Pripad 0 - presnost : 1.000000e-07 (15 iteracii)
CG : Riesenie z = 2.608484e-08 -5.372058e-08 6.643474e-08 -3.879900e-08
6.569316e-07 -8.570586e-11
Newton RIESENIE ynn = 0.21111595136515959314 0.30000029292022484251
0.28888381518623373889 0.19999994052837979930 -0.08509154779340172281 -
0.00000173314002457481
Rozdiel dvoch poslednych rieseni : 1.445995e-05 1.038483e-05 1.063646e-05
1.143692e-05 -6.569316e-07 8.570586e-11
Norma rozdielu dvoch poslednych rieseni : 9.7e-08
Hodnota ucelovej funkcie : 0.00001152826004638191
Rozdiel poslednych dvoch : 3.9e-13 [-Hodnota ucelovej funkcie klesla]
Sigma : 0.00001152825951790109
Rozdiel poslednych dvoch : 1.6e-13

6 : Dosiahnutie pozadovanej nieps presnosti 1.0e-07 na 39 Newton
iteracii.
Zadana pozadovana navratnost Er = 0.000119900000
Navratnost spocitana sucinom ynn*r = 0.000119900000
Sigma [Sqrt( Riziko portfolia ) ] : 0.00001152825951790109
Riziko portfolia : 0.00000000013290076751
```

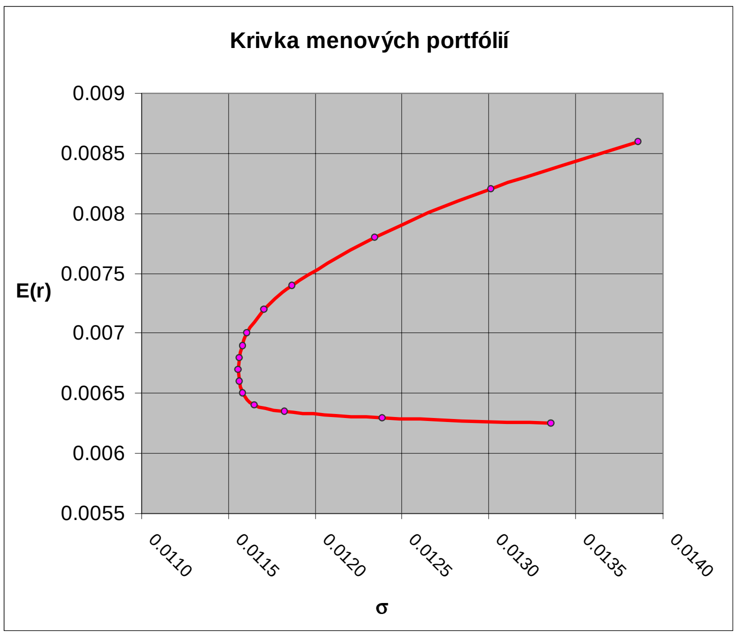
Riešenie, ktoré dáva Solver s tým istým štartovacím bodom :

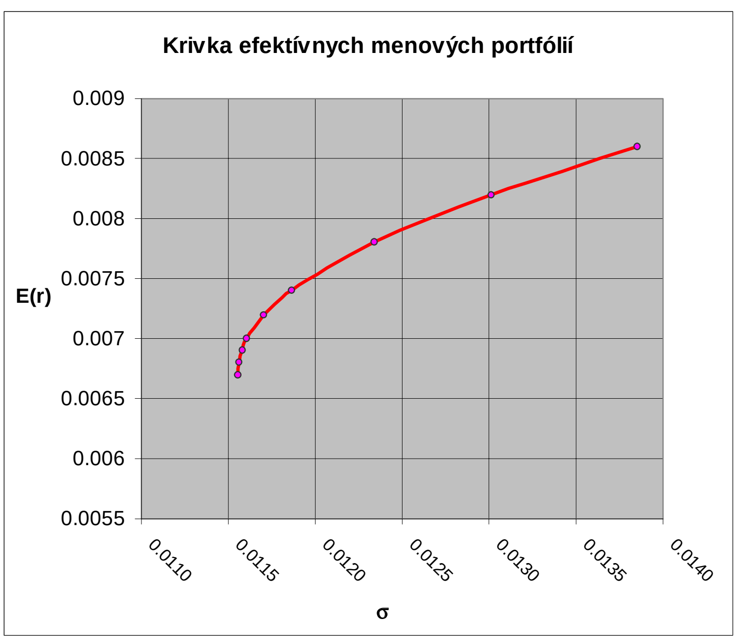
x = (0.2313824747, 0.30, 0.2884935253, 0.18012400)

σ^2 = <u>0.0000116793</u>, čo je približne o 0.151e-6 horšie riešenie, ktoré dáva program `ipa.cpp.`

Tabuľka porovnaní riešení úlohy NBS, ktoré pri danom E_r dáva ipa.cpp a Solver :

E_r :	0.00625	0.0066	0.007
Solver :	0.000178411354	0.0001337298679	0.0001347159635
Ipa.cpp :	0.000178411369	0.0001337298709	0.0001347159637
E_r :	0.0074	0.0078	0.0082
Solver :	0.0001407487668	0.0001522693393	0.0001692776811
Ipa.cpp :	0.0001407487728	0.0001522693395	0.0001692776809





Literatúra

[1] Z. Bodie, A. Kane, A.J. Marcus : *Investments*, The M^{c}Graw-Hill Companies, Inc., 1989, 1993 a 1996. Kap. 6,7,8, str. 171-220, 236-251.

[2] M. Hamala : *Nelinárne programovanie*, ALFA - vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1976, Bratislava, str. 54-61, 118-121, 218-221

[3] J. Plesník, J. Dupačová, M. Vlach : *Lineárne programovanie*, ALFA , 1976, Bratislava

[4] J. Plesník : *Matematické programovanie po základoch lineárneho programovania*, Polygrafické stredisko UK v Bratislave,1987

[5] R. Barrett, M. Berry,... : *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, poscriptový súbor templates.ps z internetovej adresy http://www.netlib.org/templates/Templates.html

[6] F. Lamoš, R. Potocký : *Pravdepodobnosť a matematická statistika*, Vydavateľstvo UK Bratislava, 1998.

[7] R. Tausinger : *Primárno - duálne metódy riešenia úloh kvadratikého programovania*, Diplomová práca, MFF UK Bratislava, 2000.