FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika

INVESTOVANIE A PRISPÔSOBOVACIE NÁKLADY

Diplomová práca

Bratislava 2001

Stacho Mudrák

Prehlasujem, že túto prácu som vypracoval samostatne a uviedol som všetku použitú literatúru.

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce
doc. RNDr. Jánovi Boďovi, CSc.
za cenné rady a inšpiráciu.

Obsah

1 Úvod

V trhovom hospodárstve je agregované správanie sa sektora podnikov závislé od rozhodnutí jednotlivých podnikov. V štandardnej klasicko-neoklasickej teórii sa celý výrobný sektor modeluje správaním sa tzv. *reprezentatívneho podniku*. Tento je pomyselná priemerná jednotka, ktorá sa – okrem rozdielu vo veľkosti – správa ako sektor v celku [3]. Modely založené na takýchto reprezentatívnych agentoch však majú ťažkosti popisovať niektoré javy pozorované v praxi. Ide hlavne o obdobia (niekedy aj dosť dlhé), kedy sú podniky v politike investovania pasívne, hoci podľa tohto modelu by investovaním mali svoj kapitál okamžite prispôsobovať zmenám v ziskovosti.

Cieľom tejto práce je modelovanie politiky investovania v podnikovom sektore. Východiskom je článok [2], v ktorom Cooper a Haltiwanger popisujú pomerne univerzálny prístup k tejto problematike aplikovaný však na konkrétne reálne dáta. V tejto práci sa zameriame skôr na vybudovanie a detailnú analýzu aparátu, ktorý nám takéto modelovanie umožňuje (kapitola 2) a ktorého popis je v spomínanom článku spomenutý len okrajovo.

Jednu z hlavných úloh v procese investovania hrajú tzv. *prispôsobovacie náklady* (angl. *adjustment costs*). Ide o náklady, ktoré musí podnik vynaložiť spolu s investíciami na to, aby zvýšil (resp. znížil) akumuláciu svojho kapitálu a tak ovplyvnil svoje zisky. Ich vplyv budeme modelovať v kapitole 3.

Kľúčovým spojením medzi makroekonomickou teóriou a reálne pozorovanou skutočnosťou reprezentovanou makroekonomickými ukazovateľmi je nami odhadovaný vzťah medzi mierou investovania a vonkajšími faktormi, ktoré na toto investovanie vplývajú. Tieto sa dajú vo všeobecnosti zahrnúť do zmeny v ziskovosti jednotlivých podnikov, ktorú je možné u nich pozorovať.

Nájdenie tohto vzťahu špecifikujeme ako problém dynamického programovania na úrovni konkrétneho podniku. Budeme sa snažiť nájsť funkciu optimálneho investovania pre podnik, ktorý maximalizuje svoje zisky za štandardných účtovných obmedzení. Na jej základe potom pomocou simulácií budeme môcť opísať aj správanie sa agregovaných makroekonomických ukazovateľov v závislosti od parametrov modelu.

2 Základný model

2.1 Formulácia problému

Podobne ako v klasicko-neoklasickej teórii uvažujme reprezentatívny podnik, ktorý sa snaží maximalizovať hodnotu svojho očakávaného zisku. Tento predpoklad sa nemusí nevyhnutne zhodovať so skutočnosťou, ale je predsa len výstižnejší, ako jeho alternatívy (napr. maximalizácia obratu). Problémom pre vedenie podniku je teda voľba faktorov ovplyvňujúcich produkciu a teda aj zisk v danom období. Konkrétne sú nimi hlavne veľkosť použitej pracovnej sily a akumulácia kapitálu (investičného majetku).

Majme teda podnik, ktorý v danom období maximalizuje svoj zisk voľbou použitej pracovnej sily N a kapitálu K. Vo všeobecnosti môžeme tento zisk vyjadriť vzťahom

$$\Pi(A, K, N) = \max_{K,N}[\mathrm{R}(A, K, N) - \omega(K, L)]$$

pričom $\mathrm{R}(A, K, N)$ sú príjmy dané vstupom K, N a exogénnej stavovej premennej A (ktorá bude popísaná neskôr) a $\omega(K, L)$ vyjadruje náklady na prácu (veľkosť vyplatených miezd) a kapitál (úroky z úverov alebo tzv. náklady alternatívnej príležitosti).

Vzhľadom na to, že našu pozornosť sústredíme na proces investovania, budeme predpokladať, že podnik množstvo použitej práce volí pre pevne dané A a K optimálne. Za predpokladu, že by sme poznali aj funkcie $\mathrm{R}(A, K, N)$ a $\omega(K, L)$, vedeli by sme vyjadriť aj funkciu ziskovosti Π len v závislosti od A a K. V tejto práci ju však budeme považovať za exogénne danú.

Na základe analýzy reálnych dát Cooper a Haltiwanger v [2] používajú produkčnú funkciu pre konkrétny podnik i a čas t v tvare

$$\Pi(A_{it}, K_{it}) = A_{it} K_{it}^{\theta}$$

kde θ reprezentuje zakrivenie tejto funkcie ziskovosti. Takýto tvar sa podľa nich dá odvodiť z modelu, kde produkcia je daná štandardnou Cobb-Douglasovou funkciou a firma predáva svoje výrobky na nedokonale kompetitívnom trhu. V našom modeli použijeme funkciu, ktorá bude mať rovnaký, alebo veľmi podobný tvar, keďže v niektorých prípadoch je rozumné uvažovať závislosť ziskovosti aj od veľkosti investícii. Pri väčších investíciach sa totiž obyčajne prispôsobuje celý výrobný proces a táto skutočnosť má na ziskovosť dočasne negatívny dopad.

Veľmi dôležitou charakteristikou v našej analýze je aj stavová premenná A, ktorá reprezentuje úroveň ziskovosti podniku a o ktorej predpokladáme, že pre každý podnik i a čas t je jej hodnota A_{it} pevne daná a rozhodnutie podniku ju nemôže ovplyvniť. Do tejto premennej zahŕňame všetky nepredvídateľné vonkajšie šokové faktory, ktoré vplývajú na ziskovosť. V realite sú nimi najčastejšie technologická úroveň alebo vládne výdavky, ale v špecifických prípadoch sem môžeme zahrnúť napr. aj počasie, ceny na burze alebo úrokovú mieru.

Budeme predpokladať, že táto premenná má náhodný charakter a na začiatku každého obdobia firma pozná len jej terajšiu hodnotu A_{i0} a charakter náhodného procesu, ktorým sa bude riadiť do budúcnosti. Ten sa v praxi modeluje alebo autoregresným alebo Markovovským procesom. Vzhľadom na použitý spôsob optimalizácie si my zvolíme druhý spomínaný prístup a budeme predpokladať, že ziskovosť podniku môže nadobúdať hodnoty $A_1, A_2 \dots A_n$ pričom budeme poznať maticu prechodov medzi týmito stavmi.

Neskôr budeme rozlišovať aj medzi agregovanou ziskovosťou A_t (napr. globálna technologická úroveň) a ziskovosťou konkrétneho podniku A_{it} (technologická úroveň i-teho podniku). Tá bude funkciou A_t a ε_{it}, kde ε_{it} bude šoková premenná špecifická pre každý podnik a nezávislá na A_t.

Majme teda konkrétny podnik (index i budeme teraz vynechávať) v konkrétnej situácii (v čase 0). To znamená, že poznáme:

- K_0 – súčasnú akumuláciu kapitálu (hodnotu investičného majetku)
- A_0 – súčasnú ziskovosť a charakter náhodného procesu, ktorým sa táto bude riadiť do budúcnosti
- $\Pi(A, K, I)$ – funkciu ziskovosti
- $\mathrm{C}(A, K, I)$ – funkciu prispôsobovacích nákladov
- $\delta \in (0, 1)$ – veľkosť amortizácie kapitálu medzi periódami, kedy podnik môže robiť rozhodnutia o investíciach
- $\beta \in (0, 1)$ – diskontný faktor budúcnosti (β dolárov zarobených dnes je ekvivalentných jednému doláru zarobenému v budúcej perióde)

Za predpokladu nekonečnej existencie podniku rozumieme optimálnou politikou investovania takú voľbu I_t ($\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\}$), že očakávaná diskontovaná hodnota všetkých budúcich ziskov (po odrátaní a investícii a prispôsobovacích nákladov) je maximálna. Formálne zapísané hľadáme

$$\max_{\forall I_t} \mathrm{E}_{A_{t>0}|A_0} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big(\Pi(A_t, K_t, I_t) - pI - \mathrm{C}(A_t, K_t, I_t) \Big) \right]$$

kde p je cena, za ktorú kapitál „nakupujeme“, za účtovného obmedzenia

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \qquad \forall t \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Ako základný a najjednoduchší model, na ktorom opíšeme celý použitý matematický aparát si zvoľme jednoduchý problém výmeny výrobného stroja. Predpokladajme, že každá firma v našom sektore používa na výrobu iba jeden stroj, ktorého hodnota je 1. Stroj sa časom opotrebuváva a tak je potrebné časom ho vyhodiť a kúpiť nový. Funkciu ziskovosti zvoľme vo vyššie spomínanom tvare

$$\Pi(A_t, K_t) = A_t K_t^\theta$$

Za predpokladu, že v danom období nový stroj nekúpime, bude náš zisk rovný $\Pi(A_t, K_t)$ a hodnota stroja (kapitálu) v budúcej perióde bude $K_{t+1} = (1-\delta)K_t$. Ak nový stroj kúpime, budeme predpokladať, že okrem ceny stroja $p > 1$ nám vzniknú aj prispôsobovacie náklady, ktoré zahrnieme do zmeny v ziskovosti, keďže stroj nemôže byť ihneď plne produktívny. Nech $\lambda < 1$ je faktor, ktorým prenásobíme ziskovosť v perióde, kedy bol nový stroj kúpený. Ostatné faktory ako A alebo β majú rovnaký význam ako pri všeobecnej formulácii.

2.2 Rovnica dynamického programovania

Nájdenie optimálnej politiky investovania sa dá chápať ako problém dynamického programovania (v našej formulácii ide o autonómnu úlohu na nekonečnom časovom horizonte). Ten spočíva v nájdení hypotetickej hodnotovej funkcie (označme ju $\mathrm{V}(A, K)$), ktorá nám predstavuje maximálnu diskontovanú hodnotu budúcich ziskov, ktoré je možné dosiahnuť z terajšieho stavu daného premennými A a K voľbou optimálnych budúcich investícii.

Zapíšme si teda náš problém, ako problém dynamického programovania pomocou tzv. Bellmanovej funkcionálnej rovnice pre funkciu V. Stavovými premennými v našom probléme sú A a K a kontrolnou premennou je veľkosť investícii I. Nech hodnoty A_{t+1} a K_{t+1} sú deterministicky určené hodnotami A_t, K_t a I_t. Vieme, že

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \qquad \forall t \in \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{1}$$

a na začiatok predpokladajme, že aj A je deterministicky dané. Keďže optimalizujeme na nekonečnom časovom intervale a hľadáme funkciu, ktorá závisí len od hodnôt A a K (nezávisle od času), môžeme celý náš problém prepísať len do premenných platných pre túto a nasledujúcu preriódu. Teda nech A a K vyjadrujú stav teraz a A' a K' stav v nasledujúcej perióde a nech poznáme stavové rovnice prechodu (vo všeobecnosti $A' \equiv A'(A, K, I)$ a $K' \equiv K'(A, K, I)$). Potom funkcia V spĺňa funkcionálnu rovnicu

$$\mathrm{V}(A, K) = \max_I [\Pi(A, K, I) - pI - \mathrm{C}(A, K, I) + \beta \mathrm{V}(A', K')] \tag{2}$$

Posledná rovnica má rekurzívny charakter. Za predpokladu, že poznáme hodnotovú fukknciu v závislosti od všetkých možných budúcich stavov, dnešná funkcia je už jednoduchou maximalizáciou presne daná. Na tejto skutočnosti je založená aj iteračná metóda, ktorú na získanie konkrétnych hodnotových funkcií použijeme.

V skutočnosti však hodnotová funkcia až taká dôležitá nie je. Pre manažéra podniku je omnoho dôležitejšie poznať optimálnu veľkosť investícii (resp. budúceho kapitálu). Tie sú v tomto prípade argumentom hľadaného maxima a je ich možné takisto vyjadriť ako funkciu A a K. Tá sa v teórii dynamického programovania označuje ako optimálne riadenie (angl. *decision rule* alebo *policy function*).

Rovnica dynamického programovania môže mať aj stochastickú formu. Vo väčšine prípadov totiž v rozhodovaní o budúcnosti čelíme neistote (v našom prípade nepoznáme presne hodnotu A', ale len charakteristiku náhodného procesu, ktorým sa riadi). V takomto prípade môžeme (2) prepísať do stochastického tvaru

$$\mathrm{V}(A,K) = \max_{I} \Big[\Pi(A,K,I) - pI - \mathrm{C}(A,K,I) + \beta \mathrm{E}_{A'|A}[\mathrm{V}(A',K')] \Big] \qquad (3)$$

2.3 Diskretizácia

Ako už bolo spomínané vyššie, na nájdenie optimálneho riadenia pre daný podnik použijeme iteračnú schému, založenú na rovnici (3). V praxi sa na riešenie takto formulovaných makroekonomických problémov používajú dva spôsoby riešenia. Prvým z nich je aproximácia hodnotovej funkcie n-rozmernou kvadratickou funkciou okolo stabilného bodu $(\overline{A}, \overline{K})$ za predpokladu, že existuje a vieme ho nájsť.

Aj keď je tento spôsob numericky relatívne rýchly a spoľahlivý, obmedzenie sa na lineárne a kvadratické funkcie je príliš veľké, a už ani jednoduchý problém výmeny výrobného stroja sa takýmto spôsobom dá riešiť len ťažko. Dôvod spočíva v tom, že pri tomto postupe vyjde optimálne riadenie ako lineárna funkcia a v našom prípade potrebujeme funkciu, ktorá nám od určitej hodnoty kapitálu (opotrebovania stroja) nariadi jeho výmenu.

Druhý spôsob, ktorý sa používa, spočíva v diskretizácii hodnotovej funkcie. Jeho veľkou nevýhodou je časová a pamäťová náročnosť. Za predpokladu, že máme iba jednu stavovú a jednu kontrolnú premennú (v našom prípade sú nimi A a K), bude mať hodnotová funkcia rozmer $\dim(A) \times \dim(K)$ (kde symbolom $\dim(X)$ označujeme rozmer vektora X). Neskôr ukážeme, že reálne sa počíta s maticami o rozmere $\dim(A) \times \dim(K) \times \dim(K)$, čo prináša matice aj so 100 000 a viac prvkami. Výpočty s takýmito veľkými maticami už dosahujú medze spočítateľnosti na bežných počítačoch a tak je potrebné robiť voľbu a diskretizáciu premenných veľmi opatrne.

Položme si teda otázku, ako optimálne zvoliť hranice intervalov a delenie pre premenné A a K? Začneme premennou K, teda optimálnym delením kapitálu. V rovnici dynamického programovania (3), aj v rovnici prechodu (1) nám okrem kapitálu vystupuje aj hodnota investícii I, ktorú manažér reálne volí. Na základe jej výberu je potom cez rovnicu (1) jednoznačne daná budúca hodnota stavu kapitálu (K'). Preto budeme radšej formálne uvažovať, že manažér volí túto hodnotu K' a investície budeme vyjadrovať v tvare

$$I = K' - (1-\delta)K$$

Za predpokladu, že delenie K budeme mať dostatočne „husté“, bude aj delenie investícii dosť „husté“ a tie budú dosahovať hodnoty $K' - (1-\delta)K$ pre všetky kombinácie K' a K. Jedinou podstatnou vecou, ktorú treba zabezpečiť je, aby z každého stavu kapitálu bola možnosť nulových investícii. Tá je veľmi dôležitá práve pre prispôsobovacie a transakčné náklady, ktoré z každej novej investíce vyplývajú.

Toto je možné dosiahnuť tak, že s výnimkou okrajových hodnôt intervalu $K_{\min}$ a $K_{\max}$ (ktoré nás obyčajne až tak nezaujímajú) bude pre každú hodnotu K_i aj $(1-\delta)K_i$ do tohto delenia patriť. Najjednoduchším spôsobom ako to zabezpečiť je zvoliť si $K_{\max}$ a potom podľa schémy

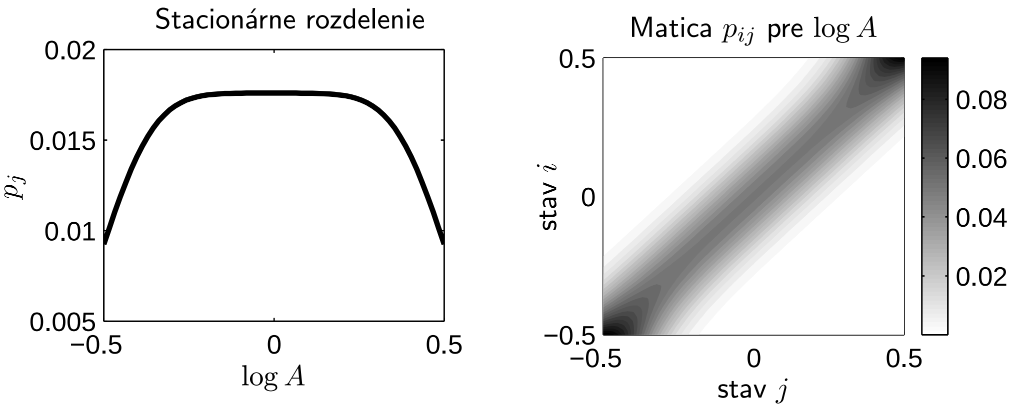
$$K_{i-1} = (1-\delta)K_i$$

počítať všetky K_i až pokiaľ nedosiahneme hodnotu $K_{\min}$. Za predpokladu, že by z iných podmienok vyplynula potreba jemnejšieho delenia, môžeme tak dosiahnuť násobením faktorom $\sqrt[n]{(1-\delta)}$, kde n zvolíme tak, aby sme dosiahli požadovanú presnosť.

Druhou premennou, ktorú je potrebné diskretizovať, je ziskovosť A. Tá obyčajne vystupuje len vo funkcii ziskovosti $\Pi(A, K)$ a tak nie je potrebné priraďovať jej nejaké špeciálne hodnoty. Problematickejším je však jej náhodný charakter. Ako bolo uvedené vyššie, my ju budeme modelovať Markovovským procesom. Nech má táto premenná lognormálne rozdelenie a my sme si zvolili jej delenie $\{\log A_1, \log A_2, \dots \log A_n\}$. Potom je naším cieľom nájsť takú maticu prechodov medzi týmito stavmi, aby bolo stacionárne rozdelenie Markovovho reťazca normálne.

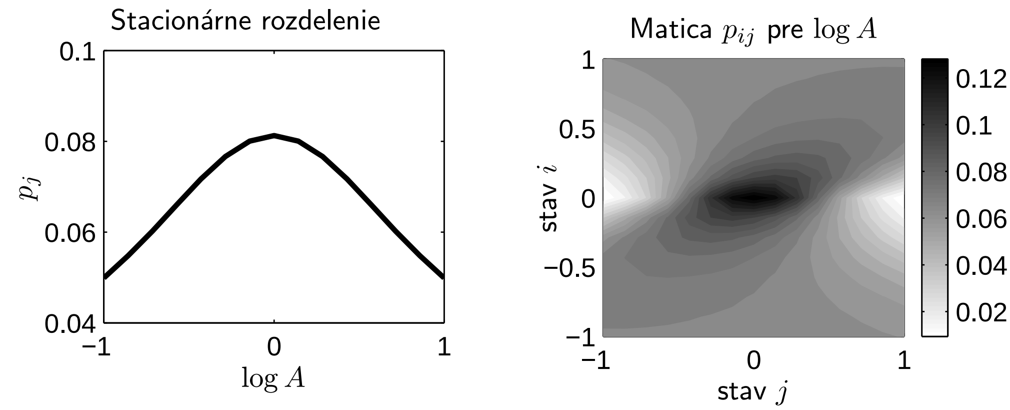
Za predpokladu, že riešime nejaký konkrétny problém a máme k dispozícii reálne dáta, je možné na základe nich toto delenie aj maticu určiť. Bežne však dáta nemáme vôbec, alebo je tých dát tak málo, že z nich nie je možné efektívne túto maticu zrekonštruovať. Preto sa pokúsme vytvoriť túto maticu umelo, len na základe vlastností, ktoré je od nej logické vyžadovať.

Predpokladajme teda, že sme podnik, ktorý má ziskovosť na nejakej úrovni. Logické bude predpokladať, že rozdelenie pravdepodobností prechodu z nášho stavu do iného je normálne, so strednou hodnotou práve v našom stave. Inak povedané, najväčšiu pravdepodobnosť máme, že zostaneme v našom stave a čím je nasledujúci stav od nás vzdialenejší, je pravdepodobnosť prechodu do neho menšia.



Obr. 1: Charakteristiky najjednoduchšieho Markovovho procesu

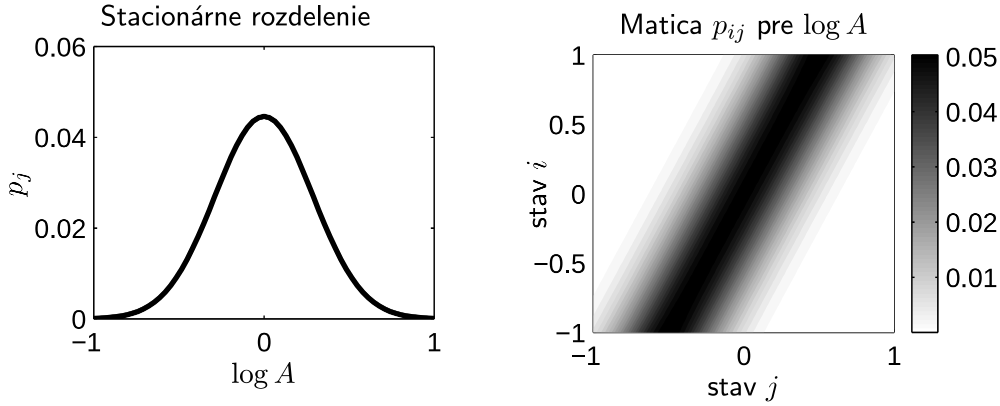
Na obrázku 1 je znázornené stacionárne rozdelenie Markovovho procesu, ak na maticu prechodov kladieme iba vyššie spomínaný predpoklad. Znázornený proces má 63 stavov a zvýšené pravdepodobnosti v rohoch matice sú spôsobené tým, že každý riadok matice je normovaný na jednotku. Už pri prvom pohľade je zrejmé, že na maticu bude treba sformulovať ešte ďalšie požiadavky.



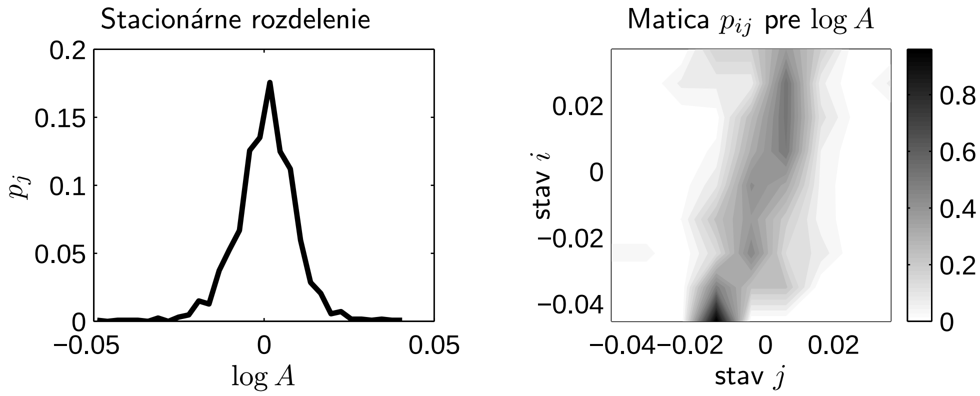
Obr. 2: Charakteristiky Markovovho procesu č. 2

Chybou predchádzajúceho prístupu bolo, že matica mala veľmi „ťažké“ rohy, čo sa prejavilo rozšírením vrcholu rozdelenia na neprirodzenú úroveň.

Na obrázku 2 sú znázornené charakteristiky rozdelenia, keď sme rohy „odľahčili“. V praxi to znamená, že sme prijali predpoklad, že ak sme v stredných stavoch, máme pravdepodobnosť zotrvania vo svojom stave vyššiu, ako keď sme v okrajových.



Obr. 3: Charakteristiky Markovovho procesu č. 3

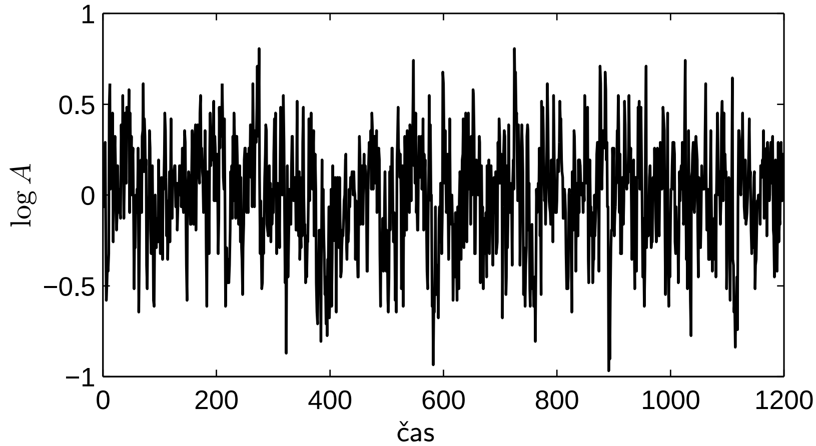


Obr. 4: Charakteristiky reálneho procesu

Rozdelenie už vyzerá lepšie, ale dostali sme zase „neprirodzenú“ maticu prechodov. Jej neprirodzenosť spočíva v tom, že v okrajových stavoch sú pravdepodobnosti prechodu do ostatných stavov omnoho vyššie, ako v stavoch stredných. V praxi to znamená asi toľko, že keď sme poriadne stratový podnik, je pravdepodobnosť prechodu do stavu vysokej ziskovosti u nás omnoho väčšia, ako pre podnik, ktorý je niekde v strede. Opäť je zrejmé, že takouto maticou by sme simulovali nereálne situácie.

Neostáva nám teda nič iné, ako upustiť od jedného z predpokladov. Ak chceme stacionárnym rozdelením dosiahnuť Gaussovu krivku, musia sa v realizáciach Markovovho procesu okrajové hodnoty dosahovať naozaj len zriedka a bude potrebné nastaviť rozdeleniam v týchto stavoch strednú hodnotu niekde inde. Najjednoduchší spôsob ako to dosiahnuť bude otočiť trochu v matici najväčšie prvky proti smeru hodinových ručičiek. Takáto matica aj z rozdelením je znázornená na obrázku 3.

Rozdelenie aj matica už vyzerajú reálnejšie a sú porovnateľné s charakteristikou reálneho procesu znázorneného na obrázku 4, pričom ako reálny proces sme zobrali denný vývoj zmien indexu Dow – Jones (ktorý svojim spôsobom modelovanej ziskovosti aj zodpovedá). Vidíme, že aj reálna matica prechodov vypočítaná z tohoto procesu má najväčšie prvky usporiadané na línii otočenej od hlavnej diagonály.



Obr. 5: Simulovaný časový rad

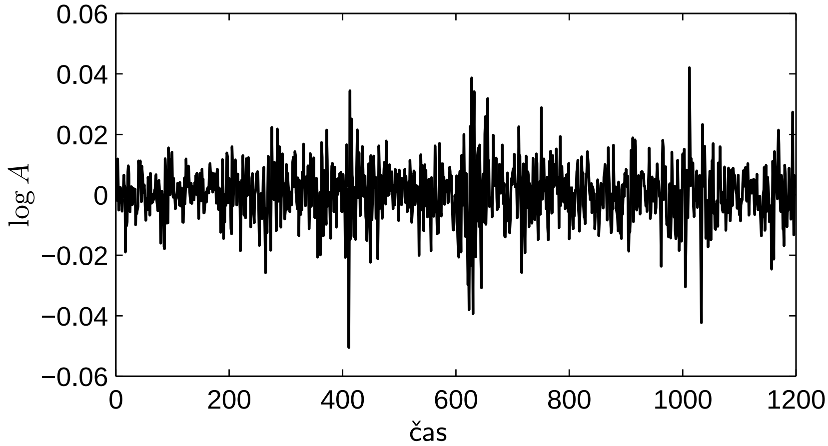
Na obrázku 5 je simulovaný takto zadefinovaný Markovov proces. Vidíme, že dostávame opäť veľmi realite podobné dáta, ktoré je možné porovnať s obrázkom 6, kde sú dáta skutočné.

2.4 Riešenie

Máme už vyriešenú otázku diskretizácie kontrolnej aj stavovej premennej a máme k dispozícii aj pomerne vierohodnú maticu Markovovho procesu. Pozrime sa teda na spôsob, akým budeme optimálne rozhodovanie hľadať.

Našim cieľom je nájsť takú hodnotovú funkciu $\mathrm{V}(A, K)$, ktorá bude spĺňať rovnicu (3), pričom rovnica sama nám poslúži ako iteračná schéma na jej nájdenie. Aby sme mohli zostrojiť konkrétny algorimus, prepíšme si túto rovnicu do nasledujúceho tvaru

$$\mathrm{V}(A, K) = \max_{K'} \Big[\mathrm{P}(A, K, K') + \beta \mathrm{E}_{A'|A}[\mathrm{V}(A', K')]\Big] \tag{4}$$



Obr. 6: Reálny časový rad

$\mathrm{P}(A, K, K')$ označuje čistý príjem v danej perióde (teda rozdiel medzi príjmami a výdavkami) definovaný ako

$$\mathrm{P}(A, K, K') = \Pi(A, K, K') - p(K' - (1 - \delta)K) - \mathrm{C}(A, K, K') \tag{5}$$

Prepíšme si teraz rovnicu (4) na základe predchádzajúcej diskretizácie do maticovej formy. Označme $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots A_m\}$ delenie stavovej premennej A a $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots K_n\}$ delenie riadiacej premennej K. Funkciu $\mathrm{V}(A, K)$ definovanú na $\mathcal{A} \times \mathcal{K}$ bude potom reprezentovať matica premenných $\mathbf{V}$ ($m \times n$) v tvare

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}(A_1, K_1) & \mathrm{V}(A_1, K_1) & \dots & \mathrm{V}(A_1, K_n) \\ \mathrm{V}(A_2, K_1) & \mathrm{V}(A_2, K_2) & \dots & \mathrm{V}(A_2, K_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{V}(A_m, K_1) & \mathrm{V}(A_m, K_2) & \dots & \mathrm{V}(A_m, K_n) \end{pmatrix}$$

Vidíme, že v rovnici (4) nám ešte okrem funkcie $\mathrm{V}(A, K)$ vystupuje aj funkcia $\mathrm{P}(A, K, K')$. Po prepísaní do maticovej formy bude táto funkcia už vystupovať ako konštanta, lebo pre všetky kombinácie A, K a K' je jej hodnota pevne daná a nemenná. Vytvorme si teda maticu $\mathbf{P}$ v tvare

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} \mathrm{P}_{1,1,1} & \dots & \mathrm{P}_{1,n,1} & \dots & \mathrm{P}_{m,1,1} & \dots & \mathrm{P}_{m,n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{P}_{1,1,n} & \dots & \mathrm{P}_{1,n,n} & \dots & \mathrm{P}_{m,1,n} & \dots & \mathrm{P}_{m,n,n} \end{array}\right) \tag{6}$$

kde $\mathrm{P}_{i,j,k}$ značí $\mathrm{P}(A_i, K_j, K'_k)$, pričom každý stav A_i tvorí jeden štvorcový blok o veľkosti $n \times n$ (v matici sú oddelené vertikálnou čiarou). Ak sme teda v bloku i a stĺpci j (terajší stav kapitálu), voľbou riadku k (budúci stav kapitálu) vieme z tejto matice odčítať náš čistý príjem v danej perióde.

Posledným výrazom, ktorý bude treba prepísať do maticovej formy je $\mathrm{E}_{A'|A}\mathrm{V}(A', K')$, čiže stredná hodnota hodnotovej funkcie v budúcom stave. V praxi to znamená, že ak sme teraz v stave ziskovosti A a zvolíme si hodnotu budúcej akumulácie kapitálu na úrovni K', chceme vedieť, aká je očakávaná maximálna diskontovaná hodnota ziskov, ktoré budeme môcť v budúcnosti s týmto kapitálom dosiahnuť.

Z Markovovskej matice $\mathbf{\Pi}$ vieme, že ak sme v stave A_i, pravdepodobnosť prechodu do budúceho stavu A'_j je p_{ij}, pričom

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

Za predpokladu, že poznáme hodnotovú funkciu V, vieme vyjadriť aj jej budúcu očakávanú hodnotu pre každý terajší stav A_i a hodnotu budúceho kapitálu K'_k, ktorá bude rovná

$$\mathrm{E}_{A'|A_i}\mathrm{V}(A', K'_k) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\mathrm{V}(A'_j, K'_k) \tag{7}$$

Preformulovaním do maticového tvaru počítame maticu očakávaných hodnôt hodnotovej funkcie (označíme ju $\mathbf{V}'$) pre všetky kombinácie terajšieho stavu A a budúceho stavu kapitálu K'. Nech

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{A'|A_1}\mathrm{V}(A', K'_1) & \cdots & \mathrm{E}_{A'|A_1}\mathrm{V}(A', K'_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{E}_{A'|A_m}\mathrm{V}(A', K'_1) & \cdots & \mathrm{E}_{A'|A_m}\mathrm{V}(A', K'_n) \end{pmatrix}$$

potom podľa vzťahu (7) dostávame

$$\mathbf{V}' = \mathbf{\Pi}.\mathbf{V}$$

Teraz máme už všetko pripravené na to, aby sme mohli na základe rovnice (4) zostrojiť iteračný algorimus a naprogramovať ho. Ten je založený na rovnici (4) a vyzerá nasledovne

$$V^{k+1} = \max_{K'} \Big[\mathrm{P}(A, K, K') + \beta\mathrm{E}_{A'|A}[\mathrm{V}^{\mathrm{k}}(A', K')]\Big] \tag{8}$$

Po prepísaní všetkých jej členov do maticovej formy sa táto rovnica prevedie na štandardný problém nájdenia pevného bodu rovnice

$$\mathbf{V} = \mathrm{f}(\mathbf{V})$$

pričom f je kontraktívne zobrazenie (zabezpečíme to voľbou $0 < \beta < 1$). Náš algoritmus bude teda vyzerať nasledovne:

1. Najprv sa navrhne počiatočná matica $\mathbf{V}^0$. Vzhľadom na numerickú stabilitu tejto schémy môže byť ľubovoľná, ale my si zvolíme $\mathbf{V}_{ij}^0$ rovné maximu z j-teho stĺpca v i-tom bloku matice $\mathbf{P}$ (6). Ináč povedané, maximálnu hodnotu zisku za predpokladu, že v budúcnosti už nič nezískame.

2. V tomto kroku predpokladáme, že máme už hodnotu k-tej iterácie matice hodnotovej funkcie $\mathbf{V}^k$. Aby sme mohli vypočítať $\mathbf{V}^{k+1}$, najprv vypočítame maticu očakávanej hodnotovej funkcie $\mathbf{V'}^k = \mathbf{\Pi}.\mathbf{V}^k$.

3. Teraz budeme maximalizovať pravú stranu rovnice (8). Aby sme ku všetkým možným terajším príjmom (určeným maticou $\mathbf{P}$) mohli prirátať β násobok ich diskontovanej očakávanej hodnoty z budúcnosti určenej maticou $\mathbf{V'}^k$, musíme si túto upraviť. Pri označení použitom vyššie, máme
$$\mathbf{V}_{ij}^{k+1} = \max_l \{\mathrm{P}_{i,j,l} + \mathbf{V'}_{il}^k\}$$
Vidíme, že v matici $\mathbf{P}$ budeme maximalizovať po stĺpcoch a vo $\mathbf{V'}^k$ po riadkoch. Preto si túto poslednú najprv transponujeme a každý stĺpec (predstavujúci jeden stav A_i) rozšírime na šírku n stĺpcov, čím dostaneme matice rovnakej dimenzie. Tie keď sčítame a maximalizujeme po stĺpcoch, dostaneme vektor obsahujúci $\mathbf{V}_{ij}^{k+1}$ na mieste $(j + (i-1)m)$. Rozdelením tohto vektora na m riadkov, dostaneme už hľadanú maticu $\mathbf{V}^{k+1}$.

4. Veľmi dôležitým produktom tejto maximalizácie je aj optimálne riadenie. Ak si totiž indexy prvkov, na ktorých sa nadobudlo maximum pretransformujeme rovnako, ako sme transformovali vektor vzniknutý maximalizáciou na maticu $\mathbf{V}^{k+1}$, dostaneme maticu indexov
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix}$$
kde potom $K'_{d_{ij}}$ je optimálna budúca hodnota akumulácie kapitálu, ktorú volí manažér podniku, keď sa ten nachádza v stave určenom (A_i, K_j).

5. Postup od kroku 2 budeme opakovať, až pokiaľ nedosiahneme požadovanú presnosť ε, teda
$$\left\| \mathbf{V}^{k+1} - \mathbf{V}^k \right\| < \varepsilon$$

Teraz, keď už máme na výpočet hodnotovej funkcie všetko pripravené, môžeme pristúpiť k jeho realizácii. Z algoritmu uvedeného vyššie vyplýva, že keď máme diskretizované premenné A a K a dané $\mathbf{\Pi}$ a β, stačí nám už len matica $\mathbf{P}$, ktorá v sebe skrýva všetky ostatné špecifikácie konkrétneho problému.

Majme teda problém výmeny výrobného stroja. Ako bude pre neho vyzerať matica $\mathbf{P}$? Na rozdiel od všeobecnej formulácie problému, my máme v každej perióde možnosť rozhodnúť sa len pre dve možné alternatívy: alebo nový stroj kúpime, alebo nie. Toto zabezpečíme tak, že i-ty blok matice $\mathbf{P}$ bude vyzerať nasledovne

$$\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} -\infty & P_{2,1} & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & -\infty & P_{3,2} & \dots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & -\infty & \dots & P_{n,n-1} \\ P_{1,n} & P_{2,n} & P_{3,n} & \dots & P_{n,n} \end{pmatrix}$$

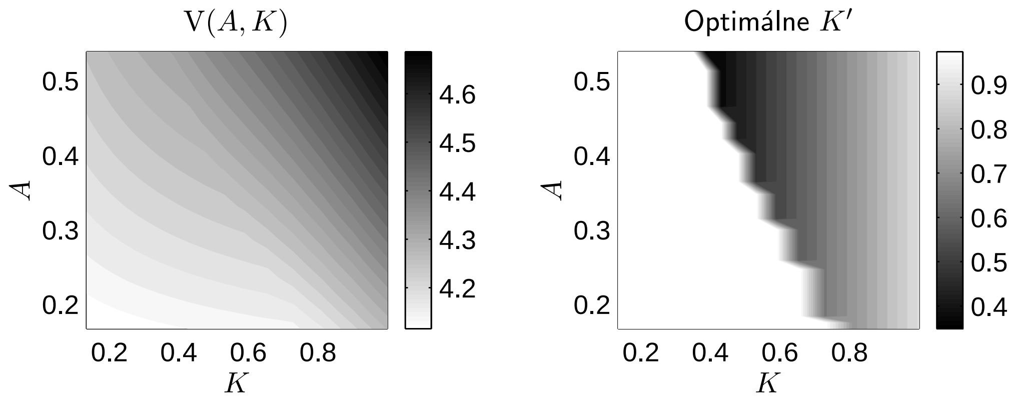
pričom posledný riadok vyjadruje zisk za predpokladu, že v danej perióde nový stroj kúpime

$$P_{i,j,n} = \lambda A_i K_j^{\theta} - p \qquad \forall j \in \{1, 2 \dots\ n\}$$

a nad hlavnou diagonálou je zisk za predpokladu, že nový stroj nekúpime.

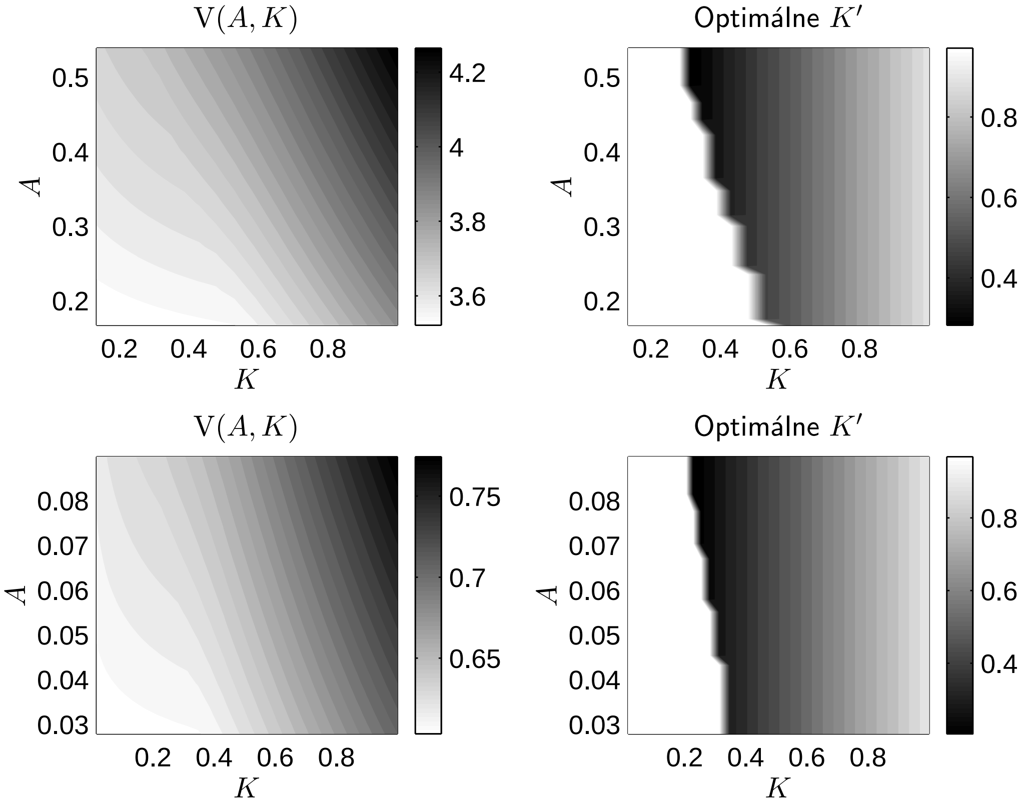
$$P_{i,j,j-1} = A_i K_j^{\theta} \qquad \forall j \in \{2, 3 \dots\ n\}$$

Na všetkých ostatných miestach v matici je $-\infty$, čím zabezpečíme, že danú možnosť maximalizačný algoritmus nikdy nezvolí.



Obr. 7: Hodnotová funkcia a optimálne riadenie

Po konkrétnej voľbe ostatných vstupov do modelu dostávame prvú maticu hodnotovej funkcie a takisto aj maticu indexov optimálneho investovania. Tie sú znázornené na obrázku 7. Z prvého grafu teda môžeme odčítať maximálnu diskontovanú hodnotu ziskov, ktoré môže firma pri optimálnom investovaní dosiahnuť, ak sa nachádza v stave ziskovosti A (os y) a hodnota jej stroja je K (os x). V druhom je znázornená optimálna hodnona stroja za predpokldu, že sme v už opísanom stave. Vidíme, že od určitého stavu je už vždy optimálna jeho výmena (biela plocha, šedá znamená, že z K volíme $K' = (1-\delta)K$). Zaujímavým (už nie takým triviálnym) faktom je, že ak sú naše výnosy vyššie, budeme jeden stroj používať dlhšie.



Obr. 8: Výsledky optimalizácie pri vyššej cene p a pri nižšej $\mathrm{E}(A)$

Cieľom tejto práce je získať práve takéto poznatky, ak vieme vyššie uvedeným spôsobom opísať faktory, ktoré na rozhodovanie jedného agenta vplývajú. Teraz, keď sme si už optimalizačný proces automatizovali, nie je problémom získať takýchto faktov čím viac. Ak napríklad zvýšime cenu stroja p, vidíme (v prvom riadku na obrázku 8), že sa správanie agentov zmenilo podľa našich očakávaní. Teda firmy jeden stroj používajú dlhšie a ich zisky klesli.

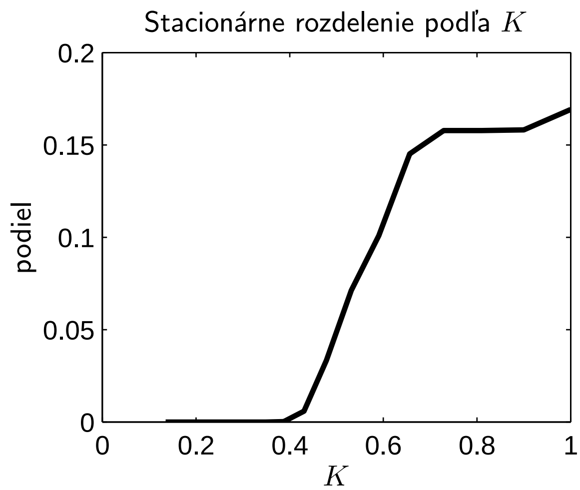
Zaujímavým faktom ale je, že na toto zvýšenie ceny citlivejšie zareagovali tí, ktorí mali nižšie zisky.

V druhom riadku na tomto obrázku sme zase znížili strednú hodnotu ziskovosti pričom vidíme, že reakcie firiem boli podobné, ako pri zvýšení ceny stroja. Opäť citlivejšie zareagovali tí, ktorí mali nižšie zisky. Zaujímavou skutočnosťou je, že tak, ako pri prvej, tak aj pri druhej zmene sa znížilo rozpätie opotrebovania stroja, pri ktorom je optimálna jeho výmena.

2.5 Agregácia

Pre vládne (ale aj mnohé iné) inštitúcie sú taktisto veľmi podstané aj globálne ukazovatele, ktoré charakterizujú celý sektor. Na ich určenie je potrebné poznať rozdelenie agentov podľa stavovej premennej, ktorá je determinovaná modelom. V našom prípade ide iba o K, keďže rozdelenie A vstupuje do modelu ako jeden z jeho parametrov.

Pokúsme sa o to podobným spôsobom, ako sme získali hodnotovú funkciu. Diskretizujme si ho pre každú hodnotu ziskovosti z $\mathcal{A}$, ako sme to spravili s hodnotovou funkciou. Budeme ho teda aproximovať maticou $\mathbf{R}$ o rozmere $m \times n$, pričom každý riadok i bude predstavovať rozdelenie firiem zo ziskovosťou A_i podľa $K \in \mathcal{K}$.



Obr. 9: Akumulácia kapitálu v podnikovom sektore

Budeme opäť hľadať pevný bod funkcie definovanej na priestore všetkých matíc $\mathbf{R}$. Táto funkcia bude spočívať v aplikácii dvoch transformácii. Prvá preusporiada jednotlivé rozdelenia pre každú ziskovosť (riadky maticen $\mathbf{R}$)

na základe očakávaní (prenásobenie maticou Markovovského procesu $\mathbf{\Pi}$) a druhá zas aplikáciou optimálnych rozhodnutí (reprezenovaných maticou $\mathbf{D}$).

Výsledok takéhoto postupu je znázornený na obrázku 9. Jeho detailnú analýzu tu uvádzať nebudeme, lebo v praxi je jeho použitie dosť otázne a má mnoho nevýhod. Hlavnou z nich je jeho nie práve najlepšia konvergencia k riešeniu (vzhľadom na to, že tu nemáme žiadny faktor β, ktorý by ju zabezpečoval). Tá tým pádom dosť závisí aj na voľbe nultej aproximácie. Túto metódu budeme používať len ako referenčnú, lebo hľadané rozdelenia je možné získať aj simuláciami opísanými v nasledujúcej kapitole.

Na uvedenom obrázku je možné vidieť hneď jednu chybu tohoto postupu, a to ničím nevysvetlený zvýšený podiel firiem s úplne novým strojom. Z grafu optimálneho investovania (obr. 7) totiž vyplýva, že podiel firiem v oblasti kapitálu, kedy nedochádza ku kúpe nového stroja, by mal byť všade rovnaký, a teda krivka stacionárneho rozdelenia by mala byť až do konca horizontálna.

2.6 Simulácie

Poznajúc správanie sa agentov, opísané optimálnym riadením pre každý stav, vieme pomocou Monte – Carlo simulácií získať aj dynamické charakteristiky modelu, teda vývoj rozličných faktorov v čase. Začnime najjednoduchšou simuláciou a to vygenerovaním časového radu opisujúceho správanie sa jedného podniku v čase (opäť sme pri probléme výmeny výrobného stroja a použijeme výsledky získané vyššie). Postup simulácie je veľmi jednoduchý a možno ho zhrnúť do nasledovných krokov:

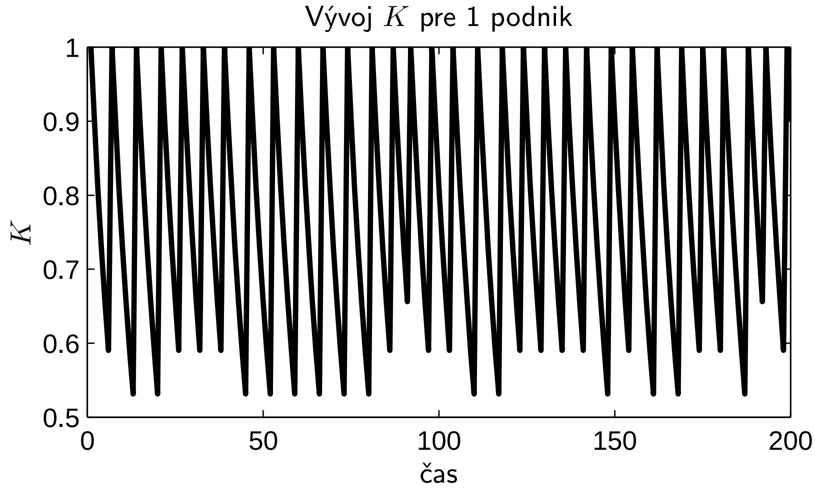
1. Stanovenie počiatočnej hodnoty stroja K^0 a ziskovosti A^0. O K^0 môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že je rovné 1 (teda máme nový stroj). A^0 zas vygenerujeme ako realizáciu náhodnej premennej zo stacionárneho rozdelenia Markovovskej matice $\mathbf{\Pi}$. Aj keď pri jednej simulácii to až také dôležité nie je, výhodu takejto voľby oceníme pri simulovaní správania sa podnikového sektora pozostávajúceho z väčšieho množstva firiem.

2. Za predpokladu, že poznáme K^{i-1} a A^{i-1}, určíme K^i a A^i. Vieme, že A sleduje Markovovský proces určený maticou $\mathbf{\Pi}$ a teda rozdelenie pravedpodobnosti A^i je dané v jej $(i-1)$-om riadku. A^i teda dostaneme vygenerovaním náhodného čísla z tohto diskrétneho rozdelenia.

3. Podobne, na základe optimálneho riadenia (určeného maticou $\mathbf{D}$, viď kapitolu 2.4), vieme z A^{i-1} a K^{i-1} zvoliť K^i pre danú periódu.

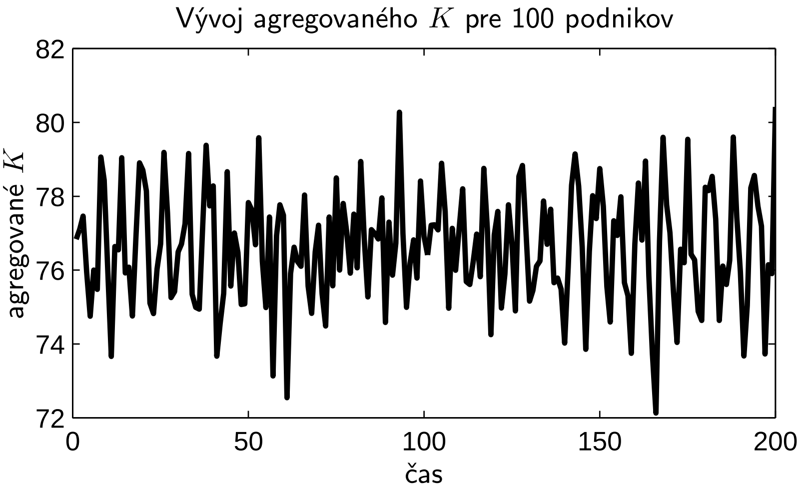
4. Pokračujeme krokom 2, až pokiaľ nedosiahneme požadovaný čas alebo presnosť počítanej charakteristiky.

Na obrázku 10 je výsledok jednej z takýchto simulácii. Vidíme, že výmena stroja sa deje vždy po dosiahnutí určitého stavu jeho opotrebovania, nie rovnakého pre každú periódu. Táto skutočnosť je dôsledkom náhodnosti A.



Obr. 10: Simulovaný vývoj investovania

Zaujímavejší obrázok dostaneme, keď budeme simulovať vývoj celého výrobného sektora reprezentovaného určitým počtom podnikov. Na obrázku 11

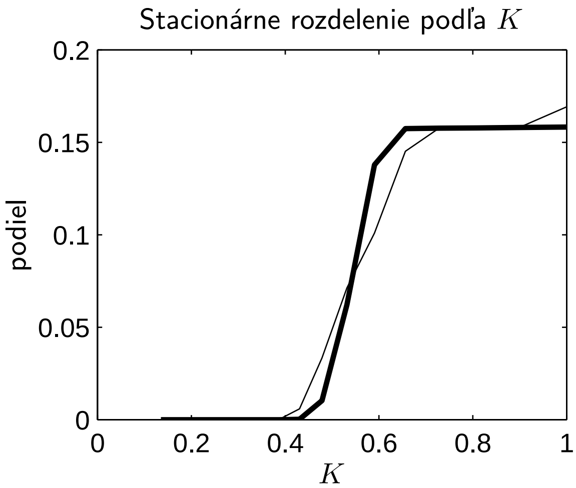


Obr. 11: Simulovaný vývoj agregovaného investovania

vidno, ako aj pri väčšom množstve agentov vznikajú tzv. *hospodárske cykly*, teda alternujúce obdobia investičnej aktivity a pasivity na makroekonomickej úrovni.

Drobným problémom pri takejto simulácii je výber počiatočných hodnôt A^0 a K^0 pre každú simulovanú jednotku. Aby sa eliminoval vplyv tohto výberu, potrebujeme alebo zabezpečiť jeho súlad so stacionárnym rozdelením, alebo vygenerovať dostatočný počet realizácií, aby bol tento vplyv zanedbateľný. Obidva postupy majú svoje výhody aj nevýhody a prakticky je jedno, ktorý použijeme.

Štatistickou analýzou takto vygenerovaných časových radov, môžeme vypočítať stacionárne rozdelenie podnikov podľa stavovej premennej, počítané už v kapitole 2.5. Na obrázku 12 môžeme porovnať rozdelenie podnikov podľa hodnoty stroja získané takouto Monte – Carlo metódou s rozdelením vypočítaným podľa vyššie spomínaného postupu (znázorneného tenkou čiarou). Vidíme, že sa trochu líšia a dôvodom budú najskôr nie najlepšie numerické



Obr. 12: Stacionárne rozdelenie podnikov na základe simulácie

vlastnosti predchádzajúcej metódy. Pri hustejšom delení použitých premenných však tieto rozdiely prakticky zaniknú. V takom prípade je už použitie metódy uvedenej v kapitole 2.5 možné a aj výhodné, lebo simulácie sú časovo omnoho náročnejšie ako táto iteračná schéma.

Výpočet tohto rozdelenia je veľmi dôležitý, ak chceme vypočítať priemernú hodnotu akumulácie kapitálu v sektore (v našom prípade ide o priemerné opotrebovanie výrobného stroja). Tá sa počíta podľa vzťahu

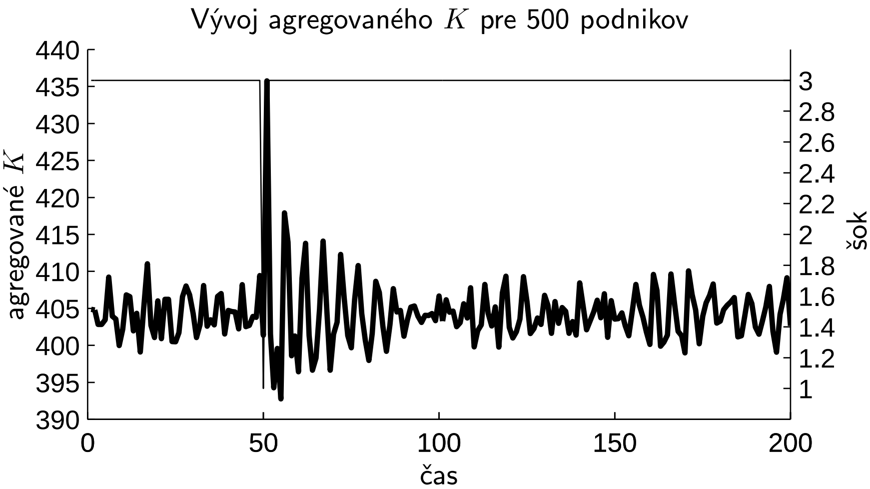
$$\overline{K} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i K_i$$

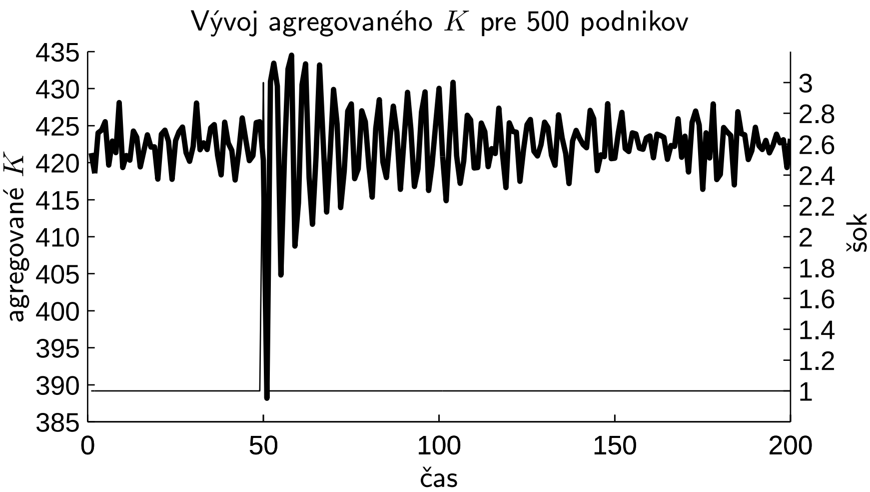
kde π_i je vypočítaný podiel firiem s daným stavom K. V praxi nás totiž často zaujíma, ako bude táto priemerná hodnota reagovať na zmenu parametrov modelu, ktoré môžeme kontrolovať (napr. cena stroja, zdanenie zisku, prispôsobovacie náklady a pod.).

Prepíšme si teraz ziskovosť podniku i v čase t (A^{it}), ako sme ju formulovali v kapitole 2.1 na

$$A^{it} = A^t \varepsilon_{it} \tag{9}$$

kde ε_{it} je šoková premenná charakteristická pre daný podnik a daný čas a nezávislá od ostatných a A^t je globálna ziskovosť spoločná pre všetkých. Takéto usporiadanie je veľmi prirodzené, lebo zisky podnikov do značnej miery závisia práve od vonkajších faktorov ako napr. inflácia alebo daňová politika vlády, ktoré sú pre všetky spoločné.



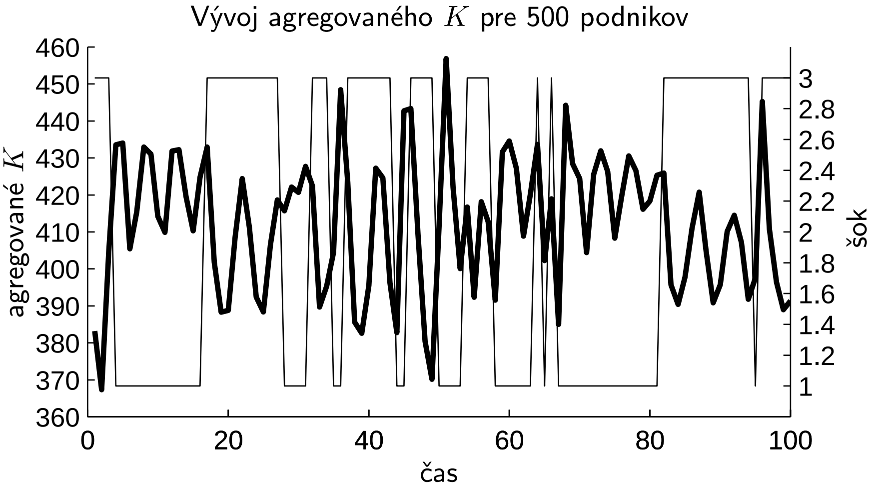


Obr. 13: Reakcie investovania na šok v jednej perióde

To, čo nás v tomto prípade zaujíma, je reakcia investovania na zmenu tejto globálnej šokovej premennej A^t. A^t aj ε_{it} budeme v tomto prípade modelovať nezávislými Markovovskými procesmi. Z nich si podľa (9) odvodíme

Markovovský proces pre A^{it} a k tomuto procesu si nájdeme podľa už známeho postupu optimálne rozhodovanie firiem. Simulovanie začneme vygenerovaním časového radu pre A^t, a potom k nemu vygenerujeme vývoj celého sektora.

Výsledky reakcie výrobného sektora pre náš problém výmeny výrobného stroja sú znázornené na obrázku 13. Opäť sa stretáme s faktom pozorovaným už v kapitole 2.4 a to, že pri zvýšení ziskovosti nedôjde tak rýchlo k výmene stroja a tým pádom investície klesajú (a opačne). Zaujímavým faktom, ktorý možno pozorovať je, že pri takomto jedno-impulzovom šoku (znázornenom na obrázku tenkou čiarou) dôjde k „rozkmitaniu“ ekonomiky (výraznejšiemu vybudeniu hospodárskych cyklov), ktoré sa ale po čase ustáli.



Obr. 14: Vývoj investovania pri danom scenári vonkajšej šokovej premennej

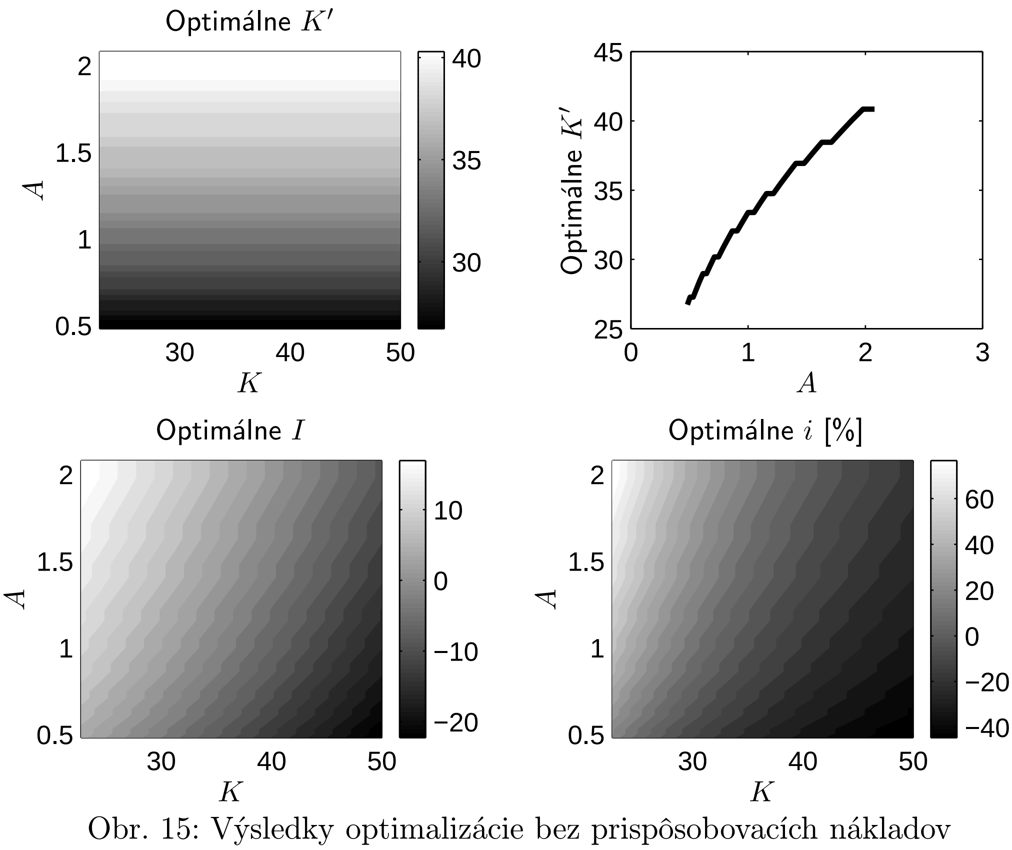
Iné je to v prípade náhodného vývoja šokovej premennej, kedy sú impulzy náhodné. Takýto stav je zobrazený na obr. 14. Tu sú už cykly výrazné a vďaka neustále dodávaným náhodným impulzom prakticky nezanikajú. Na obrázku je opäť zrejmá záporná korelácia medzi K a A (overená aj výpočtom). V tomto prípade je teda K kontracyklické. Zaujímavosťou konkrétne tohto modelu je, že jeho parametre je možné nastaviť aj tak, aby K bolo procyklické [1].

3 Typológia prispôsobovacích nákladov

V predchádzajúcej kapitole sme všetky výpočty ilustrovali na jednoduchom probléme výmeny výrobného stroja. Proces investovania je však v praxi omnoho komplikovanejší a funkcia prispôsobovacích nákladov $C(A, K, I)$ vystupujúca v rovnici (3) na strane 9 môže nadobúdať rôzne tvary. V tejto kapitole uvádzame prehľad jej najzákladnejších tvarov, tak ako ich uvádzajú Cooper a Haltiwanger v [2], spolu s výsledkami našich optimalizácii a simulácii.

3.1 Nulové prispôsobovacie náklady

Začnime týmto najjednoduchším príkladom, kedy $C(A, K, I) \equiv 0$. Aj keď je táto možnosť v praxi nereálna, poslúži nám na uvedomenie si základných vzťahov, ktoré nebolo možné pozorovať v príklade z kapitoly 2.



Obr. 15: Výsledky optimalizácie bez prispôsobovacích nákladov

Optimálna investičná politika za predpokladu, že náklady na prispôsobenie akumulácie kapitálu sú nulové je znázornená na obrázku 15. Vidíme, že pre každý stav ziskovosti A je optimálna nejaká držba K (prvé dva grafy). Nulové prispôsobovacie náklady spôsobia, že podnik túto optimálnu držbu svojho kapitálu dosiahne pri zmene A jednorázovou investíciou a potom už investuje len toľko, aby znuloval efekt amortizácie (keďže ho to nič nestojí).

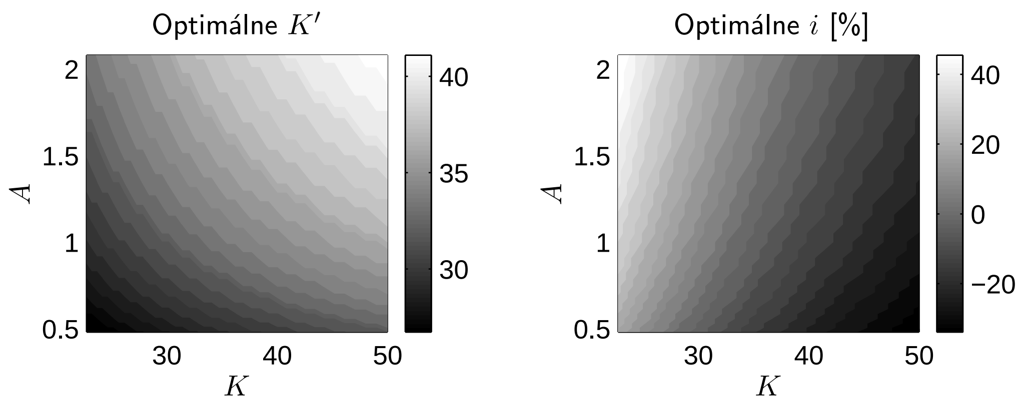
Na poslednom grafe tohto obrázku sme znázornili investície pomocou tzv. *miery investovania* (angl. *investment rate*), ktorá je definovaná ako $i_t = \frac{I_t}{K_t}$. V nasledujúcich kapitolách budeme investovanie znázorňovať touto veličinou, ktorá nám hovorí o realite viac ako len čistá hodnota investícii.

3.2 Konvexné prispôsobovacie náklady

V tradičných modeloch sa často predpokladá, že prispôsobovacie náklady sú konvexné. Za predpokladu, že majú tvar daný funkciou

$$C(A, K, I) = \frac{\gamma}{2}(I/K)^2 K$$

dostávame optimálne investovanie znázornené na obrázku 16.



Obr. 16: Optimálne investovanie pri konvexných prisp. nákladoch

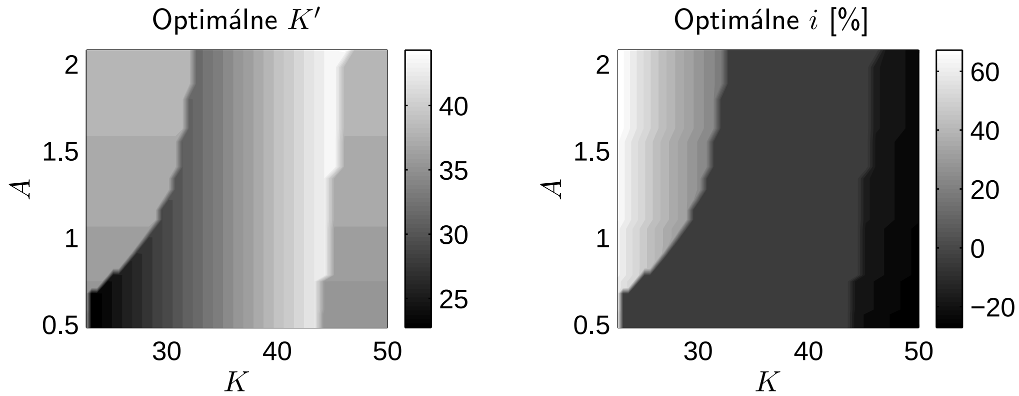
Môžeme na ňom pozorovať, že v porovnaní s obrázkom 15 nie je už rozsah optimálneho i taký veľký. Zvyšovaním parametra γ je možné tento rozsah ešte viac obmedziť.

3.3 Nekonvexné prispôsobovacie náklady

Počas období, kedy podnik investuje, často čelí nákladom, ktoré sú proporcionálne akumulácii jeho kapitálu. Sú to napríklad náklady spojené s rekonštrukciou výroby alebo rekvalifikáciou pracovníkov. Prispôsobovacie náklady tohto typu môžeme zapísať ako

$$\mathrm{C}(A, K, I) = \begin{cases} 0 & \text{ak } I = 0 \\ FK & \text{ak } I \neq 0 \end{cases}$$

kde F je parameter. Optimálne investovanie pri takýchto prispôsobovacích nákladoch je na obr. 17.



Obr. 17: Optimálne investovanie pri nekonvexných prisp. nákladoch

Z výsledkov tejto optimalizcie vyplýva, že v tomto prípade je dosť často pre podnik optimálne neinvestovať. Túto možnosť na druhom grafe znázorňuje veľká šedá oblasť v jeho strede. Mimo nej existuje pre každé A práve jedna optimálna hodnota K, ktorú podnik v prípade potreby dosiahne jednorázovou investíciou.

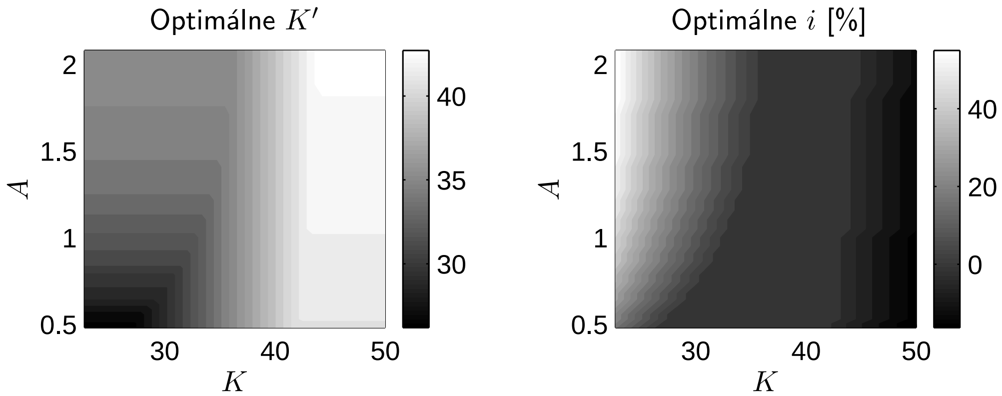
3.4 Transakčné náklady

Nakoniec je veľmi rozumné uvažovať, že medzi nákupnou a predajnou cenou kapitálu je rozdiel. V praxi to znamená asi toľko, že ak podnik kúpi stroj za cenu p_b, v prípade potreby (keď mu neprináša zisky, aké by potreboval) ho predá už len za cenu $p_s < p_b$.

Tento fakt priamo nesúvisí s prispôsobovacími nákladmi, tak ako ich máme formulované v tejto práci, ale do našich výpočtov ho veľmi jednoducho zakomponujeme do rovnice (3) tak, že o p vystupujúcej v tejto rovnici budeme predpokladať, že je nasledovnou fuknciou I

$$p \equiv p(I) = \begin{cases} p_b & \text{ak } I > 0 \\ p_s & \text{ak } I < 0 \end{cases}$$

Optimálne investovanie za predpokladu existencie transakčných nákladov je znázornené na obr. 18. Na tomto obrázku je možné vidieť, že podobne,

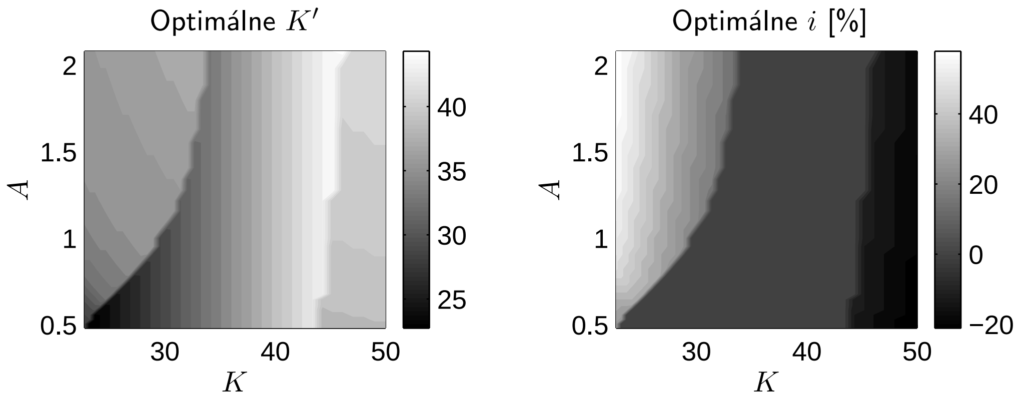


Obr. 18: Optimálne investovanie s transakčnými nákladmi

ako v predchádzajúcom prípade aj tu nám vznikla oblasť takých hodnôt A a K, kedy je optimálne neinvestovať. Avšak v tomto prípade závisí optimálna hodnota K' mimo tejto oblasti už nielen od A, ale aj od K.

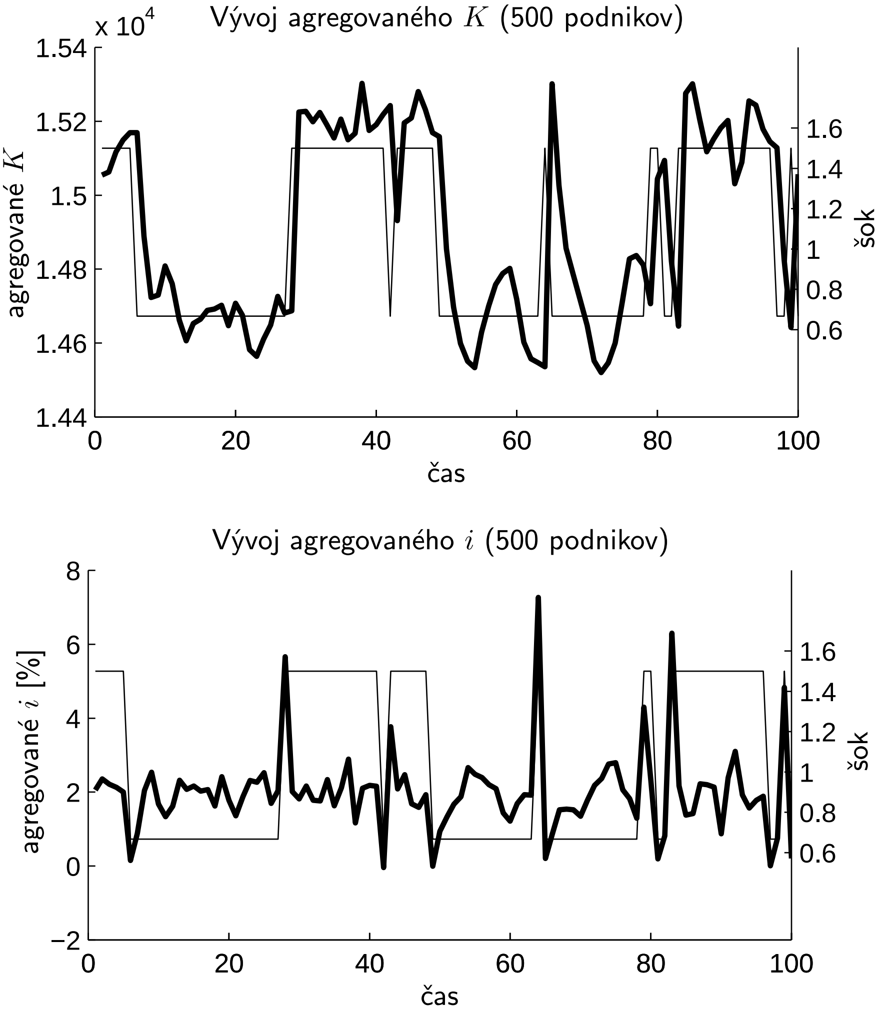
3.5 Kombinované prispôsobovacie náklady

Na záver tejto práce sformulujme model, v ktorom budú vystupovať všetky druhy prispôsobovacích nákladov súčasne. Takýto model je v skutočnosti najreálnejší [2] a vhodným nastavením jeho parametrov je ho možné veľmi dobre „nafitovať" na reálne dáta. Na obrázku 19 je podobne ako vyššie znázornená optimálna politika investovania jednotlivých agentov za predpokladu, že čelia všetkým vyššie opísaným druhom prispôsobovacích nákladov.



Obr. 19: Optimálne investovanie s kombinovanými prisp. nákladmi

Okrem vzťahov, ktoré je možné vyčítať z optimálneho investovania podnikov v jednotlivých stavoch nás takisto môžu zaujímať aj dynamické charakteristiky tohto modelu. Sledujúc postup opísaný v kapitole 2.6 si nasimulujeme vývoj celého podnikového sektora pri pevne stanovenom scenári vonkajšej šokovej premennej, ktorá ovplyvňuje ziskovosť všetkých podnikov.

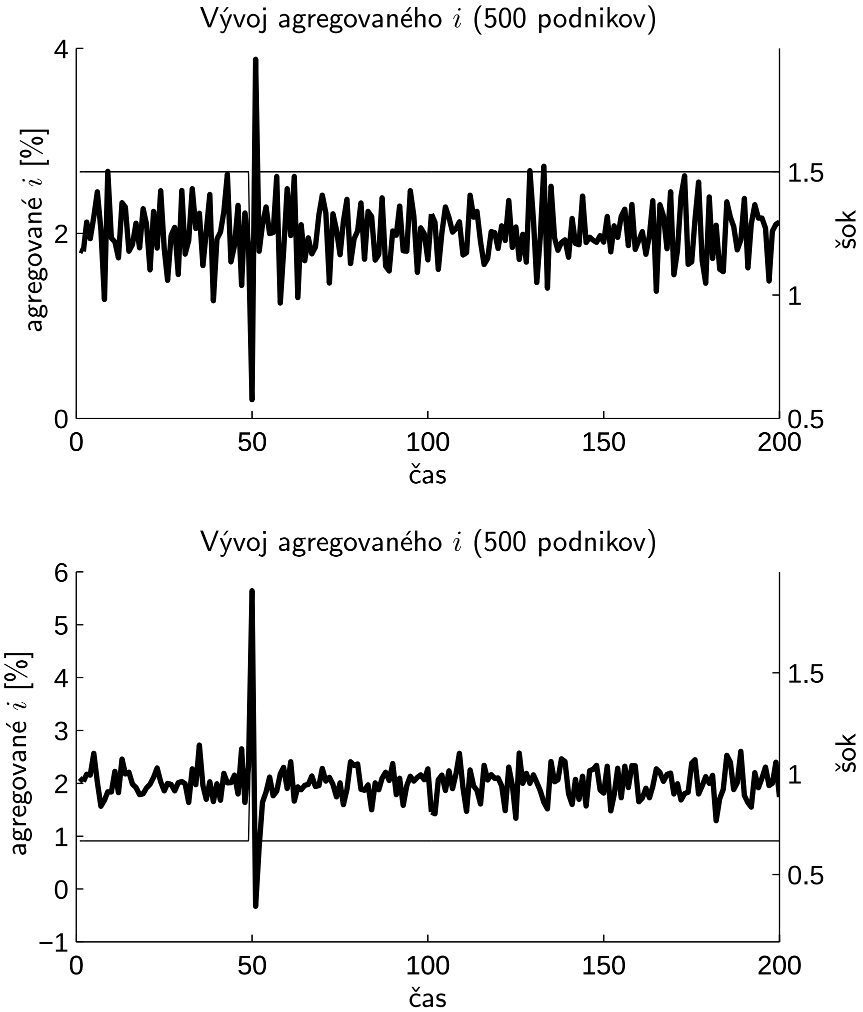


Obr. 20: Vývoj investovania pri danom scenári vonkajšej šokovej premennej

Výsledok takejto simulácie je znázornený na obrázku 20 (šok je znázornený tenkou čiarou). Vidíme tu výraznú kladnú koreláciu medzi K a A, teda na rozdiel od výsledkov zo strany 24 nám tu K vystupuje procyklicky.

Ďalším rozdielom je citlivosť simulovaného investovania na šok, daný mu v jednej perióde. Už na predchádzajúcom obrázku môžeme pozorovať, že cykly už nie sú také výrazné, ako boli v probléme výmeny výrobného stroja. Dôvodom takéhoto stavu je, že v tomto prípade majú podniky možnosť „jemnejšie“ prispôsobovať akumuláciu svojho kapitálu a tak zmeny v investovaní sú výrazné len v periódach, kedy došlo aj ku zmene šokovej premennej.

Tento predpoklad nám potvrdzuje aj simulácia oboch druhov šokov len v jednej perióde (obr. 21). Zaujímavým faktom pozorovaným pri tejto simulácii je, že na pozitívny šok reagujú naše podniky väčšou zmenou investícii, ako



Obr. 21: Reakcie miery investovania na šok v jednej perióde

na negatívny. Možnosť „jemnejšieho“ prispôsobenia akumulácie kapitálu (aj zápornými investíciami) sa zas prejaví veľmi rýchlym stabilizovaním sektora, teda na rozdiel od situácie na obr. 13, nedôjde v tomto prípade k „rozkmitaniu“ ekonomiky. Ak by sme tento efekt chceli dosiahnuť aj tu, stačilo by vhodne zmeniť prispôsobovacie náklady.

4 Záver

Hlavným prínosom tejto práce je veľmi konkrétny a detailne opísaný matematický aparát, ktorým je možné modelovať investície a ich vývoj v podnikovom sektore. Jeho základom je optimalizačná úloha formulovaná na úrovni podniku nachádzajúceho sa v konkrétnej situácii. Ten maximalizuje diskontovanú hodnotu všetkých svojich budúcich ziskov za štandardných účtovných obmedzení, pričom čelí neistote do budúcnosti, ktorá je modelovaná vývojom šokovej premennej. Túto premennú reprezentujeme ako ziskovosť podniku a predpokladáme o nej, že sleduje Markovovský proces s danou maticou prechodu, ktorej vlastnosti sú opísané v kapitole 2.3.

Takúto úlohu formulujeme ako úlohu dynamického programovania (na nekonečnom časovom horizonte), ktorú riešime iteračnou schémou založenou na rovnici 3. Jej riešením dostávame optimálnu hodnotu budúcej akumulácie kapitálu a tým pádom máme aj optimálnu hodnotu investícii. Využitím faktu, že poznáme rozhodnutia všetkých podnikov simulujeme potom vývoj celého sektora (pozostávajúceho z veľkého množstva firiem). Z takto vypočítaných a simulovaných dát už môžeme vyčítať rôzne charakteristiky systému, ktoré nás zaujímajú.

Prispôsobovacie náklady, ktoré majú na investovanie najväčší vplyv, môžu v praxi nadobúdať rôzne tvary. Najzákladnejšie z nich sú spolu s výsledkami ilustračných výpočtov uvedené v kapitole 3. V jej závere sa nachádza opis všeobecného modelu, zahrňujúceho všetky druhy prispôsobovacích nákladov, s ktorým je možné dostatočne verne simulovať realitu.

Využitím modelovacej techniky opísanej v tejto práci je možné riešiť množstvo praktických úloh. Môžeme napríklad maximalizovať zdanenie ziskov za podmienky, že priemerná miera investovania nám neklesne pod určitú hodnotu. Jediné čo treba urobiť naviac je zakomponovať toto zdanenie ako parameter do funkcie ziskovosti. Miernou modifikáciou tohto problému (zámenou kapitálu za prácu) môžeme modelovať politiku zamestnanosti. Môžeme hľadať napr. optimálne odstupné, ktoré je istou formou prispôsobovacích nákladov alebo skúmať, ako reguje zamestnanosť na zmeny šokovej premennej. Toto všetko môže byť náplňou ďalších prác z tejto oblasti.

Literatúra

[1] Cooper, R. W.: Investment. Boston University, Február 2000 (http://econ.bu.edu/faculty/cooper)

[2] Cooper, R. W. – Haltiwanger, J. C.: On the Nature of Capital Adjustment Costs. Boston University, Apríl 2000 (http://econ.bu.edu/faculty/cooper)

[3] Felderer, B. – Homburg, S.: Makroekonomika a nová makroekonomika. Bratislava, ELITA 1995

[4] Kovačka, M.: Makroekonomika. Bratislava, SPN 1992