

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave
Ekonomická a finančná matematika

Dvojfaktorové modely derivátov úrokových mier so stochastickou volatilitou

Diplomová práca

Diplomant: Mária Alexová

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2002

Obsah

Glosár	2
Zoznam symbolov	4
Úvod	5
1 Deriváty úrokovej miery	6
1.1 Základné pojmy	6
2 Modely časovej štruktúry úrokových mier	10
2.1 Jednofaktorové term-structure modely	11
2.2 Viacfaktorové modely term-structure	12
2.3 Modely so stochastickou volatilitou	13
3 Ciele práce	15
4 Matematické modelovanie jedno a viacfaktorových modelov	16
4.1 Odvodenie všeobecného jednofaktorového modelu	16
4.2 Všeobecný model so stochastickou volatilitou	19
4.3 Odvodenie PDR pre model so stochastickou volatilitou	20
5 Dvojfaktorové modely s rôznymi časovými škálami	24
5.1 Numerické simulácie dvojfaktorových modelov	24
5.2 Aproximácia riešenia PDR	30
Záver	35
Literatúra	36
Príloha	38

Glosár

Arbitráž: vykonanie niekoľkých obchodov na trhu za účelom obdržania garantovaného bezrizikového zisku.

Brownov pohyb: stochastický proces odvodený od Wienerovho procesu definovaného v kapitole 2.1.

Cap: kontrakt, ktorý pravidelne vypláca rozdiel medzi súčasnou úrokovou mierou a mierou definovanou pri podpise kontraktu.

Caplet: jednotlivá platba capu.

Derivát: cenný papier, ktorého hodnota je závislá (odvodená) od už existujúcich cenných papierov na trhu.

Dlhopis: cenný papier, v ktorom sa dlžník zaväzuje, že v stanovenej lehote vyplatí nominálnu hodnotu a v prípade kupónového dlhopisu, že navyše bude v stanovených lehotách vyplácať pravidelný úrok (kupón).

Drift: koeficient pri člene dt v rámci stochastického procesu.

Floor: kontrakt, ktorý pravidelne vypláca rozdiel medzi mierou definovanou pri podpise kontraktu a súčasnou úrokovou mierou; opak capu.

Forward: dohoda kúpiť alebo predat' cenný papier v budúcnosti v dohodnutej cene.

Forwardová miera: budúca úroková miera, pomocou ktorej sa oceňujú forwardy.

Kontrakt: zákonne platná dohoda medzi dvoma stranami.

Kupón: pravidelná platba vyplácaná dlhopisom.

LIBOR - London Inter-Bank Offer Rate: denná skupina úrokov pre rozličné meny a maturity.

Market price of risk - trhova cena rizika: miera navyše výnosu oproti bezrizikovému vzhľadom na jednotku rizika.

Maturita - doba splatnosti: dĺžka trvania dlhopisu, ktorá určuje, kedy získame neskoršiu platbu.

Mean reversion: vlastnosť procesu, ktorá zaručuje jeho opakovaný návrat k dlhodobému priemeru.

Nominálna hodnota: hodnota dlhopisu v čase maturity.

Okamžitá úroková miera - overnight - short rate: úrok platený na veľmi krátku pôžičku.

Ornstein-Uhlenbeckovej proces: proces, ktorého základná vlastnosť je mean-reversion a má tvar $dX = \kappa(\theta - X)dt + \sigma dw_t$.

Payoff: výplata derivátu definovaná ako nominálna hodnota mínus strike price.

Stochastický proces: spojitý proces, ktorý môže byť rozložený na driftovú časť a časť s Brownovým pohybom, tzv. stochastickú alebo náhodnú časť a jeho tvar je $dX = \mu dt + \sigma dw_t$.

Strike price: pevne dohodnutá cena, za ktorú môže byť cenný papier predaný alebo kúpený vo vopred stanovenom čase.

Term structure - časová štruktúra úrokových mier: graf závislosti výnosovej krivky na čase do maturity.

Úroková miera: miera, v ktorej je platený úrok.

Volatilita: koeficient pri člene dw_t v rámci stochastického procesu.

Výnos: priemerná hodnota úroku ponúkaná dlhopisom.

Výnosová krivka - yield curve: graf závislosti výnosu dlhopisu oproti jeho dobe splatnosti.

Zoznam symbolov

α - drift procesu, ktorý sleduje premenná y .

β - funkcia určujúca, aký vplyv má volatilita premennej y na jej vývoj.

θ - dlhodobý priemer úrokovej miery, ku ktorému je ťahaná hodnota úroku r v prípade Ornstein-Uhlenbeckovej procesu.

λ - trhovú cenu rizika.

μ - drift stochastického procesu, ktorý sleduje úroková miera r .

ρ - funkcia vyjadrujúca koreláciu medzi w_t a volatilitou úrokovej miery r .

σ - volatilita vývoja úrokovej miery r .

τ - čas, ktorý ostáva do maturity.

ω - trhovú cenu rizika volatility.

P - cena dlhopisu.

R - spojitá úročná úroková miera.

r - okamžitá úroková miera.

y - premenná, ktorej správanie určuje volatilitu úrokovej miery r .

$\langle \cdot \rangle$ - spriemernenie funkcie vzhľadom na premennú y .

Úvod

Deriváty úrokovej miery sú v súčasnosti jednou z najobchodovateľnejších foriem finančných derivátov a preto je dôležité vedieť ich správne oceniť. Jedným z prístupov, ktorý sme prezentovali aj v tejto práci, je vysvetľovanie dynamiky časovej štruktúry úrokových mier pomocou stochastických procesov. Cieľom práce je odvodenie riešenia všeobecného modelu term structure so stochastickou volatilitou.

V prvej kapitole sa bližšie zoznámime so základnými pojmami a vzťahmi, ktoré sú bežné v danej terminológii a budú sa vyskytovať v celej práci.

Druhá kapitola poskytuje stručný prehľad doteraz odvodených modelov výnosovej krivky. Vysvetľuje základný jednofaktorový model, pri ktorom jediným zdrojom neistoty je okamžitá úroková miera. Objasňuje, prečo je korektnejšie zaoberať sa viacfaktorovými modelmi, špeciálne modelmi so stochastickou volatilitou.

Deliacim článkom medzi prvou a druhou časťou je tretia kapitola, ktorá podrobnejšie opisuje ciele práce a postup riešenia.

V štvrtej kapitole analyticky odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu na základe predpokladov o procese, ktorý sleduje okamžitá úroková miera. Alternatívny spôsob je použitie Feynman - Kacovho vzorca, ktorý povoľuje prechod od očakávanej hodnoty bezkupónového dlhopisu k tejto rovnici pri splnení určitých predpokladov. Rovnaký postup ďalej využijeme aj pri odvodení parciálnej diferenciálnej rovnice pre dvojfaktorový model. Tu sa za základ vezme proces, v ktorom okrem short-rate vystupuje aj dopĺňajúca premenná korelovaná s volatilitou úrokovej miery a významne vplývajúca na jej pohyby.

Záverečná kapitola sa zaoberá aproximačnou metódou, pomocou ktorej sa dá približne určiť funkcia ceny dlhopisu vyhovujúca parciálnej diferenciálnej rovnici spĺňajúca počiatočnú a okrajové podmienky. Navyše sú v nej graficky znázornené numerické simulácie niekoľkých konkrétnych dvojfaktorových modelov.

Aj touto cestou by som sa chcela poďakovať vedúcemu diplomovej práce Danielovi Ševčovičovi za jeho odborné vedenie, pripomienky, návrhy a za množstvo času a trpezlivosti, ktoré mi venoval pri vypracovávaní diplomovej práce.

1 Deriváty úrokovej miery

Deriváty úrokovej miery poznáme podľa toho, že ich výplata, čiže *payoff* je nejakým spôsobom závislá od hodnoty úrokovej miery, ktorá je používaná ako na diskontovanie, tak aj na jej definovanie. Najväčší rozvoj zaznamenali v 80-tych a začiatkom 90-tych rokov minulého storočia a v súčasnosti sú pravdepodobne najpredávanejšou triedou finančných derivátov. Pri ich oceňovaní treba brať do úvahy rôzne faktory, vďaka ktorým je toto oceňovanie zložitejšie ako napríklad pri akciách, opciách alebo derivátoch výmenného kurzu:

- Pravdepodobnostné správanie sa jednotlivých úrokových mier je komplikovanejšie než správanie sa ceny akcie alebo výmenného kurzu.
- Na to, aby sme vedeli oceniť nejaký produkt je dôležité použiť model, ktorý opisuje správanie sa celej *výnosovej krivky* (tzv. *Yield curve*).
- Volatility rôznych bodov na výnosovej krivke sú rôzne. A teda modely, ktoré opisujú výnosovú krivku sú spojené s pohybmi celej krivky a nie len so zmenou jednotlivej premennej.

1.1 Základné pojmy

Základným kontraktom týkajúcim sa derivátov úrokovej miery je dohoda zaplatiť určitú čiastku v súčasnosti oproti prísľubu obdržania (zvyčajne) vyššej sumy o nejaký čas. V tomto prípade sú postačujúce dve čísla na opísanie takéhoto kontraktu – dĺžka jeho trvania (tzv. *doba vypršania kontraktu* alebo tiež *maturita*), ktorá určuje, kedy získame neskoršiu platbu; a pomer veľkosti dnešnej platby k neskoršej platbe. Čas maturity zvyčajne označujeme T a hodnotu dnešnej platby k budúcej $P(0, T)$. Teda inými slovami: Jednu korunu v čase T si v súčasnosti (teda v čase 0) môžeme kúpiť za $P(0, T)$ korún. Ak si predstavíme túto korunu ako derivát, ktorý má nejakú hodnotu v každom čase t menšom ako T , nazveme ju *bezkupónový dlhopis* alebo *discount bond*. $P(t, T)$ je hodnota bezkupónového dlhopisu s dobou splatnosti T v čase t . *Nominálnou hodnotou* nazývame hodnotu, ktorá má byť vyplatená v čase T a teda je to hodnota $P(T, T)$. Pri discount bondoch predpokladáme, že nominálna hodnota je rovná jednej.

Častejšie používanou formou dlhopisov je *kupónový dlhopis* teda dlhopis, ktorý v stanovených časových intervaloch (napr. mesačne, štvrťročne,

polročne, ročne ...) vypláca stanovené čiastky – tzv. *kupóny* – a na konci vyplatí nejakú (zvyčajne vyššiu) čiastku. Cena dlhopisu v čase sa mení v závislosti od doby do maturity, fluktuácií úrokovej miery a iných faktorov ako napríklad nevyrovnaných kupónových platieb. Kupónový dlhopis sa dá zostrojiť ako portfólio bezkupónových, a preto budeme uvažovať len bezkupónové dlhopisy.

Cena dlhopisu $P(t, T)$ je teda funkcia ako okamžitého času t , tak aj doby splatnosti T . Graf funkcie $P(t, T)$ je preto dvojdimenzionálna plocha zachytávajúca rozličné hodnoty t a T . Pre dané fixované $t = t_0$, graf $P(t, T)$ vzhľadom na T reprezentuje ceny dlhopisov rozličných maturít v čase t_0 a vo všeobecnosti je to klesajúca funkcia. Tieto ceny sú síce rôzne, ale sú navzájom korelované. Naopak, pre dané fixované $T = T_0$ je grafom funkcia, ktorá určuje správanie konkrétneho dlhopisu (s dobou splatnosti T_0) v každom čase t až do maturity.

Pri spojitom úročení je cena dlhopisu s maturitou T v čase t rovná :

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (1)$$

kde $R(t, T)$ je *spojite úročená úroková miera* v čase t s dobou splatnosti v T . A teda platí :

$$R(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T-t}. \quad (2)$$

Táto väzba medzi cenou dlhopisu a spojitou úročenou úrokovou mierou nám umožňuje určiť krivku úrokovej miery $R(t, T)$, ak poznáme cenu dlhopisu $P(t, T)$ v každom čase t .

Závislosť $R(t, T)$ na dobe splatnosti T určuje *yield curve*, teda *výnosovú krivku* a závislosť výnosovej krivky na čase do maturity $T-t$ sa nazýva *časová štruktúra úrokových mier* (alebo aj *term structure*). Tu treba poznamenať, že term structure je vlastne graf $R(0, T)$ opisujúci závislosť úrokovej miery od doby splatnosti T v čase $t = 0$. V literatúre sa však môžeme stretnúť s tým, že pojmy výnosová krivka a časová štruktúra úrokových mier bývajú často zamieňané.

Začiatok term structure označujeme *short rate* alebo tiež *overnight* teda úrok na veľmi krátku dobu. Udáva neúplnú informáciu o časovej štruktúre úrokových mier a je definovaný ako :

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\log P(t, t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (3)$$

Na vysvetlenie tvaru výnosovej krivky bolo navrhnutých niekoľko teórií, z nich k najznámejším patria napríklad:

Teória očakávaní tvrdí, že *long-term* teda dlhodobá úroková miera sa správa ako očakávaná budúca short-rate. Teda ak $E_t(r(s))$ označuje očakávanú hodnotu v čase t okamžitej úrokovej miery v čase s , $R(t, T)$ je určená ako

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T E_t(r(s)) ds.$$

Teória rozdelenia trhu hovorí, že každý predávajúci a kupujúci preferuje inú dobu splatnosti, a preto tvar výnosovej krivky bude určený z podmienok ponuky a dopytu long-term trhu v závislosti od podmienok short-term trhu.

Teória preferencie likvidity predpokladá, že ten, čo požičiava, uprednostňuje krátkodobé pôžičky z dôvodu preferencie likvidity. A teda long-term dlhopisy majú vyššie výnosy ako krátkodobé. Rovnica pre $R(t, T)$ u posledných dvoch spomínaných teórií má nasledovný tvar:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(\int_t^T E_t(r(s)) ds \int_t^T L(s, T) ds \right),$$

kde $L(s, T)$ je akási prémia dlhopisu s dobou splatnosti T v čase s určená tou ktorou teóriou a udáva odchýlku od teórie očakávaní.

K najjednoduchším finančným derivátom patria okrem dlhopisov ešte tzv. *forwardy*, teda kontrakty, kedy sa obchodujúce strany dohodnú, že v čase T_1 kúpi strana A dlhopis s dobou splatnosti T_2 (väčšou ako T_1) za cenu K . Na oceňovanie forwardov sa používa *forward rate*- spojito úročená budúca úroková miera v čase t na obdobie $(T, T + \Delta t)$ a označujeme ju $f(t, T, T + \Delta t)$. Pomer ceny dlhopisov s maturitou T a $T + \Delta t$ je daný vzťahom :

$$\frac{P(t, T + \Delta t)}{P(t, T)} = e^{-f(t, T, T + \Delta t)(\Delta t)}.$$

A teda forward rate je určená :

$$f(t, T, T + \Delta t) = -\frac{\log P(t, T + \Delta t) - \log P(t, T)}{\Delta t}. \quad (4)$$

Analogicky ako pri short rate, aj pre *okamžitú forward rate* platí :

$$f(t, T) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[-\frac{\log P(t, T + \Delta t) - \log P(t, T)}{\Delta t} \right] = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}. \quad (5)$$

Ďalším príkladom často obchodovaného derivátu, hlavne v medzibankovom styku, je *cap*. Cap je súbor *capletov*, pričom caplet je definovaný ako kontrakt, kde vypisovateľ vyplatí kupcovi v čase $t(i + 1)$ rozdiel medzi aktuálnym úrokom a úrokom zvoleným v čase $t(i)$ plus pevne danú hodnotou K (*strike price*) vynásobenú dĺžkou obdobia. Teda kupec sa zaist'uje voči plateniu vyššieho úroku ako si určil, čo je výhodné hlavne v prípade dlhu s voľným úrokom. Protikladom capu je *floor*, ktorý zasa limituje platený úrok zospodu.

2 Modely časovej štruktúry úrokových mier

Úroková miera ako taká je vo všeobecnosti ovplyvňovaná veľkým množstvom rozličných faktorov. Jedným z tých, ktoré vplývajú na výšku úroku pri derivátoch, je doba splatnosti čiže maturita. Ako už bolo spomenuté, závislosť medzi výnosom bezkupónového dlhopisu a dobou splatnosti udáva *term structure* alebo tiež *výnosová krivka*. Body na tejto krivke určujú výšku úroku pri určitej dobe splatnosti v čase 0. Avšak ako sa mení čas, menia sa aj jednotlivé hodnoty úroku na term structure a navyše sa zvykne meniť aj samotný tvar krivky. Modely, ktoré opisujú pravdepodobnostné správanie sa všetkých úrokových mier a sú spojené s pohybmi celej krivky poznáme pod štyrmi rôznymi názvami:

- *yield curve modely*
- *term structure modely*
- *modely výnosovej krivky*
- *modely časovej štruktúry úrokových mier.*

Rozlišujeme dva základné typy modelov:

Rovnovážne (equilibrium) modely. Pri týchto modeloch je počiatočná term structure výstupom modelu. Nie vždy platí, že vystihuje dnešnú výnosovú krivku, čo býva často kritizované, avšak tomu sa dá predísť definovaním vhodných parametrov. Rovnovážne modely zvyčajne začínajú predpokladmi o premenných v ekonomike. Určia proces pre riziko-neutrálnu short-rate r a potom sa snažia vysvetliť, čo tento proces implikuje pre ceny derivátov. Je ale dôležité si uvedomiť, že toto všetko platí len v rizikovo - neutrálnom svete. Príkladom rovnovážneho modelu je Vašíčkov model [6], ktorý vychádzal z predpokladu stochastického vývoja úrokovej miery a bezarbitrážneho princípu v ekonómii. Ďalším je napríklad Cox, Ingersoll, Ross model [6], ktorý okrem predpokladov stochastického vývoja jednej alebo viacerých premenných v ekonomike berie do úvahy aj celkové rovnovážne podmienky a preferencie reprezentatívneho investora.

No-arbitrage (term structure consistent) modely. Od rovnovážnyh sa líšia tým, že pôvodná term structure je vstupom do modelu a teda model automaticky presne vystihuje súčasný stav. Patrí sem napríklad model Ho and Lee [6], ktorý sleduje pohyby výnosovej krivky, alebo Heath, Jarrow and Morton model [6], ktorý uvažuje zmeny vo forwardových mierach. Tento model patrí do skupiny tzv. non-Markovian modelov [1], ktoré v sebe nemajú zahrnutý Markovov proces a ich praktické využitie je vzhľadom na ich výpočtovú náročnosť značne limitované.

Ďalej sa budeme zaoberať rovnovážnymi modelmi.

2.1 Jednofaktorové term-structure modely

Základnou skupinou opisujúcou deriváty úrokovej miery sú jednofaktorové modely - čiže modely, kde vystupuje len jedna stavová premenná, ktorou je *short-rate* r . Teda proces pre r dovoľuje len jeden zdroj neistoty. Predpokladáme, že r_t sleduje spojitý Markovov stochastický proces. To implikuje, že pravdepodobnostné rozdelenie premennej r v ľubovoľne zvolenom čase v budúcnosti závisí len od jej súčasnej hodnoty. Potom r vyhovuje rovnici:

$$dr = \mu_r(r, t)dt + \sigma_r(r, t)dw, \quad (6)$$

kde dr znamená zmenu úroku za časový okamih dt , μ_r označuje *drift*, σ_r *volatilitu* a dw je zmena tzv. *Wienerovho procesu*.

Definícia 2.1 *Štandardný Wienerov proces $\{w(t), t \geq 0\}$ je t - parametrický systém náhodných veličín. Platí:*

- $w(0) = 0$
- *prírastky dw sú navzájom nekorelované v čase*
- $E(dw) = 0$, *teda stredná hodnota je nulová*
- $var(dw) = dt$, *teda variancia je lineárnou funkciou času, čiže môžeme povedať, že platí: $dw \approx \varepsilon\sqrt{dt}$, kde ε je náhodná premenná s normálnym rozdelením.*

Jednofaktorový model implikuje, že všetky úrokové miery sa počas krátkeho intervalu hýbu tým istým smerom, ale nemusia sa meniť tým istým spôsobom. Z tohto však nevyplýva, že term-structure musí mať vždy ten istý

tvar. A hoci sa to môže zdať nie príliš dôveryhodné, jednofaktorový model zachytáva pomerne širokú škálu výnosových kriviek.

Pri konštrukcii jednofaktorových modelov treba hľadať vhodnú formu pre stochastický proces náhodnej premennej a teda by mali byť splnené nasledujúce požiadavky:

- Konzistentnosť rozsahu hodnôt s pravdepodobnými hodnotami úrokov, t.j. úrok by nemal byť záporný a tiež veľmi vysoký.
- *Mean-reversion* - vysoké hodnoty úroku zvyknú mať negatívny drift, teda sú častejšie nasledované poklesom ako ďalším rastom; naopak to platí pre nízke hodnoty úroku. Ekonomické vysvetlenie pre tento jav je také, že keď sa zvýšia úroky, ekonomika sa spomalí a nastáva menší dopyt po pôžičkách, čo má za následok zníženie úroku.
- Rozdielnosť volatility úrokov na rôzne obdobia - na kratšie obdobia zvykne byť vyššia volatilita ako na dlhšie.
- Meniaca sa hodnota volatility s meniacou sa hodnotou short-rate.

Problém je, že žiadny z modelov nedokáže zachytiť všetky spomínané vlastnosti. Treba brať do úvahy, čo potrebujeme, teda pri konkrétnej aplikácii tie z vlastností, ktoré najviac ovplyvňujú daný derivát.

Ďalšími príkladmi jednofaktorových modelov sú okrem už spomenutých Vašíčkovho a CIR modelu napríklad Dothanov model, Brennan - Schwartz model, Cox - Ingersol - Ross model premenlivej úrokovej miery alebo Variančný model konštantnej elasticity [7].

2.2 Viacfaktorové modely term-structure

Prvotnou motiváciou pre skúmanie viacfaktorových modelov bola skutočnosť, že jednofaktorové modely, v ktorých (r_t) je Itôov proces učovaný jedným Brownovým pohybom, implikujú perfektnú koreláciu medzi výstupmi dlhopisov všetkých maturít, čo však protirečí empirickým pozorovaniam. Podľa publikácie [8] sa dvojfaktorovými modelmi začali ako jedni z prvých zaoberať Brennan a Schwartz v roku 1979 a ako dva faktory určili krátkodobý a dlhodobý priebeh úrokových mier. V roku 1984 to boli Schaefer a Schwartz, ktorí uvažovali dlhodobú úrokovú mieru a rozpätie medzi dlhodobou a krátkodobou úrokovou mierou. Heath, Jarrow a Morton sa zaoberali hlavne

forwardmi a v roku 1988 určili dva faktory, ktoré ovplyvňujú všetky forwardové miery. Cox, Ingersoll a Ross takisto rozšírili svoj jednofaktorový model o druhú rovnicu, ktorou bol exogénne určený proces pre infláciu. Tento model je aj najbližší Longsaff a Schwartz modelu z roku 1992, ktorí ako druhý faktor určili okamžitú odchýlku zmien úrokovej miery. Výhoda takéhoto modelu je v tom, že cena dlhpisu potom v sebe zahrňuje súčasnú hodnotu úrokovej miery ako aj súčasnú hodnotu volatility úrokovej miery.

Pre oceňovanie niektorých derivátov úrokovej miery je vďaka svojej konštrukcii výhodný model Brace, Gatarek, Musiela [16]. Poskytuje explicitné vzorce a jeho veľkou výhodou je to, že v ňom priamo vystupujú forwardové LIBOR (London Interbank Offered Rate) miery, teda veličiny priamo pozorované na trhu. Hlavnou motiváciou pre vznik tohto modelu bola trhová prax oceňovania capov a býva často vyzdvihovaný kvôli tomu, že ceny derivátov pod ním sa do značnej miery zhodujú s praxou obchodníkov.

2.3 Modely so stochastickou volatilitou

Modely so stochastickou volatilitou, v ktorých druhý náhodný proces určuje stochastickú časť short-rate, sú obľúbenými príkladmi dvojfaktorových modelov. Pre spomenutý ďalší náhodný dej sa väčšinou používa označenie *volatilitu - radiaci proces*. V skutočnosti druhý faktor nemusí byť okamžitá štandardná odchýlka zmien short-rate, ale je jasné, že volatilita je dôležitá premenná pri určovaní cien derivátu a z empirickej skúsenosti je evidentná náhodnosť jej zmien.

Modely pre stochastickú volatilitu úrokových mier sú často motivované ich neskorším vplyvom na vysvetľovaný tvar a pohyby výnosovej krivky. Stali sa populárnymi pri oceňovaní derivátov na akciových trhoch od krachu v roku 1987, kedy sa tiež začal častejšie používať termín implikovaná volatilita.

Prvotné pokusy, ako včleniť náhodnú volatilitu, boli zahrnuté veľkosťou odchýlky do samotnej hodnoty short-rate. Andersen a Lund v roku 1997 za základ vzali jednofaktorový model (16)

$$dr = \kappa(\theta - r(t))dt + \varsigma r^\eta dw.$$

Pre $\eta = 1/2$ je to už spomínaný Cox-Ingersoll-Ross model, avšak ak hodnotu η určovali z dát, zistili, že je jednoznačne väčšia ako jedna (približne $3/2$). Uvedli, že hodnoty η sú bližšie k $1/2$ a citlivosť hodnoty short-rate na zmenu odchýlky sa zmenší, ak ς je zadané ako stochastický proces $(\varsigma_t)_{t \geq 0}$. Nevýhodou je nutnosť zavedenia ďalšieho faktora.

V roku 2001 bola zverejnená práca "Stochastic Volatility Corrections for Interest Rate Derivatives" [2], v ktorej autori Cotton, Foque, Papanicolaou a Sircar študovali jednoduché modely úrokovej miery ako napríklad Vašíčkov a CIR, kde základnou vlastnosťou procesu pre short-rate (r_t) bola mean-reversion. Zistili, že pridanie stochastickej volatility, ktorej miera mean-reversie bola oveľa vyššia, významne ovplyvňuje tvar výnosovej krivky. Teda stáva sa nástrojom, ktorý dokáže efektívne a pomerne jednoducho kalibrovať túto krivku.

V práci [2] autori rozšírili jednofaktorový Vašíčkov model [6] pridaním stochastickej volatility. Táto bola definovaná ako funkcia $f(y_t)$ ergodického procesu (y_t). Základná vlastnosť tohto procesu bola, podobne ako pre (r_t), mean-reversion. Na odvodenie použili dvojdimenzionálny Feynman-Kacov vzorec [10], ktorý určuje prechod od očakávanej ceny bezkupónového dlhopisu k parciálnej diferenciálnej rovnici, ktorej riešením je práve táto cena.

3 Ciele práce

Pri konštrukcii modelov oceňujúcich deriváty úrokových mier je veľmi dôležité brať do úvahy náhodné pohyby úrokovej miery. Ku konečnému záveru ako by sa tento problém dal riešiť, sa stále nedospelo, hoci už bolo publikovaných veľa prác. Naším cieľom je odvodenie všeobecného modelu s náhodne sa meniacou volatilitou. Vzhľadom na to, že sme túto stochastickú volatilitu zahrnuli do druhého faktora, vytvárame vlastne dvojfaktorový model.

Zovšeobecníme základné predpoklady o procese (r_t, y_t) a odvodíme analyticky parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu P . Nesmieme zabúdať, že y_t nie je priamo pozorovateľná premenná a preto po odvodení rovnice musíme nájsť spôsob, ako ju znova takpovediac skryť pomocou vhodného zápisu.

Čo to znamená skrytá premenná? Je to faktor, ktorý ovplyvňuje úrokovú mieru, ale nevieme ho presne určiť. (Môžeme si predstaviť, že je to napríklad teplota kávy, ktorú burzový maklér ráno vypije.) Čiže cena dlhopisu P je ako čierna skrinka, do ktorej poznáme vstup a výstup (hodnota úroku r a čas τ), ale vnútri nej je dôležitým faktorom nepozorovateľná premenná y . Práve pre túto jej dôležitosť ju nemôžeme jednoducho zanedbať, a preto budeme hľadať výslednú cenu dlhopisu pomocou priemeru vzhľadom na premennú y z výstupov tejto "čiernej skrinky".

V rámci snahy o zachovanie čo možno najviac stupňov voľnosti nebudeme hľadať rovnicu pre cenu dlhopisu v nejakom konkrétnom tvare. Pre skrytú premennú y nájdeme časovú škálu odlišnú od tej, v ktorej sa pohybuje premenná r . Táto kratšia časová škála má zrejmé vysvetlenie napríklad vtedy, ak za y vezmeme okamžitú úrokovú mieru, ktorá sa mení v priebehu niekoľkých sekúnd a vo všeobecnosti je považovaná za nepozorovateľnú finančnú veličinu.

4 Matematické modelovanie jedno a viacfaktorových modelov

Matematické modelovanie term-structure modelov sa skladá z dvoch základných krokov. Prvým je odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu P na základe procesu, ktorý sleduje úroková miera r . Druhým a určite náročnejším je nájdenie funkcie P , ktorá by vyhovovala tejto rovnici a zároveň spĺňala počiatkové a okrajové podmienky.

4.1 Odvodenie všeobecného jednofaktorového modelu

Odvodenie jednotlivých typov modelov spolu s explicitnými riešeniami výslednej parciálnej diferenciálnej rovnice môžeme nájsť napríklad v publikácii Y. K. Kwoka [7]. Kvôli jasnejšiemu pochopeniu výkladu v kapitole 4.3 uvádzame odvodenie rovnice všeobecného jednofaktorového modelu.

Cena dlhopisu, ktorú sme si označili P , závisí od času, v ktorom sa nachádzame, doby splatnosti dlhopisu a úrokovej miery. Platí: $P = P(t, T, r)$. Máme teda funkciu troch premenných, pričom samotná premenná r závisí od času t . Na odvodenie diferenciálu P použijeme Itôovu lemu (4.1).

Lema 4.1 (*Itôova lema*) *Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia premenných x, t , pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde dw je diferenciál Wienerovho procesu. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw.$$

Keďže premenná r vyhovuje stochastickej rovnici (6), pre diferenciál P platí:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} dw. \quad (7)$$

Keď si drift diferenciálu P označíme $\tilde{\mu}$ a volatilitu $\tilde{\nu}$, dostaneme rovnicu

$$dP = \tilde{\mu}(t, T)dt + \tilde{\nu}(t, T)dw. \quad (8)$$

Ďalším krokom je zostavenie portfólia π pozostávajúceho z jedného dlhopisu s dobou splatnosti T_1 a γ dlhopisov s dobou splatnosti T_2 . Toto má umožniť rizikovo-averznému investorovi zabezpečiť svoje portfólio tak, aby minimalizoval riziko. Teda investor si určuje pomer γ podľa jeho osobných preferencií a situácie na trhu.

$$\pi = P_1(t, T_1, r) + \gamma P_2(t, T_2, r) \quad (9)$$

Zmena hodnoty portfólia za časový úsek dt je

$$d\pi = dP_1 + \gamma dP_2$$

a to po dosadení z rovnice (8) a úprave dáva:

$$d\pi = (\tilde{\mu}_1 + \gamma\tilde{\mu}_2)dt + (\tilde{\nu}_1 + \gamma\tilde{\nu}_2)dw. \quad (10)$$

Ak chceme odstrániť náhodný člen (majúc na pamäti princíp averzie k riziku) položíme

$$\tilde{\nu}_1 + \gamma\tilde{\nu}_2 = 0.$$

Teda keď volíme

$$\gamma = -\frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2}, \quad (11)$$

dostaneme zmenu hodnoty portfólia bez stochastickej časti

$$d\pi = \left(\tilde{\mu}_1 - \frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2} \tilde{\mu}_2 \right) dt. \quad (12)$$

Hodnota portfólia je vlastne určovaná deterministicky a musí byť rovná hodnote, ktorú by sme dostali vloženíím do banky pri spojitom úrokovaní, inak by vznikla možnosť pre arbitráž. A teda platí

$$d\pi = r\pi dt = r \left(P_1 - \frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2} P_2 \right) dt. \quad (13)$$

Spojením vzťahov (12) a (13) a následnou úpravou dostávame rovnosť

$$\frac{rP_1 - \tilde{\mu}_1}{\tilde{\nu}_1} = \frac{rP_2 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{\nu}_2}.$$

Keďže dlhopisy P_1 a P_2 sa líšili len dobou splatnosti, vidíme, že veličina

$$\lambda(t, r) = \frac{\tilde{\mu}(t, T) - r(t)P(t, T)}{\tilde{\nu}(t, T)} \quad (14)$$

nezávisí na dobe splatnosti T . Nazýva sa *trhová cena rizika* alebo *market price of risk* a vyjadruje mieru výnosu navyše (oproti bezrizikovému) vzhľadom na jednotku rizika.

Spojením vzťahov (7), (8) a (14) dostávame:

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} \\ \tilde{\mu} &= \lambda \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} + rP = \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}.\end{aligned}$$

A z toho

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r - \lambda \sigma_r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (15)$$

čo je parciálna diferenciálna rovnica určujúca všeobecný jednofaktorový model.

Konkrétne typy modelov sa rozlišujú v závislosti od funkcií $\mu_r(r, t)$, $\sigma_r(r, t)$ a $\lambda(r, t)$. K najviac používaným patria modely, ktoré za základ berú mean-reversion. Alebo inak povedané, kde proces pre r sleduje tzv. *Ornstein-Uhlenbeckovej proces*. Vtedy má drift tvar:

$$\mu_r(r, t) = \kappa(\theta - r(t)),$$

kde κ a θ sú konštanty. Funkcia $\sigma_r(r, t)$ zvykne byť v tvare:

$$\sigma_r(r, t) = \varsigma r^\eta,$$

kde η je konštanta.

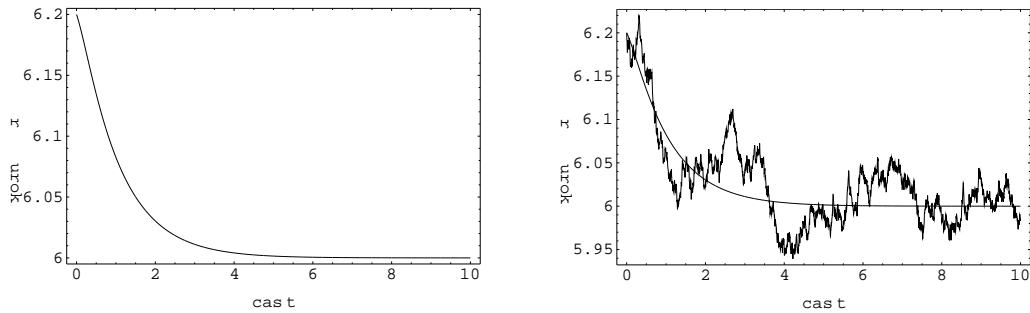
Keď tieto rovnosti dosadíme do rovnice (6), dostaneme rovnicu jednofaktorového modelu

$$dr = \kappa(\theta - r(t))dt + \varsigma r^\eta dw, \quad (16)$$

ktorá nám hovorí, že úroková miera r je ťahaná k hodnote θ a miera, akou sa toto deje je rovná hodnote κ . ςr^η udáva náhodný šum, ktorý sa na toto nabaluje (Obrázok 1).

K najjednoduchším modelom oceňovania finančných derivátov patria už spomenuté Vašíčkov a Cox-Ingersoll-Ross modely ([6], [7]). Začínajú od rovnice (16), pričom sa líšia funkciou σ_r , teda vlastne hodnotou η . U Vašíčka je $\eta = 0$. Tento model je často kritizovaný kvôli tomu, že povoľuje aj negatívne úrokové miery. Cox, Ingersoll a Ross sa tomu snažili predísť tým, že náhodná časť má štandardnú odchýlku proporcionálnu odmocnine z r . Teda

$$\eta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma_r(r, t) = \varsigma \sqrt{r},$$



Obr. 1: Úroková miera sledujúca Ornstein-Uhlenbeckovej proces bez stochastickej časti (vľavo) a so stochastickou časťou (vpravo), pričom $\theta = 6$.

kde ς je konštanta nie nutne rovná Vašíčkovej. To znamená, že ako stúpa r , stúpa aj štandardná odchýlka.

Pre úplnosť ešte treba uviesť hodnoty funkcie $\lambda(r, t)$, ktorými sa tieto dva modely takisto líšia. Vo Vašíčkovom modeli je λ rovné λ_0 . V prípade CIR modelu platí $\lambda(r, t) = \frac{1}{\varsigma} \lambda_0 \sqrt{r}$, kde λ_0 je konštanta odlišná pre každý z modelov.

Explicitné riešenie týchto modelov hľadali autori v tvare

$$P(t, T, r) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)},$$

kde $A(t, T)$ a $B(t, T)$ sú konkrétne funkcie určené pre obidva modely. Odvodenie môžeme nájsť napríklad v práci [15].

4.2 Všeobecný model so stochastickou volatilitou

Ako už bolo spomenuté, ide nám o odvodenie riešenia pre cenu dlhopisu P , ak predpokladáme, že úroková miera sleduje stochastický proces, ktorého volatilita je navyše tiež stochastická.

Definícia 4.1 Označme (r_t) proces, ktorý sleduje okamžitú úrokovú mieru pre dvojfaktorový model s prislúchajúcim driftom $\mu(t, r, y)$ a volatilitou $\sigma(t, r, y)$, ktorá je ohraničená. Nech (y_t) je proces určujúci volatilitu s driftom $\alpha(t, r, y)$. $\beta(t, r, y)$ je ohraničená funkcia a w_t a z_t sú nezávislé Wienerove procesy (2.1). $\rho(t, r, y)$ je funkcia, ktorá vyjadruje koreláciu medzi w_t a volatilitou r_t a v každom bode pre ňu platí $|\rho(t, r, y)| < 1$.

Potom proces (r_t, y_t) vyhovuje sústave

$$\begin{aligned} dr_t &= \mu(t, r, y)dt + \sigma(t, r, y)dw_t \\ dy_t &= \alpha(t, r, y)dt + \beta(t, r, y) \left(\rho(t, r, y)dw_t + \sqrt{1 - \rho^2(t, r, y)}dz_t \right). \end{aligned} \quad (17)$$

V ďalšom budeme používať skrátenejší zápis (napr. $\mu(t, r, y) = \mu$) majúci na pamäti, že funkcie z definície (4.1) sú závislé od (t, r, y) .

4.3 Odvodenie PDR pre model so stochastickou volatilitou

V kapitole 4.1 sme ukázali odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre všeobecný jednofaktorový model. V tejto kapitole použijeme podobný postup za pomoci modifikovaných predpokladov a viacrozmernej Itôovej lemy.

Cena dlhopisu P v tomto prípade závisí aj od (y_t) a teda platí:

$$P = P(t, T, r, y).$$

Na odvodenie diferenciálu funkcie P použijeme Itôovu lemu (4.2) pre funkciu viac premenných prevzatú z [7].

Lema 4.2 (Itôova lema pre viacrozmerné funkcie) *Nech $f(X, t) : R^n \times R \rightarrow R$ je hladká funkcia $n + 1$ premenných $X = (x_1, \dots, x_n)$ a t ; pričom premenná X rieši sústavu stochastických diferenciálnych rovníc*

$$dX = \vec{\mu}(X, t)dt + \Sigma(X, t)dW,$$

kde dW označuje vektor diferenciálov navzájom nezávislých Wienerových procesov $W = (w_1, \dots, w_n)$; $\vec{\mu} \in R^n$ a $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Teda pre každé $i = 1 \dots n$; x_i vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dx_i = \mu_i dt + \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} dw_k.$$

Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzt'ahom:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma : \nabla^2 f \Sigma \right) dt + \nabla f dX,$$

kde ∇f označuje gradient funkcie f a $\Sigma : \nabla^2 f \Sigma = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jk}$.

V našom prípade teda máme

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} dr^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} dr dy + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} dy^2 \right), \quad (18)$$

alebo v súlade s notáciou z lemy (4.2) $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha \end{pmatrix}$ a $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ \beta\rho & \beta\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$.

Po dosadení sústavy (17) a následnej úprave to dáva

$$\begin{aligned} dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \alpha \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \beta \rho \sigma(t, r, y) \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} \right) dt \\ &+ \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial r} + \beta \rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) dw_t + \beta \sqrt{1-\rho^2} \frac{\partial P}{\partial y} dz_t. \end{aligned} \quad (19)$$

Rovnicu (19) môžeme prepísať do nasledujúceho tvaru:

$$dP = \tilde{\mu} dt + \tilde{\nu} dw_t + \tilde{\varphi} dz_t. \quad (20)$$

Podobne ako pri jednofaktorovom modeli, zostrojíme portfólio, ktoré však tentokrát bude pozostávať z jedného dlhopisu s dobou splatnosti T_1 , γ dlhopisov s dobou splatnosti T_2 a δ dlhopisov s dobou splatnosti T_3 .

$$\pi = P_1(t, T_1, r, y) + \gamma P_2(t, T_2, r, y) + \delta P_3(t, T_3, r, y). \quad (21)$$

Zmena hodnoty portfólia za časový úsek dt je

$$\begin{aligned} d\pi &= dP_1 + \gamma dP_2 + \delta dP_3 \\ &= (\tilde{\mu}_1 + \gamma \tilde{\mu}_2 + \delta \tilde{\mu}_3) dt + (\tilde{\nu}_1 + \gamma \tilde{\nu}_2 + \delta \tilde{\nu}_3) dw_t + (\tilde{\varphi}_1 + \gamma \tilde{\varphi}_2 + \delta \tilde{\varphi}_3) dz_t. \end{aligned} \quad (22)$$

Stochastické členy sa nám podarí odstrániť po vyriešení sústavy dvoch rovníc

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_1 + \gamma \tilde{\nu}_2 + \delta \tilde{\nu}_3 &= 0 \\ \tilde{\varphi}_1 + \gamma \tilde{\varphi}_2 + \delta \tilde{\varphi}_3 &= 0, \end{aligned}$$

keď položíme

$$\gamma = \frac{\tilde{\nu}_3 \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\nu}_1 \tilde{\varphi}_3}{\tilde{\nu}_2 \tilde{\varphi}_3 - \tilde{\nu}_3 \tilde{\varphi}_2} \quad (23)$$

$$\delta = \frac{\tilde{\nu}_1 \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\nu}_2 \tilde{\varphi}_1}{\tilde{\nu}_2 \tilde{\varphi}_3 - \tilde{\nu}_3 \tilde{\varphi}_2}. \quad (24)$$

Opäť sme získali deterministické portfólio, ktorého zmena za časové obdobie dt je daná

$$d\pi = \pi r dt.$$

Nech parametre λ a ω (nezávislé od doby splatnosti dlhopisov), o ktorých predpokladáme, že sú ohraňované, sú určené nasledovne

$$\begin{aligned}\lambda(t, r, y) &= \frac{\tilde{\mu} - rP - \omega\tilde{\varphi}}{\tilde{\nu}} \\ \omega(t, r, y) &= \frac{\tilde{\mu} - rP - \lambda\tilde{\nu}}{\tilde{\varphi}}.\end{aligned}$$

Potom platí:

$$\tilde{\mu} - rP = \lambda\tilde{\nu} + \omega\tilde{\varphi}. \quad (25)$$

Funkcia λ je *market price of risk* a ω sa zvykne nazývať aj *market price of volatility risk* teda *trhová cena rizika volatility*.

Spojením vzťahov (19), (20) a (25) dostávame výslednú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre model so stochastickou volatilitou.

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} + \left(\alpha - \lambda\beta\rho - \omega\beta\sqrt{1 - \rho^2}\right) \frac{\partial P}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \beta\rho\sigma \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} - rP\end{aligned} \quad (26)$$

Triviálnymi úpravami môžeme rovnicu previesť na tvar:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div}(A\nabla P) + \vec{b}\nabla P - rP = 0, \quad (27)$$

kde $\nabla P = (\frac{\partial P}{\partial r}; \frac{\partial P}{\partial y})$ je gradient funkcie ceny dlhopisu P . Matica A je daná $A(t, r, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^2 & \beta\rho\sigma \\ \beta\rho\sigma & \beta^2 \end{pmatrix}$ a div je operátor divergencie. Zaujímavé je si všimnúť, že maticu A môžeme získať aj ako $A = \frac{1}{2}\Sigma\Sigma^T$, kde $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^n$, (pozri lemu (4.2)). Vektor \vec{b} je určený nasledovne:

$$\vec{b}(t, r, y) = \begin{pmatrix} \mu - \lambda\sigma - \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\beta\rho\sigma)}{\partial y} \\ \alpha - \lambda\beta\rho - \omega\beta\sqrt{1 - \rho^2} - \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\beta\rho\sigma)}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

Pri určovaní ceny dlhopisu nie je ani tak dôležitý okamžitý čas a samotná maturita, ako to, aký čas ostáva do maturity a preto logickým krokom bude transformácia času

$$\tau = T - t.$$

Platí

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial \tau}$$

a keďže v ostatných členoch sa derivácia podľa času nevyskytuje, jedinou zmenou vo výslednej rovnici (26) bude záporné znamienko pred týmto členom. Teda aj rovnicu (27) môžeme prepísať do tvaru:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + \operatorname{div}(A\nabla P) + \vec{b}\nabla P - rP = 0, \quad (28)$$

čo predstavuje parciálnu diferenciálnu rovnicu parabolického typu.

Našou úlohou je nájsť funkciu P , ktorá rieši rovnicu (28) a splňa nasledovnú počiatocnú a okrajové podmienky:

$$\begin{aligned} P(0, r, y) &\equiv 1, & \text{pre } \forall r > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \\ P(\tau, 0, y) &\equiv 1, \\ P(\tau, +\infty, y) &\equiv 0, & \text{pre } \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5 Dvojfaktorové modely s rôznymi časovými škálami

V predchádzajúcej kapitole sme odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu pre model so stochastickou volatilitou (4.1), kde vystupovalo y ako skrytá premenná. Teraz si y predstavíme ako veličinu, ktorá sa pohybuje v inej, respektíve kratšej, časovej škále ako pozorovateľná premenná r . Vhodným príkladom je už spomínaný okamžitý úrok, ktorý sa mení, povedzme, v minútach, kým overnight r v dňoch.

Nech teraz ε je tá časová škála, v ktorej sa pohybuje skrytá premenná y (škálu, v ktorej sa mení premenná r považujeme za jednotkovú), pričom platí $0 < \varepsilon \leq 1$. Ako si neskôr ukážeme na grafoch, hraničná hodnota $\varepsilon = 1$ zabezpečí, že obidva procesy sa pohybujú v rovnakej časovej škále.

Teda proces (17) pre (r_t, y_t) môžeme zapísať v nasledovnom tvare:

$$\begin{aligned} dr &= \mu dt + \sigma dw_t \\ dy &= \frac{1}{\varepsilon} \alpha dt + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \beta \left(\rho dw_t + \sqrt{1 - \rho^2} dz_t \right). \end{aligned} \quad (29)$$

5.1 Numerické simulácie dvojfaktorových modelov

V tejto časti si graficky ukážeme správanie sa premenných r a y v závislosti od funkcií vystupujúcich v procese (29).

Pre zjednodušenie predpokladáme, že funkcia μ , teda drift prislúchajúci k r , má tvar Ornstein-Uhlenbeckovej procesu (16) $\mu = \kappa(\theta - r)$. Od konštanty κ závisí, ako rýchlo sa hodnota r priblíži k hodnote θ a v našom prípade je rovná 1. Pre funkciu θ platí

$$\theta = \theta_0 + 0.2y, \quad (30)$$

pričom $\theta_0 = 6.0$.

σ predstavujúca volatilitu vývoja úrokovej miery r má tvar

$$\sigma = 0.1 \left(1 + \frac{y}{1 + y^2} \right), \quad (31)$$

čiže závisí explicitne len od y .

Pomocou programu, ktorý sa nachádza v prílohe, sme namodelovali rozličné formy procesu pre y . Každý prípad pozostáva z piatich grafov: Prvý

opisuje závislosť úroku r (v percentách) od času a druhý y od času. Tretí na osi x zaznamenáva hodnoty y a na osi y hodnoty r . Ukazuje vlastne, ktoré dvojice hodnôt sú najpravdepodobnejšie. Na štvrtom vidíme histogram zostavený z hodnôt úroku r a na poslednom histogram rozdelenia premennej y . Teda tá hodnota, kde je najvyššia početnosť, sa vyskytuje najčastejšie.

Grafy (2), (3), (4) a (5) opisujú situáciu, kedy drift procesu pre y má vlastnosť mean-reversie a y má v tomto prípade tendenciu ísť k hodnote 0.

Obrázok 2: Proces pre y nemá stochastickú časť, teda hodnota y sa za určitý časový okamih ustáli na nule. Pre r to implikuje to, že po tomto krátkom čase má proces pre r konštantú volatilitu.

Obrázok 3: Volatilita r , čiže σ , je explicitne závislá navyše aj od samotného úroku r , konkrétne $\sigma = 0.1 \left(1 + \frac{y}{1+y^2}\right) \sqrt{r}$. V porovnaní s Obrázkom 2 vidíme na prvom grafe väčšie fluktuácie. Navyše sa úrok častejšie dostal aj pod hranicu 6 %, čo bolo v prípade predchádzajúceho obrázku zriedkavé.

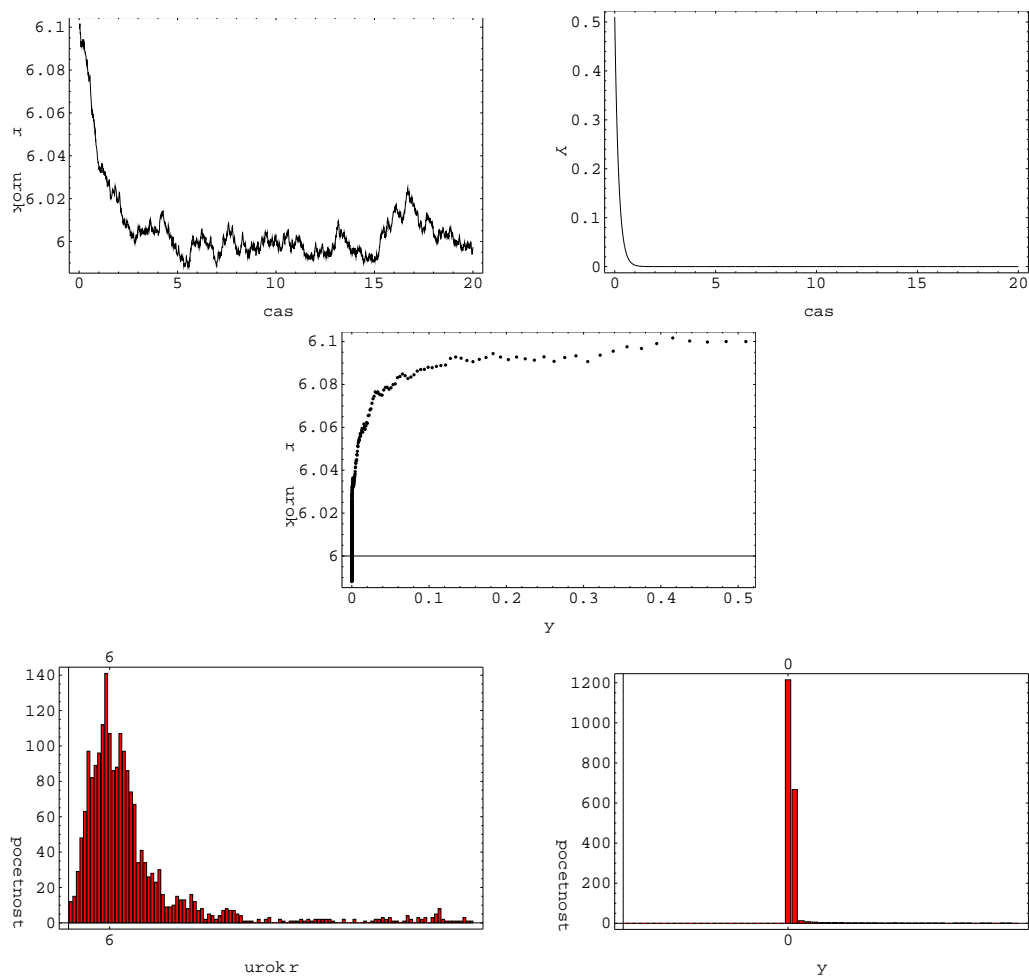
Vráťme sa späť k funkcii σ definovanej vzťahom (31).

Obrázok 4: Stochastická časť procesu pre y má tvar ako v definícii (4.1), pričom predpokladáme, že funkcie β a ρ sú konštanty. Čím väčšia je hodnota β , tým väčší vplyv na hodnotu y má práve stochastická časť. $0 \leq \rho \leq 1$ a čím je bližšie k 1, tým väčšia je korelácia medzi y a volatilitou procesu pre r . (Pozn. Prípád z Obrázku 2 nastáva, keď $\beta = 0$.)

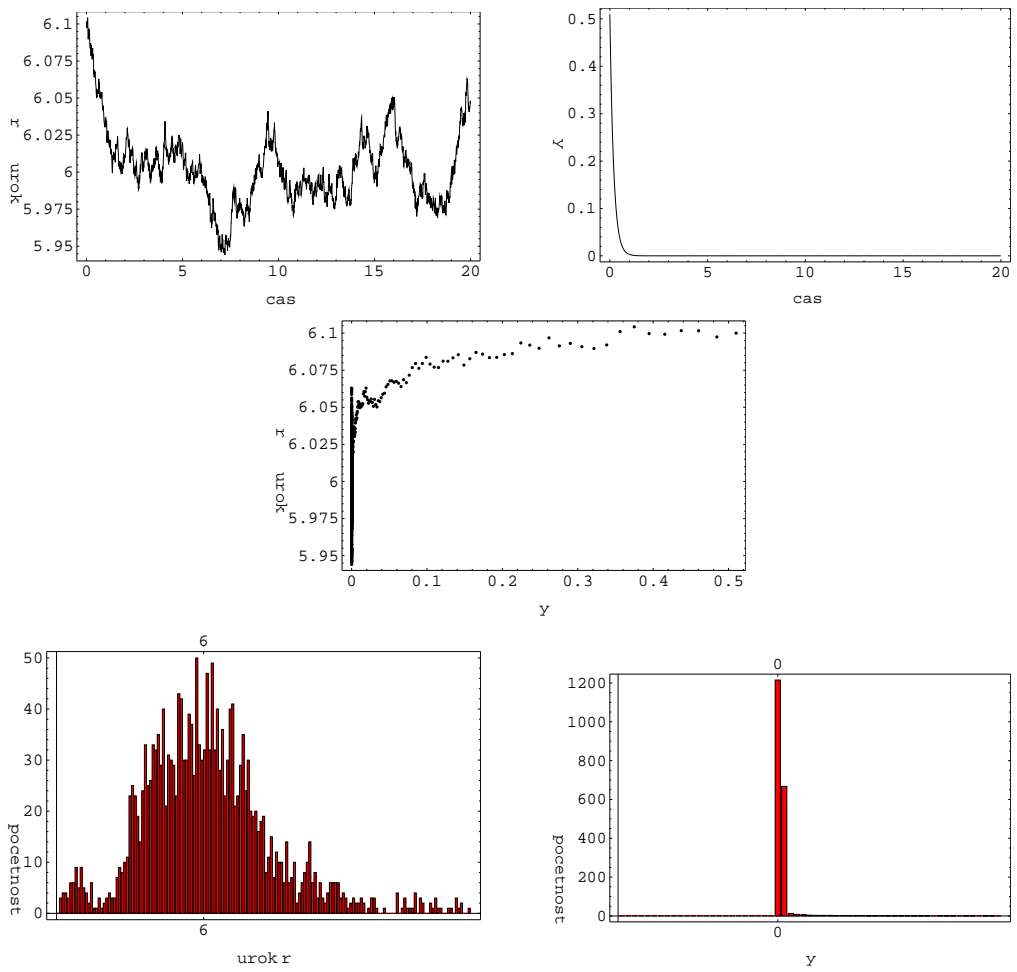
Obrázok 5: y sa pohybuje v kratšej časovej škále ako r (model (29)), konkrétne $\varepsilon = 0.2$. To znamená, že ak r sa mení v dňoch, y približne každých 5 hodín. (Pozn. Prípád z Obrázku 4 zachytáva situáciu, kedy $\varepsilon = 1$.)

Príklady (2), (3), (4) a (5) majú tú výhodu, že oblasť zvýšenej koncentrácie hodnôt r a y v tretích grafoch bola pomerne dobre ohraničená a práve jedna. Bolo to zabezpečené tvarom funkcie α , ktorá mala práve jeden stacionárny bod, ktorý zaistoval stabilitu riešenia.

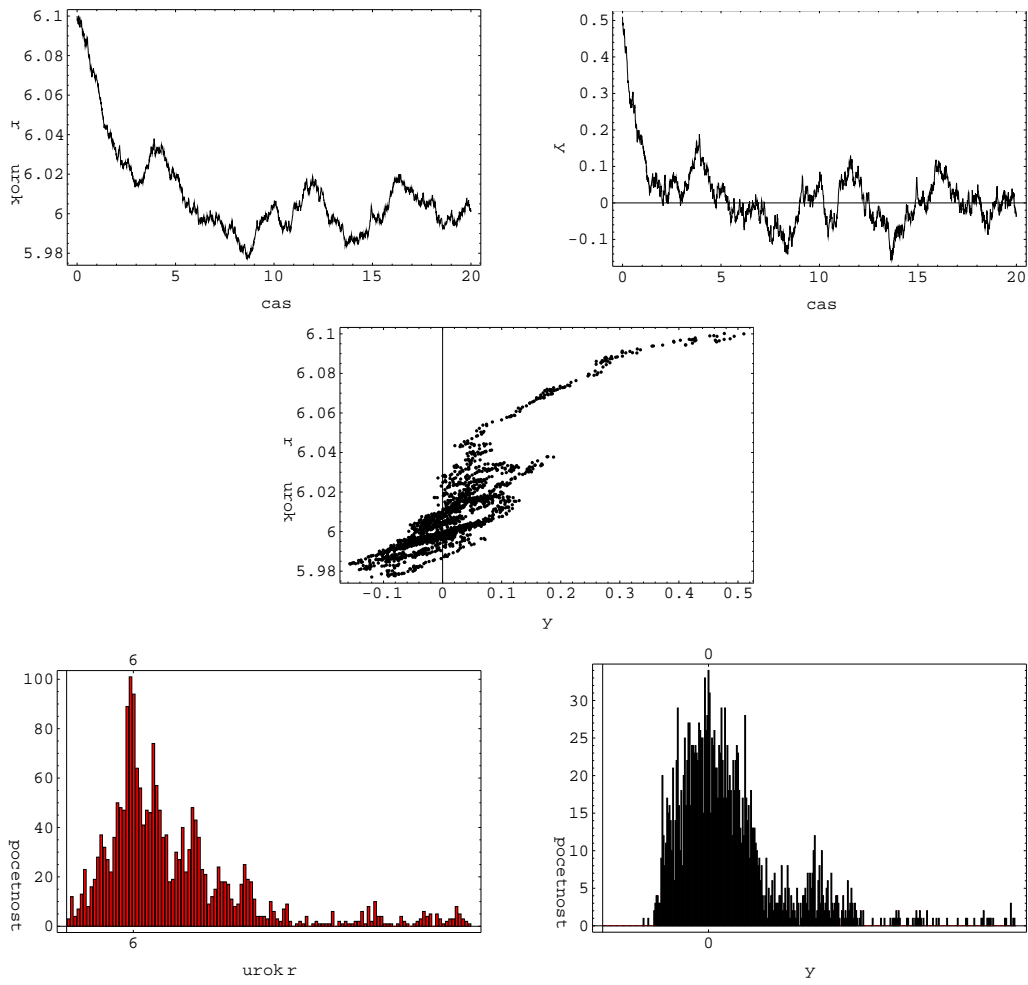
Ďalej si ukážeme, že pri inom zadefinovaní funkcie α môže nastať prípad, kedy dostaneme viac oblastí zvýšeného výskytu hodnôt r a y .



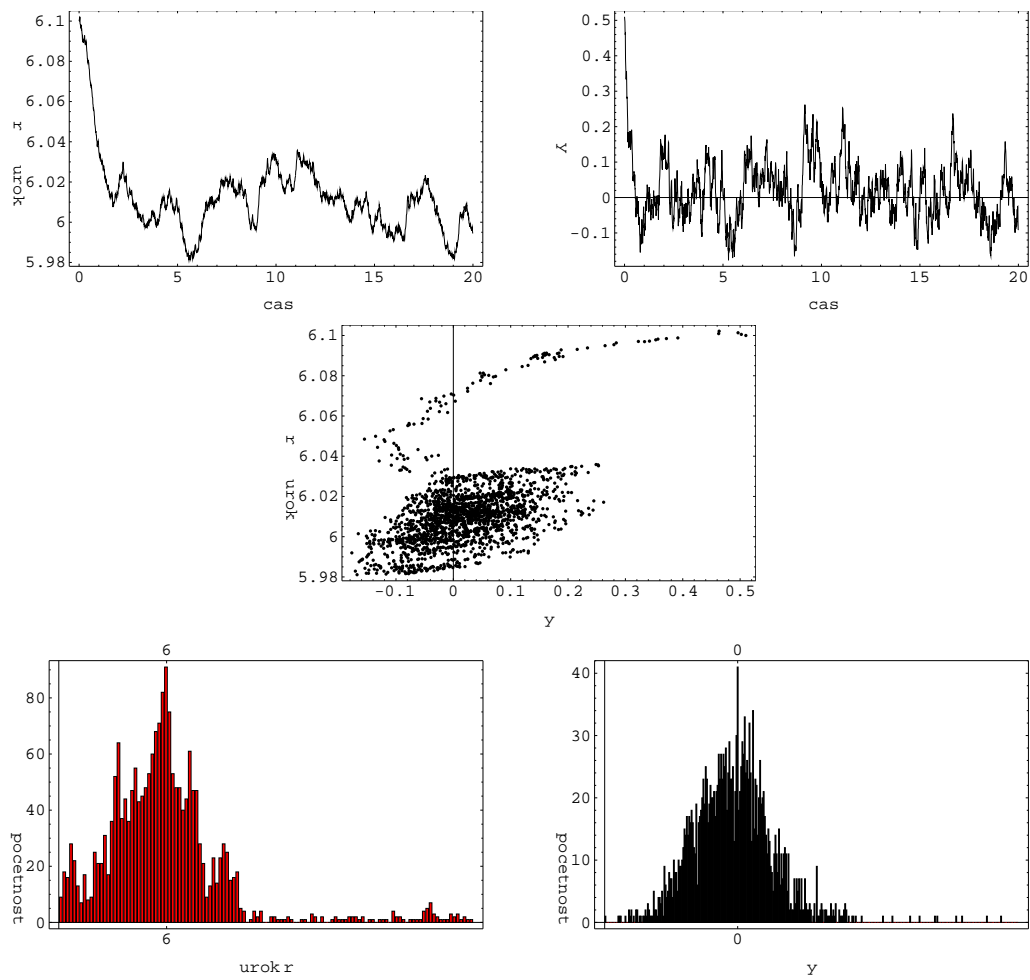
Obr. 2: Proces pre y bez stochastickej časti.



Obr. 3: Volatilita explicitne závisí od r .



Obr. 4: Oba procesy sa pohybujú v rovnakej časovej škále.



Obr. 5: y sa pohybuje v kratšej časovej škále ako r .

Obrázok 6: Funkcia α má tvar $\alpha = -y(0,5 - y)(1 - y)$, čo zabezpečuje existenciu dvoch stabilných stacionárnych bodov $y = 0$ a $y = 1$. Každému z týchto bodov prislúcha iná hodnota úroku. Ak $y = 0$, r sa blíži k hodnote 6 a v prípade $y = 1$ platí $r = 6.2$. Môžeme sa o tom presvedčiť dosadením do rovnosti (30). V tret'om obrázku sme získali dve oblasti, pričom pravdepodobnosť, že bod patrí do jednej z nich, je $\frac{1}{2}$. Preukázali sme to pomocou histogramu zo štvrtého obrázku. Nech δ je z intervalu $(0; \frac{6.2-6}{2} = 0.1)$. V nasledujúcej tabuľke sú zaznamenané pravdepodobnosti, že sa hodnota úroku r nachádza v intervale $6 \pm \delta$, respektíve $6.2 \pm \delta$.

δ	$\mathcal{P}(r \in (6 - \delta; 6 + \delta))$	$\mathcal{P}(r \in (6.2 - \delta; 6.2 + \delta))$
0.005	0.10	0.09
0.010	0.27	0.23
0.036	0.30	0.28
0.050	0.38	0.41
0.100	0.49	0.51

Dôležitým faktorom v takomto prípade je hodnota β . Keby totiž vplyv náhodnej zložky nebol dostatočne vysoký, hodnota y by sa ustálila v jednom zo stacionárnych bodov a takpovediac neskákala by z jedného na druhý.

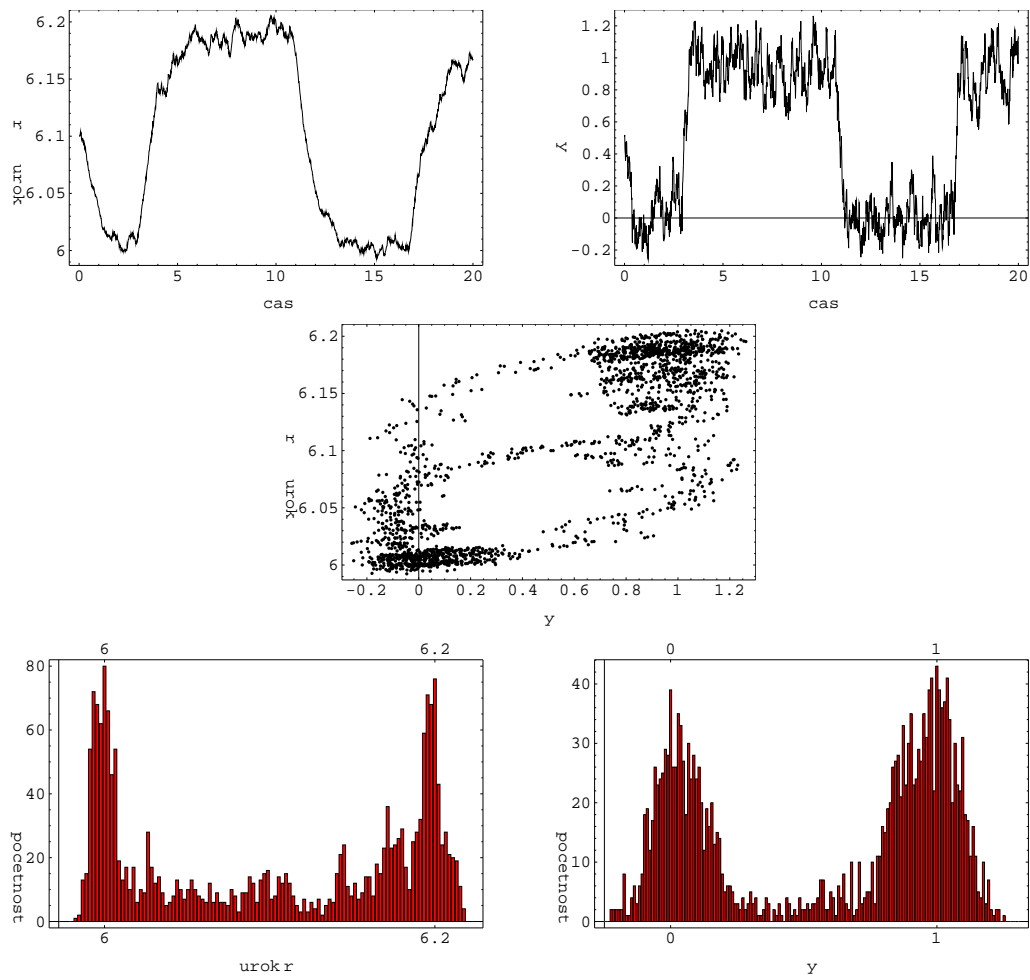
5.2 Aproximácia riešenia PDR

Vo všetkých doposiaľ uvedených rovniciach sa vyskytovala cena dlhopisu P ako funkcia závislá od času τ , úroku r a volatilitu riadiaceho procesu y . Čas do maturity a úrokovú mieru môžeme priamo pozorovať, kým y ostáva skryté. Predstavme si cenu dlhopisu P ako vodu, ktorá vteká do potrubia. Vnútri potrubia na ňu vplývajú deje, ktoré sami o sebe nie sú pre nás relevantné. My potrebujeme vedieť len to, aký je výtok z potrubia, teda akési spriemerovanie efektu týchto dejov na výslednú hodnotu.

Ak $\langle \cdot \rangle$ označuje strednú hodnotu funkcie (čo je práve to želané spriemerovanie), potom $\langle P(\tau, r, y) \rangle$ vzhľadom na premennú y môžeme určiť napríklad

$$\langle P(\tau, r, y) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(y)P(\tau, r, y)dy,$$

pričom funkcia $G(y) \geq 0$, pre všetky y a platí $\int_{-\infty}^{+\infty} G(y) = 1$.



Obr. 6: Drift procesu y_t má tvar $\alpha = -y(0,5 - y)(1 - y)$.

Keďže takto aproximovaná hodnota ceny dlhopisu P už nebude explicitne závisieť na y , zavedme označenie: $\langle P(\tau, r, y) \rangle = \Psi(\tau, r)$.

Spriemerníme rovnicu (26).

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle -\frac{\partial P}{\partial \tau} \right\rangle + \left\langle (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \left(\alpha - \lambda\beta\rho - \omega\beta\sqrt{1-\rho^2} \right) \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right\rangle + \left\langle \beta\rho\sigma \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} \right\rangle - \langle rP \rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

Následne využijeme vetu (5.1), ktorej dôkaz môžeme nájsť napríklad v publikácii [5].

Veta 5.1 *Nech f, g sú ohraničené funkcie a symbol $\langle \cdot \rangle$ označuje strednú hodnotu. Potom platí*

$$\langle fg \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle + \langle (f - \langle f \rangle)(g - \langle g \rangle) \rangle.$$

Rovnica (32) má po úpravách tvar:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + (\langle \mu \rangle - \langle \lambda \rangle \langle \sigma \rangle) \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{2} \langle \sigma \rangle^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - r\Psi \\ &+ \left\langle (\mu - \lambda\sigma - \langle \mu - \lambda\sigma \rangle) \left(\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right\rangle - \langle (\lambda - \langle \lambda \rangle)(\sigma - \langle \sigma \rangle) \rangle \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle (\sigma^2 - \langle \sigma \rangle^2) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right) \right\rangle - \frac{1}{2} \langle (\sigma - \langle \sigma \rangle)^2 \rangle \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \\ &+ \left\langle \left(\alpha - \lambda\beta\rho - \omega\beta\sqrt{1-\rho^2} - \langle \alpha - \lambda\beta\rho - \omega\beta\sqrt{1-\rho^2} \rangle \right) \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle (\beta^2 - \langle \beta^2 \rangle) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right\rangle + \left\langle (\beta\rho\sigma - \langle \beta\rho\sigma \rangle) \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} \right\rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

Je užitočné si všimnúť, že v prvom riadku rovnice (33) vystupujú len priemerné členy (nezávisiace od y), a preto táto časť vlastne opisuje všeobecný jednofaktorový model (15). Ostatné členy rovnice sú rozdielmi medzi skutočnou a priemernou hodnotou tej ktorej funkcie. Teda v prípade, že všetky tieto rozdiely sú zanedbateľne malé, môžeme ako aproximáciu ceny P brať hodnotu Ψ ako riešenie jednofaktorového modelu.

Jasnejšie vysvetlenie sa dá nájsť v grafoch z kapitoly 5.1 (Např. Obrázok 5). V prípade, že sa úrok r nachádza v intervale, kde je koncentrácia bodov

vysoká (tam niekde sa nachádza priemer všetkých hodnôt a teda rozdiely sú zanedbateľné), hodnota y sa dá pre konkrétne r určiť ako priemer, t.j. urobíme čiaru rovnobežnú s osou x , sčítame hodnoty y ležiace na nej, vydáme ich počtom a ďalej už berieme y ako konštantu.

Autori v práci [2] uvádzajú, že ak má funkcia α tvar Ornstein-Uhlenbeckovej procesu $\alpha = a(m - y_t)$, potom (y_t) je ergodický proces (má tú vlastnosť, že z kratších úsekov je možno analyzovať priebeh celého deja) s normálnym rozdelením $\mathcal{N}\left(m, \frac{\beta^2}{2a}\right)$, ktoré modeluje mean-reversiu volatility. Pomocou asymptotickej aproximácie určia, že cena dlhopisu P sa v takomto prípade dá aproximovať hodnotou Ψ plus korekčný člen, ktorý má tvar $\sqrt{\varepsilon}\Psi_1$. Keď spriemernia koeficienty pomocou aritmetického priemeru, upravená cena dlhopisu P má tvar $P(\tau, r, y) \approx A(\tau) (1 + D(\tau)) e^{B(\tau)r}$, kde D je faktor rádu $1/\sqrt{\alpha}$. Na základe toho dokázali, že chyba aproximácie je najviac rádu $1/\alpha$.

Uvedieme si tu základné kroky na ceste k explicitnému riešeniu, pričom podrobnejšie vysvetlenie aproximačných metód, ktoré sa dajú využiť pri riešení parciálnych diferenciálnych rovníc, sa dá nájsť v publikácii [14] alebo [9].

Zapíšeme funkciu ceny dlhopisu $P(\tau, r, y)$ v tvare nekonečného radu.

$$P(\tau, r, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} P_i(\tau, r, y), \quad (34)$$

kde $0 < \varepsilon < 1$. Dosadíme do rovnice (26), avšak nesmieme zabúdať na to, že za základ berieme proces (29). Predpokladáme ďalej, že ono Ψ z rovnice (33) je v našom prípade P_0 , pri ktorom jedinom sa v zápise (34) vyskytoval člen ε v nultom ráde. Porovnávaním hodnôt pri koeficientoch ε toho ktorého rádu a postupnými úpravami prídeme k výsledku, že ani ostatné členy P_i nie sú explicitne závislé od y a teda môžeme ich zapisovať pomocou Ψ_i .

Čo však v prípade napríklad Obrázku 6, keď je oblastí zvýšenej koncentrácie hodnôt viac? Toto sa dá zohľadniť dvoma spôsobmi. Prvým je akoby vyriešenie niekoľkých navzájom nezávislých rovníc. Určíme aproximáciu pre každú z oblastí a výsledok bude v podmienenom tvare: Ak je úrok r v intervale $(r1; r2)$ vezmi aproximáciu 1. V prípade intervalu $(r3; r4)$ aproximáciu 2, atď..

Druhou možnosťou je uvedomiť si, že pokiaľ máme n oblastí, pravdepodobnosť, že výsledné riešenie sa nachádza v i -tej oblasti je p_i a platí $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Teda výslednou aproximáciou pre P bude takisto Ψ , avšak určenie korekčného člena bude zložitejšie.

Keď sme už dospeli ku konečnej aproximácii ceny dlhopisu P (teda vyriešili sme rovnicu (28)), potrebujeme ešte vedieť, ako spriemerniť jednotlivé funkcie závisiace od y . Označme hodnotu premennej y v i -tej oblasti y_i . Riešením je prejsť od y , ktoré prebieha všetky reálne čísla, k y , ktoré sa vyskytuje len v jednej z určitých n hodnôt, ktoré sú dané spomínanými oblastami. Teda $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ s prislúchajúcimi pravdepodobnosťami p_1, \dots, p_n .

Ak $f(y)$ je funkcia, ktorú potrebujeme aproximovať, najjednoduchším spriemernením bude

$$\langle f(y) \rangle = \sum_{i=1}^n p_i f(y_i). \quad (35)$$

Tu treba pripomenúť, že možnosť práve takéhoto spriemernenia (35) je len hypotézou, o ktorej by sa dalo diskutovať na priestore oveľa širšom, ako poskytuje táto práca.

Záver

Modely derivátov úrokovej miery môžeme rozdeliť podľa niekoľkých kritérií do viacerých skupín. V tejto práci sme sa zaoberali rovnovážnymi modelmi typu Vašíček a CIR, ktoré skúmajú okamžitú úrokovú mieru a jej vplyv na ceny dlhopisov.

Postup pri modelovaní výnosovej krivky sa zdá byť pomerne jednoduchý. Stačí poznať cenu dlhopisu v každom čase, dosadiť do vzorca, ktorý vyjadří spojitú úročenú úrokovú mieru (výnos) a môžeme kresliť. Zložitejšie je to so samotným vyjadrením cien dlhopisov, keďže úrok sám o sebe je ťažko predvídateľný.

V našej práci sme od všeobecných jednofaktorových modelov úrokovej miery prešli k dvojfaktorovému. Druhým faktorom - alebo inak povedané zdrojom neistoty - bol stochastický proces, ktorý významne vplýval na úrok a bol korelovaný s jeho volatilitou. Nazvali sme ho skrytou premennou a nechali sa pohybovať v kratšej časovej škále ako pôvodnú úrokovú mieru.

Prínos spočíva v tom, že sme navrhli riešenie všeobecného modelu, keďže žiadna z funkcií, ktoré sa tam vyskytujú, nie je konkrétne zadaná. Otvorenou otázkou však ostáva nájdenie správnej spriemerňovacej funkcie, ktorá by ich dokázala aproximovať s minimálnym vplyvom na korektnosť výslednej funkcie ceny dlhopisu.

Literatúra

- [1] Baxter, M. W., Rennie, A. J. O., *Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge, Cambridge University Press, 1996.
- [2] Cotton, P., Fouque, J. P., Papanicolaou, G., Sircar, R., *Stochastic Volatility Corrections for Interest Rate Derivatives*, Preprint 2001.
- [3] Fouque, J. P., Papanicolaou, G., Sircar, R., *Asymptotics of a Two-Scale Stochastic Volatility Model*, Preprint 1998.
- [4] Fouque, J. P., Papanicolaou, G., Sircar, R., *Mean-Reverting Stochastic Volatility*, Preprint 2000.
- [5] Greene, W. H., *Econometric Analysis*, Upper Saddle River, Prentice - Hall, Inc., 2000.
- [6] Hull, J. C., *Options, Futures and Other Derivatives*, Upper Saddle River, Prentice - Hall, Inc., 1989.
- [7] Kwok, Y. K., *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Singapore, Springer - Verlag, 1998.
- [8] Longstaff, F. A., Schwartz, E. S., *Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model*, The Journal of Finance, **47** (1992), 1259 - 1282.
- [9] Mischenko, E. F., Kolesov, Yu. S., Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh., *Asymptotic Methods in Singularly Perturbed Systems*, New York, Consultants Bureau, 1994.
- [10] Papanicolaou, G. C., *Stochastic Equations and Their Applications*, American Mathematical Monthly, **80** (1973), 526 - 545.
- [11] Papanicolaou, G. C., Sircar, K. R., *Stochastic Volatility, Smile and Asymptotics*, Preprint 1998.
- [12] Sircar, K. R., *Hedging under Stochastic Volatility*, Preprint 1998.
- [13] Straka, M., *Oceňovanie finančných derivátov*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 1999.

- [14] Vasil'eva, A. B., Butuzov, V. F., Kalachev, L. V., *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems*, Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- [15] Vavrovičová, Z., *Equilibrium and No-Arbitrage Models of the Term Structure*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 1999.
- [16] Vojtek, M., *Stochastické modely úrokovej miery a ich kalibrácia na trhové dáta*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 2001.

Príloha

Program na generovanie grafov uvedených v kapitole 5.1. Na jeho spustenie je potrebný program Mathematica.

Simulácie systému stochastických diferenciálnych rovníc v tvare:

$$\begin{aligned} dx &= m[x, y, t] dt + s[x, y, t] dW \\ dy &= a[x, y, t] dt / \text{eps} + b[x, y, t] (\text{ro} dW + \text{Sqrt}[1 - \text{ro}^2] dZ) / \text{Sqrt}[\text{eps}] \end{aligned}$$

na intervale $[0, T]$ s počtom deliacich bodov: pocet.

Program:

```
<<Statistics'ContinuousDistributions';
<<Graphics'Graphics';
<<Statistics'DataManipulation';
<<Statistics'DescriptiveStatistics';

T=20.; pocet=2000; tau=T/pocet; ro=0.9; eps=0.5; rnula=6.;

theta[y_]:= rnula+ 0.2 y; dertheta[y_]=D[theta[y],y];

m[x_,y_,t_]:= theta[y]-x;
s[x_,y_,t_]:=0.1(1+ y/(1+y^2));

a[x_,y_,t_]:= -y;
b[x_,y_,t_]:=1.;

xnula=6.1; ynula=0.51;

X={{0, xnula}}; xst=xnula;
Y={{0, ynula}}; yst=ynula;

For[i=1, i<=pocet, 1, {
nahodX=Random[NormalDistribution[0,tau]];
nahodY=Random[NormalDistribution[0,tau]];
dX=m[xst,yst,i*tau]*tau+s[xst,yst,i*tau]*nahodX;
dY=(1./eps)*a[xst,yst,i*tau]*tau+(1./Sqrt[eps])*
    b[xst,yst,i*tau]*(ro*nahodX+Sqrt[1-ro^2]*nahodY);
```

```

xst=xst+dX; X=Join[X, {{i*tau, xst}}];
yst=yst+dY; Y=Join[Y, {{i*tau, yst}}];
i++; }];

minimalna=Min[Table[X[[i]][[2]], {i,1,pocet}]];
maximalna=Max[Table[X[[i]][[2]], {i,1,pocet}]];
hodnota=Mean[Table[X[[i]][[2]], {i,1,pocet}]];

tick=(hodnota-minimalna)/0.001;

miny=Min[Table[Y[[i]][[2]], {i,1,pocet}]];
maxy=Max[Table[Y[[i]][[2]], {i,1,pocet}]];
hody=Mean[Table[Y[[i]][[2]], {i,1,pocet}]];

ticy=(hody-miny)/0.002;

ListPlot[X,PlotRange->All,AxesOrigin->{0,0},
  Frame->True, PlotJoined->True,
  FrameLabel->{"cas", "urok r"}];

ListPlot[Y,PlotRange->All,AxesOrigin->{0,0},
  Frame->True, PlotJoined->True,
  FrameLabel->{"cas", "y"}];

ListPlot[
  Table[ {Y[[i]][[2]], X[[i]][[2]]}, {i,1,pocet}],
  PlotRange->All, Frame->True,
  FrameLabel->{"y", "urok r"}];

pomoc=BinCounts[Table[X[[i]][[2]], {i,1,pocet}],
  {minimalna,maximalna,0.001}];

BarChart[pomoc, Frame->True,PlotRange->All,
  Ticks->None, FrameTicks->{{tick,hodnota}},Automatic},
  FrameLabel{"urok r", "pocetnost"}];

pomy=BinCounts[Table[Y[[i]][[2]], {i,1,pocet}],
  {miny,maxy,0.002}];

```



```
BarChart[pomy, Frame->True,PlotRange->All,  
  Ticks->None, FrameTicks->{{{ticy,hody}},Automatic},  
  FrameLabel{"y", "pocetnost"}].
```