

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika



HOME PRODUCTION IN RBC MODELS

Diplomová práca

Diplomant: Ľuboš Briatka

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Juraj Zeman, CSc.

Bratislava 2002

Prehlasujem, že som túto prácu vypracoval samostatne
a uviedol som všetku použitú literatúru.

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce
RNDr. Jurajovi Zemanovi, CSc.
za inšpiráciu a cennú pomoc.

Obsah

1	Úvod	5
2	RBC modely	6
2.1	Základný model	6
2.2	Model s daňovým zaťažením	9
2.3	Model s domácou produkciou	11
3	Riešenie modelov	15
3.1	Definovanie funkcií	15
3.2	Špecifikácia modelov a kalibrácia dát	16
3.3	Postup riešenia RBC modelov	18
4	Kvantitatívna analýza	22
4.1	Impulse-response funkcia	22
4.2	Simulácie dát	24
5	Záver	32
	Literatúra	33
	Prílohy	34

1 Úvod

Model v najprísnejšom literárnom zmysle je komplexný, kľbový, umelý mechanizmus, ktorý sa vyvíja v čase aby čo najpresnejšie napodobnil správanie sa časových radov v skutočnej ekonomike.

Robert E. Lucas

Záujem o výskum v oblasti Real Business Cycle (RBC) modelov v poslednom desaťročí rastie obrovským tempom. Tento rast záujmu je spojený s postupným zaraďovaním sa RBC teórie medzi najdôležitejšie makroekonomické teórie. Určite sa ešte stále nájde medzi ekonómami dosť jej odporcov, ktorí ju zavrhlí pre svoj skepticizmus z toho, žeby technologické šoky mohli byť hlavným zdrojom fluktuácií v hospodárstve, ale presné výsledky, ktoré RBC modely dosahujú pri porovnávaní s dlhodobými pozorovaniami ekonomického rastu musia byť presvedčivé pre každého. Našou prácou sa pokúsime tieto výsledky overiť.

Cieľom tejto práce je na základoch RBC teórie skonštruovať matematický model dvojsektorovej ekonomie a porovnať ním simulované dáta s reálnymi. Východiskom pre nás bude veľmi jednoduchý RBC model, ktorý postupne rozšírime až do požadovanej podoby. Budovaniu všeobecnej teórie a ekonomickému pozadiu modelov sa venujeme v kapitole 2.

Po získaní teoretického aparátu si v kapitole 3 špecifikujeme konkrétne modely a pripravíme ich na simuláciu dát. V ďalšej časti sa pozrieme na reálne ekonomické údaje a ich parametre a v závere sa zameriame na použitý matematický aparát - dynamické programovanie.

Kapitola 4 je venovaná samotným simuláciám a vyhodnoteniu ich výsledkov. Skonštruované modely, reprezentované svojimi štatistickými ukazovateľmi, postavíme zoči-voči reálnym dátam a urobíme niekoľko kvantitatívnych analýz. V úplnom závere sa ešte zmienime o možných smeroch rozširovania našich RBC modelov.

2 RBC modely

Naším cieľom v tejto kapitole je predstaviť všeobecnú teóriu RBC modelov, ktoré budeme neskôr používať na analýzy. V prvej časti popíšeme základné fakty o ekonomických dátach USA, ktoré neskôr budeme chcieť generovať našimi modelmi a v druhej časti vystaviame základný RBC model. V tretej časti do neho implementujeme dane a v poslednej časti tejto kapitoly ho rozčleníme na dvojsektorový model s domácou produkciou.

2.1 Základný model

Ako základ nám posluží neoklasický Ramseyho model ekonomie s diskretným časom, ktorý podrobne popísal Romer [6]. Tento model tvorí kostru RBC modelov. Uvažujeme uzavretú ekonomiku bez vládneho sektora.

Domácnosti:

Ekonomika pozostáva z veľkého množstva nekonečne dlho žijúcich identických domácností, ktorých počet sa s časom nemení. Všetky domácnosti majú rovnaké preferencie, a preto sa v každom okamihu rozhodujú rovnako. Na základe tohoto predpokladu môžeme v ďalšom texte sústrediť svoju pozornosť na jednu reprezentatívnu domácnosť a analyzovať jej správanie. Reprezentatívna domácnosť sa snaží maximalizovať svoju celoživotnú funkciu užitočnosti (*utility function*):

$$U(c_0, c_1, c_2, \dots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t), \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.1)$$

O funkcii užitočnosti $u(c_t, l_t)$ predpokladáme, že je rastúca v oboch svojich premenných: spotrebe (*consumption*) c_t a čase, ktorý domácnosť venuje odpočinku (*leisure*) l_t . Celkový čas, ktorý má domácnosť k dispozícii je normovaný na jednotku a domácnosť sa musí rozhodnúť v akom pomere tento čas rozdelí medzi odpočinok a prácu (*labour*) h_t . Platí teda:

$$h_t + l_t = 1, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

O funkcii užitočnosti $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ okrem rastúcnosti predpokladáme, že je spojitě diferencovateľná v oboch svojich argumentoch a ostro konkávna. Parameter β , ktorý v nej vystupuje je diskontný faktor a vzťahuje sa na budúcu spotrebu domácnosti.

Firmy:

Podobne ako domácností aj firiem je v ekonomike veľké množstvo. Z toho vyplýva, že rozhodnutie jednej firmy nemôže žiadnym spôsobom ovplyvniť celkovú ekonomiku (napr. zvýšením vlastnej produkcie). Preto sa môžeme zaoberať jednou reprezentatívnou firmou a jej správaním. V ekonomike sa produkuje, predáva a obchoduje iba jeden statok, ktorého produkcia je vyjadrená produkčnou funkciou:

$$y_t = A(z_t)F(k_t, h_t), \quad (2.3)$$

kde k_t je množstvo investovaného kapitálu a h_t práce. Symbolom y_t sme označili produkciu (*production*) a $A(z_t)$ je stochastický člen, ktorý rozoberiem trochu neskôr.

Funkcia $F(k_t, h_t) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ je rastúca, spojitě diferencovateľná v oboch premenných a konkávna pre k_t i h_t . Pre ňu platí:

$$F(0, 0) = F(0, h_t) = F(k_t, 0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial k_t}(k_t, h_t) > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial h_t}(k_t, h_t) > 0, \quad \forall k_t, h_t > 0$$

$$\lim_{k_t \rightarrow 0} \frac{\partial F(k_t, h_t)}{\partial k_t}(k_t, 1) = \infty, \quad \text{a} \quad \lim_{k_t \rightarrow \infty} \frac{\partial F(k_t, h_t)}{\partial k_t}(k_t, 1) = 0$$

Firma sa snaží v každom kroku maximalizovať svoj zisk daný vzťahom

$$\Pi = A(z_t)F(k_t, h_t) - r_t k_t - w_t h_t,$$

Z podmienok prvého rádu pre maximum funkcie v danom bode dostaneme vyjadrenia pre reálnu mzdu

$$w_t = A(z_t) \frac{\partial F(k_t, h_t)}{\partial h_t} \quad (2.4)$$

a úrok

$$r_t = A(z_t) \frac{\partial F(k_t, h_t)}{\partial k_t}, \quad (2.5)$$

ktoré sa rovnajú práve marginálnemu produktu.

Šoky:

Dôležitý člen, ktorý okrem kapitálu a práce ovplyvňuje produkciu je úroveň použitej technológie $A(z_t)$ (technology level). Práve tento člen, jeho vyjadrenie a modelovanie je novou myšlienkou a prínos RBC modelov - on je totiž zdrojom neistoty.

Predpokladáme, že z_t je náhodný proces, ktorého správanie je popísané rovnicou

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}, \quad (2.6)$$

kde ε_t je biely šum s normálnym rozdelením, so strednou hodnotou 0 a so štandardnou odchýlkou σ . Vzťah 2.6 je stochastický autoregresný proces prvého rádu, kde $0 < \rho \leq 1$. Šoky v produkčnej funkcii sú jedinými možnými šokmi v ekonomike.

Kapitál:

Posledný člen, ktorého vývoj treba opísať je kapitál k_t (*capital*). Predpokladáme, že kapitál sa do nasledujúceho obdobia znehodnocuje konštantnou mierou amortizácie δ (*depreciation rate*), $0 < \delta \leq 1$ a zvyšuje sa o investície i_t (*investment*) v danom období. V ďalšom období teda bude úroveň kapitálu danú vzťahom:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t. \quad (2.7)$$

Rozpočtové ohraničenie:

Výška investícií i_t , o ktoré sa zásoba kapitálu zvýši závisí od pomeru v akom domácnosti rozdelia svoje príjmy, ktoré dostanú za investovaný kapitál a prácu. Môžu sa rozhodnúť medzi investíciami i_t a spotrebu c_t . Toto rozdelenie je ich rozpočtovým

ohraničením a v základnom RBC modeli je veľmi jednoduché:

$$c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t \quad (2.8)$$

Základný model:

Rozpočtovým ohraničením sme ukončili výklad základného RBC modelu. Rovnica pre maximalizáciu celoživotnej funkcie užitočnosti U zo vzťahu v 2.1, do ktorej dosadíme vyjadrenie pre l_t zo vzťahu 2.2 spolu s rozpočtovým ohraničením 2.8, ktorého ľavú stranu nahradíme produkciou zo vzťahu 2.3, a rovnicami šoku z_t 2.6 a pre vývoj zásoby kapitálu k_t 2.7 nám dáva jednoduchý RBC model. Jeho vyjadrenie z pohľadu domácnosti bude nasledovné:

$$\max_{c_t, h_t} \mathbf{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - h_t), \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.9)$$

$$\text{pri ohraničení: } c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t$$

$$\text{a vývoji kapitálu } k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

$$\text{a šoku } z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}, \text{ kde } \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Symbol \mathbf{E} v maximalizačnej funkcii vyjadruje fakt, že pracujeme len s očakávanými užitočnosťami. Ďalšie premenné modelu, tj. produkciu y_t , reálnu mzdu w_t , či úrok r_t ľahko vypočítame podľa vzťahov 2.3, 2.4, 2.5.

2.2 Model s daňovým zaťažením

Tento model je rozšírením základného modelu o daňové zaťaženie.

Rozpočtové ohraničenie:

Rovnako ako v základnom modeli i tu predpokladáme veľké množstvo identických, nekonečne dlho žijúcich domácností, ktoré majú v každom čase svoju zásobu kapitálu k_t a jednu jednotku času, ktorú rozdeľujú medzi prácu h_t a odpočinok l_t . V každom čase dostanú domácnosti za svoju prácu a kapitál príjem, ktorým potom

financujú svoju osobnú spotrebu a investície do zvýšenia ich zásoby kapitálu. Ich rozpočtové ohraničenie sa však teraz zmení na

$$c_t + i_t = (1 - \tau_h)w_t h_t + (1 - \tau_k)r_t k_t + \tau_k \delta k_t + \tau_t, \quad (2.10)$$

kde τ_h je sadzba dane na príjem z práce, τ_k je sadzba dane na kapitálový príjem, očistený od depreciačie $(r_t - \delta)k_t$, a posledný člen τ_t je jednorázový transfer (per capita) od vlády pre domácnosti.

Vláda:

Úloha vlády v tomto modeli je vyberať daň z príjmu a vracať ju do domácností ako jednorázový transfer. Z toho vyplýva, že rozpočtové ohraničenie vlády je

$$\tau_t = \tau_h w_t H_t + \tau_k (r_t - \delta) K_t, \quad (2.11)$$

kde K_t a H_t sú agregované premenné.

Tu sa pristavíme. K_t je celková zásoba kapitálu a H_t celková investovaná práca. Obidve premenné prislúchajú k svojim agregovaným per capita príbuzným k_t a h_t . Rozdiel medzi nimi je len technický. A to v tom, že domácnosti hýbu pri maximalizácii svojej užitočnosti len s k_t, h_t a K_t, H_t berú ako konštanty. Toto označenie nám pomáha predísť problémom pri dynamickom programovaní s derivovaním funkcie užitočnosti. Na tomto mieste musíme pripomenúť, že v základnom modeli, nakoľko sa tam nevyskytovali žiadne rušivé vplyvy (*distortionary*), akými sú tu dane (ich rušivý vplyv sa tu prejaví v znížení ponúkanej práce), sme nepotrebovali rozlišovať medzi K_t a k_t resp. medzi H_t a h_t , pretože platilo stále $K_t = k_t$ a $H_t = h_t$. V ďalšom texte budeme toto označenie mlčky používať. Ešte upozorňujeme, že obe premenné sa vzťahujú k jednej domácnosti.

Z tohto dôvodu preznačíme vzťah 2.4 pre reálnu mzdu w_t na

$$w_t = A(z_t) \frac{\partial F(K_t, H_t)}{\partial H_t} \quad (2.12)$$

a vzťah 2.5 pre úrok r_t na

$$r_t = A(z_t) \frac{\partial F(K_t, H_t)}{\partial K_t}. \quad (2.13)$$

Ostatné predpoklady má model s daňami zhodné so základným modelom.

Model s daňovým zaťažením:

Problém, ktorému čelia domácnosti môžeme teraz vyjadriť v podobnej forme ako je 2.9. Nahradením τ_t v rovnici 2.10 výrazom pre τ_t z 2.11 dostaneme rozpočtové ohraničenie domácnosti, ktoré spolu s funkciou užitočnosti 2.1 a rovnicami pre vývoj šoku a kapitálu 2.6 a 2.7 dávajú nasledujúci model s daňovým zaťažením:

$$\max_{c_t, h_t} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - h_t), \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.14)$$

pri ohraničení: $c_t + i_t = w_t(h_t + \tau_h(H_t - h_t)) + r_t(k_t + \tau_k(K_t - k_t)) - \tau_k \delta(K_t - k_t)$

a vývoji kapitálu $k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

a šoku $z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}$, kde $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Reálna mzda a úrok sú dané vzťahmi 2.12 a 2.13.

2.3 Model s domácou produkciou

Po rozšírení modelu o dane je naším ďalším cieľom rozčleniť ekonomiku na 2 sektory: trhovÝ sektor (*market sector*) a domáci sektor (*household sector*, tiež *home sector*). Že má zmysel zaoberať sa touto otázkou poukázalo už viacero autorov. Vymenujeme tri najdôležitejšie pozorovania, ktoré sa dajú nájsť v článkoch Greenwood, Rogerson, Wright [3] a Benhabib, Rogerson, Wright [1].

- priemerný manželský pár v USA strávi približne 33% svojho času prácou v trhovom sektore a viac než 28% prácou v domácom sektore (varenie, upratovanie, staranie sa o potomkov)

- povojnové štatistiky v USA ukázali, že investície do domáceho kapitálu (definovaného ako nákup tovarov dlhodobej spotreby) prekročili investície do trhového kapitálu
- pokusy o odmeranie objemu domácej produkcie dosahovali hodnoty v rozmedzí 20% až 50% z hrubého domáceho produktu

Z týchto pozorovaní vidíme, že domáci sektor je veľký a naša snaha zakomponovať ho do modelu je skutočne oprávnená.

Medzi domácim a trhovým sektorom budeme predpokladať jeden podstatný rozdiel: so statkami, ktoré boli vyprodukované v trhovom sektore sa môže voľne obchodovať, kdežto statky, vyprodukované domácim sektorom nemôžu byť predané či zmenené na kapitál, pretože sú určené výlučne na spotrebu. Funkcia užitočnosti má tvar

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{Mt}, c_{Ht}, l_t), \quad (2.15)$$

kde $0 < \beta < 1$ je diskontný faktor, c_{Mt} je spotreba tovarov vyprodukovaných v trhovom sektore, c_{Ht} spotreba tovarov vyprodukovaných v domácom sektore. Celkový čas, ktorý majú domácnosti k dispozícii je jednotkový a podobne ako v predchádzajúcom modeli definujeme odpočinok ako $l_t = 1 - h_{Mt} - h_{Ht}$, kde h_{Mt} je práca investovaná do trhového sektora a h_{Ht} do domáceho sektora.

Rozpočtové ohraňenie

Domácnosti čelia rozpočtovému ohraňeniu danému vzťahom

$$c_{Mt} + i_{Mt} + i_{Ht} = (1 - \tau_k)r_t k_{Mt} + (1 - \tau_h)w_t h_{Mt} + \delta_M \tau_k k_{Mt} + \tau_t, \quad (2.16)$$

kde k_{Mt} je zásoba trhového kapitálu, i_{Mt} sú investície do trhového kapitálu a i_{Ht} sú investície do domáceho kapitálu. Parametre vyjadrujúce daňové zaťaženie τ_k , τ_h a τ_t majú rovnaké vyjadrenie ako vo vzťahu 2.10. Reálna mzda w_t a úrok r_t sú popísané vzťahmi 2.12, resp. 2.13. Treba všimnúť fakt, ktorý sme spomínali vyššie,

že domáca produkcia (označíme je c_{Ht}) v rozpočtovom ohraničení nefiguruje, a teda nie je domácnostiam priamo k dispozícii (slúži len na spotrebu).

Kapitál

Pre vývoj zásoby kapitálu v trhovom i domácom sektore platí:

$$k_{Mt+1} = (1 - \delta_M)k_{Mt} + i_{Mt} \quad (2.17)$$

$$k_{Ht+1} = (1 - \delta_H)k_{Ht} + i_{Ht}, \quad (2.18)$$

kde k_{Mt} je zásoba kapitálu v trhovom sektore a k_{Ht} je zásoba kapitálu v domácom sektore. Parameter δ_M je úroveň amortizácie kapitálu v trhovom sektore a δ_H je úroveň amortizácie kapitálu v domácom sektore.

Domáca produkcia

Domáca produkcia je popísaná vzťahom

$$c_{Ht} = A_H(z_{Ht})G(k_{Ht}, h_{Ht}), \quad (2.19)$$

kde k_{Ht} zásoba kapitálu v domácom sektore a h_{Ht} je množstvo investovanej práce do domáceho sektora. U produkčnej funkcie v domácom sektore predpokladáme rovnaké vlastnosti ako u produkčnej funkcie v trhovom sektore, že je rastúca a konkávna v oboch svojich argumentoch.

Šoky

Produkčne šoky v domácom sektore sa vyvíjajú

$$z_{Ht+1} = \rho_H z_{Ht} + \varepsilon_{Ht+1}, \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{Ht} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_H^2) \quad (2.21)$$

kde ε_{Ht} je biely šum s normálnym rozdelením, so strednou hodnotou 0 a so štandardnou odchýlkou σ_H a $0 < \rho \leq 1$. Šoky v produkčnej funkcie sú v trhovom sektore

sú bez zmeny popísané rovnicou 2.6.

Model s domácou produkciou

Rozpočtové ohraničenie upravíme nahradením τ_t v rovnici 2.16 výrazom pre τ_t z 2.11. Toto ohraničenie spolu s rovnicami pre vývoj šokov 2.6 a 2.20, zásoby kapitálu (trhového i domáceho) 2.17 a 2.18 a funkciou užitočnosti 2.15, ktorú chceme maximalizovať, nám dáva výsledný RBC model s domácou produkciou:

$$\max_{c_{Mt}, c_{Ht}, h_{Mt}, h_{Ht}} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{Ht}, c_{Mt}, 1 - h_{Mt} - h_{Ht}), \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.22)$$

pri ohraničení:

$$c_{Mt} + i_{Mt} + i_{Ht} = w_t(h_{Mt} + \tau_h(H_{Mt} - h_{Mt})) + r_t(k_{Mt} + \tau_k(K_{Mt} - k_{Mt})) - \tau_k \delta_M(K_{Mt} - k_{Mt})$$

$$\text{a rovnicami pre vývoj kapitálu } k_{Mt+1} = (1 - \delta_M)k_{Mt} + i_{Mt}$$

$$K_{Mt+1} = (1 - \delta_M)K_{Mt} + I_{Mt}$$

$$k_{Ht+1} = (1 - \delta_H)k_{Ht} + i_{Ht}$$

$$K_{Ht+1} = (1 - \delta_H)K_{Ht} + I_{Ht}$$

$$\text{a šokov } z_{Mt+1} = \rho_M z_{Mt} + \varepsilon_{Mt+1}, \quad \text{kde } \varepsilon_{Mt} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_M^2)$$

$$z_{Ht+1} = \rho_H z_{Ht} + \varepsilon_{Ht+1}, \quad \text{kde } \varepsilon_{Ht} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_H^2)$$

Produkcia v domácom sektore c_{Ht} je daná rovnicou 2.19, reálna mzda w_t a úrok r_t vzťahmi 2.12 a 2.13.

3 Riešenie modelov

Naším cieľom v tejto kapitole je popísať konkrétne modely, ktoré budeme používať na analýzu. V prvej časti opíšeme štyri RBC modely zvolením konkrétnych funkcií užitočnosti a produkčných funkcií z predchádzajúcej kapitoly a zdefinujeme potrebné parametre modelov. V druhej časti naznačíme postup pri riešení modelov - hľadanie rovnovážneho stavu a optimálneho riadenia.

3.1 Definovanie funkcií

Produkčné funkcie

V modeloch budeme používať Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu s konštantnými výnosmi z rozsahu. Šoky, ktoré chceme do produkcie ekonomiky zahrnúť v nej budú vystupovať v logaritmickej tvare. Výsledná produkcia ekonomiky Y_t pre základný model a model s daňovým zaťažením je potom daná rovnicou:

$$Y_t(z_t, K_t, H_t) = e^{z_t} K_t^\alpha H_t^{1-\alpha}, \quad (3.1)$$

kde $\alpha \in (0, 1)$.

Pre model s domácou produkciou sa funkcia produkcie v domácom sektore nelíši od produkcie v trhovom sektore a rovnako má tvar Cobb-Douglasovej funkcie. Šoky v nej vystupujú v exponenciálnom tvare. Výsledná dvojica produkcií pre tento model má tvar:

$$Y_t(z_{Mt}, K_{Mt}, H_{Mt}) = e^{z_{Mt}} K_{Mt}^\alpha H_{Mt}^{1-\alpha} \quad (3.2)$$

$$c_{Ht}(z_{Ht}, k_{Ht}, h_{Ht}) = e^{z_{Ht}} k_{Ht}^\eta h_{Ht}^{1-\eta}, \quad (3.3)$$

kde $\eta \in (0, 1)$.

Funkcia užitočnosti

V základnom modeli a modeli s daňami budeme používať logaritmickej funkciu užitočnosti v tvare

$$u(c_t, h_t) = \log c_t + \log(1 - h_t). \quad (3.4)$$

V modeli s domácou produkciou bude funkcia užitočnosti vystupovať v rozšírenom tvare

$$u(c_{Mt}, c_{Ht}, h_{Mt}, h_{Ht}) = \omega \log C(c_{Mt}, c_{Ht}) + (1 - \omega) \log(1 - h_{Mt} - h_{Ht}), \quad (3.5)$$

kde ω sú váhy medzi spotrebou a odpočinkom a $C(c_{Mt}, c_{Ht})$ je agregátor spotreby domácich a trhových statkov a má tvar

$$C(c_{Mt}, c_{Ht}) = c_{Mt}^\psi c_{Ht}^{1-\psi} \quad (3.6)$$

Spojením rovníc 3.5 a 3.6 dostaneme po úpravách nasledujúci tvar funkcie užitočnosti pre model s domácou produkciou

$$u(c_{Mt}, c_{Ht}, h_{Mt}, h_{Ht}) = \omega\psi \log c_{Mt} + \omega(1 - \psi) \log c_{Ht} + (1 - \omega) \log(1 - h_{Mt} - h_{Ht}) \quad (3.7)$$

3.2 Špecifikácia modelov a kalibrácia dát

V našej práci sme sa nezaoberali priamo reálnymi dátami a ich kalibráciou. Parametre pre jednotlivé modely sme prevzali z prác Romer [6] a Zeman [7]. Postup pre kalibráciu parametrov je naznačený v Cooley, Prescott [2]. Použité parametre, spolu s presným opisom použitých modelov je v nasledujúcom prehľade.

Model US1

Náš prvý model je základný RBC model popísaný rovnicami 2.9 s produkčnou funkciou tvaru 3.1 a funkciou užitočnosti 3.4. V ďalšom texte ho budeme označovať skratkou *US1*. Toto označenie vyjadruje, že je to náš prvý model a jeho parametre sú kalibrované na americké povojnové dáta (štvrtročné údaje). Použité parametre modelu sú v nasledujúcej tabuľke:

α	0,33	podiel kapitálu na produkcii
β	0,99	diskontný faktor budúcnosti
δ	0,025	miera amortizácie kapitálu
ρ	0,95	autokorelácia šokov
σ	0,007	štandardná odchýlka šoku

Model US2

Druhým použitým modelom je RBC model s daňovým zaťažením, ktorý je kompletne opísaný rovnicami 2.14. Jeho produkčná funkcia a funkcia užitočnosti sú rovnakého tvaru ako v modeli *US1*. Je kalibrovaný na štvrtročné povojnové dáta amerického hospodárstva a v ďalšom ho budeme označovať skratkou *US2*. Použité parametre modelu sú v nasledujúcej tabuľke:

α	0,33	podiel kapitálu na celkovej produkcii
β	0,99	diskontný faktor budúcnosti
δ	0,025	miera amortizácie kapitálu
ρ	0,95	autokorelácia šokov
σ	0,007	štandardná odchýlka šoku
τ_k	0,25	daňové zaťaženie príjmov z kapitálu
τ_h	0,7	daňové zaťaženie príjmov z práce

Model US3

Posledným modelom kalibrovaným na štvrtročné americké povojnové dáta je RBC model s domácou produkciou. Jeho vyjadrenie je dané vzťahmi 2.22 s produkčnými funkciami (v domácom a trhovom sektore) tvaru 3.2 a funkciou užitočnosti ako je zapísaná v rovnici 3.7. Tento model je z našich troch modelov najväčší a parametre, ktoré sme použili sú v nasledujúcej tabuľke:

α	0,3267	podiel trhového kapitálu na celkovej produkcii v trhovom sektore
η	0,3526	podiel domáceho kapitálu na celkovej domácej produkcii
β	0,9855	diskontný faktor budúcnosti
ω	0,6755	váhy medzi spotrebou a oddychom
ψ	0,5583	váhy medzi spotrebou statkov v domácou a trhovom sektore
δ_M	0,0295	miera amortizácie trhového kapitálu
δ_H	0,027	miera amortizácie domáceho kapitálu
ρ_M	0,95	autokorelácia šokov v trhovom sektore
ρ_H	0,95	autokorelácia šokov v domácom sektore
σ_M	0,00763	štandardná odchýlka šoku v trhovom sektore
σ_H	0,00763	štandardná odchýlka šoku v domácom sektore
τ_k	0,25	daňové zaťaženie príjmov z kapitálu
τ_h	0,7	daňové zaťaženie príjmov z práce

Model SVK

Ako zaujímavosť sme použili aj základný RBC model kalibrovaný na slovenské údaje. K dispozícii sme mali štvrťročné dáta z rokov 1993-2000. Použili sme jednoduchú kalibráciu a zaviedli sme niekoľko zjednodušujúcich predpokladov.

- Parameter α sa odvodil z podmienky maximalizácie zisku tak, že $1 - \alpha$ je rovná pomeru objemu vyplatených miezd (cena práce krát množstvo práce) ku celkovým príjmom.
- Úroveň amortizácie kapitálu δ sa vypočítala z rovnice pre vývoj kapitálu, kde pod investíciami rozumieme tvorbu hrubého fixného kapitálu a pod kapitálom hrubý investičný majetok.
- Diskontný faktor β pri známych hodnotách α a δ sa dopočíta z podmienky prvého rádu pre extrém funkcie 2.9 po dosadení rozpočtového ohraničenia a konkrétnej produkčnej funkcie 3.1 a funkcie užitočnosti 3.4. Po úpravach má výsledný výraz tvar $\frac{1}{\beta} + \delta - 1 = \alpha \frac{y_t}{k_t}$

Použité parametre sú v nasledujúcej tabuľke:

α	0,33	podiel kapitálu na produkcii
β	0,981	diskontný faktor budúcnosti
δ	0,031	miera amortizácie kapitálu
ρ	0,95	autokorelácia šokov
σ	0,007	štandardná odchýlka šoku

3.3 Postup riešenia RBC modelov

Pod vyriešením RBC modelu budeme rozumieť nájdenie optimálnej výšky investícií i_t a podielu investovanej práce h_t v každom čase $t > 0$ pri známych hodnotách kapitálu k_t a veľkosti produkčného šoku z_t .

Určenie podielu investovanej práce h_t nám determinuje produkciu y_t a určenie výšky investícií i_t nám jednoznačne (z rozpočtového ohraničenia) určí spotrebu c_t . Výška investícií nám taktiež určuje zásobu kapitálu v nasledujúcom období.

Dynamické programovanie

Tento problém môžeme chápať aj ako problém dynamického stochastického programovania na nekonečnom časovom horizonte. Jeho základná schéma vyzerá nasledovne (pomocou apostrofov sme označili hodnoty v nasledujúcom období):

$$v(z, s) = \max_d \{r(z, s, d) + \beta E [v(z', s'/z, s)]\} \quad (3.8)$$

pričom:

$$z' = A(z) + \varepsilon'$$

$$s' = B(z, s, d).$$

Funkcia $v(z, s)$ sa nazýva hodnotová funkcia, z a s v tejto schéme sú stavové premenné, a d je kontrolná premenná. Funkcia $r(z, s, d)$ je účelová funkcia vyjadrená v premenných z, s a d . Celá schéma ma rekurzívny charakter a našim cieľom nie je nájsť veľkosť hodnotovej funkcie (ktorá tu je nepodstatná), ale nájsť optimálne riadenie (*decision rules*), čo znamená vyjadriť hodnotu kontrolnej premennej ako funkciu premenných stavových $d = \mathcal{D}ec(z, s)$.

Hľadanie optimálneho riadenia nám umožní jeden dôležitý predpoklad celého systému: predpokladáme, že rovnice pre vývoj z a s sú lineárne. Za dodatočného predpokladu, že $r(z, s, d)$ je kvadratická funkcia, z teórie dynamického programovania vyplýva, že aj $v(z, s)$ bude kvadratická funkcia. Vo všeobecnosti (a rovnako aj v našom prípade) však $r(z, s, d)$ nemusí byť kvadratická. Tento technický nedostatok sa rieši aproximáciou funkcie Taylorovým polynómom v okolí rovnovážneho stavu systému. Preto prvý krok pri riešení RBC modeli spočíva v nájdení rovnovážneho stavu $\bar{x} = (\bar{z}, \bar{s}, \bar{d})$.

Rovnovážny stav

Rovnovážny stav (*steady state*) dostaneme ako riešenie systému rovníc prvého rádu pre extrém hodnotovej funkcie v schéme 3.8 spolu s rovnicami pre konštantnosť riešenia v čase pre z a s .

$$0 = \frac{\partial r}{\partial d}(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) + \beta \frac{\partial r}{\partial s}(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) \left[I - \beta \frac{\partial B}{\partial s} \right]^{-1} \frac{\partial B}{\partial d} \quad (3.9)$$

$$\bar{z} = A(\bar{z})$$

$$\bar{s} = B(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}),$$

kde I je jednotková matica.

Hľadanie rovnovážneho stavu je v praxi ťažká záležitosť, pretože systém 3.9 môže obsahovať niekoľko desiatok rovníc i premenných a rovnice nemusia byť jednoduchého tvaru. Často sa práve jedná o zložité nelineárne systémy, ktoré sa musia riešiť numerickou cestou a výsledok úspešnej konvergencie závisí najmä od vhodnosti zvoleného štartovacieho bodu.

Optimálne riadenie

Pokiaľ získame rovnovážny stav \bar{x} , môžeme ho použiť na aproximáciu funkcie užitočnosti $r(x)$ kvadratickým polynómom. V praxi sa používa numerické počítanie gradientu prvých parciálnych derivácií m dané vzťahom

$$m_i r(\bar{x}) = \frac{1}{2\tilde{h}} \left[r(\bar{x} + h^i) + r(\bar{x} - h^i) \right],$$

kde h^i je nulový vektor s jednotkou na i -tom mieste a \tilde{h} je dostatočne malé.

Hessova matica druhých parciálnych derivácií Q sa počíta numericky zo vzťahov

$$Q_{ii}^2 r(\bar{x}) = \frac{1}{\tilde{h}^2} \left[r(\bar{x} + h^i) + r(\bar{x} - h^i) - 2r(\bar{x}) \right]$$

$$Q_{ij}^2 r(\bar{x}) = \frac{1}{4\tilde{h}^2} \left[r(\bar{x} + h^i + h^j) - r(\bar{x} + h^i - h^j) - r(\bar{x} - h^i + h^j) + r(\bar{x} - h^i - h^j) \right],$$

kde h^i je opäť nulový vektor s jednotkou na i -tom mieste a \tilde{h} je dostatočne malé.

Aproximácia $r(x)$ potom vyzerá

$$r(x) \approx r(\bar{x}) + m^T(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T Q(x - \bar{x}) \quad (3.10)$$

Ešte prepíšme rovnice v schéme 3.8 do tvaru $w' = Dx$, kde pomocou w sme označili vektor (z, s) (potom $x = (z, s, d) = (w, d)$) a máme všetko pripravené pre spustenie iteračnej schémy postavenej na základoch maximalizácie vzťahu 3.8. V niekoľkých krokoch naznačíme hľadanie optimálneho riadenia:

- Máme i -tu iteráciu hodnotovej funkcie $v_i(w) = \nu_i + p_i^T w + w^T S_i w$.
- Dosadením tejto i -tej iterácie hodnotovej funkcie a aproximácie funkcie $r(x)$ zo vzťahu 3.10 do vzťahu 3.8 dostaneme vyjadrenie novej hodnotovej funkcie
$$v_{i+1}(w) = \max_d [r(\bar{x}) + m^T(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T Q(x - \bar{x}) + \beta \nu_i + \beta p_i^T Dx + \beta x^T D^T S_i Dx]$$
- Rozdelíme x na (w, d) a z podmienok prvého rádu funkcie pre extrém funkcie určíme optimálne $d = Dec(w)$ ako funkciu w a toto dosadíme do predchádzajúceho vzťahu
- Získali sme novú funkciu $v_{i+1}(w)$, z ktorej po jej prepísaní na kvadratický tvar
$$v_{i+1}(w) = \nu_{i+1} + p_{i+1}^T w + w^T S_{i+1} w$$
 určíme nové hodnoty ν_{i+1}, p_{i+1} a S_{i+1} .
- Pokiaľ sú dostatočne presné skončíme, pokiaľ nie, pokračujeme ďalšou iteráciou

Túto základnú schému sme použili pri hľadaní optimálneho riadenia v základnom modeli. V modeloch s daňovým zaťažením a s domácou produkciou sa používa mierne modifikovaná schéma, ktorou sa tu nebudeme podrobne zaoberať. Celý postup hľadania optimálneho riadenia je vyčerpávajúco a podrobne popísali Hansen a Prescott v [4]. Náš program v jazyku MATLAB, ktorý pracuje na tu prezentovanom algoritme je uvedený v prílohe.

4 Kvantitatívna analýza

Kalibráciou a následným dopočítaním optimálneho riadenia máme v rukách funkčný matematický model ekonomiky. S jeho pomocou môžeme simulovať ekonomické dáta, a tým sledovať vývoj ekonomiky alebo pozorovať reakciu ekonomiky na nečakané technologické šoky. V ďalšom texte budeme rozoberať oba práve spomenuté prípady.

4.1 Impulse-response funkcia

Impulse-response funkcia (IRF) popisuje reakciu najdôležitejších makroekonomických ukazovateľov na jeden náhodný technologický šok. V našich analýzach sa zameriame na vplyv šokov na produkciu, investície, spotrebu a zamestnanosť. Zaujímá nás najmä veľkosť výkyvov, ktoré tento šok spustí (percentuálna zmena) a dĺžka konvergenzie späť do rovnovážneho stavu.

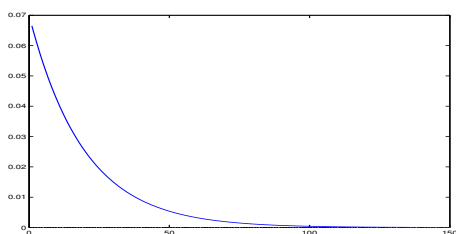
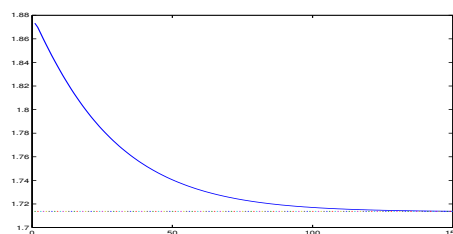
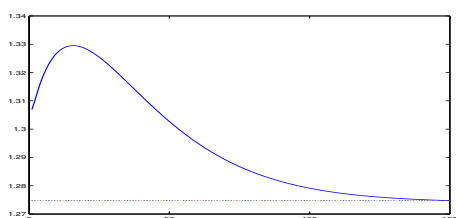
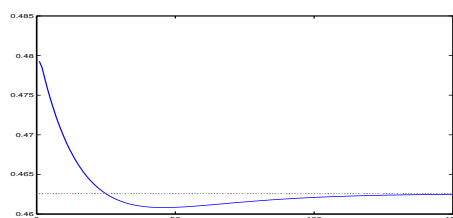
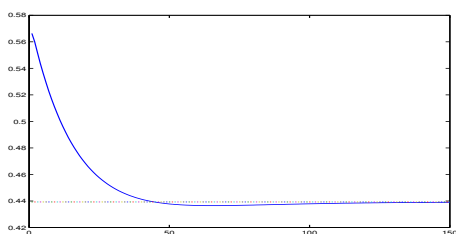
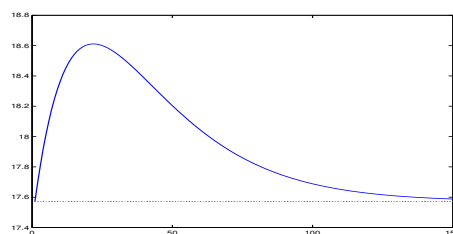
Nasledujúca tabuľka znázorňuje maximálne odchýlky z rovnovážneho stavu (v percentách) pre jednotlivé premenné. Veľkosť technologického šoku je volená tak, aby sa produkcia (a teda ponuka) zvýšila o 10 % .

y	9,31 %
c	4,30 %
h	3,63 %
i	28,98 %
k	5,81 %

Z porovnania maximálnych odchýlok vyplýva, že pokiaľ zasiahne ekonomiku ponukový šok veľkosti 10 % (reprezentovaný zmenou technológie), tak celková spotreba sa zmení maximálne o 4,3 % a zamestnanosť najviac o 3,63 %. Prekvapujúca je zmena investícií, ktoré stúpnu takmer o 29 %. Množstvo kapitálu sa zmení maximálne o 5,81 %.

Táto kvantitatívna zmena nám však nič nehovorí o charaktere tohto pozitívneho

ponukového šoku, teda o jeho kvalite. To si rozoberieme v ďalšom texte pomocou nasledujúcich obrázkov znázorňujúcich konvergenciu jednotlivých premenných:

Obr. 1: z_t Obr. 2: y_t Obr. 3: c_t Obr. 4: h_t Obr. 5: i_t Obr. 6: k_t

Čo sa deje v ekonomike potom, ako ju zasiahne technologický šok? Tento šok zasiahne v prvom rade produkciu y_t , ktorá sa prudko zvýši. Túto vysokú hladinu produkcie vycítia i domácnosti a nadštandardný príjem investujú do zvyšovania svojej spotreby c_t a zvyšovania svojho voľného času l_t , bez toho, že by si nejako znížili úroveň svojho života. Tento vývoj ekonomiky môžeme pozorovať na obrázkoch 3 a 4. Vysoký objem investícií i_t spôsobí rast kapitálu k_t , ktorý sa postupne akumuluje, tak ako to vidíme na obrázkoch 5 a 6.

Na klesanie investícií a zamestnanosti začne ekonomika reagovať znižovaním

úroku r_t a reálnej mzdy w_t . To je pomalým signálom postupného návratu do rovnovážneho stavu.

Pozitívny šok sa krátkodobo odrazí na ekonomike pozitívne, tj. zvýši sa produkcia, investície i zamestnanosť. Po 40 časových obdobiach (10 rokov) sa však produkcia, investície aj zamestnanosť vrátia naspäť ku svojim rovnovážnym hodnotám a pohybujú sa pod hranicou 1 % odchýlky z tohto stavu. Naproti tomu spotreba c_t a zásoba kapitálu k_t , ktorý sa kvôli vysokým investíciám prudko naakumuloval, sa udržiavajú stále na vysokej úrovni a ich návrat do rovnovážneho stavu trvá dvojnásobne dlhšiu dobu.

Prezentované závery a obrázky v tejto časti boli spracované pre model *US1*, pre ostatné modely sa výsledky analýzy IRF v ničom zásadnom nelíšia.

4.2 Simulácie dát

Simulácie tvoria najdôležitejšiu časť z teórie RBC modelov. Generujeme dáta a porovnávame ich štatistiky (rozptyl, korelácie, autokorelácia) so štatistikami, ktoré sme dopočítali z reálnych dát. Čím viac sa tieto štatistiky zhodujú, tým presnejšie náš model popisuje reálnu ekonomiku. Je zrejmé, že zostaviť štatisticky presný model je nereálne, a preto sa vyvíjajú rôzne typy RBC modelov na vylepšenie niektorej štatistiky na úkor druhej. Tento postup je v RBC teórií veľmi bežný. My sa v našich modeloch zameriame na ich celkové porovnanie.

Hodrick-Prescott filter

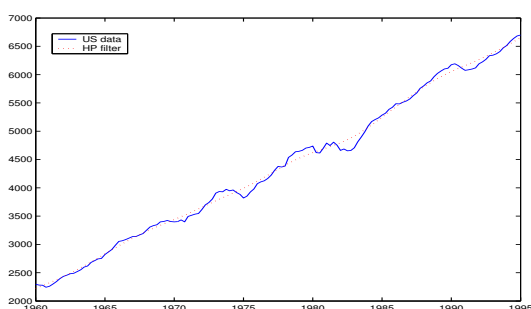
Skôr ako začneme analyzovať generované dáta, si treba uvedomiť, že RBC modely sa špecializujú na fluktuácie. Dôležitou úlohou pred použitím vygenerovaného časového radu je teda odstránenie trendu. Na tento účel sa v RBC modeloch takmer výlučne používa Hodrick-Prescott filter (HP-filter). Jeho úlohou je zaviesť hladký,

no nie nutne lineárny trend. Matematická formulácia HP-filtra vyzerá nasledovne:

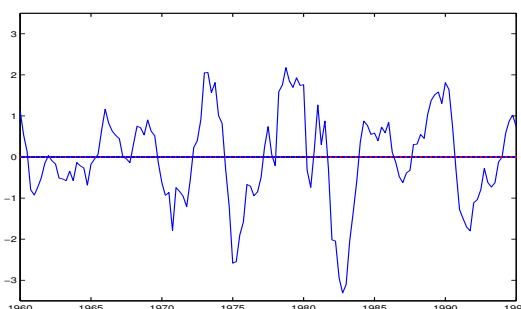
$$\min_{\{y_t^{tr}\}} \sum_{t=1}^T (y_t - y_t^{tr})^2 + \lambda \sum_{t=3}^T (\Delta y_t^{tr} - \Delta y_{t-1}^{tr})^2,$$

kde t_t je pôvodný časový rad a y_t^{tr} je jeho trendová zložka.

Pre $\lambda = 0$ je trend jednoducho pôvodný časový rad a pre $\lambda \rightarrow \infty$ sa trend blíži ku priamke. Pre štvrťročné údaje, s ktorými v tejto práci pracujeme, je zaužívané voliť $\lambda = 1600$. Motivácia za touto voľbou je taká, že keby originálny časový rad bol konštantný, potom HP-filter s touto voľbou parametra λ by eliminoval fluktuácie s frekvenciou menšou než 32 štvrťrokov, čiže 8 rokov. Normálne sa za hospodárky cyklus považuje kolísanie okolo rastovej cesty s frekvenciou od troch do piatich rokov. Toto Burns a Mitchell definovali ako bežnú frekvenciu hospodárskeho cyklu. Bližšie vysvetlenie sa dá nájsť v práci Kinga a Rebelu [5]).



Obr. 7: HDP USA v stálych cenách



Obr. 8: fluktuácie HDP USA v %

Pre názornosť práce HP-filtra sú na obrázkoch 7 a 8 znázornené americké dáta, ktorými je preložený trend pomocou HP-filtra a americké dáta po odstránení trendovej zložky.

Na obrázku 7 je HDP USA v stálych cenách z roku 1995 a ním preložená trendová zložka. Na obrázku 8 sú percentuálne výkyvy HDP oproti trendu vyjadrené v percentách. Toto je časový rad, ktorý budeme ďalej analyzovať. Časový rad odchýlok od trendu (na obrázku 8) budeme ďalej analyzovať.

Pred tým, ako pristúpime k samotným výsledkom simulácií, pripomeňme si v krátkosti modely, ktoré sme popisovali:

US1 - základný model, kalibrovaný na údaje USA

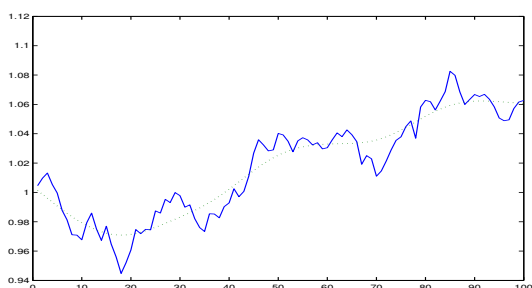
US2 - model rozšírený o dane, kalibrovaný na údaje USA

US3 - model s domácou produkciou, kalibrovaný na údaje USA

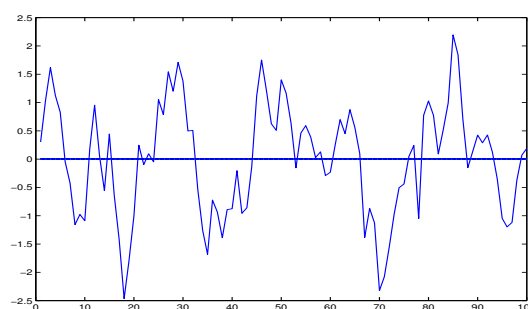
SVK - základný model, kalibrovaný na údaje SR

Popis simulácií

Dáta sme simulovali pre $T=100$ (25 rokov) v každej simulácii. Pre každý model sme urobili 1000 simulácií a každú simuláciu opakovali trikrát. Výsledky, sú priemerné hodnoty týchto simulácií. Nasledujúci ilustratívny obrázok zobrazuje vývoj produkcie v jednej simulácii pre model *US2*:



Obr. 9: produkcia modelu *US2*



Obr. 10: fluktuácie produkcie *US2* v %

Časové rady sme generovali spôsobom, ktorý (v náväznosti na riešenie RBC modelov z predchádzajúcej kapitoly) špecifikujeme len pre základný model. Zmeny pre ostatné dva modely sú naozaj nepatrné a intuitívne (napr. v 2. kroku pri modeli s domácou produkciou vygenerujeme miesto jedného z_t dva šoky z_{Mt} a z_{Ht} a podobne):

1. za začiatok simulácie zoberieme rovnovážny stav
2. vygenerujeme technologický šok $z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t$, kde $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$
3. z premenných k_{t-1} a i_{t-1} vypočítame nové $k_t = (1 - \delta)k_{t-1} + i_{t-1}$
4. pomocou optimálneho riadenia určíme z k_t a z_t optimálne i_t a h_t
5. dopočítame c_t a y_t , zvýšime čas a vrátime sa do bodu 2.

Výsledky, ku ktorým sme dospeli sme porovnávali so štatistickými údajmi eko-

nomiky USA, ktoré sa dajú nájsť v práci Kinga a Rebelu [5]. Použité časové rady boli zbavené trendu pomocou HP-filtra a výsledky sú v nasledujúcej tabuľke:

US data	volatilita	relatívna volatilita s y	autokorelácia	korelácie s y
y	1,81	1,00	0,84	1,00
c	1,35	0,74	0,80	0,88
i	5,30	2,93	0,87	0,80
h	1,79	0,99	0,88	0,88
w	0,68	0,38	0,66	0,12
r	0,30	0,16	0,60	-0,35

Volatilita a relatívna volatilita sú v percentách. V ďalšom texte to budeme mlčky predpokladať.

Porovnanie z modelmi $US1$ a $US2$ uvádzame v nasledujúcej tabuľke:

	volatilita			relatívna volatilita			autokorelácia			krížové korelácie		
	data	$US1$	$US2$	data	$US1$	$US2$	data	$US1$	$US2$	data	$US1$	$US2$
y	1,81	1,12	1,05	1,00	1,00	1,00	0,84	0,66	0,75	1,00	1,00	1,00
c	1,35	0,82	0,77	0,74	0,56	0,62	0,80	-0,27	0,18	0,88	0,88	0,96
i	5,30	3,81	4,25	2,93	0,86	0,61	0,87	0,48	0,66	0,80	0,92	0,94
h	1,79	0,46	0,37	0,99	0,11	0,20	0,88	0,49	0,67	0,88	0,81	0,85

Model $US1$

Model $US1$ vyšiel v porovnaní s dátami USA dobre jedine v prípade krížových korelácií. Korelácia spotreby c_t a produkcie y_t vyšla dokonca presne ako hodnota získaná z reálnych dátach 0,88. Ostatné korelácie vyšli kladné čísla, blízke 0,90, čo je dostatočne presné. Výsledky dosiahnuté v krížových koreláciách už pri takýchto jednoduchých modeloch je významný argument za opodstatnenosť RBC teórie.

Volatilita a relatívna volatilita modelu nevykazuje žiadne signifikantné črty, tj. ani sa príliš nelíši, ani nepribližuje k reálnym hodnotám. O autokorelácií platí to isté.

Model $US2$

Najdôležitejší prínos modelu $US2$ oproti $US1$ sme zaznamenali v autokoreláciách, ktoré pri modeli $US1$ vychádzali veľmi zle. Najmarkantnejší rozdiel je pri

spotrebe, kde sa zavedením daní záporná autokorelácia spotreby c_t zdvihla do kladných čísiel na 0,18, čo je významná kvalitatívna zmena, napriek stále výraznému rozdielu od skutočnej hodnoty 0,80.

Zlepšili sa aj malé autokorelácie investícií a práce z 0,48 resp. 0,49 na 0,66 resp. 0,67, čím sa výrazne priblížili skutočným hodnotám 0,87 resp. 0,88. Tiež sa zvýšila autokorelácia produkcie na 0,75. Tým pádom sa slabina *US1* modelu v autokoreláciach odstránila. Zavedenie daní totižto pôsobí na ekonomiku rušivo tým, že domácnosti znížia ponuku práce. Vlastná práca je pre domácnosti teraz drahšia (menej za ňu dostávajú), a preto citlivejšie rozhodujú o jej ponuke. A práve táto snaha domácností o udržanie si konštantnej ponuky práce ma vplyv na zvýšenie autokorelácie.

Pri relatívnej volatilitate zavedenie daní výraznejšiu zmenu neprinieslo.

Záporným prínosom modelu *US2* je negatívna zmena krížových korelácií s produkciou, v ktorej model *US1* dosiahol veľmi presné výsledky. Korelácia produkcie so spotrebou sa z 0,88 zvýšila na 0,96. Korelácia produkcie s prácou sa mierne zlepšila z 0,81 na 0,85 (v skutočnosti 0,88) a korelácia s investíciami sa mierne zhoršila z 0,92 na 0,94 (v skutočnosti 0,80).

Na tomto mieste chceme poznamenať, že v praxi sa s RBC modelmi pracuje veľmi osamotene. To znamená, že existujú modely, ktoré dosahujú veľmi presné výsledky len v jednej, či dvoch štatistikách (napr. vybrané krížové korelácie) a ostatné štatistiky neberú v úvahu. Zavádzaním nových premenných, ktoré majú za účel ešte viac upresniť získané jednotlivé štatistické výsledky, dosahujú pozoruhodnú presnosť vo vybraných parametroch. My sa snažíme pozeráť na RBC modely komplexne, so všetkými ich kladmi a záporni.

Ďalšia tabuľka zobrazuje výsledky pre model *US3*:

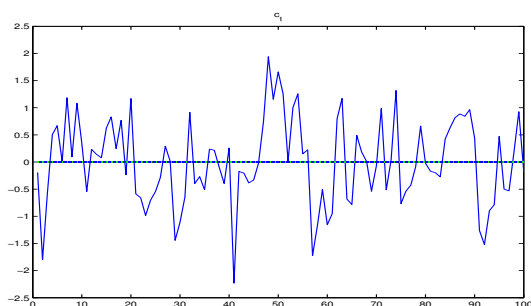
	y	c_m	c_h	i_m	i_h	h_m	h_h	k_m	k_h
volatilita	1,28	0,91	0,98	16,08	16,06	0,61	0,30	0,64	0,59
relat. vol.	1,00	0,72	0,77	12,81	13,08	0,47	0,23	0,51	0,46
autokor.	0,89	0,61	0,92	0,53	0,58	0,88	0,88	0,96	0,95
kriz. korel	1,00	0,92	0,10	0,91	0,94	0,84	-0,84	0,69	0,55

Tučne vysádzané sú štatistiky, čo sa zlepšili, šikmo tie, čo si pohoršili.

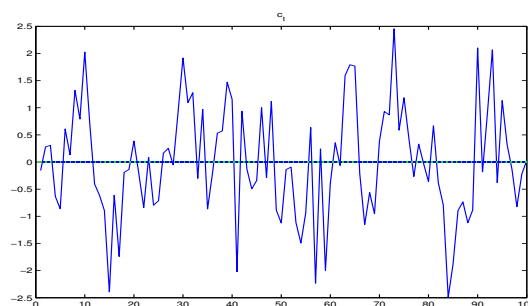
Model *US3*

Základným prínosom tohto modelu je opätovné polepšenie si krížových korelácií. Ich zhoršenie znamenalo stratu pre model *US2*. Korelácia produkcie s investíciami tu dosiahla svoju najlepšiu úroveň 0,91 (v skutočnosti 0,80).

Veľkým plusom je zlepšenie všetkých volatilit modelu, Volatilita spotreby 0,91 tu vyskočila z predchádzajúcich 0,77. Relatívna volatilita spotreby ku produkcii vyšla 0,72, a teraz je takmer totožná so skutočnou 0,74. Obrázky 11 a 12 ukazujú porovnanie volatilit pre oba modely.



Obr. 11: spotreba v modeli *US2*



Obr. 12: spotreba v modeli *US3*

Treba povedať, že celkový nárast volatility v modeli *US3* bol očakávaný, nakoľko zavedením druhého sektora do ekonomiky, získali domácnosti možnosť investovať svoju prácu a kapitál do domáceho sektora, a tým produkovať vlastné spotrebné statky. Väčšia voľnosť pri ich rozhodovaní o ponuke svojej práce a spotrebe viedla k väčšiemu pohybu v ekonomike, ktorého výška závisela najmä od vôle, s akou sú domácnosti ochotné substituovať statky z domáceho sektora pomocou statkov z trhového sektora. Najväčší skok vo volatilit (aj relatívnej) zaznamenali investície, ktoré sa zvýšili trojnásobne z 4,25 na 16,08 resp. z 0,61 na súčasných 12,81.

Autokorelácia spotreby, s ktorou znamienkom sme mali problém v modeli *US1* a v modeli *US2* sa zlepšila na malé kladné číslo, teraz vychádza 0,61 (oproti reálnej 0,80) čo je presnosť s akou vychádzajú aj autokorelácie s investíciami a zamestnanosťou. Autokorelácia zamestnanosti dosiahla svoju hodnotu z reálnych dát 0,88. Pre produkciu je autokorelácia 0,89 (v skutočnosti 0,84) najlepšia zo všetkých dosiahnutých.

Posledným modelom, ktorý bude vyhodnotený je model SVK. Jeho štatistické ukazovatele sú v nasledujúcej tabuľke:

	volatilita		rel. volat.		autokorelácia		kríž. korel.	
	data	SVK	data	SVK	data	SVK	data	SVK
<i>y</i>	3,39	1,11	1,00	1,00	0,01	0,97	1,00	1,00
<i>c</i>	5,22	0,78	1,54	0,70	0,10	0,89	0,54	0,95
<i>i</i>	11,12	4,21	3,28	3,78	0,38	0,91	0,42	0,89
<i>h</i>	2,28	0,43	0,67	0,39	0,78	0,90	0,30	0,68

Model SVK

Podľa údajov z tabuľky je zrejmé, že model nie je dobrý pre slovenské dáta. Nemyslíme si, že má zmysel hlbšie sa zaoberať odchýlkami vo výsledných štatistikách, skôr si pripomeňme rozdielne charakteristiky oboch ekonomík a faktory, ktoré podľa nás zohrávajú kľúčovú úlohu pri nedostatočne presných výsledkoch:

- Veľká volatilita HDP - Fluktuácie HDP v slovenských dátach tvoria niekedy viac než 8% HDP a v priemere 3,39% HDP. To je markantný rozdiel v porovnaní s dátami USA, kde sa už 2% výkyv oproti trendu HDP považuje za vážny jav. Romer [6] spomína, že celá teória RBC modelov vznikla v osemdesiatych rokoch ako dôsledok "nevysvetliteľných" fluktuácií tvoriacich 4% amerického HDP).
- Malá autokorelácia HDP - Na slovenských dátach, nie je pozorovaná žiadna autokorelácia prvého rádu pre produkciu. Napriek tomu jej veľká autokorelácia štvrtého rádu (0,78) poukazuje na silnú sezónnosť, no túto autokoreláciu v súčasnosti nie sme schopný postihnúť RBC modelmi.

- Kalibrácia - Samotná kalibrácia slovenského modelu bola urobená veľmi jednoducho a s veľkým počtom zjednodušení. Špecializovaná práca o RBC modeloch pre Slovensko by určite dosiahla lepšie výsledky.

5 Záver

Cieľom tejto práce bolo predstaviť a analyzovať RBC model s domácou produkciou. To sme urobili postupným budovaním teórie - od základného modelu, cez model s daňovým zaťažením až po záverečný dvojsektorový model ekonomiky. Naše kvantitatívne analýzy s týmto modelom ukázali, že zavedenie domácej produkcie do modelu má vplyv na zvýšenie autokorelácie a tiež na zvýšenie volatility jednotlivých premenných. Štatistiky modelu boli veľmi blízke štatistikám získaným z reálnych dát. Vďaka týmto výsledkom sa odvážime tvrdiť, že výsledky RBC modelov značne zužujú priepasť medzi skutočnosťou a ekonomickou teóriou, ktorá je často výrazná.

Možností, ktoré sa nám teraz ponúkajú je viacero. Na jednej strane sa môže model rozšíriť na strane spotreby o rôzne ceny statkov vyrobených v domácom sektore a v trhovom sektore. To by zlepšilo citlivosť modelu na rozhodnutia domácností o investovanej práci a vlastnej spotrebe. Použitím rôznych cenových scenárov by sa mohlo sledovať prelievanie práce a spotreby medzi jednotlivými sektormi.

Ďalšie možné rozšírenie modelu spočíva v modifikácii šokov, kde by sa napr. zavedením rôznych typov dlhodobých a krátkodobých šokov mohli zlepšiť možnosti vypovedacej schopnosti modelu najmä pri analýze impulse-response function. Navyše pôsobenie šokov rôznej veľkosti sa odzrkadlí aj pri výsledkoch simulácií.

V každom prípade cesta domácej produkcie, ktorou sme sa uberali v tejto práci, je iba slabým zábleskom v možnostiach, ktoré nám RBC teória ponúka. Množstvo modelov už bolo zostrojených a množstvo ešte len čaká na svoj okamih. V každom prípade v tejto živej a populárnej teórii sa hranice posúvajú dopredu obrovskými krokmi.

Literatúra

- [1] Benhabib, Jess, Rogerson, Richard and Wright, Randall "Homework in Macroeconomics: Household Production and Aggregate Fluctuations", *The Journal of Political Economy*, Volume 99, December 1991
- [2] Cooley, Thomas F. and Prescott, Edward C. "Economic Growth and Business Cycle", editor Cooley, Thomas F. *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton University Press, 1995
- [3] Greenwood, Jeremy, Rogerson, Richard and Wright, Randall "Household Production in Real Business Cycle Theory", editor Cooley, Thomas F. *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton University Press, 1995
- [4] Hansen, Gary D. and Prescott, Edward C. "Recursive Methods for computing Equilibria of Business Cycle Models", editor Cooley, Thomas F. *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton University Press, 1995
- [5] King, Robert G. and Rebelo, Sergio T. "Resuscitating Real Business Cycles", editor Taylor, John B. and Woodford, Michael *Handbook of Macroeconomics, volume 1B*, North Holland, 1999
- [6] Romer, David *Advanced Macroeconomics*, McGraw Hill, New York, 1996
- [7] Zeman, Juraj "Home Production with Inventories", Working Paper, Comenius University, 2000

Dobrým štartom do teórie RBC modelovania sú linky:

- Workshop in Advanced Macroeconomics
<http://www.vwi.unibe.ch/amakro/lectures/advmacro/advma.htm>
- The Quantitative Macroeconomics and Real Business Cycle
<http://ideas.uqam.ca/QMRBC/index.html>

Prílohy

Parametre použité v programe:

```
alfa    = 0.36;      % cobb-douglas vahy
beta    = 0.99;      % diskontny faktor
delta   = 0.025;     % amortizácia kapitálu
ro      = 0.95;      % autokorelacny koeficient sokov
sigma   = 0.007;     % volatilita sokov

h_tilda = 1/100000;  % presnost pri pocitani derivacii
h = h_tilda*eye(4);  % diagonalna matica s presnostami

dw      = 2;         % dimenzia w
dy      = 4;         % dimenzia y
D       = [ro 0 0 0; 0 1-delta 1 0]; % matica laws of motion

iter = 10000;        % maximalny pocet iteracii
eps   = 0.0000001;  % vyzadovana presnost
```

Rovnice rovnovážneho stavu odvodené podľa vzťahov 3.9 pre základný model. Rovnovážny stav v programe MATLAB nájdeme riešením tejto sústavy pomocou funkcie FSOLVE:

```
pom = exp(z)*k^(alfa)*h^(1-alfa)-p(3);
q(1) = z;
q(2) = delta*k-i;
q(3) = (-1/pom)+(beta*exp(z)*k^(alfa-1)*alfa*h^(1-alfa))/
      /(pom*(1-beta*(1-delta)));
q(4) = (((1-alfa)*exp(z)*(k^alfa)*(h^(-alfa)))/pom)+(-1/(1-h));
```

Hľadanie optimálneho riadenia podľa postupu popísaného v kapitole 3.3:

```
while (presnost>eps);
    ni_old = ni;  p_old = p;  S_old = S;

    g    = (m'-x'*Q+beta*p'*D)';
    g1   = g(1:dw);
    g2   = g(dw+1:dy);
    R    = (Q/2+beta*D'*S*D);
    R11  = R(1:dw,1:dw);
    R12  = R(1:dw,dw+1:dy);
    R21  = R(dw+1:dy,1:dw);
    R22  = R(dw+1:dy,dw+1:dy);

    A    = inv(R22'+R22);
    B    = R12+R21';

    p    = (g1'-g2'*A*B'+g2'*A'*(-R12'-R21+R22*A*B'+R22'*A*B'))';
    ni   = g2'*(A'*R22-eye(dy-dw))*A*g2+(ret(x)-m'*x+(1/2)*x'*Q*x+beta*ni);
    S    = (R11-R12*A*B'-R21'*A*B'+B*A*R22*A*B');

    presnost = max([abs(ni-ni_old), max(abs(p-p_old)), max(max(abs(S-S_old)))]);
end

%vysledne optimalne riadenie
Dec = -A*B';
Decc = -A*g2;
```