FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2002

Miroslava Horňáková

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

EKONOMICKÁ A FINANČNÁ MATEMATIKA

EVOLUČNÁ TEÓRIA HIER

Diplomová práca

Diplomant: Miroslava Horňáková
Vedúca diplomovej práce: RNDr. Elena Šikudová Bratislava 2002

Pri písaní diplomovej práce mi pomohli rady a pripomienky mojej diplomovej vedúcej, a tak by som sa touto cestou chcela za ne poďakovať RNDr. Elene Šikudovej.

A samozrejme moje poďakovanie patrí mojim rodičom a bratom za všestrannú podporu počas celého štúdia.

Obsah:

Úvod

Evolučné hry sa v počiatkoch používali v biologickej teórii. Až v súčasných rokoch sa začali využívať aj na vysvetľovanie ekonomických a finančných javov.

V evolučnej hre si každý hráč vyberá medzi alternatývnymi stratégiami. Výplata prislúchajúca k danej stratégii závisí aj na výbere stratégií iných hráčov. Časom sú výhodnejšie stratégie používané väčšou časťou populácie. Za výhodnejšie stratégie sú považované stratégie s vyššou výplatou (maximalizujeme zisk). Túto zmenu zachytáva dynamika.

Mojím cieľom je priblížiť základy evolučnej teórie hier a aplikovať ju na vybrané hry.

Prvá kapitola opisuje model evolučnej hry, jej klasifikáciu a určenie stability bodov pomocou λ podľa práce Daniela Friedmana. V modeli evolučnej hry sú opísané základy modelu ako populácie, stav hry, patria hry, dynamika a rovnováha. V klasifikácii sú evolučné hry rozdelené podľa znamienok koeficientov vo výplatnom rozdiele na rôzne typy. Každý typ hry má alebo nemá svoju evolučnú rovnováhu. Zisťovanie stability rovnováh pomocou charakteristického čísla je popísané v tretej podkapitole.

Druhá kapitola analyzuje päť hier z hľadiska evolučnej teórie. Sú to tieto hry: koordinácia, jednorozmerný jastrab – holub, väzňova dilema, dvojrozmerný jastrab – holub a kupec – predavač.

1. Úvod do evolučnej teórie hier

Evolučná hra je, podľa Daniela Friedmana, formálny model vzájomného strategického pôsobenia v čase, v ktorom

- stratégie s vyššou výplatou nahrádzajú stratégie s nižšou výplatou (čo je obmena biologického "prežitia najsilnejšieho")
- existuje nejaká zotrvačnosť (rozlišujeme evolučnú zmenu od revolučnej zmeny, to znamená, že zhromažďovacie správanie sa nemení príliš náhle (medzi základné príčiny patria rôzne typy adaptačných nákladov alebo informačné nedostatky alebo možno obmedzená racionalita))
- hráči sa nepokúšajú systematicky ovplyvňovať iných hráčov (tento predpoklad rozoznáva evolučné hry od opakujúcich sa hier so stratégiou "prst na spúšti"; môže byť opodstatnený veľkým počtom hráčov) .

Tento model s klasifikáciou evolučnej hry je z práce Daniela Friedmana ([1], [3]).

1.1. Základy modelu

Medzi základné pojmy modelu evolučnej hry patrí vzájomné strategické pôsobenie v čase z hľadiska jednej alebo viacerých populácií hráčov, stavový priestor stratégie, partia hry v normálnom alebo extenzívnom tvare a dynamický prispôsobovací proces. V každom časovom okamihu patria hry presne priradí výplatu (alebo očakávanú výplatu) ku každej stratégii a stav hry presne určí aktuálne rozdelenie stratégií, ktoré boli využité v každej populácii. Na základe dynamiky vysoko odmeňované stratégie nahrádzajú nízko odmeňované stratégie. Keď sa zmení stav hry, zmenia sa tiež výplaty k rozdielnym stratégiám. Výsledkom takýchto pôsobení môžu byť rovnováhy i nerovnováhy. Zaujímajú nás hlavne Nashove rovnováhy (NE) a evolučné rovnováhy (EE).

1.1.1. Populácia a stav hry

Číslo populácie $K \geq 1$ predstavuje počet ekonomicky jednoznačných úloh v príklade, kde každá populácia $k = 1, \Lambda, K$ má $N_k \geq 2$ alternatívnych stratégií, ktoré sú dostupné členom danej populácie. Stav hry presne určí podiely z každej populácie, ktoré určujú rozdelenie práve používaných stratégií v každej populácii. Uvažujme dve modelové krajiny medzinárodného obchodu, kde si firmy v oboch krajinách vyberajú dva možné režimy vnútornej organizácie. Máme $K = 2$. Aj keby mali firmy zhodné technológie, sú ekonomicky rozdielne, pretože čelia rôznym výrobkom a situáciám na trhoch vo svojej krajine. Keďže má každá firma dve alternatívne stratégie (organizačné režimy), tak $N_1 = N_2 = 2$. Stav každej populácie krajiny je určený pomocou hodnoty $p \in (0,1)$. Podiel firiem práve používajúcich prvý režim je p a podiel firiem používajúcich druhý režim je $1 - p$. Stavový priestor pre každú firmu krajiny je $S^1 = S^2 = [0,1]$ a celkový priestor $S = S^1 \times S^2$ stavu $s = (s^1, s^2)$ je štvorec $[0,1]^2$.

- Jednorozmerný stavový priestor $S = [0,1]$ vznikne, ak $K = 1$ a $N = 2$. Príkladom je samostatná jednoduchá časť krajiny z modelu medzinárodného obchodu.
- Dvojrozmerný stavový priestor $S = [0,1]^2$ je vlastne štvorec. Vznikne z $K = 2$ a $N_1 = N_2 = 2$ (ako v modeli medzinárodného obchodu). Dvojrozmerný stavový priestor môže vzniknúť aj z jednoduchej populácie, ktorej hráči majú tri alternatívne stratégie ($K = 1$ a $N_1 = 3$). Potom stavový priestor je trojuholník. Ako príklad môžeme uviesť model firiem v samostatnom priemysle, ktoré si volia vysoký, stredný alebo nízky reklamný rozpočet. Ak je podiel populácie nezáporný a jeho suma je 1, tak stavový priestor je dvojrozmerný trojuholník $T = \{(p, q, 1 - p - q) : 0 \le p, q \wedge p + q \le 1\}$.
- Keď je stavový priestor trojrozmerný dostaneme tri typy. Kocku $[0,1]^3$ pre $K = 3$, $N_1 = N_2 = N_3 = 2$ (napr. model troch obchodných krajín), hranol $T \times [0,1]$ pre $K = 2$, $N_1 = 3$, $N_2 = 2$ (napr. hra kupec - predavač, kde kupci majú 3 náhradné stratégie a predavači majú 2), a štvorsten pre $K = 1$, $N = 4$ (napr. pracovníci voliaci medzi štyrmi ponukami na zamestnanie).
- Vyššími rozmermi stavových priestorov sa nebudeme zaoberať.

Z hľadiska správania nemusíme vo vývojovom modeli predpokladať nekonečnú populáciu; aj troch hráčov môžeme považovať za "veľký počet" ([1]).

1.1.2. Partia hry

Vývojové hry zahŕňajú strategické vzájomné pôsobenie v čase. V každom časovom okamihu sa strategické vzájomné pôsobenie prejavuje partiou hry. Štandardná statická hra sa prejavuje buď normálnym tvarom alebo extenzívnym tvarom nazývaným tiež stromová hra. Budeme uvažovať len partiu hry v normálnom tvare.

Partia hry v normálnom tvare je definovaná funkciou $f(r, s)$, kde $r \in S$ je (možno zmiešaná) stratégia vybraná určitým hráčom a $s \in S$ je aktuálny stav. Nazýva sa funkcia zdravia (telesnej kondície - fitnes) alebo (očakávaná) výplatná funkcia. Keď je populácií $K \geq 2$, potom f má K rozmerov.

Uvažujme dve lineárne úlohy pre výplatnú funkciu: symetrickú a nesymetrickú úlohu.

- Symetrická úloha podľa Maynarda Smitha obsahuje jednoduchú populáciu ($K = 1$) a $N \times N$ maticu $A = ((a_{ij}))$. Hráčov vyberáme náhodne po dvojiciach. Hráči získajú očakávanú výplatu $f(r, s) = r^T As$, ak hrajú zmiešanú stratégiu r proti populácii, v ktorej väčšina členov hrá zmiešanú stratégiu $s \in S$. Stratégia r je bod v $S = \{(x_1, \ldots, x_N) : x_i \geq 0 \wedge \sum_1^N x_i = 1\}$.

Máme len jednu ekonomickú úlohu a jednotlivci v populácii vzájomne pôsobia len sami medzi sebou. Jednoduchý jednorozmerný príklad z biológie sa nazýva jastrab - holub.

- Nesymetrická úloha zahŕňa dve populácie, teda $s = (s^1, s^2)$ a dve $N \times N$ matice A a B. Výplatné funkcie sú $f^1(r, s) = r^T As^2$ a $f^2(r, s) = r^T As^1$.

Máme dve jednoznačné úlohy, ale každý hráč vzájomne pôsobí len na hráčov v druhej populácii, nie na hráčov v jeho vlastnej populácii. Výplatná funkcia $f^1(r, s)$ závisí na s^2, ale nie na s^1. To znamená, že tu nie sú vlastné populačné účinky. Príkladom nesymetrickej úlohy je hra kupec - predavač.

Vlastné populačné účinky môžu byť dôležité v aplikáciách s dvomi alebo viacerými populáciami. Napríklad v medzinárodnom obchode domáce firmy krajiny súťažia na trhu výrobkov so zahraničnými firmami, ale aj s inými domácimi firmami. Ich výplatné funkcie závisia na s^1 aj s^2. Všeobecnú lineárnu úlohu pre $K = 2$ a $N_1 = N_2 = N$ môžeme zapísať ako $f^1(r, s) = r^T(As^2 + Cs^1)$ a $f^2(r, s) = r^T(Bs^1 + Ds^2)$, kde účinky vlastnej populácie sú zachytené v dvoch ďalších $N \times N$ maticiach C a D.

Predpokladáme, že výplatné funkcie sú lineárne v r a spojito diferencovateľné v s.

1.1.3. Dynamika

Vývoj stavu $s \in S$ v čase môže byť stochastický alebo deterministický, v diskrétnom alebo súvislom čase a dostupný stav môže byť celé S alebo jeho diskrétna podmnožina. Sústredíme sa na deterministický, kontinuálny čas a spojitý stav dynamiky.

Diskrétny stochastický prístup smeruje k šírke oblasti atrakcie pri výbere medzi viacerými NE. Musíme byť opatrní v prijímaní svojich výsledkov, pretože v tomto prípade predpokladáme izotropický stochastický proces. Aktuálna "zmena" alebo odchýlka rôznych spôsobov môže spôsobiť posuny, ktoré zmenia naše výsledky. Ďalší náhodný prístup používa napríklad lokálne vzájomné pôsobenie modelov, ktoré pripúšťajú malú škálu fluktuácie k pravidelnému rozloženiu vo veľkej populácii. Takéto modely môžu byť vzácne v aplikáciách, ktoré zahŕňajú vzájomné pôsobenia hlavne medzi najbližšími susedmi. Ale my sa budeme sústreďovať na nelokálne vzájomné pôsobenia celých populácií.

Kontinuálne deterministické dynamiky sú vhodné pre tieto tri príčiny:

- môžeme dostať tieto dynamiky z iného druhu použitím vhodných limít ako napr. časový prírastok, škála náhodnej fluktuácie ide k nule a počet hráčov ide k nekonečnu v každej populácii,
- spojitosť v stave časom zaistí zotrvačnosť v zmysle žiadanom na začiatku,
- takéto dynamiky sú obvykle vyjadrené v relatívne poddajnom tvare systému obyčajných diferenciálnych rovníc (ODR) $\dot{s} = F(s)$, kde $\dot{s} = (\dot{s}^1, \ldots, \dot{s}^K)$ je rýchlosť zmeny v stave a $F(s)$ je špecifikovaný vektor hodnotovej funkcie. Nech S je jednorozmerná množina, A je 2×2 matica a stav $s = (p, 1-p)$. Stačí vyjadriť ODR ako jednoduchú rovnicu v p: $\dot{p} = (1,-1)^T A(p, 1-p) = 1 - 2p$ [*1] pre $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pre dvojrozmerný stavový priestor potrebujeme presne určiť rýchlosť časovej zmeny pre dve nezávislé premenné. Pre F musíme predpísať určité obmedzenia, aby sme zabezpečili, že s je správne definované a zotrváva v stavovom priestore S (napr. že v príklade jastrab – holub nebude podiel jastrabov záporný).

Základom biologického vývoja je nárast schopnejších genotypov úmerne k menej schopným genotypom. V ekonomickom modeli platí podobný princíp: výskyt schopnejších

---

[*1] Stĺpcové vektory zapisujeme ako riadkové. To znamená, že (x,y,z) je stĺpcový vektor a $(x,y,z)^T$ je riadkový vektor.

stratégií sa zvýši pomerne k menej schopným stratégiám v každej populácii (je to spôsobené napodobňovaním a učením alebo zdrojom znovurozdelenia alebo vstupom a výstupom). Tento princíp sa nazýva kompatibilita. Navrhuje vzťah medzi výplatnou funkciou f a príslušnou dynamikou $\dot{s} = F(s)$. Kvôli jednoduchosti sa obmedzíme na skúmanie kompatibility na jednoduchej populácii. V populácii sú zvolené stratégie číslované $i = 1, \ldots, N$. Nech e_i znamená i-tu čistú stratégiu a nech $\hat{f}_i(s) = f(e_i - s, s) = f(e_i, s) - f(s, s)$ označuje pomernú výplatnú funkciu stratégie i. To znamená, že pomerná výplatná funkcia sa rovná celkovej výplatnej funkcii $f(e_i, s)$ čistej stratégie i mínus súčasný vážený populačný priemer výplatnej funkcie $f(s, s) = \sum_{i=1}^{N} s_i f(e_i, s)$.

Štyri často používané postupy špecifikovania kompatibility pre rýchlosti zmeny $\dot{s}_i$ (alebo pre rastové množstvá $\dot{s}_i / s_i$) sú dané funkciou F. Špecifikácie sú (od silnejšieho k slabšiemu): s_i (alebo $\dot{s}_i / s_i$)

(a) je proporcionálna k pomernej výplatnej funkcii; alebo
(b) má to isté poradie výnosu (rank-order) ako pomerná výplatná funkcia; alebo
(c) má tie isté znamienka ako pomerná výplatná funkcia; alebo
(d) je kladne kolerovaná s pomernou výplatnou funkciou.

Špecifikácia (a): Zvolením časovej mierky tak, že konštanta úmernosti je 1 a porovnaním každého rastového množstva $\dot{s}_i / s_i$ s pomernou výplatnou funkciou $\hat{f}_i(s)$, dostaneme systém obyčajných diferenciálnych rovníc $\dot{s}_i = s_i f(e_i - s, s)$, $i = 1, \ldots, N$. Odvolávame sa na tento systém ODR ako na replikátorovú dynamiku.

Napríklad hra jastrab - holub s maticou $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a zvyčajná parametrizácia $s = (p, 1-p)$ dáva $e_i - s = (0,1) - (p, 1-p) = (1-p)(1,-1)$, potom replikátorová dynamika je obyčajná kubická ODR $\dot{s}_1 = \dot{p} = p(1-p)(1,-1)^T A(p, 1-p) = p(1-p)(1-2p)$.

Replikátorová dynamika má biologické zdôvodnenie: genetické zdravie (výplatná funkcia) je odmerané ako pomerná rastová rýchlosť. Ťažšie ju je zdôvodniť v ekonomických aplikáciách. Druhá možnosť realizácie kompatibility verzie (a) porovnáva rýchlosť zmeny $\dot{s}_i$ vo vnútri S s výplatnou funkciou $f(e_i, s)$ úmerne k jednoduchej priemernej výplatnej funkcii $\bar{f}(s) = \frac{1}{N}\sum f(e_i, s)$. Potom máme $\dot{s}_i = f(e_i, s) - \bar{f}(s)$. V príklade jastrab - holub máme $\dot{p} = \dot{s}_1 = [(1,0) - (1/2, 1/2)]^T A(p, 1-p) = (1-2p)/2$. Všeobecnejšie: v jednorozmerných modeloch $\dot{p}$ je proporcionálne k výplatnému rozdielu.

Kompatibilná verzia (b) sa obvykle vzťahuje na monotónnu dynamiku. V niektorých aplikáciách (b) môže byť príliš silné. Môže sa stať, že populačný zlomok pri použití tretej najlepšej akcie niekedy rastie rýchlejšie (alebo sa zmenšuje pomalšie) než pri druhej najlepšej akcii. V takýchto prípadoch môžu byť vhodnejšie verzie (c) alebo (d). V (b-d) všetko súhlasí, keď sú tam len $N_k = 2$ alternatívne stratégie.

Pre väčšinu často používaných dynamík sú informačné požiadavky úplne minimálne. Často stačí história vlastných výplat.

1.1.4 Rovnováha

Biologická literatúra zdôrazňuje ideu statickej rovnováhy nazývanú ESS pre vývojovo pevný stav alebo stratégiu. Definícia ([1], [2]) pre lineárny model jednoduchej populácie s výplatnou funkciou (zdravím) $f(r, s) = r^T As$ pre danú $N \times N$ maticu A je nasledovná:

Definícia. Stav $s \in S$ je ESS, ak pre všetky iné stavy $x \in S$ buď

(i) $f(s, s) > f(x, s)$, alebo

(ii) $f(s, s) = f(x, s)$ a $f(s, x) > f(x, x)$.

To znamená, že ESS stav s odoláva všetkým možným "zmenám" x buď pretože (i) sú menej výnosné alebo (ii) sú rovnako výnosné v aktuálnom stave, kde sú vzácne, ale menej výnosné, keď sú bežné. Použitím $x_\varepsilon = (1-\varepsilon)s + \varepsilon x$ nahradíme podmienky (i) a (ii) jednoduchou podmienkou:

(iii) $f(s, x_\varepsilon) > f(x, x_\varepsilon)$ pre $\varepsilon > 0$ dostatočne malé.

Táto alternatívna definícia platí pre nelineárne výplatné funkcie a môžeme ju zovšeobecniť pre $K \geq 2$ modely.

Ekonómovia zdôrazňovali slabší prípad statickej rovnováhy nazývaný NE pre Nashovu alebo nekooperatívnu rovnováhu. Pre model jednoduchej populácie je definícia jednoduchá ([1], [2]):

Definícia. Stav $s \in S$ je NE pre všetky $x \in S$

(1') $f(s,s) \geq f(x,s)$.

Keď porovnáme definície, vidíme, že každé ESS je NE. Tento vzťah tiež platí pre výhodné zovšeobecnenia $K \geq 2$ modelov.

ESS predpokladá, že rovnováha je stabilná. Formálna definícia stability sa musí odvolávať na dynamiku F nie na výplatnú funkciu f pre partiu hry. Štandardné definície dynamiky sú: $s \in S$ je pevný bod, ak $F(s) = 0$; a pevný bod s je lokálne asymptoticky stabilný, ak každé otvorené susedstvo $N \subset S$ stavu s má vlastnosť, že každá trajektória štartujúca dostatočne blízko k s ostáva v N a konverguje asymptoticky k s. Budeme sa odvolávať na takýto dynamicky stabilný bod rovnováhy ako na vývojovú rovnováhu (EE). Najväčšia otvorená množina bodov, ktoré vývojovými trajektóriami konvergujú k danému EE, sa volá oblasť atrakcie.

Všeobecné vzťahy medzi statickou a dynamickou rovnováhou sú vyjadrené pomocou "krehkej" kompatibility (d). Táto postačí na zabezpečenie, že každé EE z F je NE základnej výplatnej funkcie f. Za tých istých podmienok každé NE funkcie f je pevný bod pre F (ale nie nevyhnutne stabilný). Poznáme rôzne nastavenia (napr. replikátorová dynamika), ktoré zaistia, že každé ESS funkcie f je EE funkcie F. Ale všeobecne s "krehkými" kompatibilnými dynamikami ESS nie je ani nutné ani postačujúce pre EE.

Budeme pracovať s EE a NE. Predpokladáme, že správanie sa vyvíja v čase podľa nejakej dynamiky. Správanie je najľahšie pozorovateľné, keď je ustálené, a to je vtedy, keď stav zotrváva blízko pevného bodu. Ak dynamika nie je veľmi pomalá alebo rušená, potom stav by mal byť väčšinu času blízko atraktora. Niektorá teoretická literatúra zdôrazňuje limitné cykly a ešte komplexnejšie atraktory nazývané chaotické alebo čudné atraktory. Príslušné správanie bude ťažké alebo nemožné pozorovať v praxi, iba ak je zaznamenávané veľmi často a presne.

Podobne ako ESS, nemá EE zaručenú existenciu, hoci v skutočnosti každý normálny tvar aplikovaného modelu mal prinajmenšom jedno EE pre nejaké kompatibilné dynamiky. Všeobecne musíme presne určiť dynamiku F, nie len partiu hry f a použiť metódu charakteristického čísla (vlastnej hodnoty) k jej Jacobianskej matici na kontrolu, že pevný bod je EE. V niektorých prípadoch ESS je vhodnou postačujúcou podmienkou pre EE. NE je nutná podmienka pre EE a NE je vypočítateľné z partie hry výplatnej funkcie f.

1.2. Lokálna klasifikácia málo rozmerných systémov

Málo rozmerné modely sú vhodné pre rôzne aplikácie. Táto podkapitola delí všeobecné správanie v jedno- a dvoj- rozmerných modeloch pre dynamiky nazvané obyčajné diferenciálne rovnice. Tu ESS je postačujúca podmienka a NE je nutná podmienka pre dynamickú stabilitu.

1.2.1. Lineárna jednorozmerná hra

V jednorozmernom prípade je len jedna populácia ($K = 1$) a dve čisté stratégie ($N = 2$). Potom stavový priestor $S = \{(p, 1-p) : p \in [0,1]\}$ stavu s môže byť parametrizovaný bodom p v celom intervale $[0,1]$, ktorý reprezentuje podiel hráčov práve používajúcich prvú čistú stratégiu. Výplatná funkcia $f(r,s)$ určí očakávanú výplatu každému hráčovi, ktorý volí zmiešanú stratégiu $r = (x, 1-x)$ (t.j. použitie prvej akcie s pravdepodobnosťou x a druhej akcie s pravdepodobnosťou $1-x$). Ak f je lineárna v $s = (p, 1-p)$ tak ako aj v r, potom pre nejakú 2×2 maticu $A = ((a_{ij}))$ ju môžeme zapísať ako $f(r,s) = r^T As = xpa_{11} + x(1-p)a_{12} + (1-x)pa_{21} + (1-x)(1-p)a_{22}$.

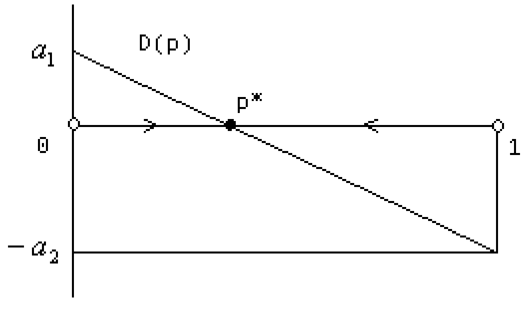
Pre jednorozmerné evolučné hry z verzií kompatibility (b-d) vyplýva, že akcie s vyššou aktuálnou výplatou budú postupne nahrádzať akcie s nižšou výplatou. To znamená, že smer zmeny na $s = (p, 1-p)$ je úplne určený znamienkom rozdielu výplaty $d(s) = f(e^1, s) - f(e^2, s) = f((1,-1), s)$ medzi prvou čistou stratégiou $e^1 = (1,0)$ a druhou čistou stratégiou $e^2 = (0,1)$: ak $d(s) > 0$ potom p vzrastie a s sa presunie k stavu $(1,0)$, pokiaľ by $d(s) < 0$ potom p sa zníži a s sa presunie k stavu $(0,1)$.

Rozbor je prehľadnejší, keď výplatné rozdiely $d(s)$ sú napísané z hľadiska p a zložiek A:

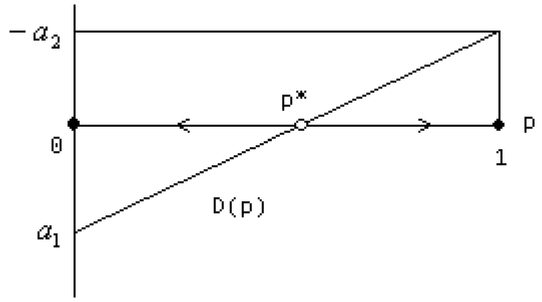
$$D(p) = d(s(p)) = (1,-1)^T A(p,1-p) = (1-p)(a_{12} - a_{22}) - p(a_{21} - a_{11}) = (1-p)a_1 - pa_2,$$

kde znížené parametre sú $a_1 = a_{12} - a_{22}$ a $a_2 = a_{21} - a_{11}$. Potom kompatibilné dynamiky zaistia, že $\dot{p} > 0$ ($\dot{p} < 0$) ak $\mathrm{D}(\mathrm{p}) > 0$ ($D(p) < 0$), potom záleží len na znamienku $\mathrm{D}(\mathrm{p})$. Graf $\mathrm{D}(\mathrm{p})$ je priamka s priesečníkom a_1 v $\mathrm{p} = 0$ a hodnote $-a_2$ v $\mathrm{p} = 1$. Sú tu len tri možnosti správania hráča; okrem degenerovaného prípadu $a_1 = a_2 = 0$, v ktorom je hráč stále indiferentný medzi svojimi dvoma akciami.

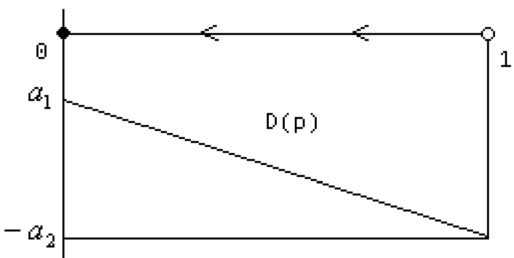
• **Typ 1:** Ak $a_1, a_2 > 0$ potom jedinečný koreň $D(p) = 0$ je $p^* = a_1/(a_1 + a_2)$. Vidieť, že p^* je jedinečné NE a jedinečné ESS. Ak D je klesajúce, tak p rastie (klesá), len čo je pod (nad) p^*. Preto p^* je jedinečná evolučná rovnováha. To znamená, že pre nejaký kompatibilný kontinuálny čas dynamiky $\dot{s} = F(s)$ máme $s(t) \to (p^*, 1 - p^*)$ keď $t \to \infty$ z nejakého počiatočného stavu $s(0)$. Ten istý výrok platí tiež pre diskrétny čas ($t = 0,1,2,\ldots$) dynamiky $\Delta s(t) = \alpha F(s(t))$ na S, ak pridáme podmienku, že hodnota parametra $\alpha > 0$ nie je príliš veľká. (Môžeme dostať nestabilnú osciláciu, ak p_{t+1} osciluje príliš ďaleko od p^*.) Príklady k hre typu 1 zahrňujú symetrické verzie Párovania mincí (napr. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, tak $a_1 = a_2 = 2$) a jastrab - holub (napr. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tak $a_1 = a_2 = 1$).



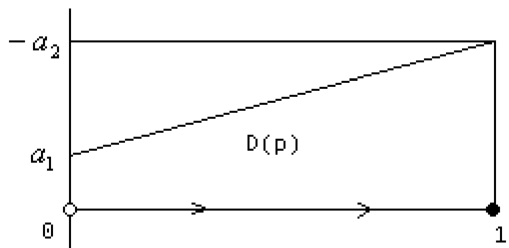
• **Typ 2:** Pre $a_1, a_2 < 0$ koreň $p^* = a_1/(a_1 + a_2)$ z $D(p) = 0$ je NE symetrickej bimaticovej hry. Ale v tomto prípade sú čisté stratégie $p = 0$ a $p = 1$ tiež NE. Obe čisté stratégie sú ESS, len $p*$ nie je. $D(p)$ je rastúce a je záporné (kladné) pre $p < p*$ ($p > p*$); $p*$ je nestabilný prameň oddeľujúci oblasť atrakcie dvoch evolučných rovnováh $p = 0$ a $p = 1$. V ekonómii sa hry pre typu 2 používa interpretácia, že každá čistá stratégia má rastúce výplaty. Podobná interpretácia platí aj pre hru typu 1 len s klesajúcimi výnosmi. Hry typu 2 sa často nazývajú symetrické hry s koordináciou. Príkladom je $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.



- **Typ 3:** Ak $D(p)$ leží na alebo nad (na alebo pod) priamkou p pre všetky $p \in (0,1)$, potom je druhá čistá stratégia $p = 1$ (prvá čistá stratégia $p = 0$) dominantná. Pochopiteľne dominantná stratégia je jedinečné NE (a ESS) a jedinečná evolučná rovnováha (EE) pre každú znamienko uchovávajúcu (sign-preserving) dynamiku F. Tento typ hry je charakterizovaný $a_1 \cdot a_2 \leq 0$ (a $|a_1| + |a_2| > 0$). Najzaujímavejší príkladom je väzňova dilema, v ktorej výplaty klesajú, keď sa dominantná stratégia stáva prevládajúcou. Napríklad $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ potom $a_1 = -a_2 = -1$.



Typ 3a: $a_1 \leq 0 \leq a_2$

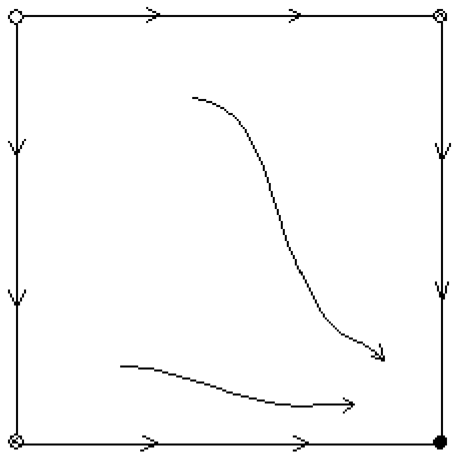


Typ 3b: $a_2 \leq 0 \leq a_1$

1.2.2. Dvojrozmerné systémy: Nesymetrický prípad

Štvorec $S = [0,1]^2$ je dvojrozmerný stavový priestor, z čoho vyplýva $K = 2$, $N_1 = N_2 = 2$. V takzvanom nesúmernom prípade (lineárna funkcia zdravia a nevlastné účinky populácie) máme 2×2 maticu A a B, takú že $f^1(r,s) = r^T A s^2$ a $f^2(r,s) = r^T A s^1$. Definujeme znížené parametre ako predtým $a_1 = a_{12} - a_{22}$ a $a_2 = a_{21} - a_{11}$. Analogicky definujeme $b_1 = b_{12} - b_{22}$ a $b_2 = b_{21} - b_{11}$. Najskôr sa zdá, že je tu 9 prípadov tvaru $x - y$, kde x má 3 prípady pre parametre a a y pre parametre b. Ale sú tu len 3 jednoznačné prípady.

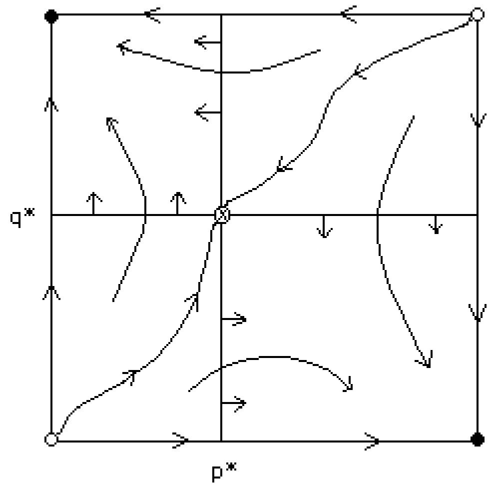
- **Prípady 3-y a x-3 (uzol):** Ak a_1 a a_2 majú opačné znamienka, potom existuje dominantná stratégia pre prvú populáciu. Jedinečné EE (a NE i ESS) je uzol zodpovedajúci prvej populácii. Všetci v prvej populácii prijali dominantnú stratégiu a všetci v druhej populácii vytvárajú najlepšie odpovede. Podobne, ak b_1 a b_2 majú opačné znamienka, potom uzol odpovedá druhej populácii. Všetci v druhej populácii prijali svoje dominantné stratégie a prvá populácia najlepšie odpovedá.



$a_1 > 0 > a_2 \wedge b_2 > 0$

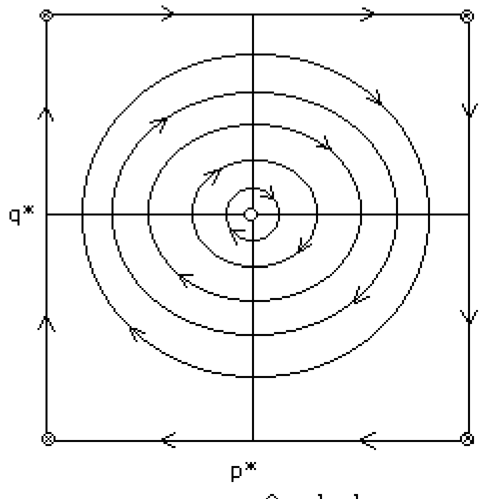
- **Prípady 1-1 a 2-2 (sedlo):** Ak všetky znížené parametre sú kladné, potom existuje kompletne zmiešané NE v $s^* = ((p^*, 1 - p^*), (q^*, 1 - q^*))$, kde $p^* = a_1 / (a_1 + a_2)$ a $q^* = b_1 / (b_1 + b_2)$. Toto NE je sedlový bod dynamík. Sú tu dve čisté stratégie NE, obe tiež

EE ako aj ESS, v rohoch $(p,q)=(1,0)$ a $(0,1)$ štvorca. Ich oblasti atrakcie sú oddelené sedlovou cestou k s^*. Ak všetky znížené parametre sú záporné, potom výsledok rovnaký s výnimkou toho, že EE/ESS sú v rohoch (1,1) a (0,0).

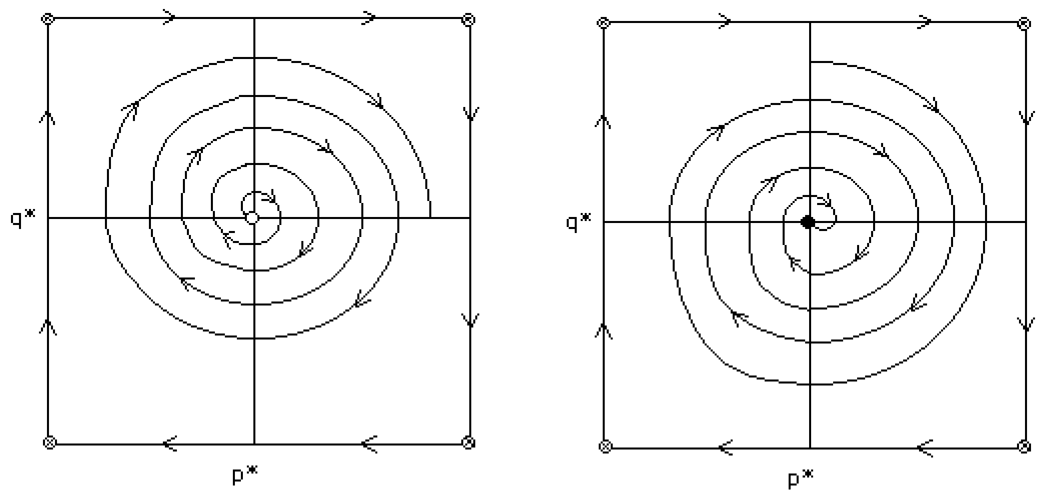


$a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$

• **Prípady 1-2 a 2-1 (centrum):** Ak a_i sú kladné a b_i záporné pre $i=1,2$, potom s^* je jedinečné NE. Nie je ESS. Časová trajektória každého iného počiatočného stavu sa špirálovito vinie okolo s^* pravotočivo. Či s^* je asymptoticky stabilné (EE) závisí od dynamickej špecifikácie. Vo verzii kompatibility (a) - napr. replikátorová alebo lineárna dynamika - s^* je neutrálne stabilné a špirály sú uzatvorené obežné dráhy (kruhy). Verzie kompatibility (b-d) umožnia vonkajšie špirály (nestabilné) alebo vnútorné špirály (EE). Prípad, v ktorom parametre b_i sú kladné a a_i sú záporné pre $i=1,2$, je ten istý okrem toho , že špirály sú ľavotočivé.

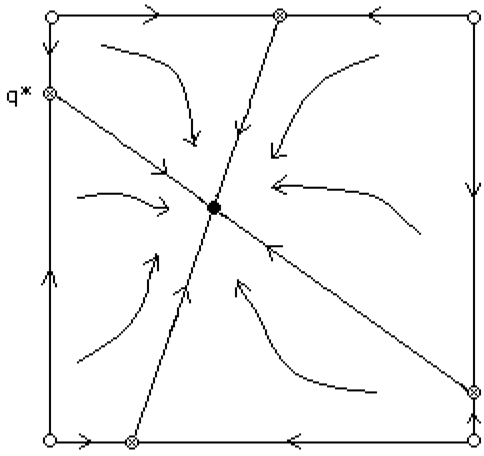


$a_1, a_2 > 0 > b_1, b_2$

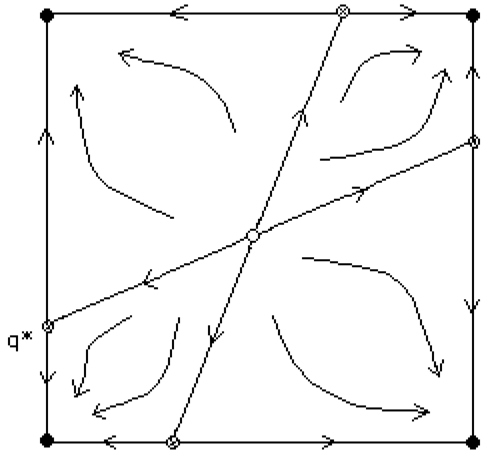


1.2.3. Ďalšie dvojrozmerné systémy a nelineárne systémy

Uvažujme teraz možnosť účinkov vlastnej populácie v lineárnej výplatnej funkcii na štvorci. Je tam nanajvýš jedno vnútorné NE. Ďalšie dva typy správania nazývané prameň a ústie sú znázornené na nasledujúcich obrázkoch. Niektoré výplatné funkcie majú vnútorné NE, ktoré je EE (ústie alebo stabilné centrum) pre niektorú kompatibilnú dynamiku. Zatiaľ čo pre iné výplatné funkcie vnútorné NE je prameň alebo nestabilné centrum pre každú kompatibilnú dynamiku (nikdy nie EE). Podobne ako to je aj v prípade centra, aj tu sú výplatné funkcie, pre ktoré niektoré kompatibilné dynamiky vytvoria vnútorné NE, ktoré je aj EE a iné kompatibilné dynamiky vytvoria nestabilné NE, ktoré nie je EE. Kvôli jednoduchosti používame rovnaký názov centrum napriek tomu, že kompatibilné správanie teraz zahrňuje pramene a sedlá práve tak ako aj stabilné a nestabilné špirály. Správanie okolo hrán štvorca môže nadobudnúť všetky hlavné jednorozmerné prípady závisiace od výplatnej funkcii.



Ústie.



Prameň.

Nelineárne modely na štvorci alebo trojuholníku sa tiež lokálne zužujú k jednému z lineárnych prípadov. To znamená, že každé vnútorné NE je lokálny prameň, sedlo, centrum alebo ústie (nikdy to nie je EE v prvých dvoch prípadoch, je to vždy EE v poslednom prípade, a tretí prípad závisí na podrobnom roztriedení dynamík). V závislosti od dynamickej špecifikácie hrana a roh NE sú EE (lokálne ústia) alebo nie sú EE (sedlá alebo pramene).

EE a jeho oblasti atrakcie sú vždy nezávislé od voľby kompatibilných dynamík v rozmere 1 a v troch zo štyroch prípadov v rozmere 2. V stavovom priestore rozmeru 3 a vyššieho má dynamická špecifikácia význam vo veľkej časti prípadov ([1]).

1.3. Určovanie stability pomocou λ

Metódy charakteristického čísla (vlastnej hodnoty) pre odhad dynamickej stability bodov.

Uvažujeme najprv lineárne hrany na štvorci ($K = 2$ a $N_1 = N_2 = 2$). Výplatná funkcia má vyjadrenie v tvare $f^1(r,s) = r^T\left(As^2 + Cs^1\right)$ a $f^2(r,s) = r^T\left(Bs^1 + Ds^2\right)$, kde $Y = A, B, C, D$ sú 2×2 matice $\left(\left(y_{ij}\right)\right)$ a súčasný stav $s = \left(s^1, s^2\right)$ môžeme napísať ako $s^1 = (p, 1-p)$ a $s^2 = (q, 1-q)$ pre $(p,q) \in [0,1]^2$. Určíme zisk z výplat prvej čistej stratégie v populácii i pri $d^i(p,q) = f^i\left((1,-1),\left((p,1-p),(q,1-q)\right)\right)$, $i = 1,2$.

Dynamiky sú označené ako obyčajné diferenciálne rovnice ($\dot{p} = F^1(p,q)$, $\dot{q} = F^2(p,q)$). Trajektórie ($p(t), q(t)$), nazývané tiež krivky riešenia alebo vývojové chodníky, sú riešenia ODR s danými počiatočnými podmienkami $p(0) = p_0$ a $q(0) = q_0$.

Formálny predpoklad kompatibility a dve špeciálne obmedzenia na zabezpečenie dobre definovaných trajektórií ([1], [3]): dynamiky

(i) kolíšu mierne so stavom hry,

(ii) majú trajektóriu, ktorá neopustí stavový priestor, a

(iii) sú slabo kompatibilné.

Pre štvorec môžu byť tieto vlastnosti formované nasledovným spôsobom ([1], [3]):

Definícia. Dynamika $F:[0,1]^2 \to R^2$ je prípustná ak

(i) je spojito diferencovateľná,

(ii) $F^1(0,q) \geq 0$, $F^1(1,q) \leq 0$, $F^2(p,0) \geq 0$ a $F^2(p,1) \leq 0$ pre všetky $(p,q) \in [0,1]^2$, a

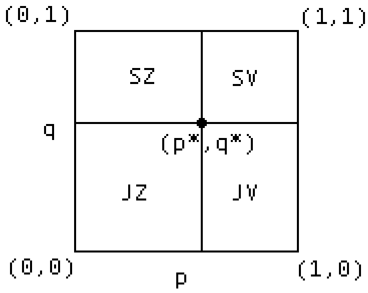
(iii) $\operatorname{sgn} F^i(p,q) = \operatorname{sgn} d^i(p,q)$ pre všetky $(p,q) \in (0,1)^2$.

Uvažujme "nesymertický" prípad $C = D = ((0))$. Vieme, že $d^1(p,q) = (-1,1)A(q,1-q)^T = (1-q)a_1 - qa_2$, kde $a_1 = a_{12} - a_{22}$ a $a_2 = a_{21} - a_{11}$, je nezávislé na p. Rovnako $d^2(p,q) = (1-p)b_1 - pb_2$ je nezávislé na q, pretože tam nie sú žiadne vlastné účinky populácie. Teda prípustné dynamiky pôsobia v obdĺžnikových podmnožinách oblasti $[0,1]^2$ ohraničených čiarami $d^1(q) = 0$ a $d^2(p) = 0$.

Rozbor je jednoduchý a pozostáva z viacerých prípadov závislých na znamienkach a_i a b_i. Vynecháme viacero prípadov, pre ktoré sú a_i alebo b_i nulové, pretože sú zdĺhavé a nie všeobecné. Ostatné prípady označujeme 1-x (prípadne x-1), ak a_i (prípadne b_i) sú kladné, 2-x (prípadne x-2) ak a_i (prípadne b_i) sú záporné, a 3-x (prípadne x-3) ak $a_1 a_2 < 0$ (prípadne $b_1 b_2 < 0$).

Majme prípad 3-x. Potom hráči populácie 1 majú dominantnú stratégiu, pretože $d^1(q) > 0$ alebo < 0 vo vnútri štvorca. Preto všetky trajektórie smerujú k hrane štvorca $p^* = 0$ alebo $p^* = 1$ príslušne k dominantnej stratégii. Ak $d^1(p^*) > 0$ (< 0), potom samozrejme vrchná časť (dolná časť) tejto hrany je medza každej trajektórie, keď $t \to \infty$. Je to jedinečné EE pre nejakú prípustnú dynamiku. Podobný rozbor a záver platí pre prípad x-3. Jedinečné EE je pravá alebo ľavá časť hrany odpovedajúca dominantnej stratégii $q^* = 0$ alebo $q^* = 1$, keď $d^2(q^*) > 0$ alebo < 0.

Iné prípady: a_i majú rovnaké znamienka, tak $d^1(q)=0$ pre $q^* = a_1/(a_1+a_2) \in (0,1)$, a rovnako $d^2(p)=0$ pre $p^* = b_1/(b_1+b_2) \in (0,1)$. Bod (p^*, q^*) je nepochybne NE, pretože pre každú populáciu v tomto bode všetky akcie sú rovnako vhodné. Zvislé a vodorovné čiary prechádzajúce cez (p^*, q^*) delia štvorec na štyri kvadranty, v ktorých znamienka $\dot{p}$ a $\dot{q}$ sú konštantné.



Nech v prípade 1-1 je počiatočný stav v SV kvadrante. Pretože $q > q^*$ a $a_1, a_2 > 0$ máme $d^1(q) < 0$ tak $\dot{p} < 0$; a pretože $p > p^*$ a $b_1, b_2 > 0$ máme $d^2(p) < 0$ tak $\dot{q} < 0$ pre nejakú prípustnú dynamiku. Podmienky prípustnosti (i) a (iii) tvrdia, že trajektória musí buď opustiť tento kvadrant v konečnom čase alebo konvergovať k jeho JZ rohu teda k (p^*, q^*). Podobne trajektória začínajúca v JZ rohu musí buď opustiť kvadrant v konečnom čase alebo konvergovať k (p^*, q^*). Trajektórie začínajúce v JV kvadrante majú $\dot{p} > 0$ (pretože $q < q^*$) a $\dot{q} < 0$ pre nejakú prípustnú dynamiku. Takéto trajektórie nemôžu opustiť kvadrant. Pre ľubovoľné okolie N bodu $(1,0)$ v štvorci $\dot{p}$ a $\dot{q}$ sú ohraničené nulou mimo N a preto musia $\dot{p}$ a $\dot{q}$ vstúpiť do N v konečnom čase. Z toho vyplýva, že $(1,0)$ je EE pre nejakú prípustnú dynamiku F. Z podobného tvrdenia vyplýva, že SZ kvadrant je obsiahnutý v oblasti atrakcie pre EE v $(0,1)$. Skupiny bodov, ktoré opustia SV a JZ kvadrant, sú nespojité a separované sedlovou cestou k (p^*, q^*).

V prípade 2-2 je tvrdenie pre charakterizácie analogické. Pomocou d^i zisťujeme, že prípustné trajektórie v JV a SZ kvadrantoch zodpovedajúcich k bodu (p^*, q^*) pozostávajú zo sedlovej cesty rozdeľujúcej trajektórie, ktoré opustia tieto kvadranty, a že SV a JZ kvadranty ležia jednotlivo v oblastiach atrakcie pre EE $(1,1)$ a $(0,0)$.

Prípady 1-2 a 2-1 nedovoľujú takéto zhrnutie. V prípade 1-2 máme $\dot{p} < 0$ a $\dot{q} > 0$ v SV kvadrante. Trajektória musí opustiť kvadrant v konečnom čase a vstúpiť do SZ kvadrantu, pretože $\dot{p}$ môže byť ohraničené nulou pozdĺž trajektórie. Pre analogické dôvody trajektória s počiatkom v SZ kvadrante musí vystúpiť z neho v konečnom čase do JZ kvadrantu, odtiaľ k JV kvadrantu a späť do SV kvadrantu. Pre niektoré prípustné dynamiky je (p^*, q^*) globálne EE a pre iné prípustné dynamiky všetky trajektórie divergujú od (p^*, q^*).

Uvažujme všeobecnejší lineárny prípad s $C, D \neq ((0))$. Teraz $d^1(p,q)$ je všeobecná lineárna funkcia, ktorej koeficient strmosti pre p závisí na c_{ij} tým istým spôsobom ako koeficient q závisí na a_{ij}; podobne pre $d^2(p,q)$. NE (a odtiaľ EE) sa môže objavovať len v priesečníkoch hrán štvorca a čiar ($d^i(p,q) = 0$). Prieniky na hranách a rohoch môžu byť analyzované použitím klasifikácie jednorozmerného stavového priestoru. Priesečníky čiar vo vnútri štvorca sú automaticky NE podobne ako v nesúmernom prípade. Je tu nedostatočne charakterizovaná stabilita, pretože čiary nie sú zvyčajne zvislé alebo vodorovné.

Na charakterizovanie stability vnútorného NE (p^*, q^*) sa používajú štandardné metódy charakteristického čísla. Prípustnú dynamiku v tomto bode môžeme zapísať nasledovne: $\dot{p} = \alpha d^1(p,q)$ a $\dot{q} = \beta d^2(p,q)$ pre nejaké $\alpha, \beta > 0$ pri prípustných vlastnostiach (i) a (iii). Potom Jacobianska matica je

$$J = \begin{pmatrix} \partial F^1/\partial p & \partial F^1/\partial q \\ \partial F^2/\partial p & \partial F^2/\partial q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha(c_1 + c_2) & -\alpha(a_1 + a_2) \\ -\beta(b_1 + b_2) & -\beta(d_1 + d_2) \end{pmatrix}.$$

Charakteristické korene sú riešenia λ_1, λ_2 k rovnici $|J - \lambda I| = 0$. Pri vhodnej voľbe A, B, C a D matíc a koeficientov α a β môžeme dostať želané reálne alebo komplexne združené hodnoty pre λ_i, $i = 1,2$ a preto každý druh správania rovnováhy. Dvoma všeobecnými možnosťami sú λ_i obe reálne a kladné (napr. $A = B = ((0))$ a $c_i, d_i > 0$), a λ_i obe reálne a záporné. V prvom prípade štandardné metódy ukazujú, že (p^*, q^*) je prameň a v druhom prípade ústie.

Súčet charakteristických čísel je stopa Jacobianskej matice J a výsledok je determinant J. Keď $\det J$ je záporný ($cd < ab$ kde $x = x_1 + x_2$ pre $x = a, b, c, d$), potom všetky kompatibilné dynamiky tvoria sedlá. Keď je determinant kladný a c, d sú kladné ($trJ = -(\alpha c + \beta d) < 0$ pre všetky kompatibilné dynamiky ($\alpha, \beta > 0$)), tak nejaké vnútorné NE je vždy EE. Je to buď ústie alebo stabilné centrum. Podobne, keď je determinant kladný a c, d sú záporné ($trJ > 0$), tak nejaké vnútorné NE musí byť nestabilné (prameň alebo nestabilné centrum). Keď je determinant kladný a znamienka c, d sa líšia, máme zovšeobecnenie prípadu centra. V tomto prípade znamienko trJ nie je zistené a starostlivá voľba kompatibilných dynamík môže tvoriť ústia a pramene ako aj stabilné alebo nestabilné centrá. Ako príklad tohoto zovšeobecneného centra zvolíme matice tak , že $a = -c = d = -1$ a $b = 0$. Potom vnútorné NE je prameň pre $\alpha = \beta^{-1} = 0.1$, ústie pre $\alpha = \beta^{-1} = 10$ a neutrálne centrum pre $\alpha = \beta = 1$.

Sústredili sme sa tu len na lineárne výplatné funkcie. S nelinearitami je už počítané v dynamikách, tak netreba veľa aby sa zmenili na nelineárne výplatné funkcie. Môže sa vyskytnúť viacero vnútorných priesečníkov čiar $d^i = 0$. Rozbory sa potom uplatňujú lokálne (nie nevyhnutne globálne).

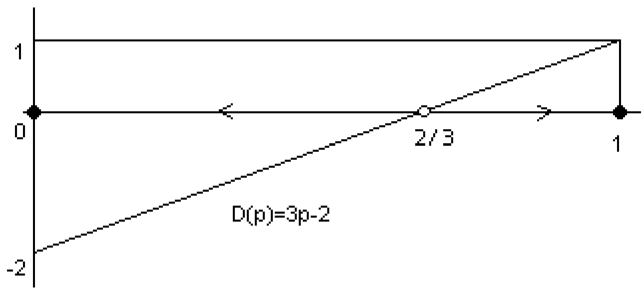
2. Základné modely evolučných hier

V tejto kapitole sú opísané modely hier z hľadiska evolučnej teórie. Sú základnými modelmi v ekonomických a finančných aplikáciách.

2.1. Koordinácia

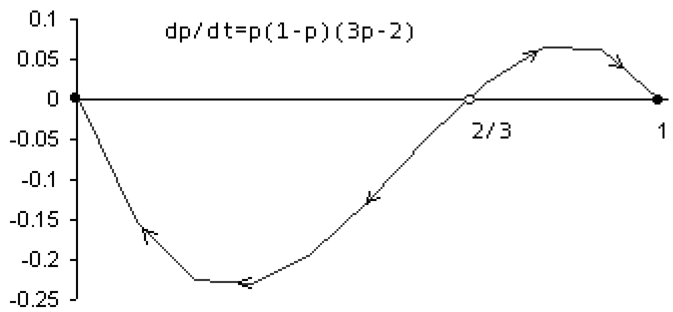
Hra koordinácia je jednopopulačný príklad ($K = 1$) s dvomi stratégiami ($N = 2$), stavovým priestorom je úsečka $S = [0,1]$. Uvažuje sa tu, že učenie sa vo svete ohraničene racionálnych hráčov vedenie k najlepším zo všetkých možných svetov, kde celková výplata je maximalizovaná. Ohraničene racionálni hráči sú všetci hráči (ľudia, zvieratá), ktorí robia (alebo môžu robiť) chyby počas učenia. A takí sú vlastne všetci ľudia (a samozrejme i zvieratá). Hráči si môžu vybrať medzi *stratégiou 1* a *stratégiou 2*. Máme stav $s = (p, 1-p)$, kde s pravdepodobnosťou $p \in [0,1]$ hráči hrajú *stratégiu 1* a zmiešanú stratégiu $r = (x, 1-x)$, kde *stratégia 1* má pravdepodobnosť $x \in [0,1]$. Potom výplatná funkcia je $f(r,s) = r^T As$, kde $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Znížené parametre sú $a_1 = a_{12} - a_{22} = -1 - 1 = -2 < 0$ a $a_2 = a_{21} - a_{11} = 4 - 5 = -1 < 0$. Rozdiel výplat je priamka $D(p) = 3p - 2$.



Táto hra patrí k typu 2. V bodoch p = 0, 2/3, 1 je NE a len v bodoch p* = 0, 1 je EE. Replikátorová dynamika pre koordináciu je znázornená ako fázový diagram. Fázový diagram znázorňuje rýchlosť zmeny p ($\dot{p}$) oproti zmene samotného p. Replikátorová dynamika hovorí, že ak typ hráča získa nadpriemernú výplatu, potom jeho podiel v populácii vzrastie.

Ak získa podpriemernú výplatu, potom sa jeho podiel v populácii zníži. Typ hráča, ktorý získava podpriemernú výplatu, bude chcieť kopírovať typ hráča, ktorý získava nadpriemernú výplatu. Pretože hráči sú pomaly sa učiaci, nie každý podpriemerný typ hráča sa bude meniť náhle. Ale napokon každý typ hráča stále prítomný v populácii bude získavať priemernú výplatu. Vo svete obchodu sa táto myšlienka interpretuje: Žiadny obchodník nechce byť pod priemerom alebo mať podpriemerné výsledky. Práca obchodníkov, ktorých výsledky sú podpriemerné, je v reálnom ohrození. Prevyšovať priemer sa viac oplatí. Replikátorová dynamika vyjadruje túto logiku matematicky. Replikátorová rovnica v tomto prípade je $\dot{p} = p(1-p)(3p-2)$.



Má tri korene, ktoré nájdeme položením každého z troch faktorov rovné nule:
$p = 0$, $1 - p = 0$ a $3p - 2 = 0$.

Sklony $dF(1)/dp$ a $dF(0)/dp$ sú oba záporné, teda korene v 0 a 1 sú oba evolučne stabilné (podľa vety v [4] zo strany 210). Sklon $dF(2/3)/dp$ je kladný, teda tento koreň nie je stabilný. Nestabilný koreň v $p = 2/3$ delí interval $[0,1]$ do dvoch oblastí. Doľava od $p = 2/3$ učenie vedie k $p^* = 0$. Doprava od $p = 2/3$ učene vedie k $p^* = 1$. Šípky zobrazujú tieto dva návody na učenie.

Dva rovnovážne stavy sú $p^* = 0$ (všetci hráči volia *stratégiu 2*) a $p^* = 1$ (všetci hráči volia *stratégiu 1*). Kam učenie smeruje, závisí na tom, kde hra štartuje. Ak počiatočný podiel hráčov voliacich prvú stratégiu v populácii je menší než $2/3$ ($p < 2/3$), potom učenie populácie vedie k rovnováhe $p^* = 0$. A naopak ak je počiatočný pomer hráčov voliacich *stratégiu 1* v populácii väčší než $2/3$ ($p > 2/3$), potom učenie vedie k rovnováhe $p^* = 1$. Pri rovnováhe z čistých stratégií v (*stratégia 1, stratégia 1*) výplata je vyššia (5) než v (*stratégia 2, stratégia 2*) (tu je výplata 1). Keďže hráči maximalizujú výplaty, malo by viac než $2/3$ hráčov hrať *stratégiu 1*.

V živote často vývoj vedie k svetu, ktorý nie je jednoznačne najlepší možný. Napríklad [4] sme vyvíjali zbrane masovej deštrukcie, ale nie je jasné, či sme na tom lepšie (pretože teraz máme také zbrane). Môžeme len tvoriť spôsoby našej vlastnej masovej deštrukcie.

2.2. Jastrab – Holub

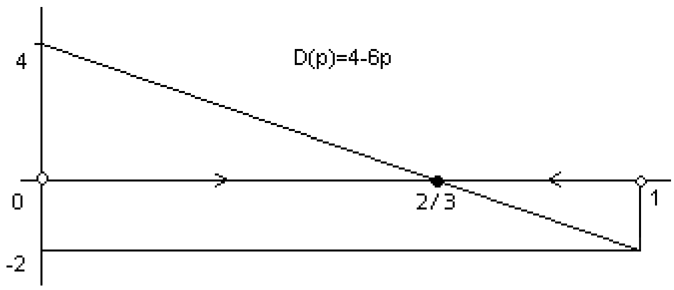
Jednoduchý jednorozmerný príklad z biológie sa nazýva jastrab - holub. Vysvetľuje sa na ňom, prečo sú skutočné spory vzácne (medzi zvieratami a tiež medzi ohraničene racionálnymi ľuďmi). V jednoduchej populácii ($K=1$) je každý jednotlivec buď útočný (*jastrab*) alebo sa vyhýba sporom (*holub*), takže máme $N=2$ a stavový priestor $S=[0,1]$. Napríklad vo vietnamskej vojne *jastraby* chceli zostriť boj na vojnový stav (vojna) a *holuby* chceli utlmiť boj (mier). V tejto hre ide o hodnotu V („vojnová korisť"). Keď sa stretnú dva *jastraby*, nastane ťažký boj. Očakávaný výsledok boja je $1/2(V)+1/2(-C)$ (s pravdepodobnosťou $1/2$ bojovník vyhrá boj preto V a s pravdepodobnosťou $1/2$ prehrá boj a vynaloží výdavok C). Keď sa držíme predpokladu, že boj je skutočný, máme $V<C$. Keď *jastrab* stretne *holuba*, *holub* opustí bojisko a *jastrab* obdrží korisť bez boja. Keď sa stretnú dva *holuby*, boj nenastane. Namiesto toho si rozdelia korisť každý so ziskom $V/2$. *Holuby* dosahujú rozhodnutie diplomatickými spôsobmi bez zbraní (práve tak ako zápas jedovatých hadov [4]: Tieto hady bojujú vždy navzájom kvôli územiu, možnosti párenia, koristi, ... Mohli by ľahko zabiť jeden druhého zahryznutím v boji, ale skoro nikdy tak nerobia. Namiesto hryznutia vzájomne zápasia. Chránia svoj jed pre použitie na členov iných druhov.).

Pre $r=(x,1-x)$ reprezentujúce zmiešanú stratégiu hrania *jastraba* s pravdepodobnosťou $x\in[0,1]$ a pre $s=(p,1-p)$ reprezentujúce aktuálny stav populácie s podielom $p\in[0,1]$ hrajúcim *jastraba*, výplatná funkcia je $f(r,s)=r^T As$, kde $A=\begin{pmatrix}(V-C)/2 & V\\ 0 & V/2\end{pmatrix}$.

Pre konkrétne hodnoty $V=8$ a $C=12$ dostaneme $A=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 0 & 4\end{pmatrix}$. To znamená, že škody presahujú priemerné príjmy v stretnutí *jastrab* - *jastrab* (predpokladaná výplata je –2 pre každého); príjmy sa bezstratovo rozdelia pri stretnutí *holub* - *holub* (predpokladaná výplata je 4 pre každého); a keď sa stretnú *jastraby* a *holuby*, tak *jastraby* dostanú všetky príjmy (8) a *holuby* nič (0).

Znížené parametre sú $a_1 = a_{12} - a_{22} = 8 - 4 = 4 > 0$ a $a_2 = a_{21} - a_{11} = 0 - (-2) = 2 > 0$.

Výplatný rozdiel je priamka $D(p) = 4 - 6p$.



Táto hra patrí k typu 1. To znamená, že v bode $p^* = 2/3$ je jedinečné NE aj EE.

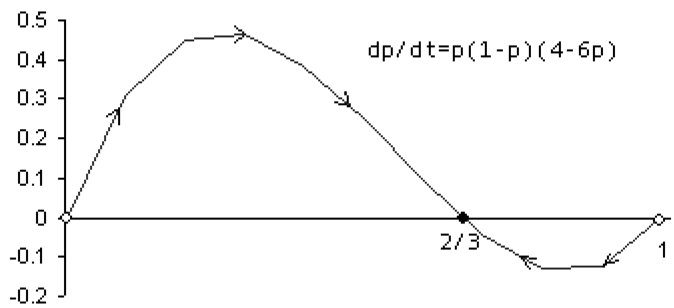
Všeobecné výplatné funkcie:

$f_J = (V - C)p/2 + V(1 - p) = V - (V + C)p/2$

$f_H = 0p + V(1 - x)p/2 = V/2 - Vp/2$,

podosadení $f_J = 8 - 10p$ a $f_H = 4 - 4p$.

Replikátorová rovnica je $\dot{p} = p(1 - p)(V/2 - C/2\,p)$. Pre $V = 8$, $C = 12$ máme $\dot{p} = p(1 - p)(4 - 6p)$.

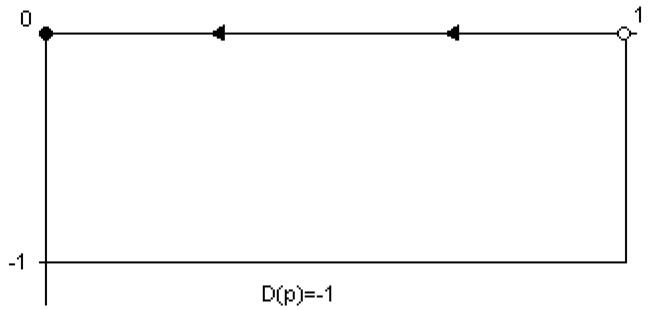


Táto rovnica má korene v $p = 0$, $p = 2/3$ a $p = 1$. Jediný koreň, kde sklon $F(x)$ je záporný, je v $p^* = 2/3$. Z toho vplýva, že stabilný stav nastane, ak je v populácii $2/3$ podiel jastrabov a $1/3$ holubov. Keď nastane potenciálny spor, s pravdepodobnosťou $(2/3)^2 = 4/9$ boj skutočne nastane a s pravdepodobnosťou $5/9$ sú potenciálne spory odstránené mierovými spôsobmi (buď ustúpením jednej z dvoch strán, alebo diplomaticky zariadeným rozdelením koristi).

2.3. Väzňova dilema

Máme jednoduchú populáciu ($K = 1$), v ktorej sa hráči rozhodujú medzi dvomi stratégiami ($N = 2$) - *zradiť* a *spolupracovať*. Stavový priestor je úsečka $S = [0,1]$. Pre zmiešanú stratégiu $r = (x, 1 - x)$, kde pravdepodobnosť hrania stratégie *zradiť* je $x \in [0,1]$ a pre $s = (p, 1 - p)$ aktuálny stav s podielom $p \in [0,1]$ hráčov hrajúcich stratégiu *zradiť* je výplatná funkcia $f(r,s) = r^T As$, kde $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Keď obaja väzni zradia, dostanú "výplatu" 4 roky vo väzení. Keď prvý zradí druhého, pričom druhý nezradí prvého, potom ten čo zradil dostane 0 a ten čo nezradil, ale bol zradený, dostane 5 rokov vo väzení. A nakoniec keď obaja spolupracujú (nezradia sa navzájom), každý dostane 1 rok vo väzení.[*2]

Znížené parametre sú $a_1 = a_{12} - a_{22} = 0 - 1 = -1 < 0$ a $a_2 = a_{21} - a_{11} = 5 - 4 = 1 > 0$. Rozdiel výplat je priamka $D(p) = -1$.



Táto hra patrí k typu 3a. V bode $p^* = 0$ je NE aj EE. NE je čisté, neexistuje tu zmiešané NE. NE je dominantné.

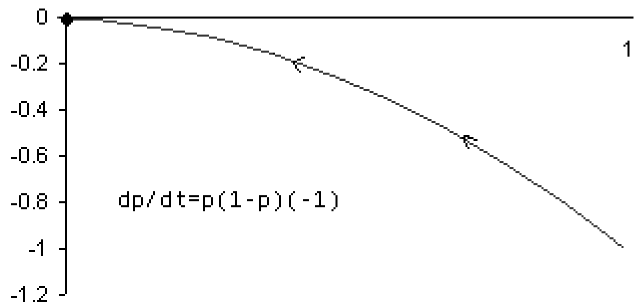
Výplatné funkcie sú:

$f_Z = 4p$

$f_S = 4p + 1$.

$\dot{p} = p(1 - p)(-1)$ je replikátorová rovnica.

[*2] Hráči sa snažia minimalizovať svoju "výplatu".



Rovnica má korene v $p = 0$ a $p = 1$. Riešenie, v ktorom je sklon $F(x)$ záporný, je $p^* = 0$. To znamená, že evolučná rovnováha nastane, keď všetci hráči volia stratégiu *spolupracovať*.

2.4. Dvojrozmerný jastrab a holub

V tejto hre sú dve populácie ($K = 2$) nazvané domáci ($k = 1$) a votrelci ($k = 2$). Hodnota V_1 je "vojnová korisť" pre domácich (držia územie na začiatku hry). Hodnota V_2 je "vojnová korisť" pre votrelcov (nedržia územie na začiatku hry). Máme $C > V_1 > V_2 > 0$. Obe populácie volia medzi stratégiami *jastrab* ($i = 1$) alebo *holub* ($i = 2$). Stavom je $s = (s^1, s^2) = ((s_1^1, s_2^1), (s_1^2, s_2^2))$. Dá sa popísať bodom (p, q) v štvorci $S = [0,1]^2$, kde $s_1^1 = p$, čo je podiel domácich *jastrabo*v a $s_2^1 = 1 - p$ podielom domácich *holubov*. A podobne $s_1^2 = q$ je podiel votrelcov - *jastrabov* a $s_2^2 = 1 - q$ je podiel votrelcov - *holubov*. Predpokladajme výplatnú funkciu $f^1(r, s) = r^T A s^2$, kde $A = \begin{pmatrix} (V_1 - C)/2 & V_1 \\ 0 & V_1/2 \end{pmatrix}$ a $f^2(r, s) = r^T B s^1$, kde $B = \begin{pmatrix} (V_2 - C)/2 & V_2 \\ 0 & V_2/2 \end{pmatrix}$. Konktétne, keď $V_1 = V_2 = 8$ a $C = 12$ máme $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Pri stretnutí *jastrabov* nastanú boje a obaja dostanú výplatu –2. Pri stretnutí *holubov* sa príjmy rozdelia a každý dostane 4. A pri stretnutí *jastrabov* a *holubov*, *jastraby* dostanú 8 a *holuby* 0.

Všeobecné výplatné funkcie:

$$f_{JD} = (V_1 - C)q/2 + (1 - q)V_1 = V_1 - (V_1 + C)q/2$$

$$f_{HD} = 0q + (1 - q)V_1/2 = V_1/2 - V_1 q/2$$

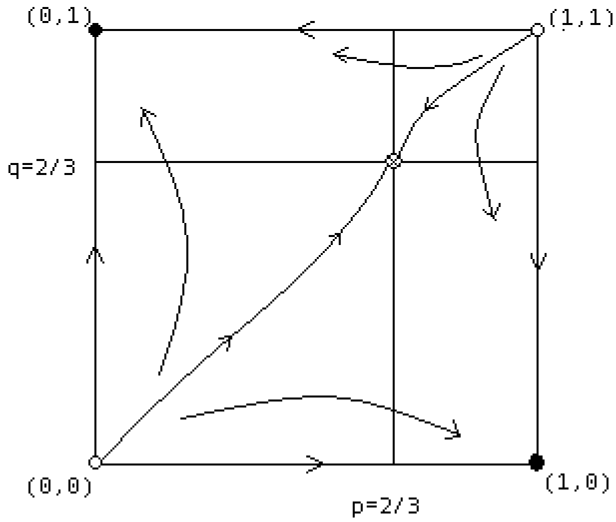
$f_{JV} = V_2 - (V_2 + C)p/2$

$f_{HV} = V_2 / 2 - V_2 p / 2$.

Po dosadení daných hodnôt dostaneme:

$f^1(e_1, s) = -2q + 8(1-q) = 8 - 10q$ je výplatná funkcia s pravdepodobnosťou 1 pre domáceho hráča hrajúceho jastraba (nezávislé od p, lebo neuvažujeme vlastné účinky populácie). $f^1(e_2, s) = 0q + 4(1-q) = 4 - 4q$ je výplatná funkcia domáceho hráča hrajúceho holuba. Podobne pre votrelca $f^2(e_1, s) = 8 - 10p$ je výplatná funkcia hráča hrajúceho jastraba, a výplatná funkcia pre votreleca hrajúceho holuba je $f^2(e_2, s) = 4 - 4p$.

Znížené parametre sú $a_1 = a_{12} - a_{22} = 8 - 4 = 4 > 0$, $a_2 = a_{21} - a_{11} = 0 - (-2) = 2 > 0$ a $b_1 = b_{12} - b_{22} = 8 - 4 = 4 > 0$, $b_2 = b_{21} - b_{11} = 0 - (-2) = 2 > 0$.



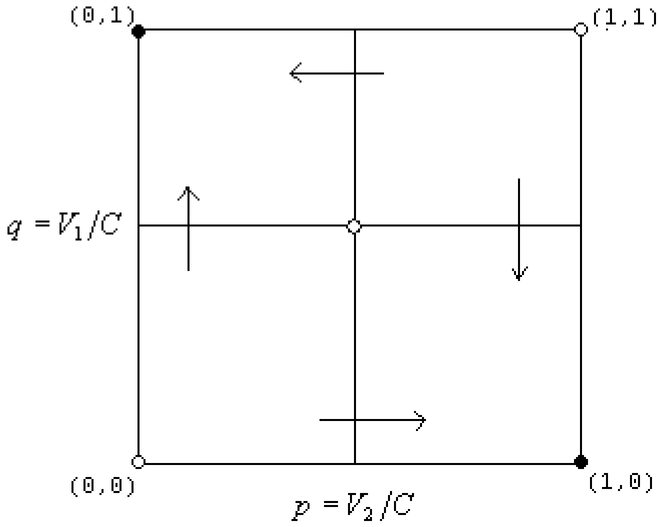
Táto hra patrí k prípadu 1-1. Je tu zmiešané NE v $s^* = (2/3, 2/3)$. Toto NE je sedlový bod dynamík. Sú tu tiež dve čisté stratégie NE, obe tiež EE v rohoch štvorca $(p,q) = (1,0), (0,1)$. Ich oblasti atrakcie sú oddelené sedlovou cestou k s^*. V bode $(p,q) = (1,0)$ hrajú všetci domáci hráči *jastraba* a všetci votrelci hrajú *holuba*. V druhom bode je to naopak. Všetci domáci hráči hrajú *holuba* a všetci votrelci hrajú *jastraba*. To znamená, že v týchto rovnovážnych bodoch nedochádza k boju.

Replikátorové rovnice tvoria sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc:

$dp/dt = p(1-p)(V_1/2 - Cq/2) = p(1-p)(4-6q)$

$dq/dt = q(1-q)(V_2/2 - Cp/2) = q(1-q)(4-6p)$

Podiel domácich hráčov hrajúcich *jastraba* sa zvýši ($dp/dt > 0$) ak $q < V_1/C$. A naopak sa zníži, ak $q > V_1/C$. Podobne s hráčmi votrelcov. Počet hráčov votrelcov hrajúcich jatrabov sa zvýši, ak $p < V_2/C$ a zníži, ak $p > V_2/C$.



Ako sa bude vyvýjať hra, závisí od polohy štartovacieho bodu.

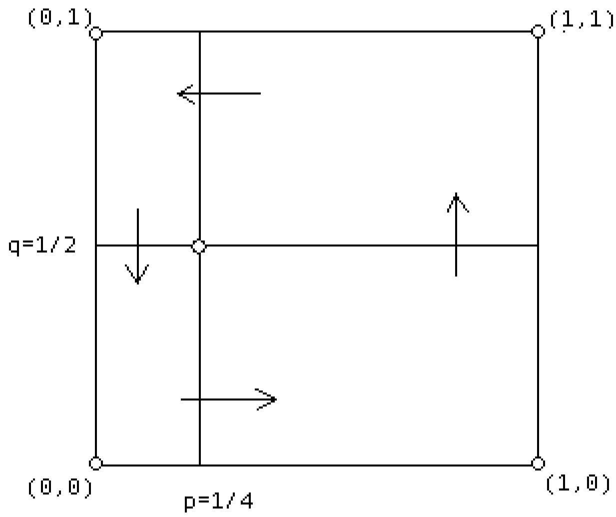
2.5. Kupec – Predavač

Hra "kupec - predavač" predstavuje vzájomné pôsobenie medzi dvomi populáciami ($K = 2$) nazvanými kupci ($k = 1$) a predavači ($k = 2$). Pre každého predavača sú k dispozícii dve možné stratégie. Môžu buď signalizovať kvalitu *čestne* ($i = 1$) alebo môžu *podvádzať* ($i = 2$). Každý kupec má tiež dve alternatívne stratégie: môžu buď kvalitu *kontrolovať* ($i = 1$) alebo *nekontrolovať* ($i = 2$). Stavom je tu $s = (s^1, s^2) = ((s_1^1, s_2^1), (s_1^2, s_2^2))$. Môže byť popísaný bodom (p, q) v štvorci $S = [0,1]^2$; kde $s_1^1 = p$ je podiel kupcov, ktorí kontrolujú a $s_1^2 = q$ je podiel čestných predavačov. Potom máme $s_2^1 = 1 - p$ podiel nekontrolujúcich kupcov a $s_2^2 = 1 - q$ podiel predavačov, ktorí podvádzajú.

Populácie vzájomne pôsobia v neorganizovanom trhu, v ktorom účinky povesti a spoluúčasť jednotlivých kupcov a predavačov sú zanedbateľné (nevlastné účinky populácie). Výplatná funkcia závisí na kombinácii populačných výberov stratégií napr. klamanie je menej príťažlivé pre predavačov, keď viac kupcov kontroluje, … Konkrétne predpokladajme, že výplatná funkcia je $f^1(r,s)=r^T A s^2$, kde $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ a $f^2(r,s)=r^T B s^1$, kde $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Napríklad čestný predavač dostane výplatu $b_{12}=3$, keď sa stretne s nekontrolujúcim kupcom, ktorý v tomto prípade dostane tiež $a_{21}=3$. Teda pre kupca, keď $e_1=(1,0)$, t.j. kontroluje s pravdepodobnosťou 1, výplatná funkcia kontrolovania je $f^1(e_1,s)=2q+0(1-q)=2q$ (nezávislé od p) a $f^1(e_2,s)=3q+(-1)(1-q)=4q-1$ je výplatná funkcia nekontrolovania. Podobne pre predavača; $f^2(e_1,s)=3-p$ je výplatná funkcia čestného predavača s pravdepodobnosťou 1 a $f^2(e_2,s)=4-5p$ je výplatná funkcia podvádzania.

Znížené parametre sú $a_1=a_{12}-a_{22}=0-(-1)=1>0$, $a_2=a_{21}-a_{11}=3-2=1>0$ a $b_1=b_{12}-b_{22}=3-4=-1<0$, $b_2=b_{21}-b_{11}=-1-2=-3<0$.

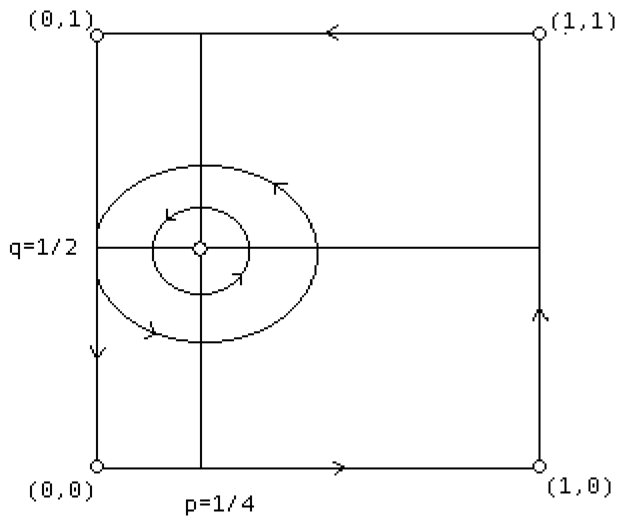


Táto hra je prípad 1-2. V bode $(p,q)=(1/4,1/2)$ je jedinečné NE – centrum.

Napríklad v Malthusovej dynamike predpokladáme, že rýchlosť rastu stratégie je proporcionálna alebo (s výhodnou voľbou časovej mierky) rovnaká k jeho pomernej výplatnej funkcii. To znamená, že rýchlosť rastu kontrolovania $\dot{p}/p$ sa rovná jeho výplatnej funkcii $f^1(e_1, s)$ mínus populačný priemer výplatnej funkcie medzi kupcami $f^1(p,s) := pf^1(e_1,s) + (1-p)f^1(e_2,s)$. Preto $\dot{p} = p(1-p)(1-2q)$.

Rýchlosť rastu $\dot{q}/q$ úprimnosti medzi predavačmi je pomerná výplatná funkcia $f^2(e_1,s) - f^2(q,s) = (1-q)(2p-1)$, tak $\dot{q} = q(1-q)(4p-1)$.

Tento systém diferenciálnych rovníc má päť pevných bodov (ustálených stavov): v centre a v štyroch rohoch p-q štvorca. Všetky iné body sú na pravidelnej trajektórii krúžiacej proti smeru hodinových ručičiek. Teda pri Malthusiaskej dynamike štyri pevné body sú nestabilné – sedlá a centrum je neutrálne (ani asymptoticky stabilné ani nestabilné).



Záver

Cieľom mojej diplomovej práce bolo priblížiť čitateľovi základy evolučnej teórie hier a aplikovať ju na niektoré známe príklady hier používaných v klasickej teórii hier.

Pokračovanie tejto práce by mohlo byť skúmanie konkrétneho ekonomického alebo finančného problému z pohľadu evolučnej teórie hier ako napríklad v prácach: [7] modeluje bankovú paniku; [8], [9] sa zaoberá finančným trhom; [10] predstavuje modelovanie finančného trhu pomocou hry jastrab – holub; [11] sa zaoberá medzinárodným obchodom; …

Literatúra

[1] Daniel Friedman: On economic applications of evolutionary game theory
Journal of Evolutionary Economics (1998) 8: 15-43

[2] Daniel Friedman: Equilibrium in Evolutionary Games - Some Experimental Results
The Economic Journal, Volume 106, Issue 434 (Jan., 1996), 1-25.

[3] Daniel Friedman: Evolutionary Games in Economics
Econometrica, Volume 59, Issue 3 (May., 1991), 637-666

[4] Gardner: Games for Business and Economics (chapter 8)
John Wiley and Sons, Inc., 1995, 204-235

[5] Andren Mas-Colell, Michael D. Whinston and Jerry R. Green: Microeconomic Theory (chapter 7,8)
New York, Oxford, Oxford University Press, 1995, 217 – 305

[6] P. Brunovský: Dynamické systémy a diferenciálne rovnice
http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky/

[7] Theodosios Temzelides: Evolution, Coordination, And Banking Panics
Research Department Federal Reserve Bank of Philadelphia, June, 1994
http://ideas.uqam.ca/ideas/data/Papers/wpawuwpfi9511002.html

[8] Daniel Friedman: Towards Evolutionary Game Models of Financial Markets
august 2000
http://www.cse.ucsc.edu/classes/cmps272/Winter02/
http://cash.ucsc.edu/projects/localinteractions/helitour.pdf

[9] Why the equilibrium stock price is fluctuating
http://www.encycogov.com/A2MonitorSystems/Exhi_5FluctuatingPriceEq.asp
http://www.encycogov.com/

[10] B. Cornell and R. Roll: Strategies for Pairwise Competitions in Markets and Organizations
Bell Journal of Economics, 1981,12,201-216

[11] Daniel Friedman, K.C.Fung: International trade and the internal organization of firms: An evolutionary approach
Journal of International Economics, 1996, 113-137
http://www.cse.ucsc.edu/classes/cmps272/Winter02/papers/dan_jie96.pdf