

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika



OPTIMALIZÁCIA PORTFÓLIA SO ZAISTENÍM
VOČI ALTERNATÍVNEMU VÝVOJU ÚROKOVÝCH MIER

Diplomová práca

Diplomant: Jana Marettová

Vedúci diplomovej práce: prof.RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.

Bratislava 2002

Ďakujem svojmu diplomovému vedúcemu prof.RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za čas, vedenie a usmerňovanie pri tejto práci. Ďakujem aj zamestnancom firmy Group-S, ktorí mi vychádzali v ústrety a poskytli mi údaje a informácie, ktoré som v práci použila. Nakoniec ďakujem aj mojej rodine, ktorá ma počas celého štúdia podporovala.

Obsah

Úvod	2
1 Základné pojmy	3
1.1 Úroková miera	3
1.1.1 Časová štruktúra úrokových mier	3
1.1.2 Teórie úrokovej miery	4
1.2 Dlhopis	5
1.2.1 Riziko spojené s investovaním do dlhopisov	6
1.2.2 Portfólio manažment	8
2 Formulácia úlohy	9
2.1 Formulácia hlavnej úlohy	9
2.2 NY7	13
2.3 Rozšírenie optimalizácie pridaním alternatívneho vývoja	14
2.4 Vplyv voľby alternatívneho výnosu na hlavný výnos	15
3 Príklady	17
3.1 Optimalizácia investičných rozhodnutí so zaistením voči alternatívnemu vývoju	17
3.2 Vplyv očakávaní na investičné rozhodnutia	21
3.3 Adaptívne rozhodovanie	24
3.3.1 Investičné rozhodnutia pri adaptívnom rozhodovaní	25
3.3.2 Porovnanie výsledkov	27
4 Iné prístupy	31
4.1 Stochastický model	31
4.2 CFM Model	32
Záver	35
Literatúra	36

Úvod

Táto práca je venovaná úlohe optimalizácie zloženia portfólia dlhopisov. Túto úlohu musia riešiť jednak investori, ktorých cieľom je zisk, tak aj finančné inštitúcie, majúce finančné záväzky.

Investor má svoje predstavy, ktoré by malo portfólio spĺňať (napr. záväzky, ktoré musí v určitom čase splniť). Taktiež má očakávania spojené s vývojom úrokových mier. Toto všetko vplýva na zloženie portfólia, ktoré má samozrejme prinášať čo najvyšší zisk. Problémom investora je, že skutočný vývoj úrokových mier sa môže líšiť od jeho očakávaní. K riešeniu tohoto problému možno pristupovať rôznymi spôsobmi. Spravidla (pozri [1]) sa hľadá stratégia, ktorá maximalizuje stredný výnos viacerých možných vývojov úrokových mier, ktorým sa priradujú určité pravdepodobnosti.

Naša úloha rieši problém inak. Pre zvolený vývoj úrokových mier hľadá optimálnu stratégiu spomedzi portfólií, ktoré zabezpečia zvolené výnosy pri ďalších, alternatívnych vývojoch.

V prvej kapitole sa oboznámime s problematikou; so základnými pojmami, ktoré budeme v ďalších častiach využívať, ako sú napríklad úroková miera a dlhopis. V skratke rozoberieme najhlavnejšie teórie úrokovej miery a taktiež riziká spojené s investovaním do dlhopisov, ktoré investor podstupuje.

V ďalšej kapitole formulujeme hlavnú optimalizačnú úlohu. Potom ju rozšírime a budeme optimalizovať vzhľadom k alternatívnemu vývoju úrokových mier, čo je ťažiskom tejto práce. Cieľom je zistiť, či aj touto metódou môžeme prísť k dobrým výsledkom a ukázať výsledky na konkrétnych príkladoch.

V tretej kapitole budeme klásť hlavný dôraz na výsledky optimalizácie. Zameriame sa na niektoré fakty, ktoré vplývajú na investičné rozhodnutia. Potom zmeníme jednokrokovú optimalizáciu na viackrokovú, čím získavame reálnu úlohu. Aj tieto výsledky si ukážeme na konkrétnom príklade a porovnáme riešenie.

V poslednej kapitole porovnáme náš prístup s inými prístupmi v riešení problému voľby optimálneho dlhopisového portfólia.

1 Základné pojmy

V ekonomickom a finančnom prostredí patrí medzi najčastejšie riešené problémy otázka optimálneho investovania. Investor, ktorý ma voľné finančné prostriedky sa teda rozhoduje, ako bude investovať. Na kapitálovom trhu má veľa možností a môže si vybrať tú, ktorá mu najviac vyhovuje. Rozhoduje sa na základe výnosnosti, bezpečnosti a stupňa likvidity investície. Neexistuje investícia, ktorá by dosiahla najlepší výsledok vo všetkých týchto bodoch. Existuje iba možnosť optimálneho pomeru výnosu, bezpečnosti a likvidity. V tejto kapitole si pripomenieme niektoré hlavné charakteristiky, ktoré vplývajú na investovanie a zdefinujeme si základné pojmy. Charakteristikou, ktorá v podstatnej miere ovplyvňuje výnos z investícií a teda aj investičné rozhodnutia, je úroková miera.

1.1 Úroková miera

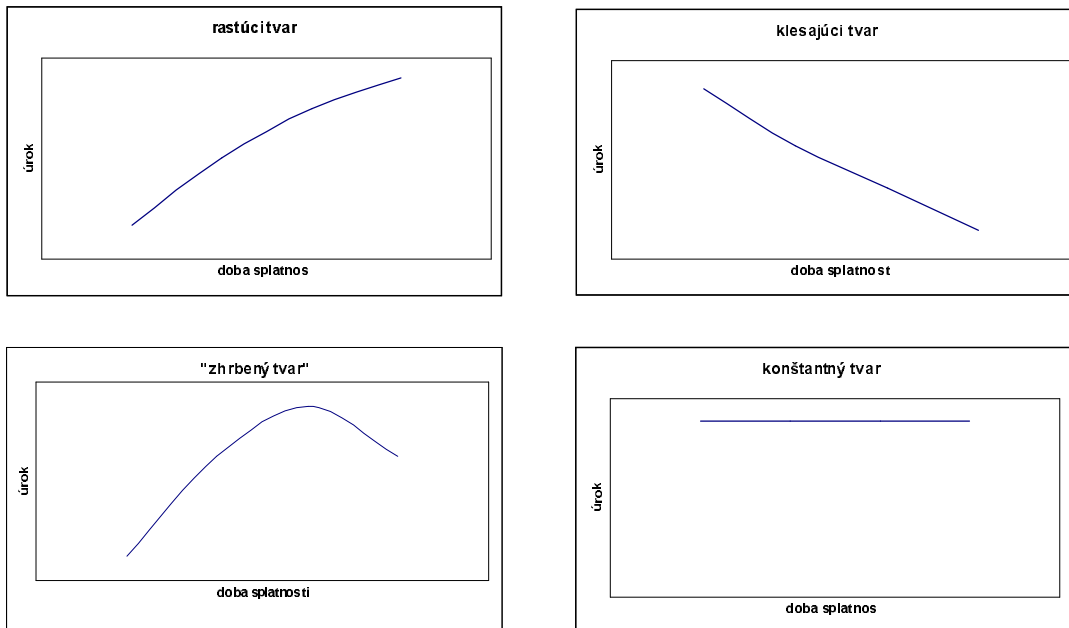
Úrok je definovaný ako peňažná suma, ktorú je dlžník povinný zaplatiť veriteľovi za poskytnutie úveru. Neexistuje však jediná úroková miera.

Úrokové miery sa delia v závislosti:

- od rizikovosti investície. Za "bezrizikóvu" úrokovú mieru r_f sa považuje úroková miera "bezrizikového" aktíva, napr. úroková miera štátnych cenných papierov. Rizikovejšie dlhopisy majú vyššiu úrokovú mieru a túto mieru môžeme napísať ako r_f + riziková prémie.
- od likvidity investície. Finančné prostriedky, ktoré máme okamžite k dispozícii bez strát (alebo v krátkom časovom okamihu) sú zväčša úročené nižšou úrokovou mierou.

1.1.1 Časová štruktúra úrokových mier

Vzťah medzi úrokmi porovnateľných cenných papierov (s podobným rizikom) a dobou splatnosti ("*maturity*") nazývame časovou štruktúrou úrokových mier - "*term structure of interest rates*". Krivku, ktorá graficky vyjadruje túto závislosť nazývame "*yield curve*". Poznáme rôzne tvary týchto kriviek. Aj keď sa za normálny tvar pokladá rastúci, vyskytujú sa aj iné, napríklad klesajúci (tzv. inverzná výnosová krivka), konštantný alebo zhrbený tvar výnosovej krivky.



Obr. 1: Rôzne tvary výnosových kriviek

1.1.2 Teórie úrokovej miery

Existuje veľa teórií o časovej štruktúre úrokových mier, ktoré vysvetľujú rôzne tvary výnosových kriviek a ich pohyby.

Najjednoduchšia je **teória očakávania**. Podľa tejto teórie, úroky s dlhou dobou splatnosti odrážajú budúci vývoj krátkodobých úrokových mier (*"short term rate"*). Obsahujú v sebe informáciu o očakávaných úrokových mierach v ďalších obdobiach. Teda existuje vzťah medzi dlhodobými a krátkodobými úrokovými mierami. Časová štruktúra úrokových mier je podľa tejto teórie zvyčajne rastúca.

Teória oddelených trhov hovorí o tom, že nemusí existovať vzťah medzi krátkodobými, strednodobými a dlhodobými úrokovými mierami. Podľa tejto teórie investori majú odlišné preferencie a zameriavajú sa na rôzne doby splatnosti. Napríklad finančné spoločnosti investujú nielen za účelom maximalizácie výnosnosti investície, ale tiež s cieľom obmedziť riziko a udržať si likviditu. Toto si vyžaduje určitú časovú štruktúru aktív a pasív. Podľa tejto teórie teda napr. krátkodobé úrokové miery sú určené ponukou a dopytom po krátkodobých investíciách.

Teória preferencie likvidity hovorí, že terajšie dlhodobé úroky sú vyššie ako budúce krátkodobé úrokové miery, táto teda nie je len výsledkom očakávaní investorov. Vyplýva to z toho, že investor preferuje likviditu, teda preferuje investície do krátkodobých aktív. Ak bude investovať do dlhodobých aktív, požaduje prémie za likviditu vo forme vyšších úrokových mier. Na druhej strane emitent preferuje dlhodobé finančné prostriedky. Dlhodobé úrokové miery sú teda vyššie ako priemerne očakávané krátkodobé miery v budúcnosti.

1.2 Dlhopis

Okrem výnosu je ale veľmi podstatné aj riziko investície a investor môže rozhodnúť, či dá prednosť cenným papierom s menším rizikom ako sú napríklad štátne dlhopisy, štátne pokladničné poukážky, komunálne dlhopisy, bankové obligácie, alebo cenným papierom rizikovejším, ale s vyšším výnosom, napríklad podnikové obligácie alebo akcie spoločností. Aby čo najlepšie splnil svoje požiadavky, môže investovať do viacerých aktív - vytvorí *"portfólio"*, ktoré v sebe spája vlastnosti rôznych druhov investícií.

V tejto práci sa ďalej budeme zaoberať len investovaním do dlhopisov, tak si teraz pripomeňme niektoré základné definície.

Dlhopis je cenný papier, ktorým sa dlžník zaväzuje splatiť majiteľovi tohoto cenného papiera jeho nominálnu hodnotu v danom čase. Okrem toho môže dlhopis prinášať aj pravidelné výnosy (kupóny), ktoré sú zvyčajne určené v percentách nominálnej hodnoty dlhopisu. Podľa toho, či sú kupóny vyplácané, sa dlhopisy delia na kupónové a bezkupónové.

Výnos dlhopisu môže byť určený:

- pevnou úrokovou mierou
- pohyblivou úrokovou mierou, úrok sa vypláca podľa aktuálnej úrokovej miery na kapitálovom trhu
- vývojom devízových kurzov v závislosti od pohybu úrokových mier, či kurzov na finančnom trhu

- zlosovateľnou prémieou
- rôznou kombináciou týchto výnosov

Významné je členenie dlhopisov z hľadiska emitenta ¹ - toho, kto dlhopisy vydáva. Členíme ich na:

Štátne dlhopisy tvoria najvýznamnejšiu časť dlhopisov a patria medzi najlikvidnejšie.

Slúžia na financovanie štátneho rozpočtu alebo refinancovanie dlhu. Sú kryté štátom, preto sa považujú za najbezpečnejšie a úroková miera s nimi spojená je označovaná ako "bezriziková". Od nej sa odvíjajú aj ďalšie úrokové miery dlhopisov.

Komunálne dlhopisy vydávajú samosprávy a sú z nich financované projekty v rámci regiónu.

Podnikové dlhopisy vydávajú firmy. Sú menej likvidné ako štátne dlhopisy a nesú so sebou aj väčšie riziko a ich úroková miera závisí od rizikovosti tohto cenného papiera.

Ďalšou významnou charakteristikou dlhopisov je doba do splatnosti dlhopisu. Je to doba, počas ktorej sa emitent zaviazal splňať svoje záväzky plynúce z dlhu. Splatnosť dlhopisu - "*maturity*" - je doba, kedy dlhopis vyprší a dlžník vyplatí nominálnu hodnotu dlhopisu.

1.2.1 Riziko spojené s investovaním do dlhopisov

Aj keď sú dlhopisy vo všeobecnosti považované za najmenej rizikové cenné papiere, nesú so sebou rôzne druhy rizika, ktoré môže ovplyvniť výnos z tohto cenného papiera.

Výnos z dlhopisu môžeme rozdeliť na:

- obchodovateľnú hodnotu dlhopisu, za ktorú ho môžeme v danom čase predať ²
- finančný tok plynúci z dlhopisu po dobu, kým dlhopis vlastníme
- ďalšie príjmy plynúce z reinvestícií tohto finančného toku

¹Emitent sa nachádza v tzv. "*short position*", majiteľ dlhopisu je v "*long position*".

²Existujú rôzne stratégie nákupu a predaja dlhopisov v rôznych časoch, najčastejšie sú používané v súvislosti s dlhopismi s dlhou dobou splatnosti.

Všetky tieto výnosy sú však ovplyvňované rôznymi faktormi. Podľa toho rozlišujeme druhy rizika, ktoré výnosy ovplyvňujú.

Riziko insolvenencie - "*default risk*" - vyjadruje riziko neschopnosti emitenta splácať svoje záväzky. U vládnych dlhopisov sa neuvažuje s týmto rizikom.

Kapitálové riziko - pri nákupe dlhodobých dlhopisov sa vystavujeme riziku, že jeho cena bude ovplyvnená nečakanou zmenou úrokovej miery. S nárastom úrokových mier jeho cena klesá, samozrejme s poklesom cena stúpne.

Príjmové riziko - ak investor investuje do krátkodobých dlhopisov, má zabezpečený príjem len v tomto období. V ďalších obdobiach sú jeho príjmy neznáme. Riziko vychádza z toho, že budúca hodnota investície závisí na mierach návratnosti v čase, keď budú peňažné toky plynúce z investície reinvestované.

Inflačné riziko - pri nečakanom náraste inflácie sa zníži reálna hodnota finančného toku plynúceho z investícií. Ak investor investuje do krátkodobých cenných papierov, predpokladá, že úrokové miery v budúcnosti vzrastú pri náraste inflácie.

Riziko likvidity - ak cenný papier, ktorý chceme predať nie je likvidný. Toto riziko však nie je významné pre toho investora, ktorý plánuje držať cenný papier až do dňa splatnosti.

Riziko spojené s časovou štruktúrou úrokových mier - vychádza z toho, že predpoklady o vývoji úrokovej miery sú iné ako skutočnosť. Podľa teórie očakávaní, dlhodobé úrokové miery odzrkadľujú predpokladný pohyb v krátkodobých úrokových mierach, očakávania finančných expertov vývoja úrokovej miery na trhu v budúcnosti. Ani tieto očakávania však nemusia nastať a úrokové miery v budúcnosti sa od očakávaní líšia. Súvisí to s tým, že úrokové miery sú ťažko predvídateľné a ich výška závisí aj od mnohých vonkajších faktorov.

Doba splatnosti významne ovplyvňuje vlastnosti dlhopisu. Závisí od nej výnos (kupón) a taktiež aj volatilita cien dlhopisov. Zmeny úrokovej miery na trhu spôsobia väčšie zmeny v cenách dlhopisov s dlhšou dobou splatnosti, ako u krátkodobejších.

Dlhopisy podľa doby splatnosti delíme na:

- krátkodobé - dlhopisy s dobou splatnosti do 5 rokov
- strednodobé - dlhopisy s dobou splatnosti od 5 do 12 rokov
- dlhodobé - dlhopisy s dobou splatnosti nad 12 rokov

1.2.2 Portfólio manažment

K vytváraniu dlhopisových portfólií existujú rôzne prístupy. Hlavný rozdiel je medzi aktívnym a pasívnym manažmentom.

Pasívny používa len informácie, ktoré poznáme v čase rozhodovania (úrokové miery, indexy), vôbec sa "nepozera" do budúcnosti.

Aktívny sa snaží predpovedať, teda dôraz je na očakávaniach v budúcnosti.

Podľa tohto delenia sa v ďalších kapitolách budeme zaoberať optimalizáciou portfólia z aktívneho pohľadu, pretože v úlohe sú zapracované investorove očakávania do budúcnosti.

2 Formulácia úlohy

Mnohé finančné inštitúcie, napríklad poisťovne, investičné fondy investujú do dlhopisov. Snažia sa vytvoriť optimálne dlhopisové portfólio, ktoré by im zabezpečilo príjmy na vykrytie svojich záväzkov v budúcnosti (napr. vyplácanie poistiek)³. Okrem toho sa samozrejme snažia maximalizovať svoj zisk.

Úloha sa týka investora, ktorý investuje do dlhopisov rovnakej rizikovosti (investuje do najmenej rizikových), teda jediné riziko ktoré podstupuje, je riziko vo vývoji úrokových mier.

Predtým, ako si sformulujeme hlavnú úlohu, zdefinujme si niektoré pojmy:

horizont n množina časových períód meraná napr. od $t=0$ do času n , na ktorom budeme optimalizovať danú úlohu

finančný tok c_t - "cash flow" prichádzajúce finančné prostriedky, ktoré môžeme investovať v danom čase t (so záporným znamienkom sú to záväzky, ktoré musí investor v danom čase splatiť)

2.1 Formulácia hlavnej úlohy

Uvažujme investora, ktorý investuje určité finančné prostriedky P (napr. 1000) do portfólia dlhopisov s rôznymi dobami splatnosti podľa ponuky, napr. 1, 2, 3 alebo 6 mesiacov. Investor sa riadi stratégiou "buy and hold"⁴ a snaží sa maximalizovať úrokové výnosy na časovom horizonte. Investor sa o svojich investičných rozhodnutiach rozhoduje podľa zloženia úrokových mier známeho v okamihu rozhodovania. Teda v tomto čase sa rozhodne o celom svojom investovaní na danom časovom horizonte.

Cieľ investora je maximalizovať investičný prebytok (výnosy z úrokov v jednotlivých obdobiach) na konci časového horizontu. Výnosy z úrokov sú vyplácané v každom období. Vychádzame z predpokladu jednotných úrokových mier a rovnakého investičného rizika vo všetkých finančných inštitúciách.

³Aj keď tieto výdavky nie sú presne určené, dajú sa približne odhadnúť.

⁴Nakúpi dlhopis v určitom čase a drží ho až do doby splatnosti, neobchoduje s ním.

Keďže cieľom je maximalizovať výnosy z úrokov v určenom časovom horizonte $[0, n]$, optimalnosť tokov v ďalších obdobiach $[n + 1, n + 2, \dots]$ plynúcich z investičných rozhodnutí v časoch $[0, n]$ nie je uvažovaná.

Označme:

- $v_t^{\tau+}$ - investičné rozhodnutia, ktoré reprezentujú dlhopisy s dobou splatnosti $\tau \in D^S = \{1, 2, 3, 6\}$, (doby splatnosti 1, 2, 3 alebo 6 mesiacov) v čase $t = 0, \dots, T$
- r_t^τ - prislúchajúce úrokové miery
- c_t - výška finančného toku investovaného v čase t (záporné prezentuje potrebu finančných prostriedkov)

Celkový investičný prebytok v čase s z investícií do dlhopisov s dobami splatnosti τ je

$$\sum_{\tau \in D^S} \sum_{t=s-\tau}^{s-1} r_t^\tau v_t^{\tau+} \quad (2.1)$$

Uvažujeme len úroky v čase $[0, T]$. Optimalizačný problém potom vyzerá:

- Účelová funkcia

$$\max \sum_{s=1}^T \sum_{\tau \in D^S} \sum_{t=s-\tau}^{s-1} r_t^\tau v_t^{\tau+} \quad (2.2)$$

- Ohraničenia

$$\sum_{\tau \in D^S} \left[\sum_{s=t-\tau}^{t-1} r_s^\tau v_s^{\tau+} + v_t^{\tau+} \right] + c_t = \sum_{\tau \in D^S} v_t^{\tau+} \quad (2.3)$$

$$v_t^{\tau+} \geq 0 \quad (2.4)$$

Účelová funkcia maximalizuje výnosy z úrokov. Ohraničenia zabezpečujú nezápornosť investícií a podmienku, aby sme sa nedostali do "short position" - investovať môžeme len finančné prostriedky, ktoré máme k dispozícii (výnosy z úrokov, výplata z dlhopisov, ktorým skončila doba splatnosti a dodatočný finančný tok).

Ako vidíme, všetky ohraničenia a účelová funkcia sú lineárne, t.j. máme úlohu lineárneho

programovania.

Príklad: Investor investuje na začiatku finančné prostriedky vo výške 1000, dodatočný finančný tok je nulový a optimalizuje na časovom horizonte 10 období (rokov). Nasledujúca tabuľka nám ukazuje, aké budú investorove investičné rozhodnutia v_t^{7+} pri ponuke dlhopisov s dobou splatnosti 1, 2, 3, 6 rokov, pričom investor pozná zloženie úrokových mier v čase rozhodovania (na začiatku) a prepokladá nárast úrokových mier. Výnos v prípade rastúcich úrokových mier je 871, 795. Investičné rozhodnutia vidíme v nasledujúcej tabuľke. Investor vloží svoje prostriedky do dlhopisov s krátkou dobou splatnosti. Rozhodnutie takto investovať pri danom zložení úrokových mier a následnom očakávaní ich nárastu je optimálne.

Tabuľka 2.1.

t	r_t^1	r_t^2	r_t^3	r_t^6		v_t^{1+}	v_t^{2+}	v_t^{3+}	v_t^{6+}
0	4,2	4,4	4,5	4,4		1000	0	0	0
1	4,7	4,9	5	4,9		1042	0	0	0
2	5,2	5,4	5,5	5,4		1090,97	0	0	0
3	5,7	5,9	6	5,9		1147,7	0	0	0
4	6,2	6,4	6,5	6,4		1213,12	0	0	0
5	6,7	6,9	7	6,9		1288,34	0	0	0
6	7,2	7,4	7,5	7,4		1374,66	0	0	0
7	7,7	7,9	8	7,9		1473,63	0	0	0
8	8,2	8,4	8,5	8,4		1587,1	0	0	0
9	8,7	8,9	9	8,9		1717,24	0	0	0

Prvý stĺpec tabuľky označuje časový okamih, investuje sa na horizonte 10 období (rokov) a investor investuje na začiatku obdobia (môžeme to označiť aj ako koniec predchádzajúceho obdobia, teda rozhodujeme sa v obdobiach 0 – 9). V nultom časovom období sú úrokové miery charakterizované vtedajším zložením úrokových mier, ktoré sú známe a v ďalších obdobiach zloženie úrokových mier závisí od očakávaní uvedených v tabuľke, ktoré môžu vychádzať z očakávaní investorov alebo z objektívnych "term structure" modelov. V tabuľke ďalej vidíme investičné rozhodnutia v jednotlivých obdobiach pre dlhopisy s dobami splatnosti 1, 2, 3 a 6 rokov. V nultom období investor investuje svoje finančné prostriedky, pričom v ďalších obdobiach už investuje dodatočný finančný tok v jednotlivých obdobiach (v tomto prípade nulový), výnos z úrokov a z dlhopisov, ktorým skončila doba splatnosti.

Ďalšia tabuľka ukazuje, aké je optimálne investovanie, keď očakávame pokles úrokových mier. Investor má k dispozícii finančné prostriedky, ako v predchádzajúcom príklade. Výnos pri klesajúcich úrokových mierach je 730,301. Vidíme, že optimálne je investovať do dlhopisov s dlhšou dobou splatnosti, ale vzhľadom k tomu, že úroky na dlhopisy s dobou splatnosti 3 mesiace sú vyššie ako úroky na dlhopisy s dobou splatnosti 6 mesiacov a optimalizujeme výnosy z úrokov na časovom horizonte 10 mesiacov, posledné tri časové obdobia investujeme do dlhopisov s dobou splatnosti 3 mesiace.

Tabuľka 2.2.

t	r_t^1	r_t^2	r_t^3	r_t^6		v_t^{1+}	v_t^{2+}	v_t^{3+}	v_t^{6+}
0	6,7	6,9	7	6,9		0	0	0	1000
1	6,2	6,4	6,5	6,4		0	0	0	69
2	5,7	5,9	6	5,9		0	0	0	73,416
3	5,2	5,4	5,4	5,4		0	0	0	77,7475
4	4,7	4,9	5	4,9		0	0	0	81,9459
5	4,2	4,4	4,5	4,4		0	0	0	85,9613
6	3,7	3,9	4	3,9		0	0	0	1089,74
7	3,2	3,4	3,5	3,4		0	0	132,244	0
8	2,7	2,9	3	2,9		0	0	136,872	0
9	2,2	2,4	2,5	2,4		0	0	140,978	0

Do dlhopisov s dlhšou dobou splatnosti investujeme, ak očakávame pád alebo zmenu "term structure" z normálnej na inverznú. Investovanie do dlhopisov s krátkou dobou splatnosti je vhodné, ak očakávame nárast úrokových mier. Takže čas a posuny "term structure" hrajú dôležitú úlohu v investičných rozhodnutiach. Dopad týchto pohybov sa analyzuje veľmi pozorne pre zhodnotenie efektívnej stratégie a risku, ktorému sa vystavujeme. Toto rozhodnutie je preto optimálne len pre tento vývoj a už malé zmeny v úrokových mierach (či je to zmena úrokových mier v čase rozhodovania, alebo už malé zmeny v očakávaníach investora) môžu výrazne ovplyvniť výsledok.

Na rozhodovanie o investíciách vplýva aj dodatočný finančný tok. Je to najmä vtedy, ak je záporný (potreba finančnej hotovosti). Môžeme to vidieť na nasledujúcom príklade, kde dodatočný finančný tok nadobúda aj záporné hodnoty. To ovplyvní rozhodovanie investora, keďže v daných časových okamihoch potrebuje likvidné prostriedky na krytie záporného finančného toku. Keďže nepovoľujeme "short position", investor musí tieto

prostriedky získať ako výnosy z investícií v predchádzajúcich obdobiach a z dlhopisov, ktorým končí doba splatnosti.

Tabuľka 2.3.

t	r_t^1	r_t^2	r_t^3	r_t^6		c_t		v_t^{1+}	v_t^{2+}	v_t^{3+}	v_t^{6+}
0	6,7	6,9	7	6,9		1000		0	0	75.4997	924.5
1	6.2	6.4	6.5	6.4		0		0	0	0	69.0755
2	5,7	5,9	6	5,9		0		46.7344	0	26.7619	0
3	5,2	5,4	5,4	5,4		-200		0	0	0	0
4	4,7	4,9	5	4,9		0		0	0	0	69.8171
5	4,2	4,4	4,5	4,4		-100		0	0	0	0
6	3,7	3,9	4	3,9		0		0	0	0	996.133
7	3,2	3,4	3,5	3,4		0		0	0	115.767	0
8	2,7	2,9	3	2,9		0		0	0	46.322	0
9	2,2	2,4	2,5	2,4		0		0	0	47.7117	0

Štruktúru investičných rozhodnutí môžeme porovnať s predchádzajúcou tabuľkou, kde máme rovnaký scenár vývoja úrokových mier, na začiatku investor investuje rovnaké finančné prostriedky, ale dodatočný finančný tok v tabuľke 2.3 je nulový a v tomto prípade je aj záporný. Investor sa rozhodne investovať aj do krátkodobých dlhopisov, aby mal v danom časovom okamihu finančné prostriedky vo výške záporného finančného toku. V niektorých prípadoch sa však môže stať, že úloha so záporným finančným tokom nemá riešenie. Nastane to vtedy, keď záväzky sú príliš vysoké vzhľadom na investované prostriedky, kladný dodatočný finančný tok a výnosy z nich.

Kladný dodatočný finančný tok neovplyvňuje štruktúru investičných rozhodnutí, ovplyvní len výšku týchto investičných rozhodnutí.

2.2 NY7

Keďže rozhodnutie o investícii je závislé od budúceho vývoja úrokových mier a investor v realite presne nevie, ako sa budú úrokové miery vyvíjať, používa rôzne odhady budúceho vývoja úrokových mier, ktoré nazývame scenáre. Investor pozná zloženie výnosovej krivky v čase rozhodovania a rozhodne sa pre scenár, ktorý je najpravdepodobnejší. Investície potom optimalizuje vzhľadom na tento vývoj.

Používajú sa rôzne štandardné scenáre vývoja, napríklad NY 7 (New York 7), ktoré tvoria súbor 7 rôznych scenárov vývoja vychádzajúce z terajšieho zloženia "term structure".

Uvažujú sa tu len paralelné posuny výnosovej krivky v ročných intervaloch (na dobu 10 rokov):

- 1. úrokové miery počas celého obdobia sú nezmenené
- 2. rastú o 50 bázických bodov ročne (o 0,5%; napríklad nárast zo 4.5% na 5.0%)
- 3. rastú o 100 bázických bodov ročne počas 5 rokov, potom pokles o 100 bodov počas ďalších 5 rokov
- 4. narastú o 300 bázických bodov v prvom roku, v nasledujúcich obdobiach zostávajú nezmenené
- 5. pokles o 50 bázických bodov ročne počas 10 rokov
- 6. pokles o 100 bázických bodov ročne počas 5 rokov a nárast o 100 bodov ročne v priebehu nasledujúcich 5 rokov
- 7. pokles o 300 bázických bodov v prvom roku, potom zostáva na rovnakej úrovni

V niektorých ďalších experimentoch, kde sa zaoberáme mesačným investovaním, budeme používať modifikované scenáre NY7, kde štruktúra zmien úrokových mier zostáva nezmenená a mesačné zmeny sú $1/12$ násobkom zmien v pôvodných scenároch.

Napríklad: pre obdobie jedného roku (12 mesiacov) scenár prislúchajúci k bodu 3. budú úrokové miery 6 mesiacov rásť o $100/12$ základných bodov a následne 6 mesiacov klesať o $100/12$ základných bodov.

2.3 Rozšírenie optimalizácie pridaním alternatívneho vývoja

V tejto časti rozšírime optimalizáciu o alternatívne scenáre, investor sa zabezpečí aj voči iným vývojom úrokových mier.

Keďže investor dopredu nepozná vývoj úrokových mier, chce si zaistiť čo najvyšší vývoj pri jeho očakávaníach, ktorý získa riešením úlohy (2.2), (2.3), (2.4), kde predpokladá úrokové miery vo výške r_t^r . Tiež sa však chce poistiť aj pre prípad iného vývoja úrokových mier R_t^r .

Označme si d ako investorom požadovaný výnos pri alternatívnom vývoji úrokových mier

R_t^r a finančného toku C_t v čase t , ktorý nemusí byť totožný s c_t . Investorove rozhodnutie bude teda ovplyvňovať aj tento alternatívny vývoj úrokových mier. Investičné rozhodnutia získame riešením rozšírenej úlohy, k optimalizačnej úlohe (2.2), (2.3) pridáme ďalšie ohraničenia na minimálnu výšku výnosu pri alternatívnom vývoji a ohraničenia na investície:

$$\sum_{s=1}^T \sum_{\tau \in D^S} \sum_{t=s-\tau}^{s-1} R_t^r v_t^{\tau+} \geq d \quad (2.5)$$

$$\sum_{\tau \in D^S} \left[\sum_{s=t-\tau}^{t-1} R_s^r v_s^{\tau+} + v_{t-\tau}^{\tau+} \right] + C_t = \sum_{\tau \in D^S} v_t^{\tau+} \quad (2.6)$$

$$v_t^{\tau+} \geq 0 \quad (2.7)$$

Pridaním nerovností (2.5), (2.6), (2.4) k pôvodnej úlohe (2.2), (2.3), (2.7), ktoré zabezpečujú splnenie podmienky výnosu pri alternatívnom scenári, sa zachová linearita optimalizačnej úlohy.

Ak sa chce investor zaistiť voči viacerým alternatívam, pridá ďalšie ohraničenia prislúchajúce k tomuto vývoju, čím sa zväčší rozsah úlohy, ale linearita sa zachová.

2.4 Vplyv voľby alternatívneho výnosu na hlavný výnos

Veľmi dôležitú úlohu zohráva investorom požadovaný alternatívny výnos d , ktorý musí ležať v intervale (d_{min}, d_{max}) . Hodnotu najvyššieho možného výnosu d_{max} určíme ako maximálny výnos pri úrokových mierach R_t^r . Tento môžeme dostať riešením optimalizačnej úlohy (2.2), (2.3), (2.4) s nahradením pôvodných úrokových mier úrokovými mierami R_t^r a finančného toku C_t . Minimálny výnos d_{min} určíme ako riešenie

$$d_{min} = \sum_{s=1}^T \sum_{\tau \in D^S} \sum_{t=s-\tau}^{s-1} R_t^r V_t^{\tau+} \quad (2.8)$$

$V_t^{\tau+}$ zachováva pomer investičných rozhodnutí $v_t^{\tau+}$, kde $v_t^{\tau+}$ je riešením optimalizačnej úlohy (2.2), (2.3), (2.4). Objem investícií $V_t^{\tau+}$ nie je rovnaký ako $v_t^{\tau+}$, pretože závisí od finančného toku C_t a alternatívneho vývoja úrokových mier R_t^r .

Zvoliť vyšší výnos d ako d_{max} nemá zmysel, riešenie tejto úlohy neexistuje a voľbou nižšieho výnosu ako d_{min} dostaneme rovnakú štruktúru rozhodnutí, ako v optimalizácii hlavného

vývoja bez ďalších dodatočných ohraničení. S nárastom $d \geq d_{min}$ následne klesá výnos pri hlavnom scenári vývoja úrokových mier a pri jeho vysokej voľbe to už nie je úloha optimalizácie výnosu z hlavného vývoja, ale mení sa na optimalizáciu výnosu pri alternatívnom vývoji úrokových mier.

3 Príklady

3.1 Optimalizácia investičných rozhodnutí so zaistením voči alternatívnemu vývoju

Investor, hoci očakáva určitý vývoj úrokových mier a chce maximalizovať svoj výnos vzhľadom na tento vývoj, vie, že tieto očakávania nemusia nastať. Preto sa chce zaistiť aj voči iným možným alternatívam vývoja úrokových mier. Rozhodne sa, že si chce aj pri alternatívnom vývoji zaistiť určitý výnos d . Samozrejme musí platiť $d \in (d_{min}, d_{max})$ a (2.8). Na určenie výšky alternatívneho požadovaného výnosu potrebuje investor poznať jeho maximálnu možnú výšku (pre každý alternatívny vývoj). Optimalizácia teda bude pozostávať z viacerých krokov:

- určenie maximálneho a minimálneho výnosu pre každý alternatívny scenár
- voľba požadovaných výnosov pre alternatívne vývoje
- hlavná optimalizácia vzhľadom na alternatívne vývoje pri podmienkach na požadované alternatívne výnosy

Ak pre tieto podmienky na alternatívne výnosy neexistuje prípustné riešenie, výnosy na alternatívne scenáre boli znižované rovnomerne pre každý vývoj. V prípade nerovnomerného znižovania podmienky na niektorý z alternatívnych výnosov je výnos, ktorý je proporcionálne vyšší voči ostatným vývojom, viac zvýhodňovaný. Takáto situácia je prípustná napríklad v prípade, ak investor ešte z alternatívnych vývojev predpokladá viac tento vývoj, teda prikladá mu vyššiu dôležitosť.

Príklad: Predpokladajme investora, ktorý sa rozhodol investovať svoje finančné prostriedky do dlhopisov v časovom horizonte 10 rokov. Má k dispozícii terajšiu ponuku dlhopisov s dobou splatnosti 1, 2, 3 a 6 rokov s nasledovnými úrokovými mierami: 4,2%; 4,4%; 4,5%; 4,4%. Investor očakáva nárast úrokových mier v tomto časovom horizonte. Nasledujúca tabuľka ukazuje, aké sú optimálne rozhodnutia vzhľadom k tomuto očakávaniu investora, jeho výnos pri tomto vývoji úrokových mier je 871, 795.

Tabuľka 3.1.

t	r_t^1	r_t^2	r_t^3	r_t^6	v_t^{1+}	v_t^{2+}	v_t^{3+}	v_t^{6+}
0	4,2	4,4	4,5	4,4	1000	0	0	0
1	4,7	4,9	5	4,9	1042	0	0	0
2	,2	5,4	5,5	5,4	1090,97	0	0	0
3	5,7	5,9	6	5,9	1147,7	0	0	0
4	6,2	6,4	6,5	6,4	1213,12	0	0	0
5	6,7	6,9	7	6,9	1288,34	0	0	0
6	7,2	7,4	7,5	7,4	1374,66	0	0	0
7	7,7	7,9	8	7,9	1473,63	0	0	0
8	8,2	8,4	8,5	8,4	1587,1	0	0	0
9	8,7	8,9	9	8,9	1717,24	0	0	0

Pri očakávanom vývoji nemenných úrokových mier s daným terajším zložením úrokových mier je optimálne investovať do dlhopisov s najvyšším výnosom, t.j. trojročných a zisk pri tomto scenári a tomto optimálnom investovaní je 552, 969.

Nasledujúca tabuľka ukazuje, ako vyzerajú optimálne rozhodnutia vzhľadom k očakávaniu rastu úrokových mier v prvých obdobiach a ich následnému poklesu. Tetno vývoj by investorovi priniesol výnos 980, 312. Investorove rozhodnutia sú vlastne kombináciou rozhodnutí pri náraste úrokových mier (investovanie do krátkodobých dlhopisov) a očakávaní ich poklesu (investovanie do dlhopisov s dlhšou dobou splatnosti)

Tabuľka 3.2.

t	r_t^1	r_t^2	r_t^3	r_t^6	v_t^{1+}	v_t^{2+}	v_t^{3+}	v_t^{6+}
0	4,2	4,4	4,5	4,4	1000	0	0	0
1	5,2	5,4	5,5	5,4	1042	0	0	0
2	6,2	6,4	6,5	6,4	1096,18	0	0	0
3	7,2	7,4	7,5	7,4	1164,15	0	0	0
4	8,2	8,2	8,5	8,2	0	0	0	1247,97
5	7,2	7,4	7,5	7,4	0	0	0	104,829
6	6,2	6,4	6,5	6,4	0	0	0	112,587
7	5,2	5,4	5,5	5,4	0	0	119,792	0
8	4,2	4,4	4,5	4,4	0	0	126,38	0
9	3,2	3,4	3,5	3,4	0	0	132,0677	0

Pri očakávaní prudkého nárastu úrokových mier a ich následnej nemennosti sú optimálne rozhodnutia (tabuľka 3.3) podobné, ako pri nemenných úrokových mierach s výnimkou prvého obdobia, kedy investor investuje do krátkodobých dlhopisov. Možný výnos v prípade tohto scenára pri optimálnom investovaní je 997, 76268.

Tabuľka 3.3.

t	r_t^1	r_t^2	r_t^3	r_t^6	v_t^{1+}	v_t^{2+}	v_t^{3+}	v_t^{6+}
0	4,2	4,4	4,5	4,4	1000	0	0	0
1	7,2	7,4	7,5	7,4	0	0	1042	0
2	7,2	7,4	7,5	7,4	0	0	78,15	0
3	7,2	7,4	7,5	7,4	0	0	84,011	0
4	7,2	7,4	7,5	7,4	0	0	1132,312	0
5	7,2	7,4	7,5	7,4	0	0	175,235	0
6	7,2	7,4	7,5	7,4	0	0	188,378	0
7	7,2	7,4	7,5	7,4	0	0	1244,5065	0
8	7,2	7,4	7,5	7,4	0	0	295,844	0
9	7,2	7,4	7,5	7,4	0	0	318,033	0

Keď investor pozná maximálne možné výnosy pre scenáre, ktoré predpokladá, rozhodne sa o výške alternatívnych výnosov a voči týmto optimalizuje hlavný vývoj.

Nech si ako hlavný vývoj úrokových mier vyberie ich nárast (tabuľka 3.1) a alterantívne scenáre budú:

- nemenný vývoj úrokových mier, požadovaný výnos 500
- nárast a od polovice časového horizontu pokles úrokových mier, požadovaný výnos 700
- nárast úrokových mier v prvom období a následná nemennosť, požadovaný výnos 850

V tabuľke vidíme, aké sú optimálne rozhodnutia investora. Zisk z hlavného výnosu pri tejto štruktúre investičných rozhodnutí je 809, 855, pričom teraz má investor zabezpečený výnos aj pri alternatívnych vývojoch úrokových mier. Štruktúra investičných rozhodnutí nie je kombináciou predchádzajúcich výsledkov, ale vidíme, že investor sa rozhodne investovať do dlhopisov s dobou splatnosti 2 roky. Toto rozhodnutie nie je samostatne optimálnym rozhodnutím pre žiaden z použitých scenárov, ale pri obmedzeniach na výnos na všetkých alternatívnych podmienkach optimálne je.

Tabuľka 3.4.

t	v_t^{1+}	v_t^{2+}	v_t^{3+}	v_t^{6+}
0	286,77	713,23	0	0
1	0	330,196	0	0
2	0	759,14	0	0
3	0	378,127	0	0
4	0	809,18	0	0
5	0	430,369	0	0
6	0	863,72	0	0
7	0	487,309	0	0
8	0	1409,5	0	0
9	0	0	1468,7	0

Pridáme ďalšie ohraničenia na alternatívne vývoje:

- nemenný vývoj úrokových mier, požadovaný výnos 500
- nárast a od polovice časového horizontu pokles úrokových mier, požadovaný výnos 700
- nárast úrokových mier v prvom období a následná nemennosť, požadovaný výnos 850
- pokles úrokových mier v každom období, požadovaný výnos 600
- pokles úrokových mier a od polovice časového horizontu ich nárast, požadovaný výnos 650
- pokles v prvom období, ďalej nemenné, požadovaný výnos 500

Pridaním týchto podmienok je zisk z hlavného vývoja pri optimálnom investovaní 787,64.

Optimálne investičné rozhodnutia vidíme v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 3.5.

t	v_t^{1+}	v_t^{2+}	v_t^{3+}	v_t^{6+}
0	348,78	469,62	171,213	10,379
1	0	392,254	0	0
2	0	0	515,71	0
3	0	0	612,095	0
4	45,828	0	0	0
5	0	0	609,063	0
6	0	0	672,037	0
7	0	51,244	0	0
8	0	0	662,305	0
9	0	0	771,74	0

Ako vidíme, štruktúra rozhodnutí sa mení s pridaním každého ohraničenia na výnos pri ďalšom alternatívnom vývoji.

3.2 Vplyv očakávaní na investičné rozhodnutia

Investor pozná terajšie zloženie úrokových mier : 4,38% pre mesačné; 4,4% pre trojmesačné; 4,45% pre šesťmesačné; 4,42% ročné dlhopisy a investor očakáva v horizonte 12 mesiacov nárast úrokových mier. Investor sa rozhoduje o investíciách v časovom horizonte 1 roka (12 mesiacov), na začiatku investuje 1000, dodatočný finančný tok v každom z ďalších období je 100. Výnosy z úrokov sú vyplácané mesačne. Použitím jedného z modifikovaných scenárov NY7 (nárast v každom období) dospeje investor k rozhodnutiam investovať najskôr do krátkodobých a v posledných dvoch obdobiach do 6-mesačných dlhopisov. Toto rozhodnutie vyplýva z počiatočného zloženia úrokových mier. Zisk pri tomto vývoji je 73.43. V tabuľke môžeme vidieť tieto optimálne rozhodnutia, zloženie úrokových mier v období rozhodovania a taktiež aj očakávaný vývoj úrokových mier v ďalších obdobiach.

Tabuľka 3.6.

t	r_t^1	r_t^3	r_t^6	r_t^{12}		v_t^{1+}	v_t^{3+}	v_t^{6+}	v_t^{12+}
0	4,38	4,4	4,45	4,42		1000	0	0	0
1	4,4216	4,4416	4,4916	4,4616		1103.65	0	0	0
2	4,463	4,483	4,533	4,503		1207.72	0	0	0
3	4,505	4,525	4,575	4,545		1312.21	0	0	0
4	4,546	4,566	4,616	4,586		1417.13	0	0	0
5	4,588	4,608	4,658	4,628		1522.5	0	0	0
6	4,63	4,65	4,7	4,67		1628.33	0	0	0
7	4,671	4,691	4,741	4,711		1734.61	0	0	0
8	4,713	4,733	4,783	4,753		1841.36	0	0	0
9	4,755	4,775	4,825	4,795		1948.59	0	0	0
10	4,796	4,816	4,866	4,836		0	0	2056.32	0
11	4,838	4,858	4,908	4,878		0	0	108.34	0

Pre rovnaké zloženie úrokových mier a v očakávaní ich poklesu, budú optimálne investičné rozhodnutia investora vyzeráť nasledovne:

Tabuľka 3.7.

t	r_t^1	r_t^3	r_t^6	r_t^{12}		v_t^{1+}	v_t^{3+}	v_t^{6+}	v_t^{12+}
0	4,38	4,4	4,45	4,42		0	0	0	1000
1	4,338	4,358	4,408	4,378		0	0	0	103.683
2	4,296	4,316	4,366	4,336		0	0	0	104.062
3	4,255	4,275	4,325	4,295		0	0	0	104.438
4	4,213	4,233	4,283	4,253		0	0	0	104.812
5	4,171	4,191	4,241	4,211		0	0	0	105.183
6	4,13	4,15	4,2	4,17		0	0	105.552	0
7	4,088	4,108	4,158	4,128		0	0	105.922	0
8	4,046	4,066	4,116	4,086		0	0	106.289	0
9	4,005	4,025	4,075	4,045		0	0	106.653	0
10	3,963	3,983	4,0333	4,003		0	0	107.015	0
11	3,921	3,941	3,991	3,961		0	0	107.375	0

Zisk pri tomto scenári je 68.71.

Pre scenár nemenných úrokových mier vychádzajúc z rovnakej časovej štruktúry úrokových mier ako v predchádzajúcich prípadoch a optimálnych rozhodnutiach vzhľadom na tento vývoj dostaneme pri tomto vývoji výnos 71.001 (investuje sa do dlhopisov s dobou splatnosti 6 mesiacov).

Investor sa ďalej rozhoduje o optimalizácii výnosu pri nemenných úrokových mierach s podmienkou na výnos pri alternatívnom scenári vývoja úrokových mier. Tabuľka ukazuje, aké budú jeho investičné rozhodnutia pre konkrétne prípady.

V tabuľke sú investičné rozhodnutia označené nasledovne:

$\vartheta_t^{\tau+}$ investičné rozhodnutia v čase t do dlhopisov s dobou viazanosti τ pre optimalizáciu výnosu z vývoja nemenných úrokových mier voči alternatívne rastúcich úrokových mier, kde požadujeme výnos 73

$u_t^{\tau+}$ investičné rozhodnutia pre optimalizáciu vývoja nemenných úrokových mier voči alternatívne klesajúcich úrokových mier, kde požadujeme výnos 68

Výnos pri nemenných úrokových mierach so zaistením voči alternatíve rastúcich je 70, 76; pri zaistení voči alternatíve klesajúcich úrokových mier je 70, 49. Tu vidíme, že aj keď výnosy po optimalizácii hlavného vývoja sa veľmi nelíšia, štruktúra rozhodnutí je v oboch prípadoch rôzna v závislosti od alternatívneho vývoja, ktorý uvažujeme v optimalizácii.

Tabuľka 3.8.

t	ϑ_t^{1+}	ϑ_t^{3+}	ϑ_t^{6+}	ϑ_t^{12+}	u_t^{1+}	u_t^{3+}	u_t^{6+}	u_t^{12+}
0	0	316.472	683.528	0	0	0	531.775	468.225
1	0	0	103.695	0	0	0	103.697	0
2	0	0	104.083	0	0	0	104.078	0
3	0	0	420.948	0	0	0	104.456	0
4	0	0	104.921	0	0	104.833	0	0
5	0	0	105.314	0	0	0	105.207	0
6	0	591.308	197.929	0	0	0	637.354	0
7	0	0	209.752	0	0	0	209.534	0
8	0	0	210.537	0	0	0	210.26	0
9	0	0	1119.11	0	0	0	210.982	0
10	0	0	212.224	0	0	0	211.698	0
11	0	0	213.02	0	0	0	212.41	0

Ďalej investor optimalizuje vzhľadom na obidva alternatívne vývoje pri hlavnom vývoji nemenných úrokových mier. Investičné rozhodnutia :

$\nu_t^{\tau+}$ požaduje výnos pri alternatívnom vývoji rastúcich úrokových mier vo výške 73 a pri klesajúcich 66⁵; výnos pri týchto investičných rozhodnutiach vzhľadom na hlavný investorom očakávaný vývoj (nemenné úrokové miery) je 70.6885; väčší dôraz prikladáme vývoju sa rastúcimi úrokovými mierami

⁵Voľbou výšky výnosu pri alternatívnom vývoji určujeme dôležitosť daného vývoja; keď je vysoký, kladieme naň väčší dôraz

v_t^{7+} požadovaný výnos pri alternatívnom vývoji rastúcich úrokových mier je 71 a pri klesajúcich požaduje 68; výnos z týchto investičných rozhodnutiach vzhľadom na hlavný vývoj je 70.4988

Väčší dôraz kladieme na vývoj klesajúcich úrokových mier

Tabuľka 3.9.

t	ν_t^{1+}	ν_t^{3+}	ν_t^{6+}	ν_t^{12+}	v_t^{1+}	v_t^{3+}	v_t^{6+}	v_t^{12+}
0	0	0	1000	0	0	0	531.775	468.225
1	0	0	103.708	0	0	0	103.697	0
2	0	0	104.089	0	0	0	104.078	0
3	0	0	104.468	0	0	0	104.456	0
4	0	0	104.845	0	0	0	104.833	0
5	0	0	105.219	0	0	0	105.207	0
6	0	1090.37	15.2219	0	0	0	637.354	0
7	0	0	209.415	0	0	0	209.534	0
8	0	0	210.141	0	0	0	210.26	0
9	0	0	1301.23	0	0	0	210.982	0
10	0	0	211.509	0	0	0	211.698	0
11	0	0	212.22	0	0	0	212.41	0

Na tomto príklade vidíme vplyv očakávaní investora na celkové investičné rozhodnutia. Jeho očakávania sa prejavia nielen voľbou hlavného scenára "*term structure*", ale ja výberom vývojev alternatívnych a hlavne výškou požadovaných výnosov pri alternatívnych vývojach. Investor voľbou výšky alternatívneho vývoja dáva väčšiu váhu tomu scenáru, kde požaduje výnos d bližší k d_{max} . Ako vidíme aj v predchádzajúcej tabuľke, keď investor požaduje vyšší výnos pri scenári s rastúcimi úrokovými mierami, investičné rozhodnutia to ovplyvní v tom, že budú rešpektovať viac tento možný vývoj a už menej možný vývoj klesajúcich úrokových mier a naopak.

3.3 Adaptívne rozhodovanie

Doteraz sa investor rozhodoval iba raz a to v nultom časovom okamihu. Tieto investičné rozhodnutia závisia od vtedajšieho zloženia úrokových mier, očakávaného scenára "*term structure*" a požadovaného alternatívnych výnosov. Tieto rozhodnutia sú rozhodnutia na celé časové obdobie, na ktorom investor maximalizoval svoj výnos.

V realite by však bolo zbytočné a neefektívne nevyužívať dostupné informácie, ktoré máme k dispozícii. Preto pre reálne investovanie túto jednokrokovú optimalizáciu zmeníme na viackrokovú tým, že sa budeme rozhodovať v každom okamihu, keď máme voľné finančné prostriedky. Svoje rozhodnutia teda budeme adaptívne prispôbovať vývoju úrokových mier.

V nultom období budeme riešiť pôvodnú optimalizačnú úlohu (2.2) (2.3) (2.4) (2.5) (2.6) (2.7). Prvý krok adaptívnej optimalizácie je rovnaký ako jednokroková optimalizácia. Z tejto optimalizácie však vezmeme len prvé obdobie, investičné rozhodnutia v ďalších obdobiach vplynú z optimalizácií v ďalších krokoch pre aktuálne úrokové miery a očakávania ich vývoja. Tým, že v danom období investor pozná zloženie úrokových mier a finančný tok, ktorý môže investovať, sa táto úloha stáva reálnou úlohou. Keďže investori maximalizujú svoj výnos z investície na danom časovom horizonte, rozsah optimalizačnej úlohy sa v každom ďalšom rozhodovaní znižuje.

3.3.1 Investičné rozhodnutia pri adaptívnom rozhodovaní

Uvažujme investora, ktorý sa rozhoduje o investovaní do dlhopisov, k dispozícii má finančné prostriedky (na začiatku investovania 1000 a dodatočný finančný tok 100 v každom období), ponuku dlhopisov s dobami splatnosti $\tau = \{1, 3, 6, 12\}$ ⁶ mesiacov podobne ako v predchádzajúcich úlohách. Optimalizuje na časovom horizonte dvanástich mesiacov. Časová štruktúra úrokových mier v čase prvého rozhodovania je $\{4, 1875; 4; 3, 875; 3, 6875\}$. Budeme používať stratégiu optimalizácie vzhľadom na nemenný vývoj úrokových mier, pričom ďalšie obmedzenia sú na výnos pri raste a poklese úrokových mier.

⁶Sú to údaje za obdobie I.94. Pre túto optimalizáciu sme vzali historické dáta - mesačné údaje za obdobie I.94 až XII.94 - zo švajčiarskeho trhu so štátnymi dlhopismi.

Optimálne investičné rozhodnutia vzhľadom na túto úlohu na celé obdobie 12 mesiacov vyzerajú nasledovne:

Tabuľka 3.10.

t	v_t^1	v_t^3	v_t^6	v_t^{12}
0	1000	0	0	0
1	1103,489583	0	0	0
2	1207,512722	0	0	0
3	1311,663547	0	0	0
4	1416,309022	0	0	0
5	1521,103819	0	0	0
6	1626,174165	0	0	0
7	1731,764138	0	0	0
8	1837,89747	0	0	0
9	1943,832347	0	0	0
10	2050,008064	0	0	0
11	2156,200797	0	0	0

Vidíme, že v prvom období investuje do 1 - mesačných dlhopisov. V ďalších obdobiach sa bude investor rozhodovať vzhľadom na informácie, ktoré už pozná, čiže tu bude vychádzať zo zloženia úrokových mier, ktoré už v týchto obdobiach má k dispozícii a ako finančný tok zahrnie aj výnosy plynúce z dlhopisov nakúpených v predchádzajúcich obdobiach. Napríklad pre rozhodovanie na konci šiesteho mesiaca bude investor vychádzať z "term structure" známej v tomto období ($\{4, 125; 4, 25; 4, 375; 4, 5625\}$) a do finančných tokov v ďalších obdobiach bude uvažovať aj príslušné výnosy plynúce z investícií z období 0 až 5 a optimalizovať bude na horizonte zvyšných šesť období s použitím rovnakej optimalizačnej stratégie. Optimálne rozhodnutia vidíme v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 3.11.

t	v_t^1	v_t^3	v_t^6	v_t^{12}
6	0	0	0	105,707
7	0	0	0	106,1087693
8	0	0	0	106,5343092
9	0	0	0	106,9560075
10	0	0	0	107,379375
11	0	0	0	107,3621

V ďalšej tabuľke vidíme, ako sa v skutočnosti na celom tomto období vyvíjali úroky. Vidíme, že krivka "term structure" sa v priebehu tohto obdobia zmenila z klesajúcej na rastúcu.

Tabuľka 3.12.

t	r_t^1	r_t^3	r_t^6	r_t^{12}
0	4,1875	4	3,875	3,6875
1	4,375	4,25	4,0625	3,9375
2	4,125	4,0625	3,9375	3,9375
3	4,25	4,1875	4,0625	4,0625
4	4,0625	4	4	4,0625
5	4	4,25	4,375	4,5
6	4,125	4,25	4,375	4,5625
7	4,25	4,4375	4,625	4,8125
8	3,875	4	4,3125	4,75
9	3,8125	4,125	4,25	4,75
10	3,625	3,9375	4,125	4,5625
11	4	4,25	4,5625	4,8125

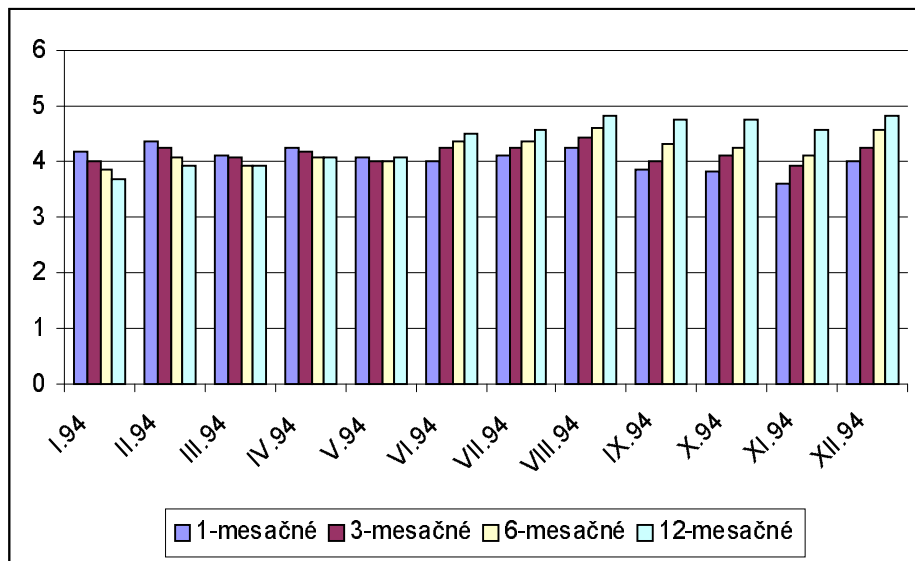
Lineárnou optimalizáciou očakávaného výnosu pri nemenných úrokových mierach so zaistením voči rastúcemu a klesajúcemu alternatívnemu vývoju na tomto časovom horizonte a použitím adaptívneho rozhodovania dostávame takéto optimálne rozhodnutia v jednotlivých časových obdobiach u_t^T :

Tabuľka 3.13.

t	u_t^1	u_t^3	u_t^6	u_t^{12}
0	1000	0	0	0
1	1103,839	0	0	0
2	1208,228	0	0	0
3	1312,381	0	0	0
4	1417,029	0	0	0
5	0	0	0	1521,83
6	0	0	0	105,707
7	0	0	106,103	0
8	0	0	0	106,517
9	0	0	0	106,9393
10	0	0	0	107,362
11	0	0	0	107,77

3.3.2 Porovnanie výsledkov

Na nasledujúcom grafe môžeme vidieť, ako sa vyvíjali úrokové miery v období I.94 až XII.94. Vidíme, že časová štruktúra úrokových mier sa zmenila. Vo štvrtom mesiaci bola klesajúca a vidíme, že už v šiestom mesiaci je výnosová krivka rastúca.



Obr. 2: Vývoj úrokových mier

Na grafe vidíme vývoj úrokových mier, ktoré skutočne nastali; tieto údaje sme používali v optimalizáciách.

V predchádzajúcich tabuľkách sme videli, ako sa zmenila štruktúra investičných rozhodnutí. Pri jedнокrokovj optimalizácii vychádza investor len z informácií, ktoré sú známe na začiatku investovania. Keďže pri adaptívnom rozhodovaní sa rozhoduje v každom časovom okamihu a optimalizácia zahŕňa informácie o časovej štruktúre v danom čase, výnos z týchto investičných rozhodnutí je vzhľadom na vývoj, ktorý skutočne nastal, vyšší. Pri jedнокrokovj optimalizácii je skutočný výnos z investícií 63,3881; pri adaptívnom rozhodovaní je to 69,6939.

Maximálny možný výnos na tomto časovom horizonte môžeme určiť optimalizáciou, keď poznáme hneď na začiatku plnú informáciu o vývoji úrokových mier na danom časovom horizonte. Riešením tejto optimalizačnej úlohy získa rozhodnutia, ktoré prinesú maximálny výnos. V tejto optimalizácii je výnos 73,4143. Optimálne rozhodnutia prislúchajúce k tomuto výnosu môžeme vidieť v nasledujúcej tabuľke (investičné rozhodnutia sú označené ϑ_t^r).

Tabuľka 3.14.

t	ϑ_t^1	ϑ_t^3	ϑ_t^6	ϑ_t^{12}
0	1000	0	0	0
1	0	0	1103,49	0
2	104.253	0	0	0
3	0	208.864	0	0
4	104.981	0	0	0
5	210.319	0	0	0
6	524.866	0	0	0
7	0	0	0	1734.413
8	0	0	0	106.955
9	0	0	0	107.379
10	0	0	0	107.804
11	0	0	0	108.214

Keďže optimalizujeme na konečnom časovom horizonte, v poslednom časovom okamihu maximalizujeme len na jednom období a teda investujeme do dlhopisov s najvyššími úrokmi. Optimalizujeme len na období, kde máme plnú informáciu; vývoj úrokových mier vôbec neberieme do úvahy.

V tabuľke 3.15 vidíme, ako vyzerajú najlepšie investičné rozhodnutia v tomto období ako časť dlhodobej optimalizácie. Tieto sú vybraté z dlhodobej optimalizácie pri plnej informácii (ak investor by presne poznal vývoj úrokových mier na celé obdobie, kde optimalizuje portfólio dlhopisov) ⁷. Výnos v prípade tohto investovania na danom časovom horizonte je 69.1179.

Tabuľka 3.15.

t	ϱ_t^1	ϱ_t^3	ϱ_t^6	ϱ_t^{12}
0	1000	0	0	0
1	1103,489583	0	0	0
2	1207,512722	0	0	0
3	0	1311,663547	0	0
4	104,5771593	0	0	0
5	209,5083558	0	0	0
6	1626,447424	0	0	0
7	0	0	1732,038337	0
8	0	0	106,6755644	0
9	0	107,0589297	0	0
10	0	107,4269448	0	0
11	107,7794395	0	0	0

⁷Optimalizácia je na horizonte 8 rokov urobená firmou Group - S.

Porovnaním skutočných výnosov pri rôznych štruktúrach investičných rozhodnutí nám adaptívne rozhodovania vychádzajú veľmi dobre, keďže maximálny výnos pri plnej informácii na tomto horizonte (ktorú v realite investor nemá) je 73,4143 a výnos pri adaptívnych rozhodovaniach je 69,6939. S porovnaním výnosu pri investičných rozhodnutiach uvedených v tabuľke 3.15 zisťujeme, že tento je trochu nižší, 69.1179. Vychádza to z toho, že tieto rozhodnutia sú optimálne pre dlhšie časové obdobie, nielen pre obdobie jedného roka, na ktorom sme optimalizovali my a optimálnosť v ďalších obdobiach sme v našej optimalizácii neuvažovali.

Aj z týchto výsledkov vidíme, že optimalizácia voči alternatívnemu vývoju úrokových mier dáva dobré výsledky a pre adaptívne rozhodovania sú výsledky porovnateľné s výsledkami iných štandardných metód optimalizácie portfólia.

4 Iné prístupy

4.1 Stochastický model

Iný prístup riešenia úlohy adaptívneho optimálneho investovania je opísaný v [1]. Na rozdiel od predloženej práce, autori nevyčleňujú hlavné a vedľajšie vývoje úrokových mier, ale viacerým možným vývojom priradujú pravdepodobnosti a optimalizujú stredný očakávaný výnos.

Optimalizačná úloha:

$$\max \sum_{k=1}^N p_k \sum_{s=1}^T \sum_{\tau \in D^S} \sum_{t=s-\tau}^{s-1} r_{t,k}^{\tau} v_{t,k}^{\tau,+} \quad (4.9)$$

$$\sum_{\tau \in D^S} \sum_{s=\tilde{t}-\tau+1}^{\tilde{t}} v_t^{\tau,+} \leq \sum_{t=1}^{\tilde{t}} \left[\sum_{\tau \in D^S} \sum_{s=t-\tau}^{s-1} r_{t,k}^{\tau} v_{t,k}^{\tau,+} + c_t \right] \quad \forall \tilde{t}, k \quad (4.10)$$

$$v_{0,i}^{\tau,+} = v_{0,j}^{\tau,+} \quad \forall i, j, \tau \in D^S$$

$$v_{t,k}^{\tau,+} \geq 0 \quad \forall t, k, \tau \in D^S$$

kde k označuje poradie scenára, p_k je pravdepodobnosť scenára k , $r_{t,k}^{\tau}$ je úroková miera prislúchajúca scenáru vývoja úrokových mier k s dobou splatnosti τ v čase t a $v_{t,k}^{\tau,+}$ označuje investičné rozhodnutie prislúchajúce k $r_{t,k}^{\tau}$.

Mnohé inštitúcie využívajú investovanie na finančných trhoch na pokrytie svojich záväzkov v budúcnosti (poisťovacie spoločnosti, ...), ich finančný tok je stochastický. Úloha optimálneho investovania bola modifikovaná na úlohu stochastického investovania so zapracovaním vývoja stochastických premenných.

Označme si:

D - všetky doby splatnosti, $D^S \subset D$, D^S - ponuka maturít, ktoré budeme uvažovať pre investovanie

$v_t^{\tau,+}$ investície do dlhopisov s dobou splatnosti τ v čase t

v_t^{τ} objem dlhopisov, s dobou splatnosti τ v čase t , platí:

$$v_t^{\tau} = v_{t-1}^{\tau+1,+} + v_t^{\tau,+}, \quad t = 0, 1, \dots, T; \tau \in D^S$$

$$v_t^{\tau} = v_{t-1}^{\tau+1,+}, \quad t = 0, 1, \dots, T; \tau \in D - D^S$$

x_t znamená množstvo investícií v čase t :

$$x_t = \sum_{\tau \in D} v_t^\tau, \quad t = 0, 1, \dots, T$$

Stochastický vývoj v čase zabezpečíme zmenou objemu ξ^t :

$$x_t = x_{t-1} + \xi^t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$\varrho_t(\eta_t, \tau)$ úroková miera v čase t prislúchajúca k dobe splatnosti τ , kde η_t je rizikový faktor prislúchajúci k času t

Úloha stochastického programovani potom vyzerá:

$$\max \langle \varrho_0, v_0^+ \rangle + \int \sum_{t=1}^T \langle \varrho_t(\eta_t), v_t^+ \rangle dP(\eta, \xi)$$

$$\begin{aligned} v_t^\tau - v_{t-1}^{\tau+1} - v_t^{\tau,+} &= 0 & t = 0, 1, \dots, T; \forall \tau \in D^S \\ v_t^\tau - v_{t-1}^{\tau+1} &= 0 & t = 0, 1, \dots, T; \forall \tau \notin D^S \\ x_t - \sum_{\tau \in D} v_t^\tau &= 0 & t = 0, 1, \dots, T \\ x_t - x_{t-1} &= \xi_t & t = 1, 2, \dots, T \\ v_t^\tau &\geq 0 & t = 0, 1, \dots, T \end{aligned}$$

Maximalizujú sa výnosy z úrokov. Ľavá strana ohraničení je deterministická. Na rozdiel od predchádzajúcej úlohy, úrokové miery v ohraničeniach nie sú explicitne uvažované (rizikový faktor η_t zahŕňa stochastickú závislosť úrokových mier $\varrho(\eta_t)$ od zmeny objemu investícií ξ_t)

4.2 CFM Model

K úlohe optimalizácie dlhopisového portfólia, ktoré má prinášať výnosy na krytie záväzkov (záporného finančného toku), môžeme pristupovať:

- z pohľadu maximalizácie výnosov plynúcich z portfólia (investor sa snaží čo najefektívnejšie investovať finančné prostriedky, ktoré má k dispozícii), túto úlohu sme riešili aj v predloženej práci
- z pohľadu nájdenia najlacnejšieho portfólia, výnosy z ktorého by uspokojovali záporný finančný tok (minimalizácia nákladov na investovanie)

V práci [2] autor rieši problém optimálneho investovania z druhého pohľadu. Vychádza zo sledovania záväzkov, ktoré je potrebné uspokojiť. Úloha vychádza z minimalizácie prostriedkov potrebných na uspokojenie záväzkov.

Označme si:

$F_{i,t}$ - finančný tok z aktíva i v čase t ⁸

L_t - záväzky v čase t

U - aktíva, ktoré môže investor použiť v tvorbe portfólia

x_i - objem nakúpených dlhopisov i

λ - náklady na portfólio, ktoré uspokojí záväzky L_t

Keďže investor nemusí mať práve v období, keď potrebuje splatiť svoje záväzky, finančné prostriedky v danej výške, v tomto modeli je povolené požíčovanie a reinvestovanie z času t do $t + 1$. Investor si požičia pri úrokovej miere bánk, pričom sám vlastní dlhopisy, ktoré sú splatné niekedy v budúcnosti (investor dlhopisy nepredáva pred dobou ich splatnosti). Pridáme premenné:

r_t - množstvo finančných prostriedkov reinvestovaných z času t do $t + 1$, u týchto investícií sa predpokladá miera návratnosti ρ_t

b_t - požičané finančné prostriedky v období $(t, t + 1)$, môžu byť požíčované za úrokovú mieru β_t

V poslednom období je požíčovanie zakázané.

⁸Tento finančný tok môže byť kladný aj záporný, uvažujme napríklad 4 - ročný dlhopis s nominálnou hodnotou 1. Kúpime ho za cenu P_i a ročný kupón je c_i . Finančný tok prislúchajúci k tomuto dlhopisu potom vyzerá: $F_i = (-P_i, c_i, c_i, c_i, 1 + c_i, 0, \dots)$

Optimalizačná úloha vyzerá:

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ & \sum_{i \in U} F_{i,0} x_i + b_0 + \lambda = r_0 \\ & \sum_{i \in U} F_{i,0} x_i + (1 + \rho_t) r_{t-1} + b_t = L_t + r_t + (1 + \beta_t) b_{t-1}, \quad t \geq 1 \\ & b_m = 0 \\ & x_i, r_i, b_i \geq 0 \end{aligned}$$

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali investovaním do dlhopisov, riešením problému investora, ktorý sa má rozhodnúť a zložiť portfólio z danej ponuky dlhopisov. Toto portfólio má čo najlepšie spĺňať jeho požiadavky, či to je krytie výdavkov, ponuku likvidity, alebo aby prinášalo požadovaný zisk.

V jeho rozhodovaní teda významnú úlohu hrajú aj očakávania o budúcom vývoji úrokových mier. Investor môže vychádzať aj z rôznych štandardných scenárov "*term structure*" a optimalizovať svoje portfólio vzhľadom na tieto vývoje. V tejto práci sme vychádzali zo scenárov NY7. Aj keď konkrétny scenár môže byť vybraný v závislosti od očakávaní, v optimalizácii vychádzame z očakávaní investorov vyjadrených štandardným scenárom.

Úlohu optimalizácie portfólia sme teda riešili ako úlohu lineárneho programovania s účelovou funkciou maximalizovať výnosy z úrokov a ohraničeniami na veľkosť investícií a na zabezpečenie likvidity na krytie záporného finančného toku.

Cieľom práce bolo rozšíriť túto úlohu o alternatívne vývoje. Riešenie tejto úlohy zabezpečuje výnos pri hlavnom vývoji za podmienky požadovaného výnosu pri vývoji alternatívnom. Investor sa teda poistí a má i v prípade nastatia alternatívneho vývoja zabezpečený výnos, v čom je prínos optimalizácie voči alternatívne výnosu.

Tým sa rozšíril rozsah úlohy, ale linearita sa zachovala. Použitím tejto optimalizácie sme získali dobré výsledky pri použití vcelku jednoduchého nástroja, ktorým je lineárne programovanie. Podľa uvedených výsledkov sme mohli vidieť, že podmienky na výnosy pri alternatívnych vývojjoch ovplyvňujú štruktúru rozhodnutí a tieto zabezpečujú požadovaný výnos pri nastatí alternatívneho vývoja.

Zmenením jednokrokovej optimalizácie na viackrokovú sme zistili, že táto metóda adaptívnych rozhodovaní dáva dobré riešenia aj pre reálnu úlohu, čo môžeme sledovať na príklade.

Ukázalo sa teda, že optimalizácia portfólia voči alternatívne vývoju úrokových mier ukazuje vcelku dobré výsledky pri výrazne menšej výpočtovej náročnosti oproti všeobecne používaným metódam.

Literatúra

- [1] Karl Frauendorfer, Michael Schürle: *Barycentric Approximation of Stochastic Interest Rate Processes*. In: W.T. Ziemba and J.M. Mulvey (eds.); *Worldwide Asset and Liability Modeling*, str. 231 -262. Cambridge, 1998.
- [2] Soren S. Nielsen: *Mathematical Modeling and Optimization with Applications in Finance*. 1998.
- [3] Frank J. Fabozzi: *The Handbook of Fixed Income Securities*, Fifth edition. McGraw Hill , 1997.