FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Ladislava Olšarová

Bratislava 2002

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika

ŽIVOTNÉ POISTENIE SO STOCHASTICKÝMI ÚROKOVÝMI MIERAMI

Diplomová práca

Diplomant: Ladislava Olšarová
Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Rastislav Potocký, CSc.
Bratislava 2002

Vyhlásenie:

Vyhlasujem, že diplomovú prácu na tému „Životné poistenie so stochastickými úrokovými mierami“ som spracovala samostatne podľa pokynov vedúceho diplomovej práce s využitím uvedenej literatúry.

Bratislava, dňa 2.4.2002 ....

Ladislava Olšarová

OBSAH

VÝZNAM NAJČASTEJŠIE POUŽÍVANÝCH SYMBOLOV

p_x	pravdepodobnosť, že x-ročná osoba sa dožije veku (x+1)
q_x	pravdepodobnosť, že x-ročná osoba sa nedožije veku (x+1)
${}_n p_x$	pravdepodobnosť, že x-ročná osoba sa dožije veku (x+n)
${}_n q_x$	pravdepodobnosť, že x-ročná osoba sa nedožije veku (x+n)
${}_{n\|} q_x$	pravdepodobnosť, že x-ročná osoba sa dožije veku (x+n), ale nedožije sa veku (x+n+1)
l_x	počet osôb dožívajúcich sa veku x
ω	limitný vek
i	úroková miera
v	diskontný faktor
d	diskontná miera
δ	intenzita úrokovania
T_x	počet rokov, ktoré ešte prežije x-ročná osoba
$f_x(t)$	hustota pravdepodobnosti T_x
$F_x(t)$	distribučná funkcia T_x
$E[g(x)]$	stredná hodnota funkcie $g(x)$
$D(X)$	disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X
μ_x	intenzita úmrtnosti x-ročnej osoby
U	výdavky poisťovne v čase uzavretia poistnej zmluvy
X	vektor platieb (technické premenné)
φ	stochastický diskontný vektor (finančné premenné)
$Val[X \mid F_t]$	valuácia v prípade konštantných úrokových mier (v čase *t*)
$Q[X \mid F_t]$	valuácia v prípade stochastických úrokových mier (v čase *t*)
$A[X \mid F_t]$	akumulované platby do a vrátane času *t*
$R[X \mid F_t]$	prospektívna rezerva (v čase *t*)
Y_j	ročné premenné
$L_t(X)$	ročné straty poisťovne (v čase *t*)
$M(X)$	súčet diskontovaných ročných strát
$(LT)_m$	technické straty poisťovne v čase *m*
$(LF)_m$	finančné straty poisťovne v čase *m*

ÚVOD

Poistenie zabezpečuje občanom právo na výplatu zmluvne dohodnutej finančnej čiastky (tzv. poistnej sumy) v prípade, že nastane poistná udalosť v dobe platnosti poistnej zmluvy. Poistná udalosť má charakter náhodnej udalosti.

V súčasnosti ponúkajú poisťovne množstvo produktov. Jedným z nich je poistenie osôb, pri ktorom sa poisťujú náhodné udalosti súvisiace so životom, úmrtím a zdravím človeka.

V našej práci sa zameriame na životné poistenie, ktoré je súčasťou poistenia osôb. Predstavuje spôsob sporenia, investovania a v prípade úmrtia poistenej osoby i ochranu pozostalých.

Modely životného poistenia môžeme vo všeobecnosti rozdeliť na

- diskrétne - premenná vyjadrujúca čas nadobúda diskrétne hodnoty. To znamená, že uvažujeme o časových okamihoch ako mesiac, rok a podobne.
- spojité - časová premenná nadobúda ľubovoľné hodnoty z daného časového intervalu.

Obidva modely možno modelovať deterministicky alebo stochasticky. V deterministickom prístupe sú všetky premenné dané, prípadne sa dajú vypočítať. Avšak stochastiský pohľad znamená, že aspoň jedna premenná nadobúda hodnoty, ktoré dopredu nepoznáme, sú teda náhodné.

V praxi sa najčastejšie používa najjednoduchší diskrétny deterministický model. Poisťovne neustále vyvíjajú nové poistné produkty a s tým nevyhnutne súvisí aj hľadanie nových kvalitnejších metód na výpočet potrebných údajov. Preto s rozvojom poisťovníctva nachádza svoje uplatnenie i stochastický model.

Cieľom diplomovej práce je vypracovať metódy na výpočet poistného a poistných rezerv v prípade náhodne sa meniacej úrokovej miery. Príslušné metódy sa pokúsime aplikovať na konkrétne dáta.

Úvodom do problematiky bude pre nás stochastický model životného poistenia jednej osoby - diskrétny i spojitý, ktorý je opísaný v prvej kapitole. Uvedieme predpoklady modelov a vysvetlíme základné pojmy, ktoré sa k nim vzťahujú. Za predpokladu konštantných úrokových mier odvodíme vzťahy pre výpočet poistného ako aj ďalšie charakteristiky niektorých typov poistenia.

V druhej kapitole sa zameriame na poistné rezervy a metódy ich výpočtu v prípade stochastických úrokových mier. Záver kapitoly obsahuje príklad modelu ilustrujúci metódu výpočtu poistných rezerv na konkrétnych dátach.

Tretia kapitola popisuje iný prístup k výpočtu hodnoty poistného – pomocou predpokladu, že úroková miera sa riadi podľa stochastickej diferenciálnej rovnice. Metódu založenú na aplikácii aproximácie cien dlhopisov na Cox-Ingersoll-Rossov model využijeme na výpočet výšky jednorázového nettopoistného pre niektoré typy životného poistenia.

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Rastislavovi Potockému, CSc. za odborné vedenie a cenné pripomienky pri písaní tejto práce.

1 STOCHASTICKÝ MODEL ŽIVOTNÉHO POISTENIA JEDNEJ OSOBY

V prvej kapitole uvedieme **diskrétny** a **spojitý stochastický model** životného poistenia za predpokladu *konštantných úrokových mier*. Pri niektorých typoch poistenia odvodíme vzťahy umožňujúce vypočítať výšku jednorázového nettopoistného ako aj tzv. stredné riziko poistenia. Pre ostatné typy uvedieme v tabuľke len výsledné vzťahy, keďže spôsob odvodenia je analogický. Vysvetlíme pojem jednorázové a bežné nettopoistné a vzťah medzi nimi. Podrobnejšie sa touto problematikou zaoberajú napr. práce [4] a [3].

1.1 DISKRÉTNY MODEL

V tejto časti sa zameriame na *diskrétny stochastický model,* ktorého predpoklady značne zjednodušujú skutočnosť.

1.1.1 Predpoklady a základné pojmy

Pri formulácii modelu vychádzame z nasledujúcich **predpokladov**:

1. *Dĺžka trvania poistnej zmluvy je konečná.*
   Aj pri uzavretí doživotného poistenia predpokladáme, že poistná udalosť nastane do nejakého veku ω (tzv. limitný vek). U nás zvyčajne $\omega = 103$ rokov.

2. Pre interval dĺžky poistenia x-ročnej osoby $(0, \omega - x)$ je definovaný *rozklad času* $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = \omega - x$ tak, že pre každé $0 < j \le n$ platí

$$t_j - t_{j-1} = t_1 - t_0$$

   Predpokladajme, že $t_1 - t_0 = 1$ rok, takže $Z = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

3. *Poistné udalosti sú splatné len v časoch* $t_1, t_2, \ldots, t_n$.
   Ak poistená osoba zomrie v čase $t \in (t_{j-1}, t_j)$, poistná suma bude vyplatená pozostalým v čase t_j.

4. *Pravdepodobnosť úmrtia je v priebehu intervalu* (t_{j-1}, t_j) *konštantná.*

5. *Pravdepodobnosti úmrtia a úročenie sú nezávislé od výšky poistných plnení.*

Označme

${}_t p_x$ - pravdepodobnosť, že x-ročná osoba sa dožije veku (x+t),
${}_t q_x$ - pravdepodobnosť, že x-ročná osoba sa nedožije veku (x+t),
${}_{t|} q_x$ - pravdepodobnosť, že x-ročná osoba sa dožije veku (x+t), ale nedožije sa veku (x+t+1),
l_x - počet osôb dožívajúcich sa veku x.

Pre pravdepodobnosť ${}_t p_x$ platí

$$ {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \tag{1.1} $$

Z uvedených definícií je zrejmé, že ${}_t p_x + {}_t q_x = 1$.

Ďalej definujme

T_x - tzv. **budúca dĺžka života** x-ročnej osoby. Vyjadruje zostávajúcu dĺžku života osoby vo veku x. Je to spojitá náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty $t \in (0, \omega - x)$.
Jej distribučnú funkciu označíme $F_x(t)$. Nazýva sa *funkcia doby života*.

$$ F_x(t) = P(T_x \le t) = {}_t q_x \tag{1.2} $$

K_x - tzv. **skrátená budúca dĺžka života** x-ročnej osoby. Je to diskrétna náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty $t \in \{0,1,....., \omega - x\}$.

$K_x = [T_x]$, t.j. $K_x \le T_x < K_x + 1$.

Jej distribučnú funkciu nazývame *funkcia prežitia*, ozn. $S_x(t)$.

$$ S_x(t) = 1 - F_x(t) = P(T_x > t) = {}_t p_x \tag{1.3} $$

Na základe definície K_x a vzťahu (1.2) môžeme odvodiť *rozdelenie pravdepodobnosti* skrátenej budúcej dĺžky života:

$$ P(K_x = t) = P(t \le T_x < t+1) = F_x(t+1) - F_x(t) = {}_{t+1} q_x - {}_t q_x = 1 - {}_{t+1} p_x - (1 - {}_t p_x) = $$
$$ = {}_t p_x - {}_{t+1} p_x = {}_t p_x - {}_t p_x . p_{x+t} = {}_t p_x (1 - p_{x+t}) $$

Potom

$$ P(K_x = t) = {}_t p_x . q_{x+t} = {}_{t|}\, q_x \tag{1.4} $$

Teda diskrétna náhodná premenná K_x nadobúda hodnoty $t \in \{0,1,2,.....\}$ s pravdepodobnosťou $_{t|}q_x$.

Použité vzťahy môžeme slovne vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$_{t+1}p_x = {_t}p_x . p_{x+t}$ - pravdepodobnosť, že osoba vo veku x sa dožije nasledujúcich (t +1) rokov sa rovná súčinu pravdepodobností, že x-ročná osoba sa dožije veku (x+t) a súčasne (x+t)-ročná osoba sa dožije veku (x+t+1).

$_{t|}q_x = {_t}p_x . q_{x+t}$ - pravdepodobnosť, že x-ročná osoba zomrie v roku (t+1) sa rovná súčinu pravdepodobností, že sa dožije veku (x+t) a súčasne nedožije veku (x+t+1).

Distribučná funkcia skrátenej budúcej dĺžky života K_x, ozn. $G_x(t)$, má potom tvar:

$$G_x(t) = \sum_{j=0}^{t} P(K_x = j) = \sum_{j=0}^{t} {_{j|}q_x} = {_{t+1}q_x} \tag{1.5}$$

Skrátenú strednú dĺžku života x-ročnej osoby označíme symbolom e_x a vypočítame ju ako strednú hodnotu náhodnej premennej K_x:

$$e_x = E(K_x) = \sum_{t=1}^{\infty} t.P(K_x = t) = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{j=t}^{\infty} P(K_x = j) = \sum_{t=1}^{\infty} P(T_x \geq t) = \sum_{t=1}^{\infty} {_t}p_x$$

Teda

$$e_x = \sum_{t=1}^{\infty} {_t}p_x \tag{1.6}$$

Disperzia náhodnej premennej K_x má tvar (pozri [3]):

$$D(K_x) = 2\sum_{t=1}^{\infty} t.\frac{l_{x+t}}{l_x} - e_x - (e_x)^2 \tag{1.7}$$

1.1.2 Základné typy životného poistenia

Pod pojmom **jednorázové nettopoistné** rozumieme poistné bez nákladov poisťovne zaplatené poistenou osobou pri uzavretí poistnej zmluvy.

V tejto časti odvodíme vzťahy pre výpočet *jednorázového nettopoistného* niektorých poistných druhov. Predpokladáme, že *poistná suma sa rovná jednej peňažnej jednotke (1 p.j.).*

Zisk poisťovne v čase $t = 0$ (v čase uzavretia poistnej zmluvy) ,ozn. Z, sa rovná rozdielu *súčasnej hodnoty poistenia* (jednorázového nettopoistného), ozn. JP, a hodnoty *výdavkov poisťovne v čase t = 0* (ozn. U).
Teda

$$Z = JP - U$$

Logickou požiadavkou je, aby *stredná hodnota zisku poisťovne v čase $t = 0$ bola nulová*, t.j. $E(Z) = 0$.
Potom

$$0 = E(Z) = JP - E(U) \;\Rightarrow\; JP = E(U)$$

Teda *súčasnú hodnotu poistenia vypočítame ako strednú hodnotu výdavkov poisťovne v čase uzavretia poistnej zmluvy.*

Okrem strednej hodnoty premennej U odvodíme aj jej disperziu $D(U)$. Pomocou nej môžeme vypočítať smerodajnú odchýlku $\sqrt{D(U)}$, ktorá určuje tzv. **stredné riziko poistenia** [4]. *Poistenie je tým riskantnejšie, čím je stredné riziko vyššie.*

1.1.2.1 Poistenie na dožitie

Pri tomto type poistenia je poistnou udalosťou *dožitie sa zmluvne dohodnutého veku* poistenou osobou. T.j.

Poisťovňa vyplatí 1 p.j., ak sa dnes x-ročná poistená osoba dožije veku (x+n).

Súčasnú hodnotu tohto poistenia označujeme

$$A_{x\overline{n|}}^{\;\;\;1}$$

Hodnota výdavkov poisťovne v čase uzavretia poistnej zmluvy U je náhodná premenná, ktorá je funkciou času K_x:

$$U = g(K_x) = 0 \qquad \text{pre } K_x < n$$
$$= v^n \qquad \text{pre } K_x \geq n$$

kde v – diskontný faktor.

T.j. ak sa poistenec

- *dožije veku (x+n)* (s pravdepodobnosťou ${}_n p_x$), poisťovňa mu vyplatí súčasnú hodnotu poistnej sumy $1.v^n$
- *nedožije veku (x+n)* (s pravdepodobnosťou ${}_n q_x$), súčasná hodnota výplaty bude nulová.

Súčasná hodnota poistenia sa rovná strednej hodnote náhodnej premennej U:

$$A_{\overline{xn|}}^{\ 1} = E(U) = 0 \cdot {}_n q_x + v^n \cdot {}_n p_x = v^n \cdot {}_n p_x$$

Teda

$$A_{\overline{xn|}}^{\ 1} = v^n \cdot {}_n p_x \tag{1.8}$$

Pomocou (1.8) odvodíme vzťah pre **disperziu**:

$$D(U) = E(U^2) - E^2(U) = 0^2 \cdot {}_n q_x + (v^n)^2 \cdot {}_n p_x - (v^n \cdot {}_n p_x)^2 = v^{2n} \cdot {}_n p_x - v^{2n} \cdot ({}_n p_x)^2 =$$
$$= v^{2n} \cdot {}_n p_x (1 - {}_n p_x) = v^{2n} \cdot {}_n p_x \cdot {}_n q_x$$

Ak označíme symbolom ${}^2 A_{\overline{xn|}}^{\ 1}$ súčasnú hodnotu poistenia na dožitie s diskontným faktorom v^2, môžeme disperziu náhodnej premennej U vyjadriť ako

$$D(U) = (v^n)^2 \cdot {}_n p_x - (v^n \cdot {}_n p_x)^2 = {}^2 A_{\overline{xn|}}^{\ 1} - \left(A_{\overline{xn|}}^{\ 1}\right)^2 \tag{1.9}$$

Smerodajnú odchýlku (náhodnú odchýlku od očakávanej hodnoty), ktorá určuje **stredné riziko poistenia**, vypočítame zo vzťahu

$$\sigma = \sqrt{D(U)} = \sqrt{v^{2n} \cdot {}_n p_x \cdot {}_n q_x}$$

alebo

$$\sigma = \sqrt{{}^2 A_{\overline{xn|}}^{\ 1} - \left(A_{\overline{xn|}}^{\ 1}\right)^2} \tag{1.10}$$

1.1.2.2 Doživotné poistenie na úmrtie

Pri tomto type poistenia je poistnou udalosťou *smrť poisteného*. *Náhodnosť poistnej udalosti* nespočíva v tom, či smrť nastane, ale kedy nastane.

Osoba vo veku x sa poistí tak, že ak zomrie, poisťovňa zaplatí na konci roka 1 p.j. jej dedičom.

T.j. ak poistenec zomrie

- *na začiatku poistenia*, poisťovňa vyplatí pozostalým na konci roka 1 p.j., ktorej súčasná hodnota je $1.v$,
- *v prvom roku poistenia*, poisťovňa vyplatí na konci roka 1 p.j., jej súčasná hodnota je $1.v^2$,
- *v n-tom roku poistenia*, súčasná hodnota platby bude $1.v^{n+1}$.

Súčasnú hodnotu doživotného poistenia na úmrtie označujeme

$$A_x$$

Z uvedeného vyplýva, že náhodná premenná U bude v tomto prípade daná vzťahom

$$U = g(K_x) = v^{K_x+1}$$

Súčasnú hodnotu poistenia vypočítame opäť ako strednú hodnotu premennej U :

$$A_x = E(U) = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}.P(K_x = t) = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}.{}_t p_x.q_{x+t} \qquad (1.11)$$

Pre **disperziu** náhodnej premennej U platí

$$D(U) = E(U^2) - E^2(U) = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{2(t+1)}.P(K_x = t) - E^2(U) = {}^2A_x - (A_x)^2 \qquad (1.12)$$

kde ${}^2A_x$ je súčasná hodnota doživotného poistenia na úmrtie s diskontným faktorom v^2.

Stredné riziko poistenia

$$\sigma = \sqrt{D(U)} = \sqrt{{}^2A_x - (A_x)^2} \qquad (1.13)$$

1.1.2.3 Zmiešané poistenie

Zmiešané poistenie je najčastejšou formou poistenia a predstavuje kombináciu dočasného poistenia na úmrtie a poistenia na dožitie.

X-ročná osoba poistí tak, že ak zomrie do veku (x+n), bude jej dedičom vyplatená 1 p.j. a ak sa dožije veku (x+n), bude 1 p.j. vyplatená jej.

Súčasnú hodnotu zmiešaného poistenia označujeme

$$A_{x\overline{n|}}$$

Vypočítame ju ako strednú hodnotu náhodnej premennej

$$U = g(K_x) = v^{K_x+1} \quad \text{pre } K_x < n$$
$$= v^n \quad \text{pre } K_x \geq n$$

Je teda zrejmé, že **súčasná hodnota** zmiešaného poistenia sa rovná súčtu *súčasnej hodnoty poistenia na úmrtie na n rokov* (ozn. $A^1_{x\overline{n|}}$) a *súčasnej hodnoty poistenia na dožitie* (ozn. $A_{x\overline{n|}}^{\;\;1}$).

Teda

$$A_{x\overline{n|}} = A^1_{x\overline{n|}} + A_{x\overline{n|}}^{\;\;1} \tag{1.14}$$

Potom

$$E(U) = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}.P(K_x = t) + \sum_{t=n}^{\infty} v^n.P(K_x = t) = A^1_{x\overline{n|}} + v^n \sum_{t=n}^{\infty} P(K_x = t) =$$
$$= A^1_{x\overline{n|}} + v^n.{}_n p_x = A^1_{x\overline{n|}} + A_{x\overline{n|}}^{\;\;1} = A_{x\overline{n|}}$$

Označme

$$A^1_{x\overline{n|}} = E(U_1)$$

$A_{x\overline{n|}}^{\;\;1} = E(U_2)$, pričom $U = U_1 + U_2$ a U_1, U_2 sú závislé náhodné premenné.

Pre **disperziu** U platí

$$D(U) = D(U_1) + D(U_2) + 2.\text{cov}(U_1, U_2) \tag{1.15}$$

kde kovariancia je definovaná vzťahom

$$\text{cov}(U_1, U_2) = E(U_1.U_2) - E(U_1).E(U_2).$$

Keďže

$$U_1.U_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cov}(U_1, U_2) = -E(U_1).E(U_2)$$

Potom

$$D(U) = D(U_1) + D(U_2) + 2.\operatorname{cov}(U_1, U_2) = D(U_1) + D(U_2) - 2.E(U_1).E(U_2) =$$
$$= {}^2A^{1}_{x\overline{n}|} - \left(A^{1}_{x\overline{n}|}\right)^2 + v^{2n}.{}_n p_x.{}_n q_x - 2.v^n.{}_n p_x.A^{1}_{x\overline{n}|}$$

Po úprave dostaneme

$$D(U) = {}^2A^{1}_{x\overline{n}|} - \left(A^{1}_{x\overline{n}|}\right)^2 + v^n.{}_n p_x \left(v^n.{}_n q_x - 2A^{1}_{x\overline{n}|}\right) \tag{1.16}$$

Stredné riziko poistenia vyjadríme ako

$$\sigma = \sqrt{D(U)} = \sqrt{{}^2A^{1}_{x\overline{n}|} - \left(A^{1}_{x\overline{n}|}\right)^2 + v^n.{}_n p_x \left(v^n.{}_n q_x - 2A^{1}_{x\overline{n}|}\right)} \tag{1.17}$$

1.1.2.4 Poistenie dôchodkov

V nasledujúcej časti uvedieme odvodenie jednorázového nettopoistného pre **dočasný predlehotný dôchodok**. Pri tomto type poistenia bude x – *ročná osoba dostávať každoročne na začiatku roka (predlehotne) 1 p.j., pokiaľ bude nažive, najviac však n rokov.*

Súčasnú hodnotu označujeme

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|}$$

Rovnako ako v predchádzajúcich typoch poistenia sa bude rovnať strednej hodnote náhodnej premennej U, ktorá je v tomto prípade definovaná ako

$$U = g(K_x) = \ddot{a}_{\overline{\min(K_x+1,n)}|}$$

Z finančnej matematiky vieme, že platí

$$\ddot{a}_{\overline{t}|} = 1 + v^t + \ldots.. + v^{t-1} = \frac{1-v^t}{1-v} = \frac{1-v^t}{d} \tag{1.18}$$

kde $d = 1 - v$ je diskontná miera.

Použitím vzťahu (1.18) dostaneme

$$E(U) = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}.P(K_x = t) + \sum_{t=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|}.P(K_x = t) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1-v^{t+1}}{d}.P(K_x = t) + \sum_{t=n}^{\infty} \frac{1-v^n}{d}.P(K_x = t) =$$
$$= \frac{1}{d}\left[\sum_{t=0}^{n-1} P(K_x = t) + \sum_{t=n}^{\infty} P(K_x = t) - \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}.P(K_x = t) - v^n.\sum_{t=n}^{\infty} P(K_x = t)\right]$$

Platí

$$\sum_{t=0}^{n-1} P(K_x = t) + \sum_{t=n}^{\infty} P(K_x = t) = 1$$

$$\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}.P(K_x = t) + \sum_{t=n}^{\infty} v^{n}.P(K_x = t) = A_{x\overline{n|}}$$

kde $A_{x\overline{n|}}$ je súčasná hodnota zmiešaného poistenia.

Potom

$$E(U) = \frac{1}{d}\left[1 - A_{x\overline{n|}}\right] = \ddot{a}_{x\overline{n|}}$$

V poslednom kroku sme použili známy vzorec z poistnej matematiky, ktorý platí analogicky aj pre ďalšie typy poistenia. Jeho platnosť môžeme overiť napríklad pre *doživotný predlehotný dôchodok*, ktorého súčasnú hodnotu označujeme $\ddot{a}_x$:

$$\ddot{a}_x = E\left(\ddot{a}_{\overline{K_x+1|}}\right) = E\left(\frac{1 - v^{t+1}}{d}\right) = \frac{1 - E\left(v^{t+1}\right)}{d} = \frac{1 - A_x}{d}$$

Teda

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d} \tag{1.19}$$

Disperzia náhodnej premennej U bude mať tvar

$$D(U) = E(U^2) - E^2(U) = \sum_{t=0}^{n-1}\left(\ddot{a}_{\overline{t+1|}}\right)^2.P(K_x = t) + \sum_{t=n}^{\infty}\left(\ddot{a}_{\overline{n|}}\right)^2.P(K_x = t) - E^2(U)$$

T.j.

$$D(U) = {}^2\ddot{a}_{x\overline{n|}} - \left(\ddot{a}_{x\overline{n|}}\right)^2 \tag{1.20}$$

kde ${}^2\ddot{a}_{x\overline{n|}}$ je súčasná hodnota dočasného predlehotného dôchodku s diskontným faktorom v^2.

Poznámka:
Disperzia dôchodkov sa pre zložitosť zvyčajne vyjadruje pomocou poistenia na úmrtie.

Napr. pre *doživotný dôchodok* platí

$$D(U) = D\left(\ddot{a}_{\overline{K_x+1|}}\right) = D\left(\frac{1 - v^{t+1}}{d}\right) = \frac{1}{d^2} D\left(v^{t+1}\right) = \frac{1}{d^2}\left({}^2A_x - A_x^2\right)$$

Teda

$$D(U) = {}^2\ddot{a}_x - \left(\ddot{a}_x\right)^2 = \frac{1}{d^2}\left({}^2A_x - A_x^2\right) \tag{1.21}$$

Analogický vzťah dostaneme pre ďalšie poistné druhy.

Záver:

Odvodili sme vzťahy pre výpočet **jednorázového poistného** a **stredného rizika poistenia** niektorých typov životného poistenia.

V **tabuľke č.1** sú uvedené tvary náhodnej premennej U (t.j. výdavky poisťovne v čase uzavretia poistnej zmluvy), ich stredné hodnoty a disperzie aj ďalších poistných druhov v prípade *diskrétneho stochastického modelu*. Možno ich odvodiť podobným postupom (pozri [4], [3]).

.

Poznámka:

Ako sme už uviedli, *poistné bez nákladov poisťovne zaplatené pri uzavretí poistnej zmluvy nazývame* **jednorázové nettopoistné** alebo *súčasná hodnota poistenia*. Označujeme ho symbolom π, prípadne $\pi(.)$, kde v zátvorke špecifikujeme druh poistenia. Ak chceme zdôrazniť, že ide o x-ročnú osobu, používame symbol π_x.

Vieme, že platí $\pi = E(U)$, kde U je príslušná náhodná premenná vyjadrujúca hodnotu výdavkov poisťovne v čase uzavretia poistnej zmluvy.

Bežné nettopoistné označujeme P (resp. $P(.)$ alebo P_x). Pod týmto pojmom rozumieme *pravidelné predlehotné ročné splátky poistného, pričom neuvažujeme o nákladoch poisťovne.*

Bežné nettopoistné bude platené *m rokov,* $m \le n$, kde n je dĺžka trvania poistenia.

Vzťah medzi jednorázovým a bežným nettopoistným môžeme vyjadriť ako

$$P = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x\overline{m|}}} \tag{1.22}$$

Odvodenie tohto vzťahu je uvedené napríklad v práci [4].

Tabuľka 1.1 - Tvar náhodnej premennej U, jej stredná hodnota a disperzia pre jednotlivé typy poistenia v prípade diskrétneho stochastického modelu.

	Typ poistenia	U	E(U)	D(U)
1.	*Poistenie na dožitie*	0 ak $K_x < n$ v^n ak $K_x \geq n$	$A_{x\overline{n\rvert}}^{\;\;1}$	${}^2A_{x\overline{n\rvert}}^{\;\;1} - \left(A_{x\overline{n\rvert}}^{\;\;1}\right)^2$
2.	*Doživotné poistenie na úmrtie*	v^{K_x+1}	A_x	${}^2A_x - (A_x)^2$
3.	*Dočasné poistenie na úmrtie*	v^{K_x+1} ak $K_x < n$ 0 ak $K_x \geq n$	$A^1_{x\overline{n\rvert}}$	${}^2A^1_{x\overline{n\rvert}} - \left(A^1_{x\overline{n\rvert}}\right)^2$
4.	*Doživotné poistenie na úmrtie odložené o k rokov*	0 ak $K_x < k$ v^{K_x+1} ak $K_x \geq k$	${}_k\vert A_x$	${}^2_k\vert A_x - ({}_k\vert A_x)^2$
5.	*Dočasné poistenie na úmrtie odložené o k rokov*	v^{K_x+1} ak $K_x \in \{k, k+1, \ldots, k+n-1\}$ 0 ak $K_x \notin \{k, k+1, \ldots, k+n-1\}$	${}_k\vert A^1_{x\overline{n\rvert}}$	${}^2_k\vert A^1_{x\overline{n\rvert}} - \left({}_k\vert A^1_{x\overline{n\rvert}}\right)^2$
6.	*Zmiešané poistenie*	v^{K_x+1} ak $K_x < n$ v^n ak $K_x \geq n$	$A_{x\overline{n\rvert}}$	${}^2A^1_{x\overline{n\rvert}} - \left(A^1_{x\overline{n\rvert}}\right)^2 +$ $+ v^n \cdot {}_np_x \left(v^n \cdot {}_nq_x - 2A^1_{x\overline{n\rvert}}\right.$
7.	*Doživotný predlehotný dôchodok*	$\ddot{a}_{\overline{K_x+1\rvert}}$	$\ddot{a}_x$	$\frac{1}{d^2}\left[{}^2A_x - (A_x)^2\right]$
8.	*Doživotný polehotný dôchodok*	$a_{\overline{K_x\rvert}}$	a_x	$\frac{1}{d^2}\left[{}^2A_x - (A_x)^2\right]$
9.	*Dočasný predlehotný dôchodok*	$\ddot{a}_{\overline{\min\{K_x+1,n\}\rvert}}$	$\ddot{a}_{x\overline{n\rvert}}$	$\frac{1}{d^2}\left[{}^2A_{x\overline{n\rvert}} - \left(A_{x\overline{n\rvert}}\right)^2\right]$
10.	*Dočasný polehotný dôchodok*	$a_{\overline{\min\{K_x,n\}\rvert}}$	$a_{x\overline{n\rvert}}$	$\frac{1}{d^2}\left[{}^2A_{x,\overline{n+1\rvert}} - \left(A_{x,\overline{n+1\rvert}}\right)^2\right]$
11.	*Doživotný predlehotný dôchodok odložený o k rokov*	0 ak $K_x < k$ $\ddot{a}_{\overline{K_x+1\rvert}}$ ak $K_x \geq k$	${}_k\vert\ddot{a}_x$	$\frac{1}{d^2}\left[{}^2{}_k\vert A_x - ({}_k\vert A_x)^2\right]$
12.	*Dočasný predlehotný dôchodok odložený o k rokov*	0 ak $K_x < k$ $\ddot{a}_{\overline{\min\{K_x+1,n\}\rvert}}$ ak $K_x \geq k$	${}_k\vert\ddot{a}_{x\overline{n\rvert}}$	$\frac{1}{d^2}\left[{}^2_k\vert A_{x\overline{n\rvert}} - \left({}_k\vert A_{x\overline{n\rvert}}\right)^2\right]$

1.2 SPOJITÝ MODEL

V nasledujúcej podkapitole uvedieme *spojitý stochastický model*, jeho predpoklady, základné definície a odvodíme podobne ako v diskrétnom stochastickom modeli vzťahy pre **jednorázové nettopoistné**.

1.2.1 Predpoklady a základné pojmy

Ako sme už spomenuli, predpoklady v diskrétnom modeli značne zjednodušujú skutočnosť.

Ak budeme v spojitom modeli pracovať s náhodnou premennou T_x, odstránime predpoklady *(1), (2)* uvedené v diskrétnom modeli.

V spojitom modeli sa *poistná suma bude vyplácať okamžite po nastatí poistnej udalosti*, čím sa odstráni predpoklad *(3)*.

Predpoklad *(4)* v diskrétnom modeli odstránime, ak *funkciu* l_x (vyjadrujúcu počet osôb dožívajúcich sa veku x) budeme považovať za *spojitú a diferencovateľnú na intervale* $\langle 0, \infty)$.

Preto definujeme **intenzitu úmrtnosti** osoby vo veku x (ozn. μ_x):

$$\mu_x = \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_h q_x}{h} \tag{1.23}$$

kde

${}_h q_x$ - pravdepodobnosť, že x - ročná osoba sa nedožije veku (x+h).

Uvedený vzťah môžeme upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$\mu_x = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \frac{l_x - l_{x+h}}{l_x} = -\frac{1}{l_x} \lim_{h \to 0^+} \frac{l_{x+h} - l_x}{h} = -\frac{1}{l_x} \frac{d(l_x)}{dx}$$

Dostali sme ďalšie možnosti vyjadrenia intenzity úmrtnosti:

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{d(l_x)}{dx} \tag{1.24}$$

alebo

$$\mu_x = -\frac{d(\ln l_x)}{dx} \tag{1.25}$$

V spojitom modeli použijeme **spojité úrokovanie**. Z finančnej matematiky vieme, že:

- *intenzita úrokovania* $\delta = \ln(1+i)$
- *diskontný faktor* $v = e^{-\delta} \quad \Rightarrow \quad v^t = e^{-t\delta}$

Pomocou vzorcov (1.1) a (1.2) odvodíme vzťah pre *hustotu pravdepodobnosti* náhodnej premennej T_x:

$$f_x(t) = \frac{dF_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left({}_t q_x\right) = \frac{d}{dt}\left(1 - {}_t p_x\right) = \frac{d}{dt}\left(-{}_t p_x\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{l_{x+t}}{l_x}\right) = -\frac{1}{l_x}\frac{d\left(l_{x+t}\right)}{dt}$$

Zo vzťahu (1.24) vieme, že pre intenzitu úmrtnosti (x+t)-ročnej osoby platí:

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{l_{x+t}}\frac{d\left(l_{x+t}\right)}{dt}$$

odkiaľ

$$\frac{d\left(l_{x+t}\right)}{dt} = -\mu_{x+t}.l_{x+t}\,.$$

Po dosadení

$$f_x(t) = \frac{1}{l_x}\mu_{x+t}.l_{x+t} = {}_t p_x.\mu_{x+t}$$

Teda **hustotu pravdepodobnosti** môžeme vyjadriť v tvare

$$f_x(t) = \frac{d}{dt}\left(-{}_t p_x\right) = {}_t p_x.\mu_{x+t} \tag{1.26}$$

Pre **distribučnú funkciu** náhodnej premennej T_x potom platí:

$$F_x(t) = \int_0^t f_x(s)ds = \int_0^t {}_s p_x.\mu_{x+s}ds = {}_t q_x \tag{1.27}$$

Označme **strednú hodnotu budúcej dĺžky života** $E(T_x)$ symbolom $\overset{\circ}{e}_x$. Použitím *metódy per partes* dostaneme

$$\overset{\circ}{e}_x = E(T_x) = \int_0^\infty t.f_x(t)dt = \int_0^\infty t.{}_t p_x.\mu_{x+t}dt = \int_0^\infty t\frac{d\left(-{}_t p_x\right)}{dt}dt = \begin{vmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = \dfrac{d\left(-{}_t p_x\right)}{dt} & v = -{}_t p_x \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[-t.{}_t p_x\right]_0^z + \int_0^\infty {}_t p_x dt = 0 + \int_0^\infty {}_t p_x dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt$$

Teda

$$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt \tag{1.28}$$

Disperzia budúcej dĺžky života $D(T_x)$ bude mať tvar:

$$D(T_x) = E(T_x^2) - E^2(T_x) = \int_0^\infty t^2 . f_x(t)dt - \left(\overset{\circ}{e}_x\right)^2 = \int_0^\infty t^2 ._t p_x .\mu_{x+t} dt - \left(\overset{\circ}{e}_x\right)^2$$

Použitím *metódy per partes* a po úprave dostaneme

$$D(T_x) = 2.\int_0^\infty t._t p_x dt - \left(\int_0^\infty {}_t p_x dt\right)^2 \qquad (1.29)$$

1.2.2 Základné typy životného poistenia

V tejto časti odvodíme vzorce umožňujúce výpočet **jednorázového nettopoistného**, t.j. strednú hodnotu náhodnej premennej, ktorá vyjadruje výdavky poisťovne v čase uzavretia poistnej zmluvy. Podobne ako v diskrétnom modeli odvodíme aj **stredné riziko poistenia**.

1.2.2.1 Dočasné poistenie na úmrtie s výplatou dávky v čase smrti

Predpokladáme, že *poistná suma bude vyplatená okamžite po úmrtí poistenej osoby.*
Súčasnú hodnotu poistenia označujeme

$$\bar{A}^{1}_{x\overline{n|}}$$

Náhodná premenná U má v tomto prípade tvar

$U = g(T_x) = v^{T_x}$ pre $T_x \le n$

$= 0$ pre $T_x > n$

Súčasnú hodnotu poistenia vypočítame ako strednú hodnotu náhodnej premennej U, teda

$$\bar{A}^{1}_{x\overline{n|}} = E(U) = \int_0^n g(t).f_x(t)dt = \int_0^n v^t ._t p_x .\mu_{x+t} dt \qquad (1.30)$$

Pre **disperziu** platí

$$D(U) = E(U^2) - E^2(U) = \int_0^n v^{2t} ._t p_x .\mu_{x+t} dt - \left(\int_0^n v^t ._t p_x .\mu_{x+t} dt\right)^2$$

Teda

$$D(U) = {}^2\bar{A}^{1}_{x\overline{n|}} - \left(\bar{A}^{1}_{x\overline{n|}}\right)^2 \qquad (1.31)$$

pričom ${}^2\bar{A}^{1}_{x\overline{n|}}$ je súčasná hodnota dočasného poistenia na úmrtie s intenzitou úrokovania 2δ.

Stredné riziko poistenia vypočítame ako druhú odmocninu z disperzie, t.j.

$$\sigma = \sqrt{D(U)} = \sqrt{{}^{2}\bar{A}^{1}_{x\overline{n}|} - \left(\bar{A}^{1}_{x\overline{n}|}\right)^{2}} \tag{1.32}$$

Poznámka:
Podobne ako v diskrétnom modeli platí vzťah (odvodenie môžeme nájsť v práci [4]):

$$\bar{A}_x = 1 - \delta.\bar{a}_x \tag{1.33}$$

Analogické vyjadrenie dostaneme aj pre ostatné typy poistenia.

Poznámka:
V praxi sa poistenia na úmrtie s výplatou dávky v čase smrti *aproximujú diskrétnym poistením.*

1.2.2.2 Doživotný dôchodok vyplácaný spojite v priebehu roka

V *diskrétnom modeli* sme predpokladali, že poisťovňa vypláca dôchodok v diskrétnych časových okamihoch. V spojitom modeli ho však bude vyplácať *spojite počas celého roka*.

Súčasnú hodnotu doživotného dôchodku označujeme

$$\bar{a}_x$$

Hodnotu výdavkov poisťovne v čase uzavretia poistnej zmluvy definujeme pomocou náhodnej premennej U

$$U = g(T_x) = \bar{a}_{\overline{T_x}|} \qquad \text{pre } T_x \in \langle 0, \infty)$$

kde $\bar{a}_{\overline{t}|}$ je istý dôchodok vyplácaný spojite t rokov.

V spojitom modeli platí analogický vzťah k (1.18):

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = \int_0^t v^s ds = \int_0^t e^{-\delta s} ds = -\frac{1}{\delta}\left[e^{-\delta s}\right]_0^t = -\frac{1}{\delta}\left(e^{-\delta t} - 1\right) = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} = \frac{1 - v^t}{\delta} \tag{1.34}$$

Súčasnú hodnotu dôchodku vypočítame pomocou *metódy per partes*:

$$\bar{a}_x = E(U) = \int_0^\infty g(t).f_x(t)dt = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}.{}_t p_x.\mu_{x1t}\, dt = \int_0^\infty \frac{1 - v^t}{\delta}\, {}_t p_x.\mu_{x+t}\, dt = \begin{vmatrix} u = \dfrac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} & u' = e^{-\delta t} \\ v' = {}_t p_x \mu_{x+t} & v = -{}_t p_x \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{z \to \infty}\left[-{}_t p_x.\frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}\right]_0^z - \int_0^\infty e^{-\delta t}.(-{}_t p_x)dt = 0 - \int_0^\infty e^{-\delta t}.(-{}_t p_x)dt = \int_0^\infty v^t.{}_t p_x dt$$

Teda

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x dt \qquad (1.35)$$

Odvodenie vzťahu pre **disperziu** náhodnej premennej U môžeme nájsť v práci [4]. Výsledný tvar je

$$D(U) = E(U^2) - E^2(U) = \frac{2}{\delta}\left(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x\right) - \left(\bar{a}_x\right)^2 \qquad (1.36)$$

kde ${}^2\bar{a}_x$ je hodnota doživotného spojitého dôchodku s intenzitou úrokovania 2δ.

Potom **stredné riziko poistenia**

$$\sigma = \sqrt{D(U)} = \sqrt{\frac{2}{\delta}\left(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x\right) - \left(\bar{a}_x\right)^2} \qquad (1.37)$$

Poznámka:
V spojitom modeli môžeme podobne ako v diskrétnom vyjadriť vzťahy pre *disperzie dôchodkov* pomocou súčasnej hodnoty poistenia na úmrtie.
Napr. po dosadení vzorca (1.33) dostaneme:

$$D(U) = \frac{2}{\delta}\left(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x\right) - \left(\bar{a}_x\right)^2 = \frac{2}{\delta}\left[\frac{1-\bar{A}_x}{\delta} - \frac{1-{}^2\bar{A}_x}{2\delta}\right] - \frac{\left(1-\bar{A}_x\right)^2}{\delta^2}$$

Po úprave

$$D(U) = \frac{1}{\delta^2}\left[{}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2\right] \qquad (1.38)$$

1.2.2.3 Zmiešané poistenie s okamžitou výplatou dávky

Predpokladáme, že *poisťovňa vyplatí poistnú sumu okamžite po nastatí poistnej udalosti.*

Súčasnú hodnotu zmiešaného poistenia označujeme

$$\bar{A}_{x\overline{n|}}$$

Vypočítame ju ako strednú hodnotu náhodnej premennej

$$U = g(T_x) = v^{T_x} \qquad \text{pre } T_x \le n$$
$$= v^n \qquad \text{pre } T_x > n$$

Postupom uvedeným v diskrétnom modeli môžeme odvodiť analogický vzťah pre **disperziu** v spojitom modeli (pozri vzťahy (1.14), (1.15), (1.16)).

Dostaneme

$$D(U) = {}^2\bar{A}^{1}_{x\overline{n}|} - \left(\bar{A}^{1}_{x\overline{n}|}\right)^2 + v^n \cdot {}_n p_x \left(v^n \cdot {}_n q_x - 2\bar{A}^{1}_{x\overline{n}|}\right) \tag{1.39}$$

Stredné riziko poistenia potom vyjadríme ako

$$\sigma = \sqrt{D(U)} = \sqrt{{}^2\bar{A}^{1}_{x\overline{n}|} - \left(\bar{A}^{1}_{x\overline{n}|}\right)^2 + v^n \cdot {}_n p_x \left(v^n \cdot {}_n q_x - 2\bar{A}^{1}_{x\overline{n}|}\right)} \tag{1.40}$$

Záver:

V **tabuľke č.2** sú uvedené tvary náhodnej premennej U (t.j. výdavky poisťovne v čase uzavretia poistnej zmluvy), ich stredné hodnoty a disperzie ďalších poistných druhov v prípade *spojitého stochastického modelu*. Postup pri ich odvodzovaní je analogický (pozri [4] a [3]).

Poznámka:
Analogicky ako v diskrétnom modeli môžeme vypočítať **bežné nettopoistné** platené *m rokov*:

$$P = \frac{\bar{\pi}}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}}$$

kde $\bar{\pi}$ označuje súčasnú hodnotu (jednorázové nettopoistné) v spojitom modeli.

Ak uvažujeme o spojitom poistení platenom *spojite počas m rokov* (napr. týždenne), *bežné nettopoistné* bude mať tvar:

$$\bar{P} = \frac{\bar{\pi}}{\bar{a}_{x\overline{m}|}}$$

Tabuľka 1.2 - Tvar náhodnej premennej U, jej stredná hodnota a disperzia pre jednotlivé typy poistenia v prípade spojitého stochastického modelu.

	Typ poistenia	U	E(U)	D(U)
1.	*Doživotné poistenie na úmrtie*	v^{T_x}	$\bar{A}_x$	${}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2$
2.	*Dočasné poistenie na úmrtie*	v^{T_x} ak $T_x \leq n$ 0 ak $T_x > n$	$\bar{A}^1_{x\overline{n}\rvert}$	${}^2\bar{A}^1_{x\overline{n}\rvert} - \left(\bar{A}^1_{x\overline{n}\rvert}\right)^2$
3.	*Doživotné poistenie na úmrtie odložené o k rokov*	v^{T_x} ak $T_x \in \langle k, \infty)$ 0 ak $T_x \in (0, k)$	${}_{k\rvert}\bar{A}_x$	${}^2_{k\rvert}\bar{A}_x - \left({}_{k\rvert}\bar{A}_x\right)^2$
4.	*Dočasné poistenie na úmrtie odložené o k rokov*	v^{T_x} ak $T_x \in \langle k, n+k)$ 0 ak $T_x \notin \langle k, n+k)$	${}_{k\rvert}\bar{A}^1_{x\overline{n}\rvert}$	${}^2_{k\rvert}\bar{A}^1_{x\overline{n}\rvert} - \left({}_{k\rvert}\bar{A}^1_{x\overline{n}\rvert}\right)^2$
5.	*Zmiešané poistenie*	v^{T_x} ak $T_x \leq n$ v^n ak $T_x > n$	$\bar{A}_{x\overline{n}\rvert}$	${}^2\bar{A}^1_{x\overline{n}\rvert} - \left(\bar{A}^1_{x\overline{n}\rvert}\right)^2 +$ $+ v^n \cdot {}_np_x \left(v^n \cdot {}_nq_x - 2\bar{A}^1_{x\overline{n}\rvert}\right)$
6.	*Doživotný dôchodok*	$\bar{a}_{\overline{T_x}\rvert}$	$\bar{a}_x$	$\frac{1}{\delta^2}\left[{}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2\right]$
7.	*Dočasný dôchodok*	$\bar{a}_{\overline{T_x}\rvert}$ ak $T_x \leq n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rvert}$ ak $T_x > n$	$\bar{a}_{x\overline{n}\rvert}$	$\frac{1}{\delta^2}\left[{}^2\bar{A}_{x\overline{n}\rvert} - \left(\bar{A}_{x\overline{n}\rvert}\right)^2\right]$
8.	*Doživotný dôchodok odložený o k rokov*	$\bar{a}_{\overline{t}\rvert}$	${}_{k\rvert}\bar{a}_x$	$\frac{1}{\delta^2}\left[{}^2_{k\rvert}\bar{A}_x - \left({}_{k\rvert}\bar{A}_x\right)^2\right]$
9.	*Dočasný dôchodok odložený o k rokov*	$\bar{a}_{\overline{T_x}\rvert}$ ak $T_x \in \langle k, n+k)$ $\bar{a}_{\overline{n+k}\rvert}$ ak $T_x \in \langle n+k, \infty)$	${}_{k\rvert}\bar{a}_{x\overline{n}\rvert}$	$\frac{1}{\delta^2}\left[{}^2_{k\rvert}\bar{A}_{x\overline{n}\rvert} - \left({}_{k\rvert}\bar{A}_{x\overline{n}\rvert}\right)^2\right]$

2. VALUÁCIA V ŽIVOTNOM POISTENÍ SO STOCHASTICKÝMI ÚROKOVÝMI MIERAMI

Pod pojmom **valuácia** rozumieme *proces výpočtu poistných rezerv*. V tejto kapitole sa budeme zaoberať valuáciou v prípade *konštantných* a najmä *stochastických úrokových mier*. Na záver aplikujeme metódu výpočtu poistných rezerv na konkrétny model s danými parametrami. Bližšie sa s touto problematikou môžeme oboznámiť napr. v práci [1].

2.1. ZÁKLADNÉ POJMY

Uvedieme najskôr definície niektorých pojmov, ktorých znalosť je potrebná k pochopeniu ďalších častí tohto textu.

Medzi základné princípy poistenia osôb patrí tzv. **princíp ekvivalencie**. Predpokladá, že *pri uzatváraní súboru poistných zmlúv rovnakého typu musia sa v rámci tohto súboru rovnať všetky príjmy poisťovne s jej výdajmi, keď príjmy a výdaje sú diskontované k spoločnej časovej základni.*

Pod pojmom **poistná rezerva** rozumieme *čiastku, ktorú musí poisťovňa nahromadiť z prebytkov a úrokov v prvých rokoch poistenia tak, aby mohla plniť svoje záväzky aj v budúcnosti.*

Poistné rezervy rozdeľujeme na
- **nettorezervy** (náklady poisťovne neberieme do úvahy)
- **bruttorezervy** (náklady poisťovne berieme do úvahy)

Rezervy je možné vyjadriť dvomi spôsobmi:
- *retrospektívne*
- *prospektívne*

Retrospektívna nettorezerva = hodnota minulých príjmov poisťovne v i-tom roku poistenia mínus hodnota minulých výdavkov poisťovne v i-tom roku poistenia

Prospektívna nettorezerva = hodnota budúcich výdavkov poisťovne v i-tom roku poistenia mínus hodnota budúcich príjmov poisťovne v i-tom roku poistenia

V ďalšom kroku uvedieme definície filtrácie, podmienenej strednej hodnoty a martingalu, pretože tieto pojmy sú kľúčové pri hľadaní metód na výpočet poistných rezerv v prípade stochastických úrokových mier.

Filtrácia *na priestore* (Ω, S) *je systém* $\{F_t\}_{t\geq 0}$ σ *- algebier* $F_t \subset S$ *takých, že*

$ak \;\; 0 \leq s < t \;\; \Rightarrow \;\; F_s \subset F_t$

Nech je daný pravdepodobnostný priestor (Ω, S, P), $X : \Omega \to R$ *je náhodná premenná taká, že* $E(|X|) < \infty$.

Potom **podmienenou strednou hodnotou** *nazývame takú funkciu* $E(X \mid H) : \Omega \to R$, *pre ktorú platí*

- $E(X \mid H)$ *je H - merateľná*
- $\int_G E(X \mid H) dP = \int_G X dP \;, \;\; \forall G \in H$

kde $H = \{\emptyset, \Omega\}$.

Vlastnosti podmienenej strednej hodnoty:

a) $E(aX + bY \mid H) = aE(X \mid H) + bE(Y \mid H)$ *, kde* $a, b \in R$
b) $E(E(X \mid H)) = E(X)$
c) $E(X \mid H) = X$ *, ak X je H-merateľné*
d) $E(Y.X \mid H) = Y.E(X \mid H)$*, ak Y je H-merateľné*

Pod pojmom **stochastický proces** rozumieme *množinu náhodných premenných* $\{X_t\}_{t\in T}$ *na pravdepodobnostnom priestore* (Ω, S, P). T *sa nazýva indexová množina,* $\mathrm{T} = \langle 0, \infty)$.

Hovoríme, že stochastický proces $\{X_t\}_{t\in T}$ *je* **adaptovaný** *na systém* $\{S_t\}_{t\in \mathrm{T}}$, *ak*

$\forall t \in \mathrm{T} \; : \; X_t$ *je* S_t *- merateľné*

$S_t = \sigma(X_1, \ldots.., X_t)$

Martingal, ktorý predstavuje špeciálnu triedu stochastického procesu, definujeme nasledujúcim spôsobom:
Stochastický proces $\{X_t\}_{t\in \mathrm{T}}$ *adaptovaný na systém* $\{S_t\}_{t\in \mathrm{T}}$ *sa nazýva* **martingal**, *ak*

1) $E(|X_t|) < \infty, \; \forall t \in \mathrm{T}$
2) $ak \;\; s \leq t : \; E(X_t \mid S_s) = X_s$

Budeme uvažovať o *dočasnom poistení na n rokov*. Každá poistná zmluva predstavuje **tok náhodných platieb** v časových okamihoch 0,1,...,n.

Tieto platby môžeme zapísať pomocou *vektora* $X = (X_0, X_1, \ldots.., X_n)$.

Jednotlivé zložky vektora sa interpretujú nasledovne:

X_k = poistná dávka poistencovi v $(k-1,k]$ - poistné v k + náklady poisťovne v $(k-1,k]$

$X_k > 0$ predstavuje teda kladnú finančnú sumu, ktorú poisťovňa vyplatila.

Poznámka:
Predpokladáme, že platby sa uskutočňujú na *konci časového intervalu* $(k-1,k]$.

2.2 VALUÁCIA V PRÍPADE KONŠTANTNÝCH ÚROKOVÝCH MIER

V nasledujúcej podkapitole uvedieme metódu na výpočet poistných rezerv za predpokladu konštantných úrokových mier pre čas t = 0 a t > 0.

2.2.1 Valuácia v čase t = 0.

Nech v je štandardný diskontný faktor , t.j. $v = \frac{1}{1+i}$. Definujme **valuáciu** vektora platieb **v čase t = 0**:

$$Val[X] = E\left[\sum_{k=0}^{n} v^k . X_k\right] \tag{2.1}$$

Príjmy a výdavky poisťovne diskontované k rovnakej časovej základni musia byť podľa princípu ekvivalencie rovnaké.

Z toho vyplýva

$$Val[X] = 0 \tag{2.2}$$

2.2.2 Valuácia v čase t > 0.

Ku každej poistke môžeme priradiť **filtráciu**

$$F_0 \subset F_1 \subset ..... \subset F_{t-1} \subset F_t \subset ..... \subset F_n$$

kde F_t predstavuje „ informáciu“ dostupnú v čase t, matematicky hovoríme o rastúcej postupnosti σ - algebier.

$$F_t = \sigma(X_0, X_1, ..., X_t)$$

Myšlienku „ X_k *je známe v čase* k “ môžeme teda preložiť do matematického jazyka ako „ X_k *je* F_k *- merateľné* “.

Valuáciu v čase t > 0 vypočítame potom nasledujúcim spôsobom:

$$Val[X \mid F_t] = E\left[\sum_{k=0}^{n} v^{k-t}.X_k \mid F_t\right] = E\left[\sum_{k=0}^{t} v^{k-t}.X_k \mid F_t\right] + E\left[\sum_{k=t+1}^{n} v^{k-t}.X_k \mid F_t\right] = \\ = \sum_{k=0}^{t} r^{t-k}.X_k + E\left[\sum_{k=t+1}^{n} v^{k-t}.X_k \mid F_t\right] \qquad (2.3)$$

kde úrokovací faktor $r = \frac{1}{v}$.

Označme

retrospektívnu rezervu $$A[X \mid F_t] = \sum_{k=0}^{t} r^{t-k}.X_k \qquad (2.4)$$

prospektívnu rezervu $$R[X \mid F_t] = E\left[\sum_{k=t+1}^{n} v^{k-t}.X_k \mid F_t\right] \qquad (2.5)$$

Potom môžeme vyjadriť valuáciu v čase t > 0 ako

$$Val[X \mid F_t] = A[X \mid F_t] + R[X \mid F_t] \qquad (2.6)$$

Z pohľadu očakávaní (t.j. v priemere) platí

$$-A[X \mid F_t] = R[X \mid F_t]$$

2.3 VALUÁCIA V PRÍPADE STOCHASTICKÝCH ÚROKOVÝCH MIER

Hľadajme odpoveď na otázku: *„ Aká je súčasná hodnota 1 peňažnej jednotky splatnej o jeden rok? “*

Označme túto *súčasnú hodnotu x.* Existujú dva rôzne prístupy:

<u>*Riešenie A (diskontný prístup):*</u>

- ak by bol úrok i *známy*, potom $x = \frac{1}{1+i}$
- ak je úrok *i stochastický*, potom zoberieme strednú hodnotu, teda $x = E\left[\frac{1}{1+i}\right]$

Riešenie B (akumulačný prístup):

- ak by bol úrok i *známy*, x by vzrástlo po roku na hodnotu $x(1+i)$
- ak je úrok i *stochastický,* x vzrastie na hodnotu $x.E[1+i]$, ktorá by sa mala rovnať 1.

Odtiaľ

$$x = \frac{1}{E[1+i]}$$

Keďže výsledky nie sú rovnaké, otázne ostáva, ktoré z riešení je s*právne* - A alebo B?

2.3.1 Valuácia v čase t = 0

V prípade *fixných (konštantných) úrokových mier* sme použili označenie pre valuáciu $Val[X]$, v prípade *stochastických* ju ozn. $Q[X]$.

Predpokladajme, že $Q[X]$ bude *kladný spojitý lineárny funkcionál.*

Nech $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n) \in L^2_{n+1}$ (Hilbertov priestor), t.j. že

$$E\left[\sum_{k=0}^{n} X_k^2\right] < \infty$$

V Hilbertovom priestore je *skalárny súčin* definovaný ako:

$$(X, Y) = E\left[\sum_{k=0}^{n} X_k . Y_k\right]$$

Keďže ľubovoľný spojitý lineárny funkcionál môže byť vyjadrený ako skalárny súčin, platí nasledujúce tvrdenie:

Daný je vektor $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L^2_{n+1}$ taký, že

$$Q[X] = E\left[\sum_{k=0}^{n} \varphi_k . X_k\right] \qquad (2.7)$$

a keďže predpokladáme, že $Q[X]$ je kladný funkcionál, musí byť $\varphi_k > 0$ s pravdepodobnosťou 1 pre všetky k = 1,2,.....,n ($\varphi_0 \equiv 1$, v čase t = 0 sa náhodná premenná X_0 a φ_0 degenerujú na konštanty).

Poznámky:

- $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$ nazveme tzv. *technické premenné* a $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ tzv. *finančné premenné* (špeciálny prípad: $\varphi_k = v^k$)
- φ_k (má úlohu ako v^k vo $Val[X]$) sa nazýva *stochastická diskontná funkcia.*
- φ sa nazýva *stochastický diskontný vektor.*

2.3.2. Valuácia v čase t > 0

V tomto prípade označíme valuáciu symbolom Q[X|F_t], kde

$$F_t = \sigma(X_0, \varphi_{0,} X_1, \varphi_1, ..., X_t, \varphi_t)$$

Výraz $Q(X \mid F_t)$ označuje *akumulovanú stratu* poisťovne do času t vrátane.

Pre t > 0 dostaneme:

$$\begin{aligned} Q[X \mid F_t] &= \frac{1}{\varphi_t}.E\left[\sum_{k=0}^{n} \varphi_k.X_k \mid F_t\right] = E\left[\sum_{k=0}^{t} \frac{\varphi_k}{\varphi_t}.X_k \mid F_t\right] + E\left[\sum_{k=t+1}^{n} \frac{\varphi_k}{\varphi_t}.X_k \mid F_t\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{t} \frac{\varphi_k}{\varphi_t}.X_k + E\left[\sum_{k=t+1}^{n} \frac{\varphi_k}{\varphi_t}.X_k \mid F_t\right] = A[X \mid F_t] + R[X \mid F_t] \end{aligned} \tag{2.8}$$

= *akumulované platby do a v čase t* + *prospektívna rezerva*

2.4 PRINCÍPY MODELOVANIA

V nasledujúcej časti uvedieme základné princípy modelovania, odvodíme rekurzívny vzorec pre valuáciu a pomocou neho ukážeme, že výraz $(\varphi_t Q[X \mid F_t])_{t=0,1,2,.....,n}$ je martingal.

(a) Keďže všetky *stochastické modely úrokových mier* môžu byť opísané pomocou diskontného vektora $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, .., \varphi_n)$, modelovanie pozostáva z konštrukcie rozdelenia pravdepodobnosti φ.

(b) Z (a) môžeme odvodiť $Q[X]$ a stochastický proces $(Q[X \mid F_t])_{t \geq 0}$.

Je vhodné nahradiť premenné φ_k tzv. **ročnými premennými** Y_j. Definujeme $Y_0 \equiv 1$ a

$$\varphi_k = \prod_{j=1}^{k} Y_j \qquad \left(\varphi_0 = \prod_{j \in \emptyset} Y_j \equiv 1\right) \tag{2.9}$$

Všetky vzťahy obsahujúce premennú φ_k môžeme prepísať pomocou ročných premenných.

Potom

$$Q[X \mid F_t] = \sum_{k=0}^{t} \frac{1}{Y_{k+1}....Y_t} X_k + E\left[\sum_{k=t+1}^{n} Y_{t+1}Y_{t+2}....Y_k X_k \mid F_t\right] \tag{2.10}$$

Po vynásobení výrazu ročnou premennou Y_t dostaneme

$$Y_t.Q[X \mid F_t] = Y_t.\sum_{k=0}^{t} \frac{1}{Y_{k+1}....Y_t} X_k + Y_t.E\left[\sum_{k=t+1}^{n} Y_{t+1}Y_{t+2}....Y_k X_k \mid F_t\right]$$

$$Y_t.Q[X \mid F_t] = \sum_{k=0}^{t} \frac{1}{Y_{k+1}....Y_{t-1}} X_k + E\left[\sum_{k=t+1}^{n} Y_t Y_{t+1}....Y_k X_k \mid F_t \right]$$

$$Y_t.Q[X \mid F_t] = \sum_{k=0}^{t-1} \frac{1}{Y_{k+1}....Y_{t-1}} X_k + Y_t X_t + E\left[\sum_{k=t}^{n} Y_t Y_{t+1}....Y_k X_k \mid F_t \right] - E(Y_t X_t \mid F_t)$$

Vypočítajme podmienenú strednú hodnotu

$$E[Y_t.Q[X \mid F_t] \mid F_{t-1}] = \sum_{k=0}^{t-1} \frac{1}{Y_{k+1}....Y_{t-1}} X_k + E(Y_t X_t \mid F_{t-1}) + E\left[\sum_{k=t}^{n} Y_t Y_{t+1}....Y_k X_k \mid F_{t-1} \right] - E(Y_t X_t \mid F_{t-1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{t-1} \frac{\varphi_k}{\varphi_t} X_k + E\left[\sum_{k=t}^{n} \frac{\varphi_k}{\varphi_t} X_k \mid F_{t-1} \right] = Q[X \mid F_{t-1}]$$

Odvodili sme *rekurzívny vzorec*

$$E[Y_t.Q[X \mid F_t] \mid F_{t-1}] = Q[X \mid F_{t-1}] \qquad (2.11)$$

Po vynásobení tohto výrazu premennou φ_{t-1} a využitím vzťahu $\varphi_t = \varphi_{t-1}.Y_t$ dostaneme:

$$E[\varphi_t.Q(X \mid F_t) \mid F_{t-1}] = \varphi_{t-1}.Q[X \mid F_{t-1}] \qquad (2.12)$$

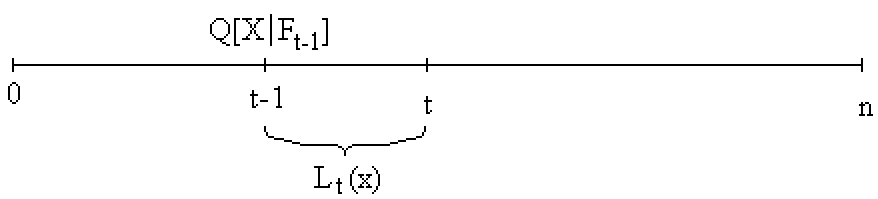
Výsledok nám hovorí, že: $(\varphi_t Q[X \mid F_t])_{t=0,1,2,.....,n}$ je **martingal**.

2.5 ROČNÉ STRATY

V nasledujúcej časti definujeme pojem ročných strát poisťovne a zameriame sa na ich rozklad na straty technické a finančné.

2.5.1 Základné pojmy

Stále predpokladáme, že platí princíp ekvivalencie, t.j. $Q[X] = 0$.



Obrázok 2.1 Ročné straty

Výraz

$$L_t(X) = Y_t.Q[X \mid F_t] - Q[X \mid F_{t-1}] \tag{2.13}$$

označuje tzv. **ročnú stratu poisťovne** v období $(t-1, t]$ (diskontovanú k začiatku časového intervalu).

Zaujíma nás *rozdelenie ročných strát* na straty **technické** (spôsobené technickými premennými X_k) a straty **finančné** (spôsobené finančnými premennými φ_k). Pre poisťovňu má význam poznať toto rozdelenie, pretože každú zo strát bude financovať z iných zdrojov.

Pomocou vzťahu (2.8) môžeme ročnú stratu v období $(t-1, t]$ upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} L_t(X) &= Y_t.[A(X \mid F_t) + R(X \mid F_t)] - [A(X \mid F_{t-1}) + R(X \mid F_{t-1})] = \\ &= Y_t.A(X \mid F_t) - A(X \mid F_{t-1}) + Y_t.R(X \mid F_t) - R(X \mid F_{t-1}) \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned} Y_t A(X \mid F_t) - A(X \mid F_{t-1}) &= Y_t \sum_{j=0}^{t} \frac{\varphi_j}{\varphi_t} X_j - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{\varphi_j}{\varphi_{t-1}} X_j = Y_t \sum_{j=0}^{t} \frac{Y_1 \ldots Y_j}{Y_1 \ldots Y_t} X_j - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{Y_1 \ldots Y_j}{Y_1 \ldots Y_{t-1}} X_j = \\ &= \sum_{j=0}^{t} \frac{Y_1 \ldots Y_j}{Y_1 \ldots Y_{t-1}} X_j - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{Y_1 \ldots Y_j}{Y_1 \ldots Y_{t-1}} X_j = Y_t X_t + \sum_{j=0}^{t-1} \frac{Y_1 \ldots Y_j}{Y_1 \ldots Y_{t-1}} X_j - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{Y_1 \ldots Y_j}{Y_1 \ldots Y_{t-1}} X_j = \\ &= Y_t X_t \end{aligned}$$

Potom

$$L_t(X) = Y_t X_t + Y_t R(X \mid F_t) - R(X \mid F_{t-1})$$

a po úprave

$$L_t(X) = Y_t [X_t + R(X \mid F_t)] - R(X \mid F_{t-1}) \tag{2.14}$$

Označme **súčet diskontovaných ročných strát**

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k-1} L_k(X) \tag{2.15}$$

Pomocou vzťahov (2.14) a (2.15) môžeme rozpísať

$$\begin{aligned} \varphi_0.L_1(X) &= Y_1 [X_1 + R(X \mid F_1)] - R(X \mid F_0) \\ \varphi_1.L_2(X) &= Y_1 Y_2 [X_2 + R(X \mid F_2)] - Y_1 R(X \mid F_1) \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1}.L_n(X) &= Y_1 Y_2 \ldots Y_n [X_n + R(X \mid F_n)] - Y_1 Y_2 \ldots Y_{n-1} R(X \mid F_{n-1}) \end{aligned}$$

Z definície finančných premenných vieme, že $\varphi_n = Y_1 Y_2 .....Y_n$.
Potom

$$M(X) = \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + ...+ \varphi_n X_n + \varphi_n R(X \mid F_n) - R(X \mid F_0)$$

Pripočítajme a odpočítajme výraz $\varphi_0 X_0$ (X_0 = konštanta, $\varphi_0 \equiv 1$):

$$M(X) = \varphi_0 X_0 + \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + ...+ \varphi_n X_n + \varphi_n R(X \mid F_n) - R(X \mid F_0) - \varphi_0 X_0$$

$$M(X) = \varphi_n \sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi_j}{\varphi_n} X_j + \varphi_n R(X \mid F_n) - R(X \mid F_0) - \varphi_0 X_0 =$$

$$= \varphi_n \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi_j}{\varphi_n} X_j + R(X \mid F_n) \right] - R(X \mid F_0) - \varphi_0 X_0$$

Z definície prospektívnej rezervy v čase t = 0 vieme, že

$$R(X \mid F_0) - \varphi_0 X_0 = 0$$

a keďže platí vzťah (2.8), dostaneme

$$M(X) = \varphi_n Q(X \mid F_n) \qquad (2.16)$$

Poznámka:
Uvedený vzťah sme odvodili pre n, ktoré označuje dĺžku trvania poistnej zmluvy. Pre *súčet diskontovaných ročných strát* $M_m(X)$, $m \le n$, platí analogický vzťah:

$$M_m(X) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_{k-1} . L_k(x) = \varphi_m . Q[X \mid F_m] \qquad (2.17)$$

Teda platí nasledujúce tvrdenie:

Súčet diskontovaných ročných strát $(M_m)_{m=1,2,.....}$ *je martingal.*

Z toho vyplýva tzv. **Hattendorfova veta,** ktorá tvrdí, že:
a) ročné straty sú nekorelované,
b) je možné vypočítať *disperziu:* $D[M_m(X)] = \sum_{k=1}^{m} D[\varphi_{k-1} . L_k(x)]$

2.5.2 Rozklad ročných strát

V nasledujúcej časti uvedieme výsledné vzťahy, ktoré nám umožnia vypočítať rozklad ročných strát na straty technické a finančné. Odvodenie týchto vzťahov môžeme nájsť v práci [1].

Použijeme jemnejšiu filtráciu

$$F_0 \subset G_1 \subset F_1 \subset G_2 \subset F_2 \subset G_3 \subset .....$$

kde

$$F_m = \sigma(X_0, X_1, ..., X_m; \varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_m)$$

F_m (podobne ako predtým) vyjadruje fakt, že v čase *m* sú všetky technické a finančné premenné známe do času *m* (vrátane *m*).

$$G_m = \sigma(X_0, X_1, ..., X_{m-1}; \varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_m)$$

G_m vyjadruje, že v čase *m* sú technické premenné známe len do času *m-1* (vrátane *m-1*), zatiaľ čo finančné premenné sú známe do času *m* (vrátane *m*).

Celkové ročné straty $L_m(X)$ predstavujú súčet *technických strát* $(LT)_m$ a *finančných strát* $(LF)_m$.

Teda

$$L_m(X) = (LT)_m + (LF)_m \tag{2.18}$$

pričom

$$(LT)_m = Y_m[X_m + R[X \mid F_m]] - Y_m R^+[X \mid G_m] \tag{2.19}$$

a

$$(LF)_m = Y_m R^+[X \mid G_m] - R[X \mid F_{m-1}] \tag{2.20}$$

Výraz $R^+[X \mid G_m]$ definujeme ako

$$R^+[X \mid G_m] = \frac{1}{\varphi_m} E\left[\sum_{k=m}^{n} \varphi_k X_k \mid G_m\right]$$

Označuje prospektívnu rezervu v čase *m* (vrátane platby v čase *m*).

2.6 EXPLICITNÝ MODEL NA VÝPOČET POISTNÝCH REZERV

V predchádzajúcich podkapitolách sme uviedli metódu, ktorá nám umožní numericky vyčísliť hodnotu poistných rezerv pre daný vektor platieb. Aplikujme ju teraz na konkrétny **model**, ktorý umožňuje explicitne vyjadriť všetky potrebné hodnoty a tým i poistné rezervy bez veľkého numerického úsilia. Formuláciu nasledujúceho a ďalších ukážkových modelov môžeme nájsť v práci [1].

Formulácia modelu:

Ročné premenné sú dané vzťahom

$$Y_k = \varepsilon(1 - Z_k) + \delta.Z_k$$

kde $0 < \varepsilon < \delta \leq 1$.
Ak označíme $\Delta = \delta - \varepsilon$, potom môžeme Y_k vyjadriť ako

$$Y_k = \varepsilon - \varepsilon.Z_k + \delta.Z_k = \varepsilon + (\delta - \varepsilon)Z_k = \varepsilon + \Delta Z_k$$

Teda

$$Y_k = \varepsilon + \Delta Z_k \qquad (2.21)$$

Premenné Y_k *sú vážené priemery* ε a δ. Z_k vyjadrujú *stochastické váhy*.
$Z_k^{(M)}$ nadobúda hodnoty $\frac{j}{M}$ $(j = 0,1,2,....., M)$.

Poznámka:
Ak $M = 1$, dostaneme *binárny model*.

- pri danom p majú $Z_k^{(M)}$ $(k = 1,2,....., n)$ rovnaké rozdelenie

$$\frac{1}{M} \times Bi(M, p)$$

kde $Bi(M, p)$ označuje binomické rozdelenie s parametrami M, p.

- p má *beta rozdelenie* s parametrami α, β

$$f_{\alpha,\beta}(p) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1}(1 - p)^{\beta-1}$$

pričom $0 \leq p \leq 1$.
Označme D_n *diskontný faktor* (od času n do 0).

Potom môžeme na základe vzorca (2.21) a uvedených vlastností odvodiť vzťah:

$$D_n(\alpha, \beta) = E[\varphi_n] = E[Y_1.Y_2.....Y_n] = E[(\varepsilon + \Delta Z_1).(\varepsilon + \Delta Z_2).....(\varepsilon + \Delta Z_n)] = E\left[(\varepsilon + \Delta p)^n\right] =$$

$$= E\left[\binom{n}{0}\Delta^n.p^n + \binom{n}{1}\Delta^{n-1}.p^{n-1}.\varepsilon + \binom{n}{2}\Delta^{n-2}.p^{n-2}.\varepsilon^2 + ...\binom{n}{n-1}\Delta.p.\varepsilon^{n-1} + \binom{n}{n}\varepsilon^n\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} E\left[\binom{n}{k}\varepsilon^k.\Delta^{n-k}.p^{n-k}\right]$$

Po úprave dostaneme

$$D_n(\alpha,\beta)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon^k.\Delta^{n-k}.\frac{\alpha^{[n-k]}}{(\alpha+\beta)^{[n-k]}} \tag{2.22}$$

pričom $\alpha^{[j]}=\alpha(\alpha+1).....(\alpha+j-1)$

Numerické výsledky

Pri numerickom výpočte sme použili program v softvéri Mathematica, ktorý je uvedený v prílohe diplomovej práce. Zvolili sme nasledujúce hodnoty *parametrov:*

$$M=1,\ n=16,\ \varepsilon=0.5,\ \delta=0.95,\ \alpha=10,\ \beta=2$$

Keďže M = 1, model je binárny.

Pre dané konkrétne hodnoty sme teda dostali model

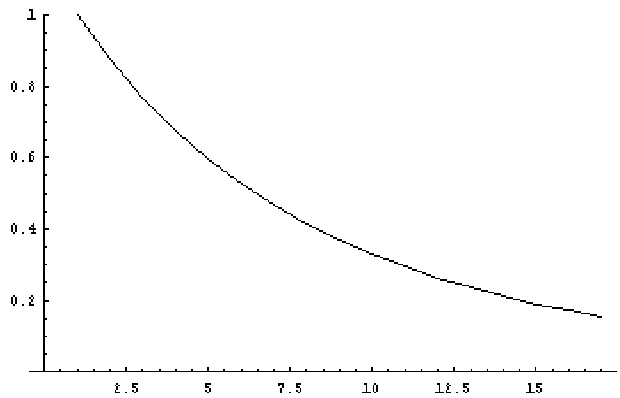
$$Y_k=0.5(1-Z_k)+0.95Z_k=0.5+0.45Z_k$$

V *tabuľke 2.1* sú uvedené hodnoty **diskontných faktorov** $D_1, D_2, ..., D_{16}$, pričom $D_0=1$. Výsledky sme získali po dosadení hodnôt parametrov do vzťahu (2.22).

Tabuľka 2.1 Diskontné faktory $D_1, D_2, ..., D_{16}$

D$_1$	0.8750	**D$_9$**	0.3288
D$_2$	0.7678	**D$_{10}$**	0.2936
D$_3$	0.6755	**D$_{11}$**	0.2627
D$_4$	0.5958	**D$_{12}$**	0.2354
D$_5$	0.5268	**D$_{13}$**	0.2112
D$_6$	0.4668	**D$_{14}$**	0.1899
D$_7$	0.4145	**D$_{15}$**	0.1709
D$_8$	0.3688	**D$_{16}$**	0.1540

Na *obrázku 2.2* sú graficky znázornené hodnoty diskontných faktorov.



Obrázok 2.2 Grafické znázornenie hodnôt *diskontných faktorov*.

Získané výsledky nám pomôžu vypočítať **poistné rezervy** pre čas t = 0,1,2,.....,16.

Predpokladajme, že máme daný *vektor platieb* $X = (X_0, X_1, ..., X_n)$, n = 16:
X = (0, -16, 9, 24, 21, 6, -39, -16, 15, 1, 15, 30, -49, 14, -18, 8, -48)

Je zrejmé, že získané numerické výsledky budú závisieť najmä od voľby vektora platieb.

Predpokladáme, že platí *princíp ekvivalencie*, t.j. valuácia v čase t = 0 je nulová:

$$Q[X] = E\left[\sum_{k=0}^{n} \varphi_k X_k\right] = E\left[\sum_{k=0}^{n} D_k X_k\right] = 0 \qquad (2.23)$$

kde D_k, $k = 0,1,.....,n$ sú diskontné faktory.

Akumulované platby vypočítame pomocou vzťahu (2.8), v ktorom sme definovali

$$A[X \mid F_t] = \sum_{k=0}^{t} \frac{\varphi_k}{\varphi_t} X_k = \sum_{k=0}^{t} \frac{D_k}{D_t} X_k \qquad (2.24)$$

Po dosadení príslušných hodnôt do (2.24) dostaneme hodnoty uvedené v *tabuľke 2.2*.

Tabuľka 2.2 Hodnoty akumulovaných platieb

A[X|F$_1$]	-16.00
A[X|F$_2$]	-9.23
A[X|F$_3$]	13.50
A[X|F$_4$]	36.31
A[X|F$_5$]	47.07
A[X|F$_6$]	14.12
A[X|F$_7$]	-0.10
A[X|F$_8$]	14.89

A[X|F$_9$]	17.70
A[X|F$_{10}$]	34.82
A[X|F$_{11}$]	68.92
A[X|F$_{12}$]	27.92
A[X|F$_{13}$]	45.11
A[X|F$_{14}$]	32.19
A[X|F$_{15}$]	43.76
A[X|F$_{16}$]	0.56

$A[X \mid F_t]$ označujú akumulované platby, ktoré poisťovňa vyplatila poistencovi do času t (vrátane t). Vidíme, že v čase *t = 1, 2 a 7* sú záporné.

Zo vzorca (2.8) odvodíme vzťah pre **prospektívnu rezervu**:

$$R[X \mid F_t] = E\left[\sum_{k=t+1}^{n} \frac{\varphi_k}{\varphi_t} X_k \mid F_t\right] = E\left[\sum_{k=t+1}^{n} Y_{t+1} Y_{t+2} \ldots\ldots Y_k X_k \mid F_t\right] = \sum_{k=t+1}^{n} E[Y_{t+1} Y_{t+2} \ldots\ldots Y_k X_k \mid F_t]$$

Definujme výraz $V_t^{(k)}$ (t < k) vzťahom:

$$V_t^{(k)} = E[Y_{t+1}.Y_{t+2}\ldots\ldots Y_k \mid F_t] = D_{k-t}(\alpha_t, \beta_t) \qquad (t = 1,2,\ldots\ldots,16) \qquad (2.25)$$

s priebežne aktualizovanými hodnotami

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + M.Z_t \qquad (\alpha_0 = \alpha)$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t + M.(1 - Z_t) \qquad (\beta_0 = \beta)$$

$V_t^{(k)}$ označuje známy pojem z finančnej matematiky - hodnotu bezkupónového dlhopisu (pozri [1]).

Po dosadení (2.25) do vzťahu pre prospektívnu rezervu dostaneme

$$R[X \mid F_t] = \sum_{k=t+1}^{n} V_t^{(k)} X_k \qquad (2.26)$$

Po dosadení hodnôt do (2.26) dostaneme numerické výsledky uvedené v *tabuľke 2.3*.

Tabuľka 2.3 Hodnoty prospektívnej rezervy

R[X|F₁]	15.81
R[X|F₂]	8.57
R[X|F₃]	-9.40
R[X|F₄]	-32.44
R[X|F₅]	-43.91
R[X|F₆]	-8.68
R[X|F₇]	5.46
R[X|F₈]	-9.00

R[X|F₉]	-11.87
R[X|F₁₀]	-29.14
R[X|F₁₁]	-60.50
R[X|F₁₂]	-20.12
R[X|F₁₃]	-38.30
R[X|F₁₄]	-26.42
R[X|F₁₅]	-39.20
R[X|F₁₆]	0

Prospektívne rezervy predstavujú rozdiel medzi budúcimi výdavkami a budúcimi príjmami poisťovne v príslušnom roku. V našom príklade vyšli väčšinou záporné hodnoty.

Na výpočet **valuácie** pre čas t > 0 použijeme vzťah (2.8)

$$Q[X \mid F_t] = A[X \mid F_t] + R[X \mid F_t]$$

Po dosadení akumulatívnej a prospektívnej rezervy dostaneme hodnoty uvedené v *tabuľke 2.4*.

Tabuľka 2.4 Hodnoty valuácie pre čas t > 0

Q[X|F$_1$]	-0.19
Q[X|F$_2$]	-0.66
Q[X|F$_3$]	4.1
Q[X|F$_4$]	3.9
Q[X|F$_5$]	3.2
Q[X|F$_6$]	5.4
Q[X|F$_7$]	5.4
Q[X|F$_8$]	5.9

Q[X|F$_9$]	5.8
Q[X|F$_{10}$]	5.7
Q[X|F$_{11}$]	8.4
Q[X|F$_{12}$]	7.8
Q[X|F$_{13}$]	6.8
Q[X|F$_{14}$]	5.8
Q[X|F$_{15}$]	4.6
Q[X|F$_{16}$]	0.56

Vypočítali sme hodnoty $Q[X \mid F_t]$, t.j. akumulované straty poisťovne do času t vrátane. Vzhľadom na zadané hodnoty v tomto príklade vyšli na začiatku záporné hodnoty, postupne prešli do kladných hodnôt. Na konci poistnej doby je hodnota akumulovanej straty kladná, ale nižšia v porovnaní s predchádzajúcimi, keďže v závere poistnej doby prevažujú záporné hodnoty zložiek vektora X.

Ročnú stratu v období $(t-1,t]$ sme definovali vzťahom (2.13):

$$L_t(X) = Y_t.Q[X \mid F_t] - Q[X \mid F_{t-1}]$$

Keďže ročnú premennú Y_t môžeme vyjadriť ako

$$Y_t = \frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}} = \frac{D_t}{D_{t-1}},$$

dostaneme po dosadení výraz

$$L_t(X) = \frac{D_t}{D_{t-1}} Q[X \mid F_t] - Q[X \mid F_{t-1}]$$

Po dosadení príslušných diskontných faktorov a valuácie získame numerické hodnoty uvedené v *tabuľke 2.5*.

Tabuľka 2.5 Ročné straty

L$_1$(X)	-0.17
L$_2$(X)	-0.39
L$_3$(X)	4.30
L$_4$(X)	-0.69
L$_5$(X)	-1.07
L$_6$(X)	1.65
L$_7$(X)	-0.68
L$_8$(X)	-0.12

L$_9$(X)	-0.68
L$_{10}$(X)	-0.75
L$_{11}$(X)	1.85
L$_{12}$(X)	-1.44
L$_{13}$(X)	-1.69
L$_{14}$(X)	-1.62
L$_{15}$(X)	-1.67
L$_{16}$(X)	-4.1

V predchádzajúcej tabuľke sú uvedené ročné straty poisťovne, nie však akumulované, ale v jednotlivých rokoch. Záporné hodnoty predstavujú ročný zisk poisťovne. V poslednom roku poistenia je zisk poisťovne výrazne vyšší než v predchádzajúcich, čo opäť súvisí so spôsobom zadania vektora platieb X.

Pre **diskontovanú sumu ročných strát** platí vzorec (2.17), teda:

$$M_m(X) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_{k-1} L_k(X) = \varphi_m Q[X \mid F_m] = D_m Q[X \mid F_m]$$

Tabuľka 2.6 obsahuje konkrétne hodnoty $M_m(X)$.

Tabuľka 2.6 Diskontovaná suma ročných strát

M_1(X)	-0.17
M_2(X)	-0.51
M_3(X)	2.77
M_4(X)	2.30
M_5(X)	1.67
M_6(X)	2.54
M_7(X)	2.22
M_8(X)	2.17

M_9(X)	1.92
M_{10}(X)	1.67
M_{11}(X)	2.21
M_{12}(X)	1.84
M_{13}(X)	1.44
M_{14}(X)	1.10
M_{15}(X)	0.78
M_{16}(X)	0.086

V ďalšom kroku vypočítame pomocou vzťahov (2.18), (2.19) a (2.20) rozklad celkových ročných strát na **technické** a **finančné straty**. Výsledné hodnoty sú uvedené v nasledujúcich tabuľkách.

Tabuľka 2.7 Technické straty

LT_1(X)	-0.25
LT_2(X)	-0.68
LT_3(X)	3.5
LT_4(X)	3.3
LT_5(X)	2.65
LT_6(X)	4.7
LT_7(X)	4.6
LT_8(X)	5.0

LT_9(X)	5.0
LT_{10}(X)	4.8
LT_{11}(X)	7.2
LT_{12}(X)	6.7
LT_{13}(X)	5.7
LT_{14}(X)	4.8
LT_{15}(X)	3.7
LT_{16}(X)	0

Ako sme už uviedli, technické straty sú zapríčinené technickými premennými X_k. V prvých rokoch poistenia je badateľný technický zisk, neskôr technická strata.

Tabuľka 2.8 Finančné straty

$LF_1(X)$	0		**$LF_9(X)$**	-5.65
$LF_2(X)$	0.29		**$LF_{10}(X)$**	-5.57
$LF_3(X)$	0.77		**$LF_{11}(X)$**	-5.39
$LF_4(X)$	-3.97		**$LF_{12}(X)$**	-8.10
$LF_5(X)$	-3.72		**$LF_{13}(X)$**	-7.44
$LF_6(X)$	-3.00		**$LF_{14}(X)$**	-6.40
$LF_7(X)$	-5.25		**$LF_{15}(X)$**	-5.32
$LF_8(X)$	-5.15		**$LF_{16}(X)$**	-4.06

Finančné straty sú zapríčinené finančnými premennými φ_k (zmenou úrokových mier). Sú kompenzované technickými stratami. Vidíme, že na začiatku poistnej doby dochádza k stratám spôsobeným úrokovými mierami, neskôr k zisku.

Záver:

Ako sme už spomenuli, výsledné hodnoty závisia od voľby vektora platieb. Pri našom zadaní vektora X sme vypočítali ročné straty a zistili sme, že takmer vždy majú na nich väčší podiel technické straty než finančné.

3. APLIKÁCIE APROXIMÁCIE CIEN DLHOPISOV V ŽIVOTNOM POISTENÍ

V tejto kapitole sa budeme zaoberať inou metódou na výpočet poistného jednotlivých typov poistenia. Budeme predpokladať, že úroková miera sa riadi podľa *stochastickej diferenciálnej rovnice*. Uvedieme vzťah pre aproximáciu cien dlhopisov aplikovanú na *Cox-Ingersoll-Rossov model*, ktorý neskôr použijeme na výpočet výšky poistného v prípade dočasného poistenia na úmrtie, doživotného poistenia na úmrtie a zmiešaného poistenia. Uvedené hodnoty porovnáme s výsledkami získanými použitím metódy na výpočet poistného v prípade konštantnej úrokovej miery.

3.1 ZÁKLADNÉ POJMY

Nech $\left(\Omega,(F_t)_{t\geq 0},P\right)$ je daný *pravdepodobnostný priestor*, kde $(F_t)_{t\geq 0}$ je filtrácia . Definíciu stochastického procesu sme už uviedli v podkapitole 2.1.

Symbolom B označíme **Brownov pohyb.** Rozumieme pod ním spojitý systém náhodných premenných $\{w(t), t \geq 0\}$, pre ktorý platí:

- $w(0) = 0$,
- $w(t) \sim N(0,t)$,
- prírastky $w(s+t) - w(s) \sim N(0,t)$ a pre rôzne časy sú navzájom nezávislé (t.j. sú nezávislé od filtrácie $\{F_s\}_{s\geq 0}$).

Predpokladáme, že *krátkodobá úroková miera X* sa riadi *stochastickou diferenciálnou rovnicou* s jediným nezáporným riešením

$$dX_s = (2\beta X_s + \delta_s)ds + v\sqrt{X_s}\,dB_s \tag{3.1}$$

kde

$(B_s)_{s\geq 0}$ je Brownov pohyb

$\beta < 0$, v - konštanty

δ - nezáporný predpovedateľný stochastický proces taký, že $\int_0^t \delta_u du < \infty$, skoro všade $\forall t \in R^+$ a

$$s^{-1}\int_0^s \delta_u du \xrightarrow{s.v.} \overline{\delta} \qquad \text{(ozn. s.v. } \rightarrow \text{ skoro všade)}$$

pričom $\overline{\delta} : \Omega \rightarrow R^+$.

Dosadením výrazov

$$X_t = \frac{4.r_t}{\sigma^2}, \quad v = 2, \quad \beta = -\frac{\kappa}{2}, \quad \delta_t = \frac{4\kappa.\gamma_t}{\sigma^2},$$

do rovnice (3.1) a po úprave

$$d\left(\frac{4r_t}{\sigma^2}\right)=\left(-\kappa\frac{4r_t}{\sigma^2}+\frac{4\kappa\gamma_t}{\sigma^2}\right)dt+2\sqrt{\frac{4r_t}{\sigma^2}}dB_t$$

$$\frac{4}{\sigma^2}d(r_t)=\frac{4\kappa}{\sigma^2}(-r_t+\gamma_t)dt+2\frac{2}{\sigma}\sqrt{r_t}dB_t$$

dostaneme *dvojfaktorový Cox-Ingersoll-Rossov* model s krátkodobými úrokovými mierami *r*:

$$dr_t=\kappa(\gamma_t-r_t)dt+\sigma\sqrt{r_t}dB_t \qquad (3.2)$$

kde

$(\gamma_t)_{t\geq 0}$ je stochastický proces

$(B_t)_{t\geq 0}$ je Brownov pohyb

κ,σ sú kladné konštanty

Zameriame sa však na **jednofaktorový Cox-Ingersoll-Rossov,** ktorý je definovaný ako

$$dr_t=\kappa(\gamma-r_t)dt+\sigma\sqrt{r_t}\,dB_t \qquad (3.3)$$

pričom γ je konštanta.

3.2 APROXIMÁCIA CIEN DLHOPISOV

Uvedieme vzťah pre aproximáciu cien dlhopisov aplikovanú na **jednofaktorový Cox-Ingersoll-Rossov model**.

Zaujíma nás *idea aproximácie* výrazu $\int_0^t r_u du$ pre dostatočne veľké *t*, pretože tento výraz sa vyskytuje v *diskontných faktoroch, doživotných dôchodkoch a podobne*.

V práci [2] je uvedené odvodenie vzťahu pre aproximáciu cien dlhopisov pomocou Brownovho pohybu. Cieľom tejto kapitoly je však zamerať sa na jeho využitie v životnom poistení, preto ho tu nebudeme odvodzovať. Aplikáciou daného vzťahu na *jednofaktorový Cox-Ingersoll-Rossov model*, podľa ktorého sa krátkodobá úroková miera *r* riadi rovnicou (3.3) dostaneme nasledujúcu aproximáciu:

$$E_{r_0}\left[e^{-\int_0^t r_u du}\right]\sim\exp\left(\gamma.t\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}-1\right)-\frac{1-e^{-\kappa t}}{\kappa}(r_0-\gamma)\right) \qquad (3.4)$$

Vzťah (3.4) môžeme použiť pri výpočte poistného jednotlivých typov životného poistenia.

Pomocou numerických výpočtov sa však zistilo, že rozdiely medzi presnými výsledkami a odhadovanými hodnotami zostávajú **pre prax príliš**

veľké. *Aproximáciu pomocou Brownovho pohybu je možné použiť len vtedy, ak nie sú k dispozícii žiadne exaktné vzorce a presné výpočty sú časovo veľmi náročné* (pozri [2]).

3.3 APLIKÁCIE V ŽIVOTNOM POISTENÍ

Označme

K_x - diskrétna náhodná premenná nadobúdajúca celočíselné hodnoty.

Označuje *počet kompletne prežitých rokov poistenca, ktorý má v čase uzavretia zmluvy presne x rokov*.

Z - *súčasná hodnota poistnej dávky* splatnej podľa príslušnej poistnej zmluvy.

Budeme sa zaoberať tromi typmi poistenia:

★ *dočasné poistenie na úmrtie (na n rokov)*

★ *doživotné poistenie na úmrtie*

★ *zmiešané poistenie*

Aproximáciu ceny dlhopiu (3.4) použijeme na výpočet **strednej hodnoty Z** (jednorázového nettopoistného) a **disperzie Z** príslušného typu poistenia.

Pri všetkých poistných druhoch budeme predpokladať, že dané poistenie uzavrela osoba vo veku **x = 30 rokov**.

Na zistenie jednorázového nettopoistného v prípade konštantných úrokových mier i = 0,04 a i = 0,08 použijeme metódu uvedenú v kapitole 1. Príslušné poistné vypočítame pomocou tzv. komutačných čísel (pozri [5]). Použijeme pritom *úmrtnostnú tabuľku československých poisťovní 1927 - 36* uvedenú v práci [5] (limitný vek ω = 85 rokov).

Numerické hodnoty aproximácie poistného vypočítame pre počiatočnú (t.j. aktuálnu) úrokovú mieru $r_0 = 0.04$, $r_0 = 0.08$ a pre parametre Cox-Ingersoll-Rossovho modelu, ktoré boli použité aj v práci [2]:

$$\kappa = 0.23394\,,\quad \gamma = 0.0808\,,\quad \sigma = 0.0854$$

Dočasné poistenie na úmrtie (na n rokov)

Poistná suma 1 peňažná jednotka (1 p.j.) bude vyplatená na konci roku úmrtia poistenej osoby, ak smrť nastane počas n rokov od uzavretia poistnej zmluvy.

Premenná *Z* bude definované ako

$$\begin{aligned} Z &= \exp\left(-\int_0^{K_x+1} X_u\,du\right) && \text{ak } K_x = 0,1,.....,n-1 \\ &= 0 && \text{ak } K_x = n, n+1,..... \end{aligned}$$

kde

$(X_u)_{u\geq 0}$ označuje krátkodobú úrokovú mieru definovanú pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dX_t = (2\beta X_t + \delta_t)dt + v\sqrt{X_t}dB_t$$

Ne-centrálny moment rádu *m* premennej *Z* je daný ako

$$E[Z^m] = \sum_{k=0}^{n-1} E\left[\exp\left(-m.\int_0^{k+1} X_u du\right)\right]._k|\, q_x \qquad (3.5)$$

kde

$_k|\, q_x$ označuje pravdepodobnosť, že poistenec zomrie v (k+1) roku.

Aproximáciu jednorázového nettopoistného dostaneme dosadením (3.4) do vzťahu (3.5) pre $E[Z^m]$, pričom položíme *m = 1*.

Teda

$$E[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} E\left[\exp\left(-\int_0^{k+1} X_u du\right)\right]._k|\, q_x \sim \sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\gamma(k+1)\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}-1\right)-\frac{1-e^{-\kappa(k+1)}}{\kappa}(r_0-\gamma)\right)._k|\, q_x$$

Disperziu $D[Z]$ vypočítame zo vzťahu

$$D[Z] = E[Z^2] - E^2[Z],$$

pričom $E[Z^2]$ vypočítame dosadením *m = 2* do vzorca (3.5).

V *tabuľke 3.1* sú uvedené numerické hodnoty aproximácie jednorázového nettopoistného $E[Z]$ a disperzie $D[Z]$ v prípade dočasného poistenia na úmrtie.

Tabuľka 3.2 obsahuje hodnoty jednorázového nettopoistného v prípade konštantných úrokových mier.

Tabuľka 3.1 Aproximácia v prípade dočasného poistenia na úmrtie

n	E[Z]		D[Z]	
	r_0 = 0.04	r_0 = 0.08	r_0 = 0.04	r_0 = 0.08
1	0.0026	0.0025	0.0025	0.0023
5	0.0130	0.0120	0.0112	0.0096
10	0.0251	0.0225	0.0184	0.0150
15	0.0365	0.0322	0.0228	0.0181
20	0.0478	0.0417	0.0253	0.0199
25	0.0585	0.0508	0.0264	0.0207
30	0.0688	0.0594	0.0266	0.0208
35	0.0787	0.0678	0.0261	0.0204
40	0.0878	0.0754	0.0252	0.0198

Tabuľka 3.2 Dočasné poistenie na úmrtie za predpokladu konštantných úrokových mier

n	E[Z]		D[Z]	
	i = 0.04	i = 0.08	i = 0.04	i = 0.08
1	0.0026	0.0025	0.0025	0.0023
5	0.0134	0.0119	0.0117	0.0094
10	0.0273	0.0222	0.0213	0.0147
15	0.0428	0.0317	0.0295	0.0177
20	0.0610	0.0409	0.0366	0.0194
25	0.0818	0.0497	0.0421	0.0201
30	0.1056	0.0579	0.0456	0.0201
35	0.1331	0.0658	0.0465	0.0198
40	0.1633	0.0730	0.0444	0.0192

Pre $n = 1$ sú výsledky obidvoch modelov rovnaké. Pri úrokovej miere i = 0,04 vyšli hodnoty jednorázového poistného vyššie než pri aproximácii. Avšak pri i = 0,08 je to už opačne. Podobná situácia sa javí aj pri výpočte disperzie.
Vidíme, že rozdiely v hodnotách poistného počítanom rôznymi metódami pri úroku 0.08 sú menšie než pri 0,04.

Doživotné poistenie na úmrtie

V tomto prípade bude *poistná suma určite vyplatená, a to na konci roku úmrtia poistenca.*
Potom

$$Z = \exp\left(-\int_0^{K_x+1} X_u du\right) \qquad \text{ak } K_x = 0,1,.....,\omega - x - 1$$

Ne-centrálny moment rádu *m* má tvar

$$E\left[Z^m\right] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} E\left[\exp\left(-m.\int_0^{k+1} X_u du\right)\right]._k|\,q_x \tag{3.6}$$

Po dosadení $m = 1$ do vzťahu (3.6) a príslušnej aproximácie (3.4) dostaneme

$$E[Z] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} E\left[\exp\left(-\int_0^{k+1} X_u du\right)\right]._k|\,q_x \sim \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \exp\left(\gamma(k+1)\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa^2} - 1\right) - \frac{1-e^{-\kappa(k+1)}}{\kappa}(r_0 - \gamma)\right)._k|\,q_x$$

V *tabuľke 3.3* sú uvedené numerické hodnoty aproximácie jednorázového nettopoistného $E[Z]$ a disperzie $D[Z]$ v prípade doživotného poistenia na úmrtie.

Tabuľka 3.3 Aproximácia v prípade doživotného poistenia na úmrtie

E[Z]		D[Z]	
r_0 = 0.04	**r_0 = 0.08**	**r_0 = 0.04**	**r_0 = 0.08**
0.1034	0.0886	0.0228	0.0180

Uvedené hodnoty porovnáme s výsledkami získanými pri konštantných úrokových mierach.

Tabuľka 3.4 Doživotné poistenie na úmrtie za predpokladu konštantných úrokových mier

E[Z]		D[Z]	
i = 0.04	**i = 0.08**	**i = 0.04**	**i = 0.08**
0.2342	0.0853	0.0276	0.0176

Porovnaním výsledkov vidíme, že nastáva rovnaká situácia ako pri dočasnom poistení na úmrtie. Pri konštantnej úrokovej miere i = 0,04 je hodnota jednorázového poistného väčšia o 0,1308 než v prípade aproximácie, čo je pomerne veľký rozdiel. Podobne je to aj v prípade disperzie. Pri i = 0,08 je to opäť opačne. Rozdiely medzi vypočítanými hodnotami sú nižšie pri úrokovej miere 0.08.

Zmiešané poistenie

Poistná suma je vyplatená

- *na konci roku úmrtia, ak poistenec zomrie počas n rokov od uzavretia poistnej zmluvy,*
- *v čase n, ak poistenec prežije n rokov.*

V dôsledku toho bude súčasná hodnota Z zmiešaného poistenia definovaná ako

$$Z = \exp\left(- \int_0^{K_x+1} X_u du \right) \qquad \text{ak} \quad K_x = 0,1,\ldots\ldots, n-1$$

$$= \exp\left(- \int_0^{n} X_u du \right) \qquad \text{ak} \quad K_x = n, n+1,\ldots\ldots$$

Ne-centrálny moment rádu *m* súčasnej hodnoty je daný vzťahom

$$E[Z^m] = \sum_{k=0}^{n-1} E\left[\exp\left(-m \int_0^{k+1} X_u du \right) \right] \cdot {}_{k|}q_x + E\left[\exp\left(-m \int_0^{n} X_u du \right) \right] \cdot {}_n p_x \tag{3.7}$$

Potom

$$E[Z]=\sum_{k=0}^{n-1} E\left[\exp\left(-\int_0^{k+1} X_u du\right)\right]\cdot_{k|} q_x + E\left[\exp\left(-\int_0^{n} X_u du\right)\right]\cdot_n p_x \sim$$

$$\sim \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\gamma(k+1)\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}-1\right)-\frac{1-e^{-\kappa(k+1)}}{\kappa}(r_0-\gamma)\right)_{k|} q_x +$$

$$+\exp\left(\gamma.n\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}-1\right)-\frac{1-e^{-\kappa.n}}{\kappa}(r_0-\gamma)\right)_n p_x$$

V *tabuľke 3.5* sú uvedené numerické hodnoty aproximácie jednorázového nettopoistného $E[Z]$ a disperzie $D[Z]$ v prípade zmiešaného poistenia.

Tabuľka 3.5 Aproximácia v prípade zmiešaného poistenia

n	E[Z]		D[Z]	
	r_0 = 0.04	r_0 = 0.08	r_0 = 0.04	r_0 = 0.08
1	0.9617	0.9280	0	0
5	0.7749	0.6891	0.0002	0.0003
10	0.5570	0.4782	0.0017	0.0018
15	0.3956	0.3364	0.0048	0.0045
20	0.2852	0.2422	0.0087	0.0075
25	0.2123	0.1804	0.0125	0.0104
30	0.1654	0.1409	0.0159	0.0130
35	0.1364	0.1164	0.0186	0.0149
40	0.1195	0.1022	0.0205	0.0163

Tabuľka 3.6 obsahuje hodnoty $E(Z)$ a $D(Z)$ získané pomocou metód na výpočet poistného za predpokladu konštantných úrokových mier.

Tabuľka 3.6 Zmiešané poistenie za predpokladu konštantných úrokových mier

n	E[Z]		D[Z]	
	i = 0.04	i = 0.08	i = 0.04	i = 0.08
1	0.9615	0.9259	0	0
5	0.8229	0.6823	0.0001	0.0003
10	0.6798	0.4696	0.0008	0.0019
15	0.5647	0.3280	0.0023	0.0045
20	0.4731	0.2347	0.0046	0.0075
25	0.4012	0.1740	0.0076	0.0104
30	0.3460	0.1354	0.0111	0.0129
35	0.3052	0.1118	0.0147	0.0147
40	0.2768	0.0981	0.0181	0.0160

Vidíme, že pri úrokovej miere i = 0,04 sú hodnoty jednorázového poistného vyššie než v prípade aproximácie s $r_0 = 0.04$. To však neplatí pre n = 1. Disperzie sú vo všetkých prípadoch pre n = 1 nulové. Pre ostatné hodnoty n sú ich hodnoty v obidvoch modeloch približne rovnaké.

Záver:

Porovnaním výsledkov sme zistili, že hodnoty jednorázového poistného sa pri jednotlivých metódach výpočtu líšia. Smerodajná odchýlka (t.j. druhá odmocnina z disperzie) nám udáva riziko poistenia. Konkrétne hodnoty uvedené v tabuľkách potvrdzujú fakt, že s rastúcou dĺžkou poistnej doby rastie aj riziko poistenia.

Ako sme už uviedli, v praxi sa odporúča používať uvedené aproximácie poistného len v prípade, ak nemáme k dispozícii žiadne exaktné vzorce, prípadne ich výpočet je časovo príliš náročný.

ZÁVER

V našej práci sme sa zamerali na hľadanie metód umožňujúcich výpočet jednorázového nettopoistného a poistných rezerv v prípade stochastických úrokových mier.

V prvej kapitole sme sformulovali diskrétny a spojitý stochastický model životného poistenia jednej osoby. Ukázali sme, že jednorázové nettopoistné vypočítame ako strednú hodnotu náhodnej premennej vyjadrujúcej výdavky poisťovne v čase uzavretia poistnej zmluvy. Stochastický model umožňuje vypočítať aj stredné riziko poistenia, čo môže byť v praxi pre poisťovňu užitočné.

V druhej kapitole sme uviedli metódu na výpočet poistných rezerv v prípade stochastických úrokových mier. Aplikovali sme ju na ukážkový model s konkrétnymi hodnotami parametrov a vyčíslili sme akumulované straty poisťovne, ročné straty a ich rozdelenie.

Obsahom tretej kapitoly bola iná metóda na výpočet poistného. Bola založená na predpoklade, že úroková miera sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou. Aplikovali sme ju na tri konkrétne poistenia - dočasné poistenie na úmrtie, doživotné poistenie na úmrtie a zmiešané poistenie. Výsledky sme porovnali s hodnotami poistného vypočítaného pri konštantných úrokových mierach. Rozdiely vo výsledkoch sú badateľné. Metóda využívajúca aproximáciu cien dlhopisov sa odporúča používať v praxi len v nevyhnutných prípadoch.

POUŽITÁ LITERATÚRA

[1] BÜHLMANN, H.: Life insurance with stochastic interest rates. Zborník príspevkov Editor, 1992

[2] DEELSTRA, G.: Long-term returns in stochastic interest rate models: applications. Astin Bulletin, Vol. 30, No. 1 2000

[3] FORFAR, D.O. - WATERS, H.R.: A stochastic approach to life contingencies. Institute of Actuaries

[4] PÉCSIOVÁ, B.: Stochastický prístup k životnému poisteniu. Diplomová práca FHI EU 1997.

[5] SEKEROVÁ, V.- BILÍKOVÁ, M.: Poistná matematika 1. Bratislava, Ekonóm 1996.

PRÍLOHA

Program v softvéri Mathematica. na numerický výpočet valuácie v modeli so stochastickými úrokovými mierami a rozkladu ročných strát na technické a finančné straty. Model je opísaný v kapitole 2.

Stochastické váhy $Z_k, k = 1,2,.....,n$ *môžeme generovať príkazom*

For[i=0,i<=n-1,i++,Z[i]=Divide[Random[Integer,{0,M}],M]];

V našom príklade sme pracovali s nasledujúcimi náhodnými hodnotami:

$Z_0 = 1,\ Z_1 = 1,\ Z_2 = 0,\ Z_3 = 1,\ Z_4 = 1,\ Z_5 = 0,\ Z_6 = 1,\ Z_7 = 1,\ Z_8 = 1,$

$Z_9 = 1,\ Z_{10} = 0,\ Z_{11} = 0,\ Z_{12} = 1,\ Z_{13} = 0,\ Z_{14} = 0,\ Z_{15} = 0.$

```
M=1; doba=16; n=16; epsilon=0.5; delta=0.95; alfa=10; betaa=2;
DELT=N[delta-epsilon];
Discount[i_,alfa_,betaa_]:=
        N[Sum[Binomial[i,k]*epsilon^k*DELT^(i-k)*
        Divide[Pochhammer[alfa,i-k],Pochhammer[alfa+betaa,i-k]],{k,0,i}]];
q=Table[Discount[i,alfa,betaa],{i,0,n}];
g1=ListPlot[q,PlotJoined->True,PlotRange->{0,1}];
Array[Z,n,0];
Z[0]:=1; Z[1]:=1; Z[2]:=0; Z[3]:=1; Z[4]:=1; Z[5]:=0; Z[6]:=1; Z[7]:=1; Z[8]:=1;
Z[9]:=1; Z[10]:=0; Z[11]:=0; Z[12]:=1; Z[13]:=0; Z[14]:=0; Z[15]:=0;
Array[a,n,0];
Do[a[0]=alfa;a[i+1]=a[i]+M*Z[i],{i,0,n-1}];
Table[a[i],{i,0,n-1}];
Array[b,n,0];
Do[b[0]=betaa;b[i+1]=b[i]+M*(1-Z[i]),{i,0,n-1}];
Table[b[i],{i,0,n-1}];
Array[V,n+1,0];
V[0]:=SetPrecision[Discount[n,a[0],b[0]],10];
V[n]:=1;
Do[V[j]=SetPrecision[Discount[n-j,a[j],b[j]],5],{j,1,n-1}];
Table[V[i],{i,0,n}];
Array[X,n+1,0];
X[0]:=0; X[1]:=-16; X[2]:=9; X[3]:=24; X[4]:=21; X[5]:=6; X[6]:=-39; X[7]:=-16;
X[8]:=15; X[9]:=1; X[10]:=15; X[11]:=30; X[12]:=-49; X[13]:=14; X[14]:=-18;
X[15]:=8; X[16]:=-48;
Array[AXF,doba];
For[t=1,t<=doba,t++,
AXF[t]=Sum[Divide[Discount[k,alfa,betaa],Discount[t,alfa,betaa]]*X[k],{k,0,t}]];
Table[SetPrecision[AXF[t],5],{t,1,doba}];
Array[RXF,doba,0];
For[t=1,t<=doba,t++,RXF[t]=Sum[Discount[k-t,a[t],b[t]]*X[k],{k,t+1,n}]];
Table[RXF[t],{t,1,doba}];
```

```
Array[QXF,doba,0];
QXF[0]=0;
For[t=1,t<=doba,t++,QXF[t]=AXF[t]+RXF[t]];
Table[SetPrecision[QXF[t],3],{t,1,doba}];
Array[LTX,doba];
For[t=1,t<=doba,t++,
LTX[t]=Divide[Discount[t,alfa,betaa],Discount[t-1,alfa,betaa]]*QXF[t]-QXF[t-1]];
Table[SetPrecision[LTX[t],3],{t,1,doba}];
Array[MX,doba];
For[m=1,m<=doba,m++,MX[m]=Sum[Discount[k-1,alfa,betaa]*LTX[k],{k,1,m}]];
Table[SetPrecision[MX[m],3],{m,1,doba}];
Array[rplus,doba];
For[m=1,m<=doba,m++,
    rplus[m]=(1/Discount[m,alfa,betaa])* Sum[Discount[k,a[0],b[0]]*X[k],{k,m,n}]];
Table[rplus[m],{m,1,doba}];
Array[LT,doba];
For[m=1,m<=doba,m++,
LT[m]=N[(Discount[m,alfa,betaa]/Discount[m-1,alfa,betaa])*(X[m]+RXF[m])-
        (Discount[m,alfa,betaa]/Discount[m-1,alfa,betaa])*rplus[m],10]];
Table[SetPrecision[LT[m],3],{m,1,doba}];
Array[LF,doba];
RXF[0]=Sum[X[k]*Discount[k,a[0],b[0]],{k,1,n}];
For[m=1,m<=doba,m++,
SetPrecision[LF[m]=(Discount[m,alfa,betaa]/Discount[m-1,alfa,betaa])* rplus[m]-
                    RXF[m-1],6]];
Table[SetPrecision[LF[m],3],{m,1,doba}];
```

Premenné v programe

M	daný parameter
doba	dĺžka poistnej doby
n	dimenzia vektora platieb
epsilon	daný parameter
delta	daný parameter
alfa	daný parameter
betaa	daný parameter
Discount	diskontný faktor
Z	stochastické váhy
a	aktualizované hodnoty parametra alfa
b	aktualizované hodnoty parametra beta
V	hodnota bezkupónového dlhopisu
X	vektor platieb
AXF	akumulované platby do a vrátane času *t*
RXF	prospektívna rezerva

QXF	akumulované straty poisťovne
LTX	ročné straty
MX	diskontované ročné straty
rplus	pomocná premenná
LT	technické straty
LF	finančné straty