Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského
v Bratislave

Diplomová Práca

Branislav Ondruš

Bratislava 2002

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského
v Bratislave

Ekonomická a finančná matematika

Modely Populačného Optima

Diplomová práca

Diplomant: Branislav Ondruš

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Karol Pastor, CSc.

Bratislava 2002

Čestné Vyhlásenie

Prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne a použil som uvedenú literatúru

Branislav Ondruš

Ďakujem svojmu vedúcemu diplomovej práce RNDr. Karolovi Pastorovi, CSc. za odborné vedenie a cenné rady, ktorými mi pomáhal pri písaní tejto práce a za strávenie príjemných chvíľ pri zaujímavých rozhovoroch.

Obsah

Úvod

Žijeme v zaujímavom svete s neuveriteľnou demografickou históriou. Populácia po stáročia rástla pomalým tempom. Podľa odhadov odborníkov (napr. [10]), žilo pred 9 tisíc rokmi na modrej planéte 10 miliónov ľudí. Do roku 2500 pr.n.l. sa počet iba zoštvornásobil a na začiatku 18. storočia sme sa priblížili k veľkosti 320 miliónov obyvateľov. Za posledných tristo rokov sa celková veľkosť populácie vyšplhala na neskutočných 6.4 miliardy ľudí. Predpokladáme, že v nasledujúcich päťdesiatich rokoch vzrastieme minimálne o štyri miliardy. Je to málo alebo veľa?

Takmer všetky civilizácie podporovali propopulačné správanie. Najstaršie písomné odkazy nájdeme v Chammurapiho zákonníku. Avšak už v staroveku sa zaujímali, dokedy bude populácia rásť. Otázka optimálnej veľkosti populácie je stará už vyše 3700 rokov. Časom sa formalizovala, až postupne vzniklo viacero populačných modelov. Určujúcim faktorom v modeloch je populácia závislá od úrovne pôrodnosti. Ak pôrodnosť vystupuje ako nezávislá veličina, hovoríme o exogénnej pôrodnosti. Endogénna pôrodnosť sleduje zmeny pôrodnosti určené na iné, napr. ekonomické faktory.

Cieľom tejto práce je spracovať prehľad populačných modelov s endogénnym rastom populácie. Endogénnosť nám ukáže, akú veľkosť populácie dosiahneme pri určitých modeloch a ich predpokladoch. Takto môžeme získať optimálnu veľkosť populácie. Pri určitých kritériách dosiahneme buď väčšiu, alebo menšiu populáciu. Pôrodnosť ovplyvňujú rôzne veličiny na makro aj mikroúrovni. Z hľadiska makroúrovne hovoríme o vzťahoch štátu k veľkosti obyvateľstva. Mikroúroveň nám ukáže vzťahy medzi rodinami a firmami. Z ekonomického hľadiska skúmame modely, kde domácnosti maximalizujú svoj úžitok. Z matematického pohľadu dostávame typy optimalizačných úloh pri rôznych rozpočtových ohraničeniach a predpokladoch.

Tomu predchádza prvá kapitola s krátkym prehľadom predstaviteľov demografického sveta a príbuzných oblastí, ktorí sa v minulosti zaoberali problémom populačného optima, spracované podľa [10], [12], [15] a [7]. Ďalej spomenieme aj niektoré modely a práce zaoberajúce sa optimálnou veľkosťou populácie, ktoré slúžia pre spresnenie a doplnenie práce. V druhej kapitole si predstavíme statický dvojgeneračný model, ktorý je spomínaný v článkoch [8] a [9]. Budeme analyzovať veľkosti populácie pri rôznych predpokladoch. Tretia kapitola pojednáva o spojitom modele optimálnej veľkosti populácie a endogénneho rastu, spomenutého v článku [11]. Dostaneme presný opak v porovnaní veľkostí populácií ako v kapitole dva. Tento paradox sa doteraz nepodarilo vyriešiť ani iným autorom a žiaľ ani mne. Posledný model, ktorým sa zaoberala práca [13], uvádzame ako výsledok z predchádzajúcich kapitol, kde spomenieme okrem veľkosti populácie aj veľkosť a dôsledky ekonomického rastu.

Táto práca môže byť chápaná ako voľné pokračovanie práce [6], v ktorej M. Golianová študovala ako modelovať vplyv altruizmu a jeho dôsledky na pôrodnosť. Spracovala rôzne populačné modely s endogénnou a exogénnou pôrodnosťou na mikroekonomickej úrovni. Ďalšou kvalitnou prácou je práca [13], v ktorej sú skúmané vzťahy medzi pôrodnosťou a ekonomickým rastom. Náš posledný model čerpá z týchto poznatkov.

Problematikou veľkosti populácie a ekonomického rastu sa zaoberajú aj ďalšie optimalizačné modely na mikroúrovni a makroúrovni, napr. [1], [4] a [5], avšak do tejto práce nie sú zahrnuté, pretože vychádzajú z iných predpokladov.

1 Z histórie úvah o populačnom optime

Už v Chammurapiho zákonníku (1792-1750 pr.n.l.) sú spomenuté najstaršie právne zachované predpisy, ktoré podporujú rast počtu obyvateľstva pre poľnohospodárske účely. Zo starých védskych spevov (1500-1000 pr.n.l.) a spisov z Indie cítiť tiež propopulačné myslenie, ktoré sa odzrkadľuje aj v budhizme. V roku 500 pr.n.l. sa v dávnej Perzii uprednostňoval maximálny počet detí, kvôli perzským vojnám. Podľa *Herodota z Halikarnasu* (484-420 pr.n.l.) boli každoročne obdarovaní rodičia, ktorí dosiahli najväčší počet chlapcov. Na druhej strane sa od čínskeho filozofa *Konfucia* (551-479 pr.n.l.) prvýkrát dozvedáme o populačnom optime. Bolo definované ako ideálny vzťah medzi veľkosťou poľnohospodárskej pôdy a počtom obyvateľov. Za nadmerný rast populácie vedúci k biede kritizoval nečinnosť vlády. Prvé sústavnejšie úvahy o populačných problémoch nájdeme v gréckej filozofii u sokratovcov *Platóna* (428-348 pr.n.l) a *Aristotela* (384-322 pr.n.l). Svoje úvahy o optimálnej veľkosti populácie a počtu detí napísal Platón v spisoch Ústava a Zákony. Za stabilitou štátu videl stabilitu a optimálnu veľkosť populácie, ktorú navrhoval ako stacionárnu.

Ideu veľkého rastu populácie nájdeme aj v žalmoch v kresťanstve. V 18. storočí písal luteránsky duchovný *Johann P. Süssmilch* (1707-1767) o populačnej teórii. Podľa J. Süssmilcha sú všetky životné deje a štatistické zákonitosti výrazom božskej vôle. Jeho populačnú teóriu môžeme chápať ako politiku laissez-faire. Spomenieme aj *Johna Graunta* (1620-1674). Zaoberal sa predovšetkým úmrtnosťou ako jednou časťou populačného rastu. Je jeden z prvých a najvýznamnejších autorov 17. storočia, ktorý neskôr ovplyvnil mnoho ekonómov. Svoje objavy zhrnul v knihe Natural and political Observations, made upon the Bills of Mortality v roku 1662. Rok 1662 je braný ako počiatok demografického myslenia v populačných modeloch. Objavil pravidelnosti v populačnom dianí a ako prvý určil stabilný pomer 14:13 medzi počtom narodených chlapcov a dievčat, ktorý sa príliš nelíši od dnešných pozorovaní. Za predchodcu T. Malthusa sa považuje anglický demograf *Robert Wallace* (1694-1771), ktorý tvrdil, že bez umelého brzdenia veľkého populačného rastu bude populácia stále rásť.

Najznámejším demografom, v súčastnosti najcitovanejším, bol *Thomas Robert Malthus* (1766-1834), pastor anglickej cirkvi a profesor nových dejín ekonómie. Jeho prínos bol vo formalizovaní vzťahu medzi rastom požívateľných prostriedkov a rastom populácie, ktorý neskôr nazvali ako Malthusovský zákon. Tvrdil, že rýchlosť rastu populácie je rovná geometrickej postupnosti, kým rýchlosť rastu požívateľných potrieb je iba aritmetická, teda lineárne závislá. Týmto vysvetľoval preľudnenie v rôznych častiach sveta. Jeho tvrdenia sú napísané v najvýznamnejšom diele An Assay on the Principle of Population as It Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin. M. Condorcet, and Other Writers, 1798. Mnoho demografov a ekonómov odmietalo jeho názory. Malthusov pohľad chápame ako makroekonomický prístup k populačnému optimu.

V druhej polovici 18. storočia pôsobili fyziokrati, na ktorých nadväzujú známi klasickí ekonómovia ako *Adam Smith* (1723-1790), *David Ricardo* (1772-1823), *John Stuart Mill* (1806-1873), ktorí študovali poriadok a správanie sa trhu. *Antoine Condorcet* (1743-1794) vychádzal z predpokladov, že zdokonaľovanie človeka je neohraničené a teda sa nebál o požívateľné prostriedky pre ďalších ľudí. Spomenieme, že Malthusove názory tvrdo kritizovali socialisti, najmä Marx a Engels, ktorí naopak uznávali sociálne podpory pre chudobný ľud a mu vlastných vzťahov výrobných prostriedkov.

Po tridsať ročnej vojne a od polovice 17. storočia do začiatku 20. storočia sa v Anglicku a Francúzsku viedli živé spory o populačných trendoch. Vznikla teória a politika merkantilistického populacionizmu, ktorá hlásala, že vzrast obyvateľstva prináša so sebou moc a blaho štátu. Prvá svetová vojna a hospodárska kríza pozastavila populačný rast. Z 20.-30. rokov poznáme teóriu demografického prechodu. Neskôr, po 2. svetovej vojne sa opäť obnovil populačný rast. V 50. a 60. rokoch 20. storočia vznikajú práce zaoberajúce sa empirickými a teoretickými analýzami o technologickom pokroku, ktorými sa dá sledovať rozvoj nielen v hospodárstve. Technologický pokrok definovali ako závislosť od ľudských inovácií. Známi ekonómovia týchto prác sú *Solow, Abramowitz,* *Davidson* a *Kendrick*. Na základe týchto prác vznikajú nové populačno-ekonomické modely, kde rastúca veľkosť populácie má pozitívny vplyv na ekonomický vývoj. Z ďalších ekonómov spomenieme *Phelpsa, Steinmanna.* V roku 1968 vznikol *Rímsky klub*, v ktorom boli poprední myslitelia a ekonómovia vtedajšej doby. Na stretnutí bol aj ekonóm *J. W. Forrester*, ktorý navrhol dynamický systém, ktorým ukázal globálnu analýzu ekonomiky, ekológie a demografických procesov. V 80. rokoch sa objavujú ďalšie modely populačného optima, v podstate v tvare, aké ich poznáme dnes [8], [9]. Tieto modely používajú ako kritérium optimality funkcie pomenované podľa filozofov J. Benthama a J. S. Milla.

Prvým je *Jeremy Bentham* (1748-1832), ktorý síce nebol klasický demograf, bol právnik, etik, ale pre nás filozof. Preslávil sa návrhom etického a politického systému utilitarizmu. Považoval uspokojenie súkromnovlastníckeho záujmu za prostriedok na zabezpečenie „najväčšieho šťastia pre najväčší počet ľudí“. Druhým ekonómom a filozofom bol už spomenutý *John Stuart Mill* (1806-1873). Prepracoval filozofiu utilitarizmu J. Benthama. V článkoch [8] a [9] sú definované kritériá Benthama a Milla pre funkcie sociálneho blahobytu. Mill sa zapodieval problémom preľudnenia a na splnenie limít veľkosti populácie použil per capita úžitok maximalizačného argumentu. Edgeworth prisúdil túto funkciu sociálneho blahobytu Millovi, z referátu od H. Sidgwicka The Elements of Politics. Sidgwick, nasledoval Benthama s argumentáciou, že ak dodatoční ľudia vstúpia do ekonomiky, populácia bude mať povolené vzrásť nie do bodu, kde priemerný úžitok, ale kde celkový úžitok bude v najlepšom možnom bode. Preto druhý spôsob je definovaný a pomenovaný po Benthamovi.

Benthamov spôsob sa dá definovať ako celkový úžitok maximalizačného parametra, resp. ako celkový úžitok spoločnosti, alebo existujúcich agentov. Millov spôsob maximalizuje priemerný úžitok.

2 Statický dvojgeneračný model

V tejto kapitole zadefinujeme a vysvetlíme pojmy, s ktorými budeme narábať ďalej. Zadefinujeme si Benthamovu a Millovu funkciu sociálneho blahobytu ako aj funkciu sociálneho blahobytu jednotlivca v danej generácii. Ďalej sa zameriame na následky voľby týchto funkcií pre optimálnu veľkosť populácie. Tieto následky sú skúmané, ak úžitok jednotlivca je funkciou jeho vlastnej spotreby, počtu potomkov a spotrebou alebo funkciou úžitku, resp. blahobytu jeho detí v danej generácii. Ukážeme, že štátnou dotáciou, zahrňujúcou detské prídavky a podporou pre spotrebu budúcich generácií, môžeme podporiť sociálne optimum prostredníctvom individuálnej voľby. Dokážeme, že optimálna veľkosť populácie je podľa Benthamovho kritéria väčšia než podľa Millovho kritéria. Ďalej ukážeme, že nie je možné povedať určité závery o veľkosti populácie pre reprezentatívneho agenta v danej generácii, pri porovnávaní s funkciami sociálneho blahobytu. Spôsob správania reprezentatívneho agenta bude zhodné s ekonomikou laissez-faire, čiže nezasahovaním štátu do ekonomiky. Uvažujme jednoduchý model s endogénnym populačným rastom tak, ako článok [8] a [9].

2.1 Formulácia modelu

Uvažujme o jednoduchej funkcii úžitku rodiny, kde spotreba, počet detí a per capita blahobyt detí vstupujú ako parametre. Predpokladáme, že časový horizont je konečný a že každá rodina žije dve periódy, raz ako deti a raz ako dospelí. Generácia dostane per capita dotáciu, resp. začiatočný kapitál K, ktorý môže byť spotrebovaný iba v druhej perióde života. Kapitál môžeme chápať aj ako dedičstvo z predchádzajúcej generácie. V prvej perióde deti spotrebúvajú iba to, čo im dávajú rodičia. Neuvažuje sa so žiadnym iným kapitálom, ani dedičstvom.

Označme c_1, c_2 ako spotrebu v prvej, resp. v druhej periódе života. Nech n je počet detí per capita. Dostaneme rozpočtové ohraničenie vzhľadom na $c_1, c_2, n \geq 0$ rovné

$$c_1 + c_2 n = K. \tag{2.1}$$

Ak rodič zomrie, tak premenná c_2 znamená veľkosť dedičstva, ktoré zanechá pre každé dieťa. Funkcia úžitku je závislá na už definovaných premenných

$$U(c_1, c_2, n). \tag{2.2}$$

Takto máme úlohu

$$\max U(c_1, c_2, n), \tag{2.3}$$

pri podmienke (2.1).

2.2 Laissez-faire alokácia

Laissez-faire alokácia (**LFA**), alebo alokácia reprezentatívneho agenta, je definovaná ak maximalizujeme rodičovskú funkciu úžitku

$$U_1 = U_1(c_1, U_2(c_2), n). \tag{2.4}$$

V rodičovskom úžitku je okrem počtu detí n, zahrnutý aj detský úžitok $U_2(c_2)$, ktorý je závislý od spotreby detí c_2. Predpokladáme, že U_1 je konkávna v c_1 a U_2, U_2 je monotónne rastúca a konkávna v c_2. Obe funkcie úžitku U_1, U_2 sú nezáporné, pretože ľudia uprednostňujú pozitívne šťastie pred negatívnym. U_1 je taktiež monotónne rastúca v c_1 a U_2, ale nemusí byť monotónna v počte detí n. Pre ukážku uvedieme rôzne tvary rodičovskej funkcii úžitku U_1

$$(2.4.a) \qquad U_1 = U_1\left(\frac{c_1}{1+n}, nU_2(c_2), n\right),$$

$$(2.4.b) \qquad U_1 = U_1\left(\frac{c_1}{1+n}, U_2(c_2), n\right),$$

$$(2.4.c) \qquad U_1 = U_1\left(\frac{c_1}{1+n}, U_2(c_2)\right),$$

kde v (2.4.a) je funkcia U_1 monotónne rastúca vo všetkých svojich premenných, ale n znižuje úžitok skrze $\frac{c_1}{1+n}$, priamo ju zvyšuje v druhom a treťom argumente. Preto úžitok U_1 nemusí byť monotónny v počte detí n. V prípade (2.4.b) a (2.4.c) je U_1 opäť rastúca v každej svojej premennej, ale v (2.4.c) rodič priamo nevyberá svoj úžitok z počtu detí.

Rozpočtové ohraničenie rodiča, ktorý žije iba jednu periódu a zanecháva deti, je dané vzťahom (2.1). LFA teda dosiahneme ak

$$\max_{c_1, c_2, n} U_1(c_1, U_2(c_2), n),$$

pri podmienkach

$$c_1 + c_2 n = K; \quad c_1, c_2, n \geq 0.$$

2.3 Sociálne optimálne alokácie

V tejto časti si predstavíme dve sociálne optimálne alokácie. Jedna alokácia bude závislá na Benthamovom a druhá na Millovom kritériu.

V našom modeli Benthamovo kritérium nadobúda tvar

$$U(c_1, c_2, n) = U_1(c_1, U_2(c_2), n) + nU_2(c_2). \tag{2.5}$$

Funkcia (2.5) opisuje úžitok danej generácie, resp. rodičov plus úžitok nasledujúcej generácie, teda všetkých detí. Takto dostaneme celkový úžitok všetkých generácií. Predpokladáme, že máme klesajúce hraničné úžitky v c_1 a c_2, resp. druhé parciálne derivácie $\frac{\partial^2 U_1}{\partial c_1^2} < 0$, $\frac{\partial^2 U_2}{\partial c_2^2} < 0$. Za účelom dosiahnuť Benthamovu optimálnu alokáciu (**BOA**), môže štát dotovať budúcu spotrebu pre deti c_2 mierou α. Hodnotu α chápeme ako priame dávky deťom. Ďalej môže prispievať detskými dávkami na jedno dieťa veľkosťou β a vyrovnať svoj rozpočet. Vyrovnať ho môže negatívnou paušálnou daňou v objeme T. Ak je hodnota T záporná, rodič dostáva navyše dotáciu, ak je hodnota kladná, rodič naopak platí štátu. Vo svete existujú aj prípady, kde β chápu ako negatívnu veličinu. Za nadbytočný počet detí by musel rodič odvádzať dane. Zaujímavým prípadom je Čína, kde rodičia môžu mať iba jedno dieťa a za druhé dieťa existujú vysoké postihy. Prípad (BOA) zapíšeme ako

$$\max_{c_1, c_2, n} U_1(c_1, U(c_2), n) + nU_2(c_2),$$

pri podmienkach, keď nezasahuje štát

$$c_1 + c_2 n = K; \;\; c_1, c_2, n \geq 0,$$

alebo so zásahom štátu

$$c_1 + nc_2(1-\alpha) = K + \beta n - T. \tag{2.6}$$

Millovo kritérium pre sociálne optimálnu alokáciu znamená per capita úžitok, ktorý nadobúda tvar

$$\frac{U_1(c_1, U_2(c_2), n) + nU_2(c_2)}{1+n}. \tag{2.7}$$

Táto funkcia je definovaná ako Millova funkcia sociálneho blahobytu. Millova optimálna alokácia (**MOA**) je dosiahnutá pri maximalizácii (2.7) vzhľadom na c_1, c_2, n pri rozpočtovom ohraničení (2.1). Obdobným spôsobom ako v prípade Benthama, za účelom štátu podporiť MOA, je nutné použiť dotáciu pre c_2 mierou α a detskými dotáciami sadzbou β. Potom sa zmení rozpočtové ohraničenie z (2.1) na (2.6)

2.4 Nutné podmienky maxima

Ak je možné dosiahnuť BOA pri rozpočtovom ohraničení (2.6), tak zistíme optimálnu veľkosť α a β pri porovnaní podmienok prvého rádu pre prípad BOA bez zásahu štátu s podmienkami s individuálnou rodičovskou optimalizáciou, teda max (2.4) vzhľadom na (2.6). Maximalizáciu riešime pomocou Lagrangovej funkcie.

Keďže z rozpočtového ohraničenia (2.6) získame ľahko c_1, kde $c_1 = K - T + \beta n - nc_2(1-\alpha)$, tak stačí, ak dosadíme c_1 do funkcie úžitku a spravíme prvú deriváciu (2.4) podľa c_2 a n. Pre LFA dostaneme nasledovné podmienky prvého rádu:

$$\frac{\partial U_1}{\partial c_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad [U_1]'_1(-n(1-\alpha)) + [U_1]'_2[U_2]'_1 = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad [U_1]'_1(\beta - c_2(1-\alpha)) + [U_1]'_3 = 0, \tag{2.9}$$

kde $[U_1]'_i$ znamená parciálnu deriváciu funkcie úžitku rodiča podľa i-tej premennej a $[U_2]'_1$ je parciálna derivácia U_2 podľa c_2. Pre prípad BOA dostaneme podmienky prvého rádu z derivácie (2.5) podľa c_2 a n:

$$\frac{\partial U}{\partial c_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad [U_1]'_1(-n) + [U_1]'_2[U_2]'_1 + [U_2]'_1 n = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \Rightarrow \quad [U_1]'_1(-c_2) + [U_1]'_3 + U_2(c_2) = 0. \tag{2.11}$$

Z prvých podmienok (2.8) a (2.10) vyplýva

$$-[U_1]'_1 n + [U_1]'_2[U_2]'_1 = -[U_1]'_1\alpha n = -[U_2]'_1 n,$$

z druhých podmienok (2.9) a (2.11) vyplýva

$$-[U_1]'_1 c_2 + [U_1]'_3 = -[U_1]'_1\beta - [U_1]'_1 c_2\alpha = -U_2(c_2)$$

a teda dostávame rovnice pre

$$\alpha^B = \frac{[U_2]'_1}{[U_1]'_1}, \tag{2.12}$$

$$\beta^B = \frac{U_2(c_2)}{[U_1]'_1} - \alpha^B c_2, \tag{2.13}$$

kde $\alpha^B, \beta^B, [U_1]'_1, [U_2]'_1, U_2(c_2), c_2$ sú hodnoty zahrnuté pre prípad BOA. Pevné α a β nemusí viesť k BOA, pretože rodičovská optimalizácia nie je konvexný problém, a preto podmienky druhého rádu nemusia platiť. V prípade, že neplatia podmienky pre fixné α a β, dosiahneme BOA s premennými α a β, ktoré sú funkciami c_1, c_2, n, resp. vždy zabezpečíme podmienky druhého rádu funkciami $\alpha(\cdot)$ a $\beta(\cdot)$. Optimálne hodnoty $\alpha(\cdot)$ a $\beta(\cdot)$ budú práve rovné α^B a β^B daných zo vzťahov (2.12) a (2.13).

Z konkávnosti vyplýva, že $\alpha^B > 0$, pretože $[U_1]'_1, [U_2]'_1$ sú kladné. Z rovnosti pre α^B vyplýva, že ak hraničný úžitok detí dáva vyššie hodnoty ako hraničný úžitok rodiča, tak α^B bude rásť a naopak. Znamienko pre β^B zistíme z výrazu $\beta^B = \frac{U_2(c_2)}{[U_1]'_1} - \alpha^B c_2 = \frac{U_2(c_2) - c_2[U_2]'_1}{[U_1]'_1}$, kde opäť vďaka konkávnosti U_2 v c_2 a nezápornosti U_2 vyplýva, že $\beta^B \geq 0$. Premenná β^B bude dávať lepšie výsledky, ak hraničný úžitok rodičov bude menší ako rozdiel úžitku z detí a hraničného úžitku detí násobeného detskou spotrebou.

Opakovaním analýzy pre prípad MOA a pri dodržaní MOA a LFA alokácie a uplatnením dotácie α^M do c_2 a detských dávok β^M dostávame

$$\alpha^M = \frac{[U_2]'_1}{[U_1]'_1}, \tag{2.14}$$

$$\beta^M = \frac{U_2(c_2)}{[U_1]'_1} - \alpha^B c_2 - \frac{(U_1 + U_2 n)}{[U_1]'_1(1+n)}, \tag{2.15}$$

kde funkcie a premenné sú zahrnuté pre prípad MOA.

V tomto prípade vieme určiť iba kladné znamienko pre výraz α^M. Pre β^M nám vyplýva nejednoznačnosť znamienka, pretože posledný výraz na pravej strane rovnosti (2.15) môže byť ako kladný, tak aj záporný.

2.5 Porovnanie veľkostí populácií

Ukážeme, že Benthamovo kritérium BOA vedie k väčšej populácii než MOA. Z porovnania veľkosti populácie v prípade LFA voči BOA zistíme nejednoznačnosť znamienka, pretože LFA môže byť väčšia aj menšia než BOA. Taký istý záver obdržíme aj pri porovnaní LFA a MOA.

Najprv porovnáme funkcie BOA a MOA. Z definície oboch prípadov dostávame,

$$\left.\frac{U_1(c_1,U(c_2),n)+nU_2(c_2)}{1+n}\right|^{BOA} \le \left.\frac{U_1(c_1,U(c_2),n)+nU_2(c_2)}{1+n}\right|^{MOA},$$

kde výraz $|^{BOA}$, resp. $|^{MOA}$ znamená podriadenosť pre BOA, resp. MOA. Zároveň

$$U_1(c_1,U(c_2),n)+nU_2(c_2)|^{BOA} \ge U_1(c_1,U(c_2),n)+nU_2(c_2)|^{MOA}.$$

Obe nerovnosti zapíšeme do jedného výrazu, z ktorého dostaneme požadovaný výsledok

$$\frac{1+n^M}{1+n^B} \le \frac{U_1(c_1,U(c_2),n)+nU_2(c_2)|^{MOA}}{U_1(c_1,U(c_2),n)+nU_2(c_2)|^{BOA}} \le 1 \;\Rightarrow\; n^B \ge n^M.$$

Benthamovo kritérium teda implikuje väčšiu populáciu, resp. udáva väčší počet detí per capita.

Veľkosti populácií pri porovnaní BOA s LFA a MOA s LFA nevieme presne zistiť. Obe porovnania ukazujú všetky tri varianty. Nasledujúce nerovnosti dokážu spomínanú nejednozačnosť. Z definície vyplýva

$$\left.\frac{U_1(c_1,U(c_2),n)+nU_2(c_2)}{1+n}\right|^{LFA} \le \left.\frac{U_1(c_1,U(c_2),n)+nU_2(c_2)}{1+n}\right|^{MOA},$$

$$U_1(c_1,U(c_2),n)+nU_2(c_2)|^{LFA} \ge U_1(c_1,U(c_2),n)|^{LFA} \ge U_1(c_1,U(c_2),n)|^{MOA} \Rightarrow$$

$$\frac{1+n^M}{1+n^L} \le 1 + \left.\frac{nU_2(c_2)}{U_1(c_1,U(c_2),n)}\right|^{MOA}.$$

Keďže v poslednej nerovnosti je pravá strana väčšia než 1, nevieme povedať, či je veľkosť populácie pri LFA n^L väčšia, menšia, alebo rovná než veľkosť populácie pri MOA, n^M. Rovnakou analýzou by sme došli aj k nejednoznačnosti medzi prípadmi LFA a BOA.

2.6 Dodatok k možným problémom

Spomenieme ešte malé externality. Pri zásobovaní verejných jednotiek do určitých zdrojov, ako je vojsko, alebo napríklad výskum, dosiahneme zníženie per capita týchto jednotiek pri zvýšení populácie. Toto môže viesť k neefektívnosti na trhu pre prípad LFA. Ďalej, ak máme konštantné, resp. fixné množstvo neobnoviteľných zdrojov, ktoré musí byť kombinované s prácou pre výrobu nových jednotiek na spotrebu. Toto môže viesť k Malthusovej znižujúcej návratnosti pre väčšiu populáciu. Takýto problém podporuje neefektivitu v ekonomike. Ďalšie externality sú popísané v Nerlove, 1933,1984. Nesmieme taktiež zabudnúť, že rodič má úžitok z detí a preto sme doplnili výraz $nU_2(c_2)$ do funkcii U_1, keď sme definovali BOA, resp. MOA. Ak ale budeme rozmýšlať o prípade egoistických rodičov, ktorí nemajú záujem o deti, môžeme odstrániť $nU_2(c_2)$ z rovníc.

Pri analýze prípadu na nekonečnom časovom horizonte by sme dosiahli také isté výsledky ako v prípade stacionárneho príkladu, teda $n^B > n^M$. Pre presnejšiu analýzu na nekonečnom časovom horizonte, viď článok [9].

3 Spojitý model

V tomto modeli budeme porovnávať tempo rastu populácie a produkcie, odvodené z funkcií blahobytu Benthama a Milla. Ukážeme, že vzhľadom na predchádzajúci model a pri dodržaní podmienok optimality, Benthamovo kritérium vedie k menšej veľkosti populácie a vyššiemu ekonomickému rastu než Millovo kritérium. Týmto modelom sa zaoberal článok [11], a neskôr aj [13]. V oboch sme našli, predpokladáme, tlačovú chybu pri zadefinovaní parametra pre Benthamovo, resp. Millovo kritérium. Preto zavádzame transformáciu $\psi = 1 - \epsilon$, ktorá bude spoločná aj pre kapitolu 4.

3.1 Formulácia modelu

Budeme uvažovať o spojitom čase a optimálnom modele rastu. Opäť budeme maximalizovať životný úžitok reprezentatívneho agenta, resp. generácie. Okamžitý úžitok závisí od per capita spotreby $c(t)$ a od stupňa rastu populácie $n(t)$. Existuje tu jedno-jednoznačná zhoda medzi stupňom rastu populácie a počtom detí. Na zabezpečenie existencie rovnovážneho stavu budeme predpokladať, že okamžitá funkcia úžitku nadobúda konštantnú medzičasovú elasticitu substitúcie. Funkciu úžitku zapíšeme ako

$$u(c(t), n(t)) = \frac{[c(t)^{\alpha} n(t)^{1-\alpha}]^{\sigma}}{\sigma}, \tag{3.1}$$

kde $0 < \alpha < 1$ a $\sigma < 1$. Parameter α je Cobb-Douglasov paramater. Z tejto funkcie, dostávame konštantnú medzičasovú elasticitu substitúcie v spotrebe $\frac{-cu''(c)}{c'(c)}$ rovnú $1 - \alpha\sigma$. Navyše existencia rovnováhy pri absencii exogénneho technického pokroku požaduje konštantnú návratnosť vzhľadom na per capita kapitál. Budeme predpokladať, že per capita výstup $y(t) = Ak(t)$, kde A označuje technologický pokrok. Pri podmienkach začiatočných hodnôt N a k, dostávame úlohu maximalizácie reprezentatívneho agenta, alebo generácie rovnú

$$\max\ W = \int_0^\infty \frac{[c(t)^\alpha n(t)^{1-\alpha}]^\sigma}{\sigma} N(t)^\psi e^{-\rho t}\, dt \tag{3.2}$$

vzhľadom na

$$\dot{k}(t) = Ak(t) - c(t) - n(t)k(t), \tag{3.3}$$

$$\dot{N}(t) = n(t)N(t), \tag{3.4}$$

$$k(0) = k_0 > 0 \text{ a } N(0) = N_0 > 0$$

$$c(t) \geq 0, \quad n(t) \geq 0, \quad k(t) \geq 0, \qquad \text{pre všetky } t \geq 0,$$

kde $\rho > 0$ znamená preferenciu času, $N > 0$ celkovú veľkosť populácie a $t \geq 0$ je časový index. Budeme požadovať, aby ψ malo hodnoty z jednotkového intervalu, teda $\psi \in < 0, 1 >$. Pre Benthamovo, resp. Millovo kritérium bude mať ψ hodnotu rovnú 1, resp. 0. Nesmieme zabudnúť ešte na podmienku konvergencie a ohraničenosti pre integrál W. Preto pre existenciu optima predpokladáme, aby $\sigma < 0$.

3.2 Podmienky maxima

Nutné a postačujúce podmienky pre existenciu optima dostaneme pomocou Pontriaginovho princípu maxima z Hamiltonovej funkcie tvaru

$$H = e^{-\rho t}\left\{ \frac{[c(t)^\alpha n(t)^{1-\alpha}]^\sigma}{\sigma} N(t)^\psi + \right.$$
$$\left. \lambda_1[Ak(t) - c(t) - n(t)k(t) - \dot{k}(t)] + \lambda_2[n(t)N(t) - \dot{N}(t)] \right\}. \tag{3.5}$$

Vďaka konkávnosti Hamiltonovej funkcie, budú nutné podmienky 1.rádu aj postačujúcimi podmienkami. Podmienky prvého rádu nadobúdajú tvar

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha c(t)^{\alpha\sigma - 1} n(t)^{(1-\alpha)\sigma} N(t)^\psi = \lambda_1, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\alpha)c(t)^{c\sigma} n(t)^{(1-\alpha)\sigma - 1} N(t)^\psi = \lambda_1 k(t) - \lambda_2 N(t), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{k}(t) = Ak(t) - c(t) - n(t)k(t), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{N}(t) = n(t)N(t), \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = (\rho\lambda_1 - \dot{\lambda_1}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda_1} = \rho\lambda_1 + n(t)\lambda_1 - A\lambda_1, \tag{3.10}$$
$$\frac{\partial H}{\partial N} = (\rho\lambda_2 - \dot{\lambda_2}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda_2} = (\rho - n(t))\lambda_2 - \frac{\psi}{\sigma}c(t)^{\alpha\sigma}n(t)^{(1-\alpha)\sigma}N(t)^{\psi-1}, \tag{3.11}$$

kde multiplikátori λ_1 a λ_2 sú vlastne adjungované premenné, resp. tieňové ceny. Sú to hraničné hodnoty v čase 0 pri danej jednotke kapitálu v čase t.
Podmienky tranzverzálnosti zapíšeme ako

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_1 k(t) = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_2 N(t) = 0.$$

Pre rovnovážne ekvilibrium a z definície vidieť, že per capita spotreba c, per capita kapitál k a veľkosť populácie N rastú konštantnou mierou. Rovnosť (3.4) nám implikuje spoločný stupeň rastu

$$\theta = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k} \tag{3.12}$$

pre spotrebu a kapitál. Navyše po zlogaritmovaní a zderivovaní (3.6) podľa času t a z definície (3.12) dostaneme

$$(\alpha\sigma - 1)\theta + \psi n = \frac{\dot{\lambda_1}}{\lambda_1} \tag{3.13}$$

a dosadením z (3.10) za $\frac{\dot{\lambda_1}}{\lambda_1}$ dostávame rovnosť

$$(1 - \alpha\sigma)\theta = A - \rho - (1 - \psi)n, \tag{3.14}$$

čo je vlastne rovnosť, ktorá udáva, že čistá návratnosť z investícií sa musí rovnať návratnosti zo spotreby, alebo

$$A - n = (1 - \alpha\sigma)\theta + \rho - \psi n. \tag{3.15}$$

Vydelením rovnosti (3.7) a (3.6) dostaneme

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{N}{c} = \frac{k}{c} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha n}, \tag{3.16}$$

čo implikuje výraz

$$\frac{\dot{\lambda_2}}{\lambda_2} - \frac{\dot{\lambda_1}}{\lambda_1} = \theta - n. \tag{3.17}$$

Výraz $\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}$ získame z rovností (3.6), (3.16), (3.3), ktoré dosadíme do (3.11)

$$\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} = \rho - n + \frac{(n\psi)(A-\theta-n)}{\sigma((1-\alpha)(A-\theta)-n)}. \tag{3.18}$$

Nakoniec teda dostávame výraz tvaru

$$\sigma(1-\alpha)(\theta-A) = (\psi-\sigma)n, \tag{3.19}$$

z ktorého môžeme s pomocou (3.14) vypočítať stupeň rastu populácie n, ktorý je rovný

$$n = \frac{\sigma(1-\alpha)(\alpha\sigma A-\rho)}{(1-\sigma)(\psi-\alpha\sigma)} \tag{3.20}$$

a spoločný stupeň rastu θ kapitálu, spotreby a produkcie

$$\theta = \frac{A-\rho}{1-\alpha\sigma} - \frac{\sigma(1-\psi)(1-\alpha)(\alpha\sigma A-\rho)}{(1-\alpha\sigma)(1-\sigma)(\psi-\alpha\sigma)}. \tag{3.21}$$

3.3 Analýza populácií

Teraz môžeme analyzovať následky funkcií sociálneho blahobytu Benthama a Milla. Zderivovaním výrazu (3.20) vzhľadom na premennú ψ dostaneme výraz

$$\frac{dn}{d\psi} = -\frac{\sigma(1-\alpha)(A\alpha\sigma-\rho)}{(1-\sigma)(\psi-\alpha\sigma)^2}, \tag{3.22}$$

ktorý nám udáva zmenu veľkosti populácie vzhľadom na parameter ψ. Aby sme dodržali ohraničenie celoživotnej funkcie úžitku (3.1) a aby existovalo maximum, musí platiť nasledovná nerovnosť $\alpha\sigma\theta+\psi n < 0$. Použijúc (3.21), musí platiť nerovnosť $\alpha\sigma A-\rho < 0$. Z daného $\sigma < 0$ nám vyplýva, že vo výraze (3.22) $\frac{dn}{d\psi} < 0$. Nakoniec derivovaním (3.21) podľa premennej ψ dostávame výraz, ktorý nám určuje, ako sa správa spoločný stupeň rastu pri zmene ψ. Dostávame

$$\frac{d\theta}{d\psi} = -\frac{dn}{d\psi} > 0$$

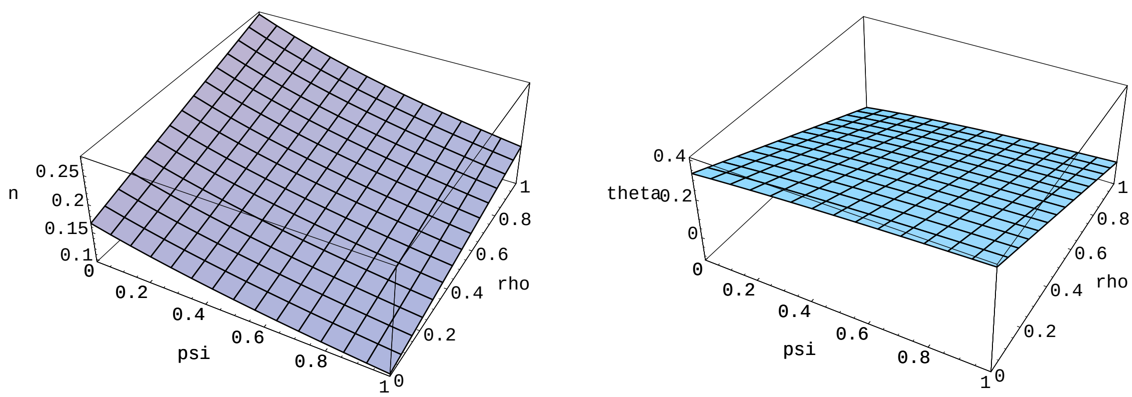
a teda, ak ψ ide k jednotke, θ rastie a n klesá. Alebo, ak sa ψ blíži k nule, θ klesá a n rastie.

Benthamovo kritérium teda vedie k vyššiemu ekonomickému rastu a k menšej veľkosti populácie než Millovo kritérium.

Náš výsledok zhrnieme do nasledovnej vety. *Predpokladajme, že reprezentatívna generácia čelí problému definovaného vzťahom (3.2). Ak existuje optimum, tak pozdĺž kompetitívnej cesty ekvilibria, Benthamovo kritérium ($\psi = 1$) vedie k menšej populácii a vyššiemu ekonomickému rastu než Millovo kritérium ($\psi = 0$).*

3.4 Dodatok

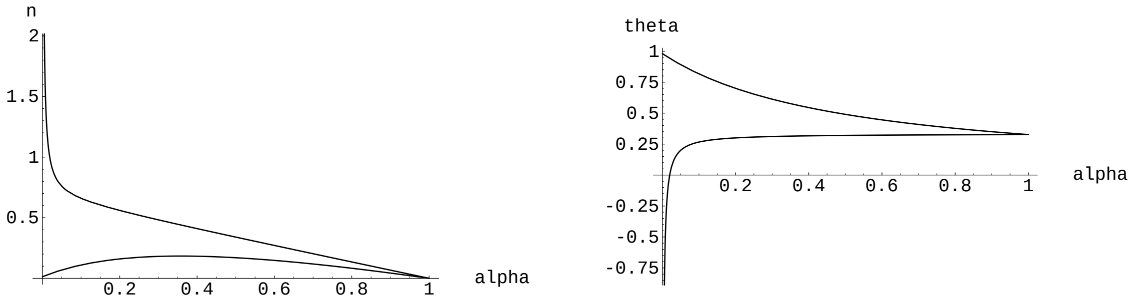
Pomocou grafov, ktoré sme spravili v matematickom programe mathematica, ukážeme priebeh funkcií (3.20) a (3.21), z ktorých sa dajú sledovať vplyvy na mieru pôrodnosti n a na spoločný stupeň rastu θ. Nasledujúce hodnoty sme zobrali z práce [13]: $\sigma = -2, \quad \alpha = 0.75, \quad A = 1, \quad \rho = 0.02.$



Obr. 1: Vývoj miery pôrodnosti a spoločného stupňa rastu v závislosti od ψ, ρ

Z obrázka vľavo je vidieť rast miery pôrodnosti, ak premenná ψ klesá, resp. ide k nule a zároveň, ak preferencia času ρ rastie. Na druhom obrázku vidieť rast θ, ak naopak ψ rastie a preferencia času klesá. Správanie preferencie času tiež ukazuje správanie sa rodičov. Čím je nižšia miera ρ, tým je rodič sebeckejší a naopak.

Ukážeme ešte správanie sa miery pôrodnosti a spoločného stupňa rastu pri zmene Cobb-Douglasovej konštanty α, ktorá určuje veľkosť vstupu pre mieru pôrodnosti a spotrebu per capita vo funkcii úžitku. Uvedieme obe kritéria Benthamovo $\psi = 1$ aj Millovo kritérium $\psi = 0$.



Obr. 2: Správanie sa miery pôrodnosti a spoločného stupňa rastu od Cobb-Douglasovej konštanty α

Konkávna funkcia na ľavom obrázku a konvexná na pravom opisuje správanie sa premenných n a θ podľa Benthamovo predpokladu $\psi = 1$. Na dosiahnutie maximálnej miery pôrodnosti by sme preto navrhovali zmeniť veľkosť α z 0.75 ako navrhuje [13] na $\alpha \doteq 0.35$, pretože v tomto bode a za daných hodnôt by sme dosiahli väčšiu mieru pôrodnosti. Pre túto α dosiahneme aj väčší spoločný stupeň rastu ako práca [13]. Konvexná funkcia na ľavom a konkávna na pravom obrázku opisuje správanie sa podľa Millovho kritéria $\psi = 0$. Tu dostávame opačné závislosti ako u Benthama, teda ak α pôjde k 0, bude miera pôrodnosti rásť a θ bude klesať.

4 Základný model populačného a ekonomického rastu

V tejto kapitole ukážeme model, ktorý má základy v predchádzajúcich modeloch s predpokladom endogénnej pôrodnosti. Tento model je typom spojitého času Ramseyovho prípadu. Zakladá sa na modeloch, ktoré skúmali Palivos a Yip (1993a), [13] a sú spomenuté aj v [1]. Podobným prípadom sa zaoberala aj práca [6]. Tento model sa líši od predchádzajúceho modelu vo svojich predpokladoch ako aj funkie úžitku.

Použitie spojitého času v tomto modele má viac výhod. Ak skúmame ekonómiu a nie iba typ jednoduchej rodiny, vyvarujeme sa možným problémom spojeným s agregáciou v diskrétnom časovom modele prekrývajúcich sa generácií. Taktiež môžeme analyzovať prechodnú dynamiku a nakoniec sa pracuje lepšie s matematikou v spojitom prípade ako v diskrétnom.

4.1 Formulácia modelu

Predpokladáme ekonómiu s reprezentatívnou integrovanou domácnosť-firmou a nekonečno žijúcich agentov s altruistickými sklonami v rodine. Ďalej predpokladáme dokonalú konkurenciu na trhu. Na kompetitívnom trhu sú zastúpené domácnosti a firmy agregovanej veľkosti N reprezentujúcej populáciu. Domácnosť rozhoduje zároveň o viacerých veciach. Rozhoduje o spotrebe per capita, miere pôrodnosti a o množstve kapitálu pri investovaní. Takto dostaneme funkciu úžitku rodiny, ktorá má tvar

$$U = \int_0^\infty u(c,n)N^\psi e^{-\rho t}\,dt, \tag{4.1}$$

kde ρ znamená preferenciu času, ψ chápeme ako parameter altruizmu, alebo pre nás známe prípady závislé na kritériu Benthama a Milla, N je celková veľkosť domácností, c je spotreba per capita a n znamená mieru pôrodnosti. Funkciu úžitku môžeme interpretovať ako intertemporálnu a intratempolárnu altruistickú funkciu. Intertemporálny altruizmus chápeme v zmysle čistej miery časovej preferencie. Intratemporálny altruizmus je daný veľkosťou ψ. Pre hodnoty $\psi = 0$ dostaneme Millov prípad, pre $\psi = 1$ dostaneme Benthamovu funkciu sociálneho blahobytu. Premenná $\psi \in < 0, 1 >$ a možná hodnota z intervalu by znamenala interpoláciu medzi spomenutými dvoma prípadmi. Funkcia úžitku je konkávna, pre ktorú platia nerovnosti

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial c} &> 0, & \frac{\partial u}{\partial n} &> 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} &< 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} &< 0. \end{aligned}$$

Funkcia úžitku bude tvaru CRRA(constant relative risk aversion), čo znamená, že má konštantnú elasticitu hraničného úžitku v premenných c, n a teda

$$u(c, n) = \frac{\left(cn^{\phi}\right)^{1-\theta}}{1-\theta}, \tag{4.2}$$

pričom $\theta =$ konšt. $= -\frac{u''(c)c}{u'(c)}$ kde $\theta > 0$ a $\phi > 0$. Premenná ϕ podmieňuje veľkosť n, ktorá vstupuje do funkcie úžitku. Pre klesajúci hraničný úžitok v miere pôrodnosti n, predpokladáme, že $\phi(1-\theta) - 1 < 0$. Túto nerovnosť obdržíme pomocou druhých parciálnych derivácií funkcie u. Pri použití (4.2) dostávame funkciu úžitku domácností

$$U = \int_0^{\infty} \frac{\left(cn^{\phi}\right)^{1-\theta}}{1-\theta} N^{\psi} e^{-\rho t}\, dt, \qquad \theta \neq 1. \tag{4.3}$$

Vývoj populácie v čase t je zapísaný

$$\dot{N} = (n-d)N, \tag{4.4}$$

kde $n - d > 0$ znamená čistú mieru pôrodnosti, $n > 0$ je miera pôrodnosti a $d > 0$ je miera úmrtnosti.

Nesmieme zabudnúť ukázať a zadefinovať rozpočtové ohraničenie. Predpokladáme produkčnú funkciu $F(N, K)$ závislú od práce, alebo veľkosti pracovnej sily N a fyzického kapitálu K. Produkčná funkcia spĺňa Inadove podmienky $\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$ a $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$. Produkčná funkcia musí byť homogénna stupňa jedna. Kapitál sa znehodnocuje časom konštantnou veľkosťou δ. Rozpočtové ohraničenie zapíšeme ako meniaci sa kapitál

$$\dot{K} = AK^{\alpha}N^{1-\alpha} - \delta K - enK - cN, \tag{4.5}$$

alebo pre per capita $k = \frac{K}{N}$

$$\dot{k} = Ak^{\alpha} - \delta k - (n-d)k - nek - c, \tag{4.6}$$

kde K je celkový kapitál, A je technologický pokrok, α je Cobb-Douglasova konštanta a e je výška nákladov na výchovu jedného dieťaťa.

Problém optimalizácie nakoniec formulujeme ako

$$\max_{c,n} \; U = \int_0^{\infty} \frac{\left(cn^{\phi}\right)^{1-\theta}}{1-\theta} N^{\psi} e^{-\rho t}\, dt, \qquad \theta \neq 1,$$

vzhľadom na

$$\begin{aligned} \dot{N} &= (n-d)N, \\ \dot{K} &= AK^{\alpha}N^{1-\alpha} - \delta K - enK - cN, \\ &\quad N > 0, K > 0, n > 0, c > 0, \\ &\quad K(0) > 0, N(0) > 0. \end{aligned}$$

Na ohraničenie celoživotného úžitku a pre existenciu maxima ešte predpokladáme, aby $\rho > \psi(n-d)$, čo je to isté ako efektívna časová preferencia.

4.2 Podmienky maxima

Pre podmienky maxima vytvoríme Hamiltonovu funkciu

$$H = N^{\psi} \frac{\left(cn^{\phi}\right)^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda_N (n-d)N + \lambda_K \left(AK^{\alpha}N^{1-\alpha} - \delta K - enK - cN\right), \tag{4.7}$$

kde premenné λ_N a λ_K znamenajú tieňové ceny populácie a kapitálu. Na dosiahnutie maxima predpokladáme, aby $\phi(1-\theta) - \theta < 0$. Zabezpečí nám to negatívna semidefinitnosť Hessovej matice. Hessova matica pre Hamiltonián má tvar

$$D = \begin{bmatrix} H_{cc} & H_{cn} \\ H_{nc} & H_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{cc} & u_{cn} \\ u_{nc} & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Keďže $u_{cc} = \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} < 0$ musí byť determinant kladný a teda

$$\begin{aligned} & u_{cc}u_{nn} - u_{cn}^2 > 0 \quad \Rightarrow \\ & -\theta\phi(\phi(1-\theta)-1)c^{-2\theta}n^{2(\phi(1-\theta)-1)} > (\phi(1-\theta)c^{-\theta}n^{\phi(1-\theta)-1})^2 \quad \Rightarrow \\ & 0 > \phi(1-\theta) - \theta. \end{aligned}$$

Maximalizujeme Hamiltonián vzhľadom na spotrebu per capita c a stupeň pôrodnosti n. Dostaneme podmienky prvého rádu

$$\frac{\partial H}{\partial c} = N^{\psi} c^{-\theta} n^{\phi(1-\theta)} - \lambda_K N = 0, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \phi N^{\psi} c^{1-\theta} n^{\phi(1-\theta)-1} + \lambda_N N - \lambda_K e K = 0. \tag{4.9}$$

Podmienky prvého rádu interpretujeme nasledovne. Na optimálnej ceste hraničný úžitok zo zvýšenia v spotrebe per capita sa musí rovnať nákladom. Náklady sú merané tieňovou cenou kapitálu násobeného celkovou populáciou. Zvýšenie v spotrebe teda ovplyvní celkovú populáciu. Rovnosť (4.8) implikuje, že tieňová cena kapitálu meria objem úžitku spotreby per capita, ktorú si domácnosť želá predchádzať za účelom zvýšenia objemu kapitálu per capita o jednu jednotku. Druhú podmienku interpretujeme podobným spôsobom. Na optimálnej ceste zvýšenie pôrodnosti vedie k priamemu zvýšeniu v úžitku domácnosti. Toto zvýšenie v pôrodnosti, tiež implikuje zvýšenie budúcej populácie.

Ďalej použijeme Pontriaginov princíp maxima a nájdeme Eulerove rovnosti opisujúce stav premenných kapitálu a populácie,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial K} &= \lambda_K \left(\alpha A K^{\alpha-1} N^{1-\alpha} - \delta - en\right) = -\dot{\lambda}_K + \rho \lambda_K \\ &\Rightarrow \alpha A K^{\alpha-1} N^{1-\alpha} - \delta - en = -\frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K} + \rho \end{aligned} \tag{4.10}$$

a tak isto

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial N} &= \frac{\psi}{1-\theta} N^{\psi-1} c^{1-\theta} n^{\theta(1-\theta)} + \lambda_N (n-d) + \lambda_K \left((1-\alpha) A K^{\alpha} N^{-\alpha} - c\right) \\ &= -\dot{\lambda}_N + \rho \lambda_N \\ &\Rightarrow \frac{\frac{\psi}{1-\theta} N^{\psi-1} c^{1-\theta} n^{\phi(1-\theta)}}{\lambda_N} + \frac{\lambda_K}{\lambda_N}\left((1-\alpha) A K^{\alpha} N^{-\alpha} - c\right) \\ &= -\frac{\dot{\lambda}_N}{\lambda_N} + \rho - (n-d). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ďalej nájdeme podmienky transverzality

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_K K(t) e^{-\rho t} = 0, \tag{4.12}$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_N N(t) e^{-\rho t} = 0. \tag{4.13}$$

Ľavé strany Eulerových rovností interpretujeme ako návratnosť investovaného kapitálu, ktorý sa skladá z hraničného produktu kapitálu mínus amortizácia a z nákladov na výchovu detí. Náklady na deti sa budú zvyšovať tým viac, čím bude ekonomika vyvinutejšia. Ak populáciu v prvej Eulerovej podmienke predpokladáme ako konštantnú, tak nárastom kapitálu rastie aj kapitál per capita a preto rastú aj náklady na výchovu detí. Ešte pripomenieme, že návratnosť do kapitálu je návratnosť do celkového kapitálu a nie iba do kapitálu per capita. Pravé strany ukazujú reálnu úrokovú mieru, čo je úrok rastu v tieňových cenách kapitálu a čistého úroku časovej preferencie.

4.3 Rovnice dynamiky

Obe podmienky prvého rádu a Eulerove rovnosti spolu s podmienkami transverzálnosti vytvárajú dôležité podmienky pre optimálne riešenie maximalizujúcich domácností. Pre kvalitný výsledok a dostatok podmienok si teraz ukážeme Arrowove podmienky[1] konkávnosti. Odvodené funkcie dopytu zistíme z podmienok prvého rádu. Z výrazu (4.8) získame rovnicu pre spotrebu per capita c,

$$c = \left(\frac{N^{\psi-1} n^{\phi(1-\theta)}}{\lambda_K}\right)^{\frac{1}{\theta}} = \left(\frac{\lambda_K N}{N^{\psi}}\right)^{-\frac{1}{\theta}} n^{\frac{\phi(1-\theta)}{\theta}}$$

a z (4.9) obdržíme rovnicu per capita pre pôrodnosť n,

$$n = \left(\frac{\lambda_K e K - \lambda_N N}{\phi N^{\psi} c^{1-\theta}}\right)^{\frac{1}{\phi(1-\theta)-1}} = \left(\frac{\lambda_K e K - \lambda_N N}{\phi N^{\psi}}\right)^{\frac{1}{\phi(1-\theta)-1}} c^{-\frac{1-\theta}{\phi(1-\theta)-1}}.$$

Dosadením výrazu za c do n dostaneme odvodenú funkciu dopytu pre n závislú na premenných $K, N, \lambda_N, \lambda_K$ a rovnú

$$n(K, N, \lambda_N, \lambda_K) = \left(\frac{\lambda_K e K - \lambda_N N}{\phi N^{\psi}}\right)^{\frac{\theta}{\phi(1-\theta)-\theta}} \left(\frac{\lambda_K N}{N^{\psi}}\right)^{\frac{1-\theta}{\phi(1-\theta)-\theta}}. \tag{4.14}$$

Dosadením $n(K, N, \lambda_N, \lambda_K)$ do c dostaneme odvodenú funkciu dopytu pre spotrebu c tvaru

$$c(K, N, \lambda_N, \lambda_K) = \left(\frac{\lambda_K N}{N^{\psi}}\right)^{-\frac{\phi(1-\theta)-1}{\phi(1-\theta)-\theta}} \left(\frac{\lambda_K e K - \lambda_N N}{\phi N^{\psi}}\right)^{\frac{\phi(1-\theta)}{\phi(1-\theta)-\theta}}. \tag{4.15}$$

[1] Viď literatúru [13].

Odvodené funkcie dopytu $n(.), c(.)$ teraz môžeme jednoducho diferencovať. Najpr si zadefinujeme maximalizujúci Hamiltonián ako

$$\begin{aligned} H^0(K, N, \lambda_N, \lambda_K) &= \max_{c,n} H(K, N, \lambda_N, \lambda_K, c, n) \\ &= N^{\psi} \frac{(c(K, N, \lambda_N, \lambda_K) n(K, N, \lambda_N, \lambda_K)^{\phi})^{1-\theta}}{1-\theta} \\ &+ \lambda_N (n(K, N, \lambda_N, \lambda_K) - d) N \\ &+ \lambda_K \left(AK^{\alpha} N^{1-\alpha} - \delta K - en(K, N, \lambda_N, \lambda_K) K - c(K, N, \lambda_N, \lambda_K) N \right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Na určenie konkávnosti maximalizujúceho Hamiltoniána v K a N musíme urobiť prvé totálne diferenciály podľa K a N. Obdržíme totálny diferenciál H^0 podľa K

$$\frac{dH^0}{dK} = \frac{\partial H^0}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial K} + \frac{\partial H^0}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial K} + \frac{\partial H^0}{\partial K}$$

a totálny diferenciál H^0 podľa N

$$\frac{dH^0}{dN} = \frac{\partial H^0}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial N} + \frac{\partial H^0}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial N} + \frac{\partial H^0}{\partial N}.$$

Z obálkovej teorémy musia byť prvé dva výrazy obidvoch totálnych diferenciálov na pravej strane rovné nule. Parciálne derivácie maximalizujúceho Hamiltoniána vedú k rovnostiam

$$\frac{\partial H^0}{\partial K} = \lambda_K \left(\alpha A K^{\alpha-1} N^{1-\alpha} - \delta - en(K, N, \lambda_N, \lambda_K) \right)$$

a

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^0}{\partial N} &= \frac{\psi}{1-\theta} N^{\psi-1} c(K, N, \lambda_N, \lambda_K)^{1-\theta} n(K, N, \lambda_N, \lambda_K)^{\phi(1-\theta)} \\ &+ \lambda_N (n(K, N, \lambda_N, \lambda_K) - d) \\ &+ \lambda_K \left((1-\alpha) A K^{\alpha} N^{-\alpha} - c(K, N, \lambda_N, \lambda_K) N \right). \end{aligned}$$

Nakoniec pre konkávnosť maximalizujúceho Hamiltoniána v premenných K a N požadujeme zároveň tri nerovnosti

$$\frac{\partial^2 H^0}{\partial K^2} \leq 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 H^0}{\partial N^2} \leq 0$$

$$\text{a} \quad \frac{\partial^2 H^0}{\partial K^2}\frac{\partial^2 H^0}{\partial N^2} - \left(\frac{\partial^2 H^0}{\partial K \partial N} \right)^2 \geq 0.$$

Začneme analyzovať rovnicu dynamiky pre per capita spotrebu c. Zlogaritmujeme a následne zderivujeme podľa času podmienku prvého rádu (4.8) pre c, resp.

$$\ln \lambda_K = (\psi - 1)\ln N - \theta \ln c + \phi(1-\theta)\ln n$$

a po derivovaní dostávame

$$\frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K} = (\psi - 1)(n-d) - \theta\frac{\dot{c}}{c} + \phi(1-\theta)\frac{\dot{n}}{n}.$$

Použitím s Eulerovou rovnicou pre kapitál (4.10), dostaneme

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\Big(\alpha A K^{\alpha-1}N^{1-\alpha} - \delta - en - \rho + (\psi-1)(n-d) + \phi(1-\theta)\frac{\dot{n}}{n}\Big). \tag{4.17}$$

Rovnicu pre mieru pôrodnosti získame podobným spôsobom. Vydelíme rovnicu (4.9) s (4.8) a dostaneme

$$\phi\frac{c}{n} = e\frac{K}{N} - \frac{\lambda_N}{\lambda_K}.$$

Logaritmovaním a derivovaním podľa času a s pomocou oboch Eulerových rovností dostávame rovnicu dynamiky pre mieru pôrodnosti

$$\begin{aligned}\frac{\dot{n}}{n} &= \frac{\dot{c}}{c} - \frac{n}{\phi}\left[\frac{\psi}{1-\theta} - (1+e)\right] - \frac{n}{\phi}\frac{K}{cN}(1-\alpha)AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha}(1+e) \\ &- \alpha AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha} + \delta - d + (1-e)n.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Pre mieru pôrodnosti môžeme prepísať rovnicu dynamiky do tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\dot{n}}{n} &= \frac{\theta}{\phi(1-\theta)-\theta}\Bigg\{\frac{1}{\phi}\frac{n}{c}\left[\frac{\psi}{1-\theta}c + (1+e)\big((1-\alpha)AK^{\alpha}N^{-\alpha} - c\big)\right] \\ &\quad +(\alpha AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha} - \delta - (n-d) - ne)) \\ &\quad -\frac{1}{\theta}\big(\alpha AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha} - \delta - (n-d) - ne - \rho + \psi(n-d)\big)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Rovnicu (4.17) môžeme tiež prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} &= -\frac{1}{\phi(1-\theta)-\theta}\big(\alpha AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha}(-\delta - (n-d) - ne - \rho + \psi(n-d)\big) \\ &\quad +\frac{\phi(1-\theta)}{\phi(1-\theta)-\theta}\Bigg\{\frac{1}{\phi}\frac{n}{c}\left(\frac{\psi}{1-\theta}c + (1+e)((1-\alpha)AK^{\alpha}N^{-\alpha} - c)\right) \\ &\quad +(\alpha AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha} - \delta - (n-d) - ne)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

4.4 Rovnovážny stav

Rovnovážny stav systému je charakterizovaný, keď v rovniciach (4.6), (4.20) a (4.19) sú tempá rastu per capita premenných konštantné. Ešte raz si pripomenieme celkový dynamický systém, z ktorého zistíme rovnovážny stav.

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{k}}{k} &= Ak^{\alpha-1} - \delta - (n-d) - ne - \frac{c}{k}, \\
\frac{\dot{c}}{c} &= -\frac{1}{\phi(1-\theta)-\theta}\left(\alpha Ak^{\alpha-1} - \delta - (n-d) - ne - \rho + \psi(n-d)\right) \\
&\quad + \frac{\phi(1-\theta)}{\phi(1-\theta)-\theta}\left\{\frac{1}{\phi}\frac{n}{c}\left(\frac{\psi}{1-\theta}c + (1+e)((1-\alpha)Ak^{\alpha} - c)\right)\right. \\
&\quad \left. + (\alpha Ak^{\alpha-1} - \delta - (n-d) - ne)\right\}, \qquad (4.21) \\
\frac{\dot{n}}{n} &= \frac{\theta}{\phi(1-\theta)-\theta}\left\{\frac{1}{\phi}\frac{n}{c}\left[\frac{\psi}{1-\theta}c + (1+e)\left((1-\alpha)Ak^{\alpha} - c\right)\right]\right. \\
&\quad + (\alpha Ak^{\alpha-1} - \delta - (n-d) - ne) \\
&\quad \left. - \frac{1}{\theta}\left(\alpha Ak^{\alpha-1} - \delta - (n-d) - ne - \rho + \psi(n-d)\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Spotreba, kapitál a pôrodnosť per capita rastú konštantnou mierou a teda sú predchádzajúce rovnice v rovnovážnom stave rovné nule. Pre jednoduchšie rátanie si zavedieme transformácie premenných ako navrhuje práca [13], $x = \frac{c}{k}$ a $z = Ak^{\alpha-1}$. Premenná z predstavuje priemerný produkt kapitálu. Dostávame nasledovné rovnosti

$$
\begin{aligned}
0 &= z - \delta - (n-d) - ne - x, \\
0 &= \alpha z - \delta - (n-d) - ne - \rho + \psi(n-d), \\
0 &= \frac{n}{\phi}\left[\frac{\psi}{1-\theta} + \frac{1+e}{x}(1-\alpha)z - (1+e)\right] + \alpha z - \delta - (n-d) - ne.
\end{aligned}
$$

Ďalej navrhuje urobiť ešte jednu transformáciu o šiestich premenných, kde

$$
\begin{aligned}
\beta &= -\delta + d, \\
\gamma &= 1 + b, \\
\iota &= 1 - \psi + b, \\
\eta &= -\delta - \rho + (1-\psi)d, \\
\lambda &= \frac{\psi}{\phi(1-\theta)} - \frac{1+b}{\phi},
\end{aligned}
$$

$$\mu = \frac{(1+b)(1-\alpha)}{\phi}.$$

Ak použijeme tieto transformácie dostaneme kvadratickú rovnicu pre n,

$$\begin{aligned} 0 &= n^2\left[\frac{\mu\iota}{\alpha} + \left(\frac{\iota}{\alpha} - \gamma\right)(\lambda + \iota - \gamma)\right] \\ &- n\left[\frac{\mu\eta}{\alpha} + \left(\frac{\iota}{\alpha} - \gamma\right)(\eta - \beta) + (\lambda + \iota - \gamma)\left(\frac{\eta}{\alpha} - \beta\right)\right] \\ &+ \left(\frac{\eta}{\alpha} - \beta\right)(\eta - \beta), \end{aligned} \tag{4.22}$$

ktorú už môžeme klasicky vyrátať. Ďalej by mali nasledovať numerické riešenia pre dané hodnoty, ale to nie je naším cieľom. Možné analýzy pre dané a výsledné hodnoty nechávame ako otvorený problém, ktorý sa dá modelovať. Nechávame to otvorené aj preto, že nie všetky hodnoty sú optimálne. Rôzne hodnoty záležia nielen od regiónov v danej krajine, ale aj od rôznych krajín vo svete. Nemôžeme napríklad porovnávať Afriku a Európu bez pripomienok k poskytnutým hodnotám.

Nasledujúce dáta sme zobrali z práce [13]. Predpokladáme nasledujúce hodnoty parametrov:

$$\rho = 0.02, \qquad \delta = 0.05, \qquad d = 0.01, \qquad b = 1.0, \qquad A = 1.0,$$
$$\alpha = 0.75, \qquad \theta = 3.0, \qquad \psi = 0.5, \qquad \phi = 0.5.$$

Pri týchto hodnotách by sme ďalej našli, že v rovnovážnom stave existujú dve optimálne riešenia. Jeden rovnovážny stav má vysokú mieru pôrodnosti a malú spotrebu a kapitál. Druhý rovnovážny stav obsahuje nízku mieru pôrodnosti a vysokú spotrebu s kapitálom. Stabilitu riešení by sme získali z Jakobiho matice pre systém rovníc (4.21). Obe riešenia sú stabilné sedlové body. Ešte sa zamyslíme nad optimálnym riešením s nízkou mierou pôrodnosti. Ak klesá ψ dosiahneme menej intratemporálneho altruizmu, čo vedie k vyššiemu stupňu pôrodnosti a nižším hodnotám pre kapitál a spotrebu. Dostali sme opak k predstave, že čím menší altruizmus zvolíme, tým menší stupeň pôrodnosti dosiahneme. Na vysvetlenie uvádza Palivos a Yip (1993a) fakt, že efektívna miera časovej preferencie je endogénna. Nižšia hodnota ψ znamená kritérium pre Millov prípad, ktorý vedie k vyššej efektívnej miere časovej preferencie.

4.5 Matematický dodatok

Obálková teoréma: *Funkcia* $H : R^n \times R^m \to R$ *nech je definovaná pre* $(x, u) \in D \times U$, *kde* D *je otvorená množina. Definujeme funkcie*

$$\begin{aligned} H^0 : R^n &\to R, \\ u^* : R^n &\to R^m, \end{aligned}$$

predpisom

$$\begin{aligned} H^0(x) &= \max_{u \in U} H(x, u), \\ u^*(x) &= \arg\max_{u \in U} H(x, u). \end{aligned}$$

Ak H, H^0 *sú spojite diferencovateľné v* x, *potom*

$$H_x(x, u)|_{u=u^*(x)} = H^0_x(x).$$

Náznak dôkazu:

$$H^0_x(x) = \frac{d}{dx}\left[H(x, u^*(x))\right] = H_x(x, u^*(x)) + H_u(x, u^*(x))\frac{\partial u^*(x)}{\partial x}$$

Ak $u_i^*(x)$ leží vo vnútri U_i, tak $H_{u_i}(x, u^*(x)) = 0$ (nutná podmienka extrému).
Ak $u_i^*(x)$ leží na hranici U_i, tak $u_i^*(x)$ nadobúda v u_i^* extrémnu hodnotu a z toho $\frac{\partial u^*(x)}{\partial x} = 0$, $(u^*(x) : R^n \to U_i)$ v každom prípade sa vynuluje člen $H_u \frac{\partial u^*}{\partial x}$

$$\Rightarrow H^0_x(x) = H_x(x, u^*).$$

$\square$

Literatúra

[1] Barro R. J., Sala-i-Martin X.: *Economic Growth.*
McGraw-Hill, New York, 1995.

[2] Blanchard O. J., Fischer S.: *Lectures on Macroeconomics.*
MIT-Press, Massachusetts, 1989.

[3] Canton E., Meijdan L.: *Altruizmus and the Macroeconomics effect of demographic changes.*
Journal of Population Economics 10, 1997, str. 317-334.

[4] Eckstein Z., Wolpin K. I.: *Endogenous Fertility and Optimal Population Size.*
Journal of Public Economics 27, North-Holland 1985, str. 93-106.

[5] Eckstein Z., Sterne S., Wolpin K. I.: *Fertility Choice, Land, and The Mathusian Hypothesis.*
International Economic Review, Vol.29, No.2, May 1988, str. 353-361.

[6] Golianová M.: *Matematicko-ekonomické modely pôrodnosti.*
Diplomová práca, MFF UK, Bratislava 2000.

[7] Gosiorovský A., Košková K., Pechová M.: *Filozofický slovník.*
Nakladateľstvo Pravda, Bratislava, 1974.

[8] Nerlove M., Razin A., Sadka E.: *Population Size and The Social Welfare Functions of Bentham and Mill.*
Economic Letters 10, 1982, str. 61-64.

[9] Nerlove M., Razin A., Sadka E.: *Population size: Individual choice and Social Optima.*
Quarterly Journals of Economics, May 1985, str. 321-333.

[10] Oberhofer W., Reichsthaler T.: *Bevölkerungsstatistik, Vorlesungsmanuskript.*
Lehrstuhl für Ökonometrie, Wirtschaftswissenschaftliche Fakulät, Universität Regensburg, 2000.

[11] Palivos T., Yip Ch. K.: *Optimal population size and endogenous growth.* Economic Letters 41, 1993, str. 107-110.

[12] Pavlík Z., Rychtaříková J., Šubrtová A.: *Základy demografie.* Academia, Praha, 1986.

[13] Portner C. Ch.: *Population and Economic Groeth.* MSc Dissertation, Institute of Economics, University of Copenhagen, 1996.

[14] Romer D.: *Advanced Macroeconomics.* McGraw-Hill, New York, 1996.

[15] *Rodinná encyklopédia svetových dejín.* Reader's Digest Výber, Bratislava, 2000.