Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Ekonomická a finančná matematika

Model špekulatívnych menových útokov

Diplomová práca

Vypracoval: Ľubomír Schmidt
Vedúci diplomovej práce: Dr. Aleš Černý
Bratislava, Apríl 2002

Obsah

1 Úvod

Menové krízy sú v poslednom období ostro sledovaným javom. Pravidelne sú skúsenosťou transformujúcich sa ekonomík, takmer všetky stredo a východoeurópske krajiny prešli vo svojej histórii aspoň jednou menovou krízou. Ani úspešné a zabehnuté ekonomiky nie sú výnimkou. Menové krízy pôsobia na ekonomiku destabilizujúco a zvyčajne si ich riešenie žiada zásadné, aj politické zmeny v krajine. Mnohokrát sa spájajú s ďalšími ekonomickými problémami, kolapsom finančných inštitúcii, infláciou a vysokou nezamestnanosťou, ako môžeme sledovať na príklade nedávneho vývoja v Argentíne.

Potenciálne ohrozené sú ekonomiky s fixným výmenným kurzom alebo s fluktuačným pásmom, ak kurz atakuje jeho hornú hranicu. Zvyčajným osvedčeným riešením sa v praxi ukázal byť prechod na floating, popr. rozšírenie fluktuačného pásma alebo začlenenie sa do menových únií. Teoreticky, plávajúci kurz znamená nemožnosť podniknutia špekulatívneho útoku. Menové krízy sa však nevyhýbajú ani ekonomikám s plávajúcim kurzom. Svedčí o tom ázijská kríza z roku 1997, v ktorej jedinou krajinou klasifikovanou[1] ako krajina s pevným výmenným kurzom bolo Thajsko. Problémom je neochota centrálych bánk povoliť prudké zmeny kurzu[2], zvyčajne to súvisí s previazanosťou ekonomiky s nejakou inou menou, typicky je to vo svete dolár a v Európe euro.

Niektoré z týchto kríz idú na vrub špekulatívnych útokov, hoci špekulatívny útok je zvyčajne už len dôsledkom zlej menovej politiky. Takéto útoky spôsobili napríklad, že Veľká Británia a Taliansko opustili ERM v roku 1992. Učebnicové fungovanie špekulanta začína v potenciálne menovo oslabenej krajine, kde si špekulant na veľmi krátku dobu požičia množstvo domácej meny. Tieto prostriedky použije na masívne vykupovanie devíz, čo následne pôsobí na zvýšenie kurzu. Nádejou špekulanta je kolaps – prudké oslabenie kurzu, teda znehodnotenie domácej meny. Požičané peniaze tak môže lacno vrátiť a rozdiel je jeho čistý profit.

Vychádzame z modelu špekulatívneho útoku uvedeného A. Černým [5], ktorý rozširuje predošlé modely o možnosť diskrétneho znehodnotenia domácej meny – jav, ktorý sa v praxi často vyskytuje. Špekulant má v tomto modeli monopolné postavenie a po kolapse kurzu zostáva jediným aktérom na devízovom trhu. Potrebuje spätne predať svoje zahraničné rezervy, čím čiastočne pôsobí na posilnenie domácej meny. Toto v podstatnej miere znižuje jeho celkový profit zo špekulácie a tiež ovplyvňuje načasovanie špekulatívneho útoku.

Najskôr stručne predstavíme tento model, najmä časť, ktorá je pre nás obzvlášť významná – problém optimálneho spätného predaja cudzej meny formulovaný ako úloha stochastického dynamického programovania. Potom sa pozrieme na možnosti jeho riešenia, ktoré konfrontujeme s pôvodným analytickým riešením. V ďalšej časti predstavíme dva prístupy k numerickému riešeniu problému a uvedieme výsledky experimentov. Nakoniec zapojíme do práce dvoch navzájom si konkurujúcich špekulantov – sformulujeme úlohu optimálneho predaja rezerv zahraničnej meny a numericky nájdeme jej riešenie.

Ďakujem môjmu školiteľovi Dr. Alešovi Černému za odborné vedenie a cenné rady, ktoré umožnili vznik tejto práce.

[1] podľa MMF

[2] Zaujímavá štúdia o tomto probléme je Calvo, Reinhart [4].

2 Model špekulatívnych menových útokov

2.1 Popis modelu

Uvažujme ekonomiku, v ktorej je výmenný kurz S_t zadaný určitou základnou mierou x_t a obchodovaním na trhu s cudzou menou. Strategické obchody sú robené na jednej strane centrálnou bankou – g_t a špekulantom – f_t na strane druhej

$$S_t = x_t - \eta(g_t + f_t). \tag{1}$$

S_t vyjadruje pomer domáca/zahraničná mena a η určuje citlivosť kurzu na hraničnú intervenciu na trhu. Definujme, že agenti predávajú zahraničnú menu, ak sú množstvá g_t, f_t kladné. Z rovnice (1) vyplýva, že kurz je možné ovplyvniť len predajmi alebo nákupmi na devízovom trhu. Tieto však majú len krátkodobý efekt.

Základná miera x_t zahŕňa dlhodobé aspekty ekonomiky, ako napr. úroková politika alebo ponuka peňazí a je modelovaná pomocou geometrického Brownovho pohybu

$$dx_t = \lambda x_t dt + \sigma x_t dw_t, \tag{2}$$

kde w_t je jednodimenzionálny Wienerov proces, σ volatilita a λ trend sú konštanty. Predpokladáme, že miera x_t nemôže byť ovplyvnená ani centrálnou bankou, ani špekulantom. Podmienečné rozdelenie procesu x_t je lognormálne

$$(\ln x_s - \ln x_t)\,|(x_t = x) \sim N\left(\left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s-t), \sigma^2(s-t)\right). \tag{3}$$

Nech F_t sú čisté zahraničné aktíva držané špekulantom. Ich vývoj je možné popísať diferenciálnou rovnicou

$$\dot{F}_t = r^* F_t - f_t, \tag{4}$$

kde r^* predstavuje úrokovú mieru na zahraničnú menu.

Na druhej strane, rezervy centrálnej banky R_t sa menia výlučne v závislosti od jej obchodovania na trhu

$$R_t = -\dot{g}_t. \tag{5}$$

Predpokladáme, že správanie centrálnej banky je vyjadrené jej snahou o fixovanie kurzu na známej úrovni $\bar{S}_t$. Tým je nútená absorbovať prebytočnú ponuku a uspokojovať prebytočný dopyt po cudzej mene na trhu. Z rovnice (1) možno ľahko odvodiť, že tak musí predávať alebo kupovať svoje rezervy rýchlosťou (mierou)

$$g_t = -\left(\frac{\bar{S}_t - x_t}{\eta} + f_t\right). \tag{6}$$

Dobré podmienky pre špekuláciu nastávajú, ak je výmenný kurz nadhodnotený, teda je fixovaný na nižšej úrovni ako "tieňový" kurz x_t. Potom g_t je kladné, čo znamená, že centrálna banka skôr či neskôr bude musieť minúť všetky rezervy na udržanie svojho cieľa. To spôsobí nevyhnutný kolaps fixného kurzu a prechod na floating. V momente, keď to nastane, kurz urobí diskrétny skok z $\bar{S}_t$ na x_t. Náhla devalvácia vytvorí arbitrážnu príležitosť pre špekulanta.

Špekulanta je možné chápať ako dokonalého hráča, ktorý maximalizuje svoj zisk. Profit je vyjadrený ako súčasná hodnota jeho predajov a nákupov cudzej meny za cenu výmenného kurzu

$$W(x_0, F_0) = \sup_f \mathrm{E}_0 \int_0^T e^{-\rho s} f_s S_s ds, \tag{7}$$

ak

$$F_0 = F_T = 0, \tag{8}$$

kde F je určené podľa rovnice (4). Tok špekulatívneho dôchodku je diskontovaný mierou ρ, čo možno chápať ako fakt, že buď si špekulant peniaze na špekuláciu požičiava za úrok ρ, alebo ak má vlastné zdroje, tak mohol investovať domácu menu za taký úrok. Je celkom pochopiteľné požadovať nasledovnú podmienku

$$\rho > \lambda + r^*, \tag{9}$$

pretože v opačnom prípade by bol špekulant viac motivovaný držať zahraničnú menu, čím by bolo spochybnené jeho modelové správanie.

2.2 Matematická formulácia problému

Špekuláciu je možné rozdeliť do dvoch rozdielnych časových periód. V prvej je výmenný kurz fixovaný na úrovni $S_t = \bar{S}_t$, v druhej je floating.

Prvé obdobie sa týka časovania špekulatívnych nákupov. Keďže $\rho > r^*$, je nákladnejšie držať zahraničnú menu. Je to ale aj nepotrebné, pretože špekulant sa sám rozhodne, kedy nastane develvácia kurzu. Môže tak jednoducho urobiť, ak skúpi všetky zostávajúce rezervy centrálnej banky v jednom masívnom útoku.

V druhom období po kolapse kurzu špekulant rieši omnoho zaujímavejší problém zbavenia sa cudzej meny. V tomto probléme sú dve stavové premenné – vývoj aktív držaných špekulantom F a vývoj kurzu x a jedna riadiaca premenná – predaj zahraničnej meny f. Ohraničenia na premenné F a f sú rovnaké – interval $\langle 0, \infty)$. Ohraničenie na x je v praxi tiež interval $\langle 0, \infty)$, ďalej však predpokladáme, že je neohraničený a hodnoty $(-\infty, 0\rangle$ nastávajú s nulovou pravdepodobnosťou.

V momente kolapsu kurzu majú aktíva hodnotu F_0 a kurz je x_0. Pretože centrálna banka už viac neintervenuje, je výmenný kurz ďalej určený len predajmi špekulanta

$$S_s = x_s - \eta f_s. \tag{10}$$

Po dosadení do funkcie užitočnosti (7) a doplnení stavovými rovnicami (2), (4) a ďalšou podmienkou dostaneme kompletnú formuláciu problému optimálneho predaja rezerv cudzej meny

$$\begin{aligned} w(x_0, F_0) &= \sup_f \mathrm{E}_0 \int_0^{T(f,F=0)} e^{-\rho s} f_s (x_s - \eta f_s) ds & (11) \\ dx_t &= \lambda x_t dt + x_t \sigma dw_t & (12) \\ \dot{F}_t &= r^* F_t - f_t & (13) \\ 0 &> r^* F_t - f_t, & (14) \end{aligned}$$

kde $T(f, F = 0)$ je čas prvého vzniku udalosti $F = 0$ pri použití riadenia f s počiatočnou podmienkou $(x_0, F_0) = (x, F)$. Posledná nerovnica zabezpečuje, že $\dot{F}_t < 0$, tým pádom $F_t \to 0$, ak $t \to \infty$. V ďalšom budeme predpokladať, že úloha má stabilné riešenie aj bez splnenia tejto podmienky. Úlohou je nájsť optimálne riadenie f, ktoré maximalizuje funkciu užitočnosti a nájsť jej hodnotu, t. j. hodnotovú funkciu $w(x_0, F_0)$.

3 Metódy riešenia

Ďalej sa už budeme zaoberať len týmto problémom optimálneho riadenia. Ide o stochastickú, spojitú úlohu dynamického programovania s voľným časom. Konštruktívne riešenie ponúka Bellmanova teória optimálneho riadenia.

3.1 Dynamické programovanie

Označme

$$w_t(x_t, F_t) = \sup_f \mathrm{E_t} \int_t^{T(f,F=0)} e^{-\rho(s-t)} f_s(x_s - \eta f_s) ds. \tag{15}$$

Ekonomicky sa táto rovnica dá interpretovať ako hodnota očakávaných budúcich príjmov v čase t. Potom

$$\begin{aligned} &w_t(x_t, F_t) = \\ &= \sup_f \left\{ \mathrm{E_t} \int_t^{t+\Delta t} e^{-\rho(s-t)} f_s(x_s - \eta f_s) ds + \mathrm{E_t} \int_{t+\Delta t}^{T(f,F=0)} e^{-\rho(s-t)} f_s(x_s - \eta f_s) ds \right\} = \\ &= \sup_f \left\{ \mathrm{E_t} \int_t^{t+\Delta t} e^{-\rho(s-t)} f_s(x_s - \eta f_s) ds + e^{-\rho\Delta t} \mathrm{E_t} \left[w_{t+\Delta t}(x_{t+\Delta t}, F_{t+\Delta t}) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Zrejme platí

$$w_T(x_T, F_T) = 0, \tag{17}$$

lebo $F_T = 0$. Rovnica (16) s koncovou podmienkou (17) sa nazýva Bellmanova rovnica pre spojitú úlohu dynamického programovania a poskytuje návod ako úlohu rozložiť na postupnosť na seba nadväzujúcuch úloh, ktorých optimálne riadenie hľadáme na kratšom intervale dĺžky Δt. Takýto prístup nepredstavuje žiadne kvalitatívne zjednodušenie, ale ako ukážeme neskôr, je východiskom pre aproximáciu riešenia.

3.2 Zníženie dimenzie stavového priestoru – transformácia úlohy

V reálnom prostredí prirodzene očakávame, že stratégia predajov sa nemení v závislosti od absolútnej veľkosti výmenného kurzu, t. j. špekulant sa rozhoduje rovnako bez ohľadu na to, akou cudzou menou podniká útok. Predstavme si, že kurz vzrastie na dvojnásobok a dvojnásobne zvýšime aj počiatočné rezervy špekulanta. Intuitívne môžeme očakávať, že jeho strategické správanie sa nezmení a bude svoje rezervy predávať v dvojnásobnej miere ako pred tým. Keďže príjem dosahuje objemom predávania za cenu výmenného kurzu, ten by tak mal vzrásť na štvornásobok. Pozrime sa na tento jav bližšie.

"Fyzikálne rozmery" premenných interpretujeme nasledovne, pričom sa zameriame na peňažné jednotky

- tieňový kurz x_t je pomer *domáca/zahraničná mena,*
- rezervy F_t sú v jednotkách *zahraničnej meny,*
- predaje špekulanta f_t vyjadrujú rýchlosť predávania rezerv, ide o množstvo *zahraničnej meny* za jednotku času,
- hodnotová funkcia $w_t(x_t, F_t)$ vyjadruje zisk zo špekulácie v *domácej mene,*
- premenná η vyjadruje zmenu x_t pri zmene objemu obchodov na trhu, teda je to *domáca/zahraničná mena*^{2},
- ostatné pomocné premenné $\lambda, \sigma, \rho, r^*$ sú bezrozmerné.

Vhodným predefinovaním vieme získať formuláciu neutrálneho problému závisiaceho len od bezrozmerných premenných. Zamerajme sa na premenné F_t a f_t a zadefinujme miesto nich nové premenné[3] y_t, u_t takto

$$y_t = \eta \frac{F_t}{x_t} \tag{18}$$

a

$$u_t = \eta \frac{f_t}{x_t}. \tag{19}$$

Po dosadení do (15) dostaneme

$$\frac{\eta}{x_t^2} w_t(x_t, F_t) = \sup_u \mathrm{E_t} \int_t^{T(u,y=0)} \left(\frac{x_s}{x_t}\right)^2 e^{-\rho(s-t)} u_s(1-u_s)ds. \tag{20}$$

Podľa nášho predpokladu (3) je $\frac{x_s}{x_t}$ nezávislé na x_t. Tým pravá strana výrazu (20) závisí len od y_t, označme si ju ako $h_t(y_t)$, potom[4]

$$w_t(x_t, F_t) = \frac{x_t^2}{\eta} h_t\left(\eta \frac{F_t}{x_t}\right) = \frac{x_t^2}{\eta} h_t\left(y_t\right). \tag{21}$$

To znamená, že ľavá aj pravá strana rovnice (20) sú bezrozmerné. Kompletná transformácia úlohy (11), (12), (13), (14) vyzerá takto[5]

$$\begin{aligned} h(y_0) &= \sup_u \mathrm{E_0} \int_0^{T(u,y=0)} \left(\frac{x_s}{x_0}\right)^2 e^{-\rho s} u_s(1-u_s)ds && (22)\\ dx_t &= \lambda x_t dt + \sigma x_t dw_t && (23)\\ dy_t &= (r^* - \lambda - \frac{u_t}{y_t} + \sigma^2) y_t dt - \sigma y_t dw_t && (24)\\ 0 &> r^* y_t - u_t && (25) \end{aligned}$$

[3]V ďalšom budeme tieto dve premenné nazývať podľa originálnych premenných ako *rezerva* y_t a *predaj* u_t, hoci toto pomenovanie nie je celkom korektné.

[4]Túto funkciu budeme nazývať *hodnotová funkcia.*

[5]Transformácia podmienky (14) je triviálna a transformácia diferenciálnej rovnice opisujúcej priebeh y_t je uvedená v dodatku.

a počiatočná podmienka je $y_0 = \eta\frac{F_0}{x_0}$.

Transformácia úlohy spôsobila premenu kontrolnej premennej v pôvodnej úlohe f_t na u_t v novej úlohe, stavová premenná F_t je reprezentovaná pomocou y_t. Došlo však aj k jednej kvalitatívnej zmene – hodnotová funkcia $h_0(y)$ závisí len od y, t. j. y je jediná stavová premenná. Znížili sme teda rozmer stavového priestoru o jednu dimenziu.

3.3 Analytické riešenie

Modelový problém (11), (12), (13), (14) je možné ekvivalentne preformulovať na riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice a s využitím vyššie uvedenej substitúcie dokonca na obyčajnú diferenciálnu rovnicu[6]

$$0 = \frac{(1-h'(y))^2}{4} + (2\lambda + \sigma^2 - \rho)h(y) - (\lambda + \sigma^2 - r^*)yh'(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 h''(y) \quad (26)$$

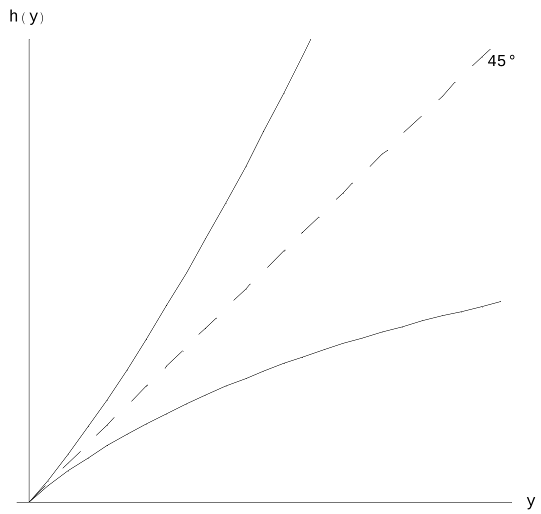
s okrajovými podmienkami

$$h(0) = 0 \quad (27)$$

a

$$h'(0) = 1. \quad (28)$$

Pretože táto rovnica je nelineárna, nie je možné ju analyticky riešiť. Aj štandardné numerické metódy zlyhávajú kvôli nestabilite riešenia v okolí nuly. Riešenie sa skladá z dvoch vetiev, jednej konvexnej a jednej konkávnej, ako je to zobrazené na obrázku 1. Konvexná vetva nevyhovuje zadaniu, pretože nespĺňa pomienku (14). Na druhej strane, konkávne riešenie podmienku (14) spĺňa a je možné ho aproximovať pomocou rozvoja funkcie $h(y)$ do odmocninového radu[7]. V nestochastickom prípade ($\sigma = 0$) sa riešenie správa korektne a rovnica (26) sa dá presne numericky spočítať.



Obr. 1: Bifurkácia riešenia diferenciálnej rovnice v nule

[6]Podrobné odvodenie je uvedené v dodatku.
[7]Postup odvodenia pozri Černý [5].

4 Diskretizácia

Pripusťme, že špekulant nepredáva svoje aktíva spojito, ale v istých pravidelných časových intervaloch. Keď mu umožníme obchodovať ľubovoľne často, je zrejmé, že z praktického hľadiska sa pre neho nič nezmení. Ak určíme, že môže zasahovať v úzkych intervaloch, jeho správanie bude takmer totožné s prípadom, keď môže obchodovať spojito. Dá sa teda očakávať, že zdiskretizovaný matematický model sa od svojej spojitej verzie nebude príliš líšiť.

Konvergencia diskrétnej úlohy k spojitej úlohe je vyjadrená v pravdepodobnostnej miere, teda ako rozdelenie zdiskretizovaného procesu x_t konverguje k rozdeleniu spojitého x_t, tak aj rozdelenie kontrolnej premennej u_t konverguje k rozdeleniu spojitého riešenia u_t. Potom možno ukázať[8], že optimálne riadenie dané diskrétnou úlohou konverguje pre $\Delta t \to 0$ k spojitému riešeniu, t.j. k riešeniu diferenciálnej rovnice (26).

4.1 Hodnotová funkcia

Nech Δt je základný časový interval blízky 0. Potom rovnicu (16) môžeme aproximovať ako

$$w_t(x_t, F_t) = \sup_{f_t} \left\{ f_t(x_t - \eta f_t)\Delta t + e^{-\rho \Delta t} \mathrm{E}_t w_{t+\Delta t}(x_{t+\Delta t}, F_{t+\Delta t}) \right\} . \tag{29}$$

Funkcia $w_t(x_t, F_t)$ sa nazýva hodnotová funkcia a je možné ju vyjadriť ako sumu očakávaných budúcich príjmov. Táto rovnica spolu s koncovou podmienkou (17) je známa ako Bellmanova rovnica dynamického programovania pre diskrétnu úlohu optimálneho riadenia s pevným časom.

Bellmanova rovnica dynamického programovania dáva návod ako rekurentne počítať optimálnu hodnotovú funkciu spätnou indukciou. Vzhľadom na to, že čas T nie je na začiatku optimalizácie známy (úloha s voľným časom), je nevyhnutné úlohu riešiť jednotlivo pre všetky možné časy T a z výsledkov vybrať optimálnu maximálnu hodnotu. Ak ale uvážime, že špekulant počas optimalizácie nebude viazaný podmienkou (14), potom $w_t(x_t, F_t) > w_{t+\Delta t}(x_t, F_t)$. Hodnotová funkcia $w_t(x, F)$ je pre fixné x, F ohraničená pre akékoľvek veľké T. Z toho vyplýva, že táto funkcia v procese spätnej indukcie je rastúca a má limitu. Tým pádom je možné v rekurentnom výpočte využiť výsledok predchádzajúcej (o jednotku času kratšej) úlohy a jednou iteráciou dostať výsledok ďalšej úlohy. Takto vlastne riešime len jednu úlohu, ktorú iterujeme kým hodnotová funkcia pre dané x_0, F_0 prestane rásť, táto hodnota potom bude hľadané maximum z úloh reprezentujúcich všetky dĺžky časových intervalov optimalizácie. Pre optimálnu hodnotovú funkciu teda platí

$$w(x_t, F_t) = \sup_{f_t} \left\{ f_t(x_t - \eta f_t)\Delta t + e^{-\rho \Delta t} \mathrm{E}_t w(x_{t+\Delta t}, F_{t+\Delta t}) \right\} . \tag{30}$$

Táto funkcionálna rovnica nie je rekurentným vzťahom a vo všeobecnosti dáva len nutnú podmienku. V teórii je analógiou k Bellmanovej rovnici pre úlohy s nekonečným časovým horizontom. Pre dobre definované úlohy je funkcionálny operátor daný pravou stranou rovnice kontrakciou[9], čím je zabezpečená jednoznačnosť riešenia úlohy s voľným časom.

[8] Týmto problémom sa podrobne zaoberajú H. J. Kusher a P. Dupuis, pozri [8].

[9] v zmysle nejakej normy

Diskrétna verzia Bellmanovej rovnice (30) sa transformáciou úlohy zmenila na

$$h(y_t) = \sup_{u_t} \left\{ u_t(1-u_t)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}\mathrm{E_t}\left[\left(\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t} \right)^2 h(y_{t+\Delta t}) \right] \right\} \tag{31}$$

a koncová podmienka (17) je

$$h_T(y_T) = 0. \tag{32}$$

Týmito dvomi rovnicami je definovaný iteračný postup, ktorý je známy ako iterácia hodnotovej funkcie. V ďalšej časti sa budeme venovať iterácii riadiacej funkcie odvodenej pomocou Eulerovej rovnice.

4.2 Eulerova rovnica

Predpokladajme na chvíľu, že riešime úlohu s fixným koncovým časom a že optimálna hodnotová funkcia v čase $t + \Delta t$ je známa. Potom sa úloha zredukuje na jednoperiódovú optimalizáciu – na problém sučasného predaja peňažných prostriedkov oproti možnosti zisku z vyšších rezerv v ďalšej časovej perióde. Vychádzme pritom z rovnice (31), kde maximalizujeme jej pravú stranu s ohraničením na y_t. Toto ohraničenie určuje veľkosť budúcich rezerv zo zadanej súčasnej spotreby a rezerv. Odvodíme ho diskretizáciou rovnice (4) a použitím príslušnej substitúcie (18), (19).

$$\begin{aligned} F_{t+\Delta t} &= F_t + (r^* F_t - f_t)\Delta t \qquad (33)\\ \eta\frac{F_{t+\Delta t}}{x_{t+\Delta t}} &= \frac{x_t}{x_{t+\Delta t}}\left[\eta\frac{F_t}{x_t} + (r^*\eta\frac{F_t}{x_t} - \eta\frac{f_t}{x_t})\Delta t\right] \\ y_{t+\Delta t} &= \frac{y_t + (r^* y_t - u_t)\Delta t}{\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t}} \qquad (34) \end{aligned}$$

Teraz už môžeme vyjadriť nutnú podmienku prvého rádu pre optimálne u_t.

$$\begin{aligned} 0 &= (1-2u_t)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}\mathrm{E_t}\left[\left(\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t}\right)^2 h'(y_{t+\Delta t})\frac{\partial y_{t+\Delta t}}{\partial u_t}\right] \\ 1-2u_t &= e^{-\rho\Delta t}\mathrm{E_t}\left[\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t}h'(y_{t+\Delta t})\right] \qquad (35) \end{aligned}$$

Zatiaľ sa tento postup nelíši od iterácie hodnotovej funkcie. Existuje však jednoduchý, tzv. obálkový vzťah[10] medzi deriváciou hodnotovej funkcie a deriváciou funkcie spotreby $u_t(1-u_t)$ za predpokladu, že u_t je optimálne. Ako už vieme, optimálne u_t je funkcia y_t, t. j. $u_t(y_t)$.

Uvažujme efekt malej zmeny y_t na oboch stranách rovnice (31)

$$\begin{aligned} h'(y_t) &= (u'_t - 2u_t u'_t)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}\mathrm{E_t}\left[\left(\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t}\right)^2 h'(y_{t+\Delta t})\frac{\partial y_{t+\Delta t}}{\partial y_t}\right], \\ h'(y_t) &= (u'_t - 2u_t u'_t)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}\mathrm{E_t}\left[\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t}h'(y_{t+\Delta t})\right](1 + r^*\Delta t - u'_t\Delta t)\,. \qquad (36) \end{aligned}$$

[10] pozri Blanchard, Fischer [3]

Po substitúcii z pravej strany rovnice (35) potom dostaneme

$$h'(y_t) = (1 + r^* \Delta t)(1 - 2u_t). \tag{37}$$

Keďže Δt je blízke nule, budeme kvôli jednoduchosti aproximovať výraz $1 + r^*\Delta t$ ako $e^{r^*\Delta t}$. Tým dostaneme spomínaný obálkový vzťah

$$h'(y_t) = e^{r^*\Delta t}(1 - 2u_t), \tag{38}$$

teda v prípade, že špekulant koná optimálne, hraničná hodnota jeho zahraničných rezerv musí byť rovná hraničnému príjmu z ich predaja. Použitie tohoto vzťahu na eliminovanie $h'(y_{t+\Delta t})$ z podmienky (35) dáva

$$1 - 2u_t(y_t) = e^{(r^*-\rho)\Delta t} \mathrm{E_t} \left[\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t} (1 - 2u_{t+\Delta t}(y_{t+\Delta t})) \right]. \tag{39}$$

Tento vzťah je známy ako Eulerova rovnica. Jej ekonomickú interpretáciu možno dobre ukázať návratom k pôvodným premenným

$$x_t - 2\eta f_t = e^{(r^*-\rho)\Delta t} \mathrm{E_t} \left[x_{t+\Delta t} - 2\eta f_{t+\Delta t} \right], \tag{40}$$

teda hraničný príjem z predaja zahraničnej meny dnes sa musí rovnať očakávanému hraničnému príjmu z predaja zajtra (v dnešných cenách).

5 Numerická implementácia

Cieľom numerickej simulácie, ktorá bude nasledovať, je vypočítať optimálnu hodnotovú funkciu $h(y_t)$. Využijeme k tomu obidva popísané postupy – spätnú indukciu, známu ako iterácia hodnotovej funkcie a iteráciu riadiacej funkcie s využitím Eulerovej rovnice.

5.1 Iterácie hodnotovej funkcie

Keďže to povaha problému umožňuje, vystačíme s diskretizáciou stavového priestoru a časového kroku. Kontrolná premenná teda môže nadobúdať spojitú množinu hodnôt. Stavový priestor y pokryjeme ekvidistantnou sieťou, takže

$$y^i = i \, \Delta y, \quad i = 0, \ldots, n. \tag{41}$$

Hodnotovú funkciu $h_t(y_t)$ budeme reprezentovať pomocou aproximácie v bodoch siete y, na aproximáciu funkcie mimo bodov siete použijeme kvadratickú interpoláciu, resp. extrapoláciu. Časový krok je zvolený Δt. Pri samotnom výpočte vychádzame z diskrétnej varianty Bellmanovej rovnice (31) s koncovou podmienkou (32).

Spätná indukcia štartuje v koncovom čase T, kde je $h_T(y_T) = 0$. Z tohto sa podľa rovnice (31) vypočíta funkcia v čase $T - \Delta t$. Všeobecne, ak poznáme hodnotovú funkciu v čase $t + \Delta t$, tak vieme pomocou nej vypočítať aj hodnotovú funkciu v predošlom čase t. Pritom je dôležité, že absolútnu veľkosť času T alebo t nepotrebujeme na vyjadrenie Bellmanovej rovnice poznať a nepotrebujeme poznať ani hodnotové funkcie v ostatných časoch. Pri implementácii algoritmu teda stačí pamätať si túto funkciu iba v dvoch časoch.

Na výpočet očakávania $\mathrm{E_t}$ v každej iterácii potrebujeme aproximovať hodnoty $\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t}$ a $y_{t+\Delta t}$. Obidva tieto členy sú stochastické procesy založené na Wienerovom procese $\{w_t, t \geq 0\}$. Jeho prírastok dw_t sa dá vyjadriť ako

$$dw_t \approx \Delta w_t = \sqrt{\Delta t} Z, \qquad Z \sim N(0,1), \tag{42}$$

teda Z je náhodná premenná z normovaného normálneho rozdelenia. Keďže tieto prírastky sú navzájom nezávislé, môžeme ich generovať pomocou nezávislých náhodných premenných Z. Prvý člen $\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t}$ aproximujeme ako $\frac{x_t+\Delta x_t}{x_t}$ takto

$$\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t} \approx \frac{x_t + \Delta x_t}{x_t} = \frac{x_t + \lambda x_t \Delta t + \sigma x_t \Delta w_t}{x_t} = 1 + \lambda \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z. \tag{43}$$

Druhý člen $y_{t+\Delta t}$ aproximujeme analogicky ako $y_t + \Delta y_t$

$$y_{t+\Delta t} \approx y_t + \Delta y_t = y_t + (r^* - \lambda - \frac{u_t}{y_t} + \sigma^2) y_t \Delta t - \sigma y_t \sqrt{\Delta t} Z. \tag{44}$$

Obidva členy sú založené na jednom a tom istom Wienerovom procese, takže v ich vyjadrení musíme použiť tú istú náhodnú premennú Z definovanú v (42). Teraz môžeme očakávanie reprezentovať pomocou strednej hodnoty funkcie náhodnej premennej s normálnym rozdelením. Na to potrebujeme vypočítať integrál tvaru $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$, kde $g(x)$ je funkcia náhodnej premennej a $f(x)$ je jej hustota. Ak je integrand daná hladká funkcia, tak na aproximáciu takýchto integrálov existuje efektívna metóda – Gaussova kvadratúra. My použijeme jej variantu Gauss-Hermiteovu integráciu[11].

Jednotlivá iterácia hodnotovej funkcie pozostáva zo samostatných optimalizačných úloh. Pre každú uvažovanú hodnotu siete stavovej premennej y_t je potrebné nájsť optimálne riadenie u_t, ktoré maximalizuje výraz na pravej strane (31). Ohraničenie na riadenie f_t pôvodnej úlohy je dané podmienkou (14) a požiadavkou, aby $F_{t+\Delta t} \geq 0$, čo znamená, že špekulant sa nemôže dostať so svojimi rezervami do záporných hodnôt. Transformovaním na nové premenné dostaneme

$$y_t \frac{e^{r^* \Delta t}}{\Delta t} \geq u_t(y_t) \geq y_t r^*. \tag{45}$$

V praktickej implementácii potom môžeme hľadať maximum na tomto uzavretom intervale metódou bisekcie, pretože výraz v zátvorkách na pravej strane rovnice (31) je konkávna funkcia podľa argumentu u_t. Konkávnosť prvého člena je zrejmá a konkávnosť funkcie $h_t(y_t)$ pre všetky t zdôvodníme pomocou známeho ekonomického princípu, ktorý formulovaný pre náš problém tvrdí, že každá dodatočná jednotka rezervy prináša menší príjem ako tá predchádzajúca. Potom konkávnosť podľa argumentu u_t vyplynie z dosadenia za $y_{t+\Delta t}$.

Iterovanie ukončíme, keď hodnotová funkcia zkonverguje, t. j. $h_t(y) = h_{t+\Delta t}(y) = h(y)$. Konvergenciu budeme vyhodnocovať z posledných dvoch iterácií, najideálnejší spôsob je overovanie normy $\max_i |h_t(y^i) - h_{t+\Delta t}(y^i)|$. Tento prístup je však príliš výpočtovo náročný a aj zbytočný, pretože stačí overovať rozdiel v bode y^n. Ak je

[11] Aplikácia na náš problém je uvedená v dodatku, viac možno nájsť napr. v Kopal [7].

tento rozdiel najväčší v prvej iterácii, tak je taký aj počas celého procesu spätnej indukcie, pretože chyby sa zmenšujú rovnomerne v celom priestore y. Potom, ak rozdiel $|h_t(y^n) - h_{t+\Delta t}(y^n)|$ dosiahne danú požadovanú presnosť, je táto zaručená aj pre $h_t(y^i)$ pre $\forall i$.

5.2 Iterácie riadiacej funkcie

Analógia iterácie hodnotovej funkcie platí aj pre prípad iterovania pomocou Eulerovej rovnice (39). Výpočet prebieha na rovnakej sieti pre stavovú premennú (41) a s rovnakou kvadratickou interpoláciou. Kvalitatívny rozdiel spočíva v tom, že v jednotlivých iteráciách nemusíme riešiť optimalizačnú úlohu, avšak namiesto toho máme $u_t(y_t)$ zadané implicitne.

Ak dosadíme (34) do (39), dostaneme

$$1 - 2u_t(y_t) = e^{(r^*-\rho)\Delta t}\mathrm{E_t}\left[\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t}\left(1 - 2u_{t+\Delta t}\left(\frac{y_t + (r^* y_t - u_t(y_t))\Delta t}{\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t}}\right)\right)\right]. \quad (46)$$

Riešenie spočíva vo vytvorení sub-iteračnej procedúry, ktorá pre daný bod siete y^i aproximuje hodnotu $u_t(y^i)$ pomocou iterácií $u_t^j(y^i)$. Predpis je zadaný vzťahom

$$u_t^{j+1}(y^i) = \frac{1}{2}\left\{1 - e^{(r^*-\rho)\Delta t}\mathrm{E_t}\left[\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t}\left(1 - 2u_{t+\Delta t}\left(\frac{y^i + (r^* y^i - u_t^j(y^i))\Delta t}{\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t}}\right)\right)\right]\right\} \quad (47)$$

a iterácia štartuje v $u_t^0(y^i) = u_{t+\Delta t}(y^i)$. Opäť, na overenie konvergencie testujeme rozdiel $\left|u_t^{j+1}(y^i) - u_t^j(y^i)\right|$, kým nedosiahne požadovanú presnosť. Pozrime sa bližšie na stabilitné vlastnosti uvedenej procedúry.

Nech linearizácia funkcie $u_{t+\Delta t}$ v okolí bodu $y_{t+\Delta t}$ je $a + by_{t+\Delta t}$. Dosaďme ju do pravej strany rovnice (47) a vyjadrime koeficient pri člene $u_t^j(y^i)$.

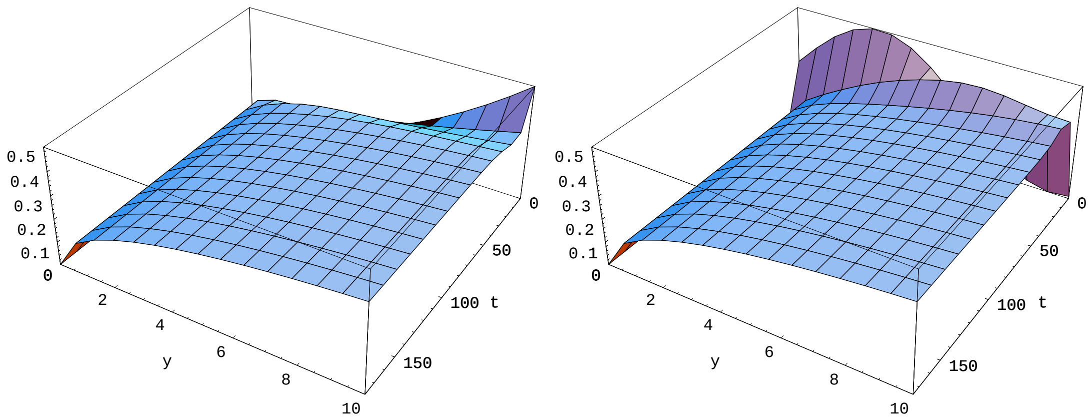
$$u_t^{j+1}(y^i) = -be^{(r^*-\rho)\Delta t}u_t^j(y^i)\Delta t + \textit{členy bez } u_t^j(y^i) \quad (48)$$

Kritériom pre asymptotickú stabilitu tohto dynamického systému je podmienka $|b| < \frac{e^{(\rho-r^*)\Delta t}}{\Delta t}$ v okolí pevného bodu. Z limitných vlastností pravej strany vidíme, že pre dostatočne malé Δt bude táto iteračná procedúra vždy stabilná.

Kľúčovým prvkom iterácie riadiacej funkcie je požiadavka splnenia ohraničenia na $u_t(y_t)$ daného vzťahom (45). Obzvlášť dôležité je splnenie horného ohraničenia, ktoré realizujeme natvrdo predefinovaním hodnoty, ak danú nerovnosť porušuje.

Iterovanie riadiacej funkcie skončíme, ak funkcia $u_t(y_t)$ zkonverguje podľa analogického kritéria ako tomu bolo v prípade hodnotovej funkcie. Pre úplnosť sa ešte zmienime o požiadavke na štartovaciu funkciu $u_s(y)$. Riešenie iteračnej schémy je stabilné v tom zmysle, že nezávisí na voľbe štartovacej funkcie. Samozrejme, stabilita iteračnej schémy je na jej voľbe závislá a jej správnou voľbou je možné konvergenciu čiastočne urýchliť – obrázok 2.

Dopočítanie optimálnej hodnotovej funkcie pri zadanej optimálnej riadiacej funkcii už predstavuje výpočtovou náročnosťou rádovo menej zložitý problém. Použijeme už odvodenú procedúru pre iteráciu hodnotovej funkcie spätnou indukciou s rozdielom, že namiesto počítania optimálnych predajov u_t dosádzame už vypočítané optimálne $u(y_t)$. Opäť, riešenie takejto iteračnej schémy je stabilné vzhľadom na voľbu počiatočnej funkcie.



(a) $0.005y^2$ (b) $\frac{1}{4}(1 + \sin \frac{y}{2})$

Obr. 2: Stabilita riešenia vzhľadom na voľbu počiatočnej funkcie

6 Výsledky experimentov

V tejto časti uvedieme praktické výsledky popísaných algoritmov. Obidva sú napísané v jazyku C++ a výsledky sú znázornené pomocou programu Mathematica[12]. Cieľom numerických výpočtov je získanie relatívne presných riešení postupnosti diskrétnych úloh líšiacich sa veľkosťou časového a priestorového kroku a overenie ich konvergencie k presnému riešeniu úlohy.

Presné riešenie je dané rovnicou (26), keďže ho však vieme len aproximovať mocninovým rozvojom, dostávame sa do pozície porovnávania dvoch nepresných riešení. Vďaka odlišným špecifikám obidvoch prístupov toto nepredstavuje zásadný problém. Aproximácia riešenia $h(y)$ pomocou konečného mocninového rozvoja je relatívne presná pre y blízke nule a pre y rastúce do nekonečna prudko diverguje. Na druhej strane očakávame, že približné riešenie dosiahnuté pomocou iteračných metód bude takmer rovnako presné pre všetky y. Presné riešenie budeme konkrétne reprezentovať prvými desiatimi členmi rozvoja.

Parametre modelu zvolíme nasledovne

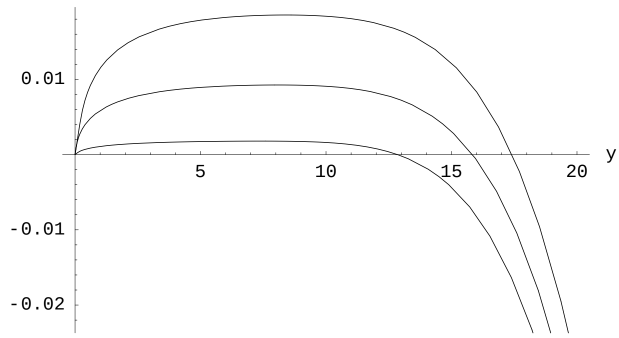
$$\lambda = 0.03, \sigma = 0.1, \rho = 0.1, r^* = 0.04.$$

Stavová premenná y môže nadobúdať hodnoty z intervalu 0 až 20. Veľkosť časového kroku Δt a priestorového kroku Δy je rovnaká a riešenie úlohy uvedieme v troch variantách – s veľkosťou kroku $0.1, 0.05$ a 0.01. Požadovaná presnosť na rozdiel dvoch po sebe idúcich iterácii je 1^{-10} a stupeň Gauss-Hermiteovej integrácie použijeme $n = 20$.

Výsledok algoritmu, ktorý používa iteráciu hodnotovej funkcie je zobrazený na obrázku 3. Krivky znázorňujú rozdiel medzi dosiahnutým výsledkom a riešením daným diferenciálnou rovnicou.

Z tohto obrázka je zrejmé, že riešenie zdiskretizovanej úlohy so znižovaním kroku konverguje k presnému riešeniu. Prakticky (až na okolie bodu nula) je dosiahnutá

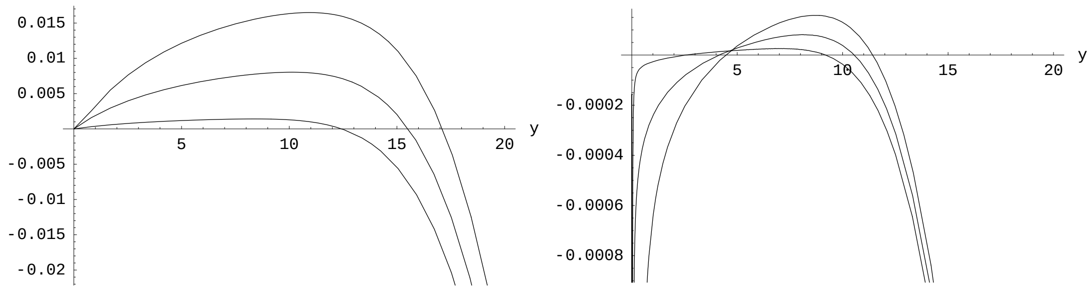
[12]Zdrojové súbory, hotové programy a vypočítané výsledky spracované v programe Mathematica je možné nájsť na stránke www.schmidt.sk.



Obr. 3: Iterácia hodnotovej funkcie – konvergencia hodnotovej funkcie

presnosť všade rovnaká. Prudký odklon kriviek za bodom 10 je spôsobený nepresnosťou aproximácie "presného" riešenia, ktoré pre väčšie hodnoty diverguje.

Na ďalších dvoch obrázkoch je znázornená konvergencia pri použití algoritmu iterácie riadiacej funkcie pomocou Eulerovej rovnice. Dosiahnutá presnosť je mierne lepšia ako v predchádzjúcom algoritme, avšak konvergencia nie je rovnomerná.



(a) hodnotová funkcia (b) riadiaca funkcia

Obr. 4: Iterácia riadiacej funkcie – porovnanie konvergencie

7 Model s nedokonalou konkurenciou

Doteraz sme sa zaoberali modelom, kde na trh s cudzou menou vstupoval len jeden špekulant. Tu spravíme rozšírenie o druhého agenta na trhu, uvedieme teda model s duopolnou konkurenciou. Budeme sa zaoberať iba druhou fázou špekulatívneho útoku – problémom optimálneho predaja získaných rezerv zahraničnej meny. V prípade dokonale kooperujúcich agentov by úloha bola ekvivalentná problému s jedným hráčom s počiatočnými rezervami rovnými súčtu počiatočných rezerv oboch hráčov. Hráči by si potom príjem rozdelili v pomere rovnajúcemu sa pomeru ich počiatočných vkladov. Nás však zaujíma problém nekooperujúcich agentov, namiesto Nashovho ekvilibria budeme hľadať Cournotovu rovnováhu. Zadefinujeme matematickú formuláciu a predstavíme numerickú iteračnú konštrukciu riešenia založenú na jednoduchej mikroeknomickej úvahe.

7.1 Formulácia

Najskôr si musíme ujasniť, aké sú vstupné údaje a čo budeme považovať za riešenie. U oboch špekulantov musíme rozlišovať ich špecifické stavové a kontrolné premenné. Stavová premenná je F_t^1, F_t^2 – stav rezerv v čase t pre prvého, resp. druhého špekulanta a kontrolná premenná je predaj rezerv v čase t – f_t^1, f_t^2. Druhá stavová premenná – tieňový kurz x_t je pre obidvoch rovnaký a zostáva popísaný rovnicou (2). Na začiatku optimalizácie máme zadané počiatočné stavové premenné F_0^1, F_0^2 a x_0. Riešenie teda musí byť funkciou týchto premenných.

Budeme hľadať optimálnu hodnotovú funkciu $w(x_0, F_0^1, F_0^2)$ a funkciu optimálnych predajov $f(x, F^1, F^2)$. Práve sme vyslovili prvý predpoklad, že hodnotová funkcia a riadiaca funkcia sú pre obidvoch špekulantov rovnaké, t. j.

$$w^1(x_0, F_0^1, F_0^2) = w^2(x_0, F_0^1, F_0^2) = w(x_0, F_0^1, F_0^2) \tag{49}$$

a

$$f^1(x, F^1, F^2) = f^2(x, F^1, F^2) = f(x, F^1, F^2). \tag{50}$$

Táto skutočnosť vyplýva z jednoznačnosti riešení, teda ak si špekulanti vymenia svoje počiatočné rezervy, bude každý z nich predávať rovnako[13] ako jeho protihráč pred výmenou. Zisk a predaj prvého, resp. druhého hráča budeme rozlišovať poradím argumentov, t. j. $w(x_0, F_0^1, F_0^2), w(x_0, F_0^2, F_0^1)$ a $f^1 := f(x, F^1, F^2), f^2 := f(x, F^2, F^1)$. Tým sme naznačili, že hráči poznajú počiatočný stav rezerv svojho súpera, takže ho budú poznať aj počas celého procesu predávania cudzej meny.

Skôr ako zadefinujeme ziskovú funkciu, matematicky zapíšeme formuláciu problému. Do výmenného kurzu po kolapse určeného rovnicou (10) pribudne vplyv intervencií druhého špekulanta

$$S_s = x_s - \eta f_s^1 - \eta f_s^2. \tag{51}$$

Zisk prvého, resp. druhého špekulanta potom dostaneme dosadením do rovnice (7). Tieto rovnice doplníme rovnicou popisujúcou vývoj rezerv (4) špecifikovanou pre oboch aktérov a rovnicou vývoja tieňového kurzu (2). Dostaneme matematickú formuláciu úlohy[14]

$$\begin{aligned}
W(x_0, F_0^1, f^2) &= \sup_{f^1} \mathrm{E}_0 \int_0^{T(f^1, F^1=0, f^2)} e^{-\rho s} f_s^1 (x_s - \eta f_s^1 - \eta f_s^2) ds && (52)\\
W(x_0, F_0^2, f^1) &= \sup_{f^2} \mathrm{E}_0 \int_0^{T(f^2, F^2=0, f^1)} e^{-\rho s} f_s^2 (x_s - \eta f_s^1 - \eta f_s^2) ds && (53)\\
dx_t &= \lambda x_t dt + \sigma x_t dw_t && (54)\\
dF_t^1 &= r^* F_t^1 - f_t^1 && (55)\\
dF_t^2 &= r^* F_t^2 - f_t^2. && (56)
\end{aligned}$$

Všimnime si, že premenné f^1 a f^2 sú endogénne určené prvými dvoma rovnicami. Potom argumentami optimálnych funkcií W_0 sú iba exogénne premenné modelu – F_0^1, F_0^2 a x_0. Zadefinujme, že zisk prvého špekulanta je číselne rovný hodnote zisku

[13] Tým máme namysli predávať podľa rovnakej (optimálnej) riadiacej funkcie.

[14] Podmienku (14) kvôli jednoduchosti opäť vynechávame, pretože model kvalitatívne neovplyvňuje.

W_0 z prvej rovnice a zisk druhého špekulanta je číselne rovný hodnote zisku W z druhej rovnice, t. j.

$$w(x_0, F_0^1, F_0^2) := W(x_0, F_0^1, f^2), w(x_0, F_0^2, F_0^1) := W(x_0, F_0^2, f^1).$$

Definícia ziskovej funkcie je konzistentná vzhľadom na výmenu argumentov[15] F_0^1, F_0^2, lebo vďaka symetrii rovníc (52), (53) premapovaním premenných $f^1 \leftrightarrow f^2$ dostaneme ekvivalentné zadanie.

7.2 Numerické riešenie

Predpokladajme, že špekulant 1 pozná rozhodovaciu funkciu[16] f_t^2 špekulanta 2. V tom momente sa jeho pozícia zmení na monopolne konajúceho špekulanta so špecificky zadaným výmenným kurzom $x_s - \eta f_s^2$. Tým sa problém zredukuje na prípad jedného agenta na trhu a tento už vieme riešiť. Ak si teraz druhý špekulant vezme jeho optimálnu riadiacu funkciu, môže na základe nej vytvoriť novú funkciu f_t^2, t. j. zkorigovať svoje pôvodné rozhodnutie. Na to zareaguje opäť prvý špekulant a situácia sa opakuje. Očakávame, že tento proces bude konvergovať k stabilnému riešeniu. Takto dosiahnutá rovnováha je známa ako Cournotova rovnováha a je definovaná v konkurenčnom prostredí hráčov, z ktorých každý volí stratégiu v záujme maximalizácie svojho vlastného zisku, pričom nastane stav, v ktorom všetci dosiahnu svoje lokálne maximum.

Stabilitu a jednoznačnosť riešenia dosiahnutého týmto postupom v našom modeli overíme numerickým experimentom. Ako prirodzená voľba iteračnej schémy sa javí iterácia pomocou Eulerovej rovnice (40). V rozšírenom modeli odvodíme z rovníc (52), (53) dve Eulerove rovnice

$$\begin{aligned} x_t - 2\eta f_t^1 - \eta f_t^2 &= e^{(r^*-\rho)\Delta t} \mathrm{E_t} \left[x_{t+\Delta t} - 2\eta f_{t+\Delta t}^1 - \eta f_{t+\Delta t}^2 \right] && (57) \\ x_t - 2\eta f_t^2 - \eta f_t^1 &= e^{(r^*-\rho)\Delta t} \mathrm{E_t} \left[x_{t+\Delta t} - 2\eta f_{t+\Delta t}^2 - \eta f_{t+\Delta t}^1 \right]. && (58) \end{aligned}$$

Na premenné f_t^1, f_t^2 platí ohraničenie analogické (45)

$$\begin{aligned} F_t^1 \frac{e^{r^*\Delta t}}{\Delta t} &\geq f_t^1 \geq 0 && (59) \\ F_t^2 \frac{e^{r^*\Delta t}}{\Delta t} &\geq f_t^2 \geq 0. && (60) \end{aligned}$$

Štartovacia funkcia f_t je rovná 0.

Tieto rovnice je možné substitúciou za premenné u_t, y_t^1, y_t^2 transformovať na systém podobný rovniciam pri iterácii riadiacej funkcie. Zníži sa tým počet stavových premenných o jednu, teda u_t bude mať v argumente y_t^1, y_t^2. Samotná iteračná procedúra je identická s jednorozmerným prípadom s rozdielom, že prebieha na štvorcovej sieti, $u_t^1 := u_t(y_t^1, y_t^2), u_t^2 := u_t(y_t^2, y_t^1)$, pričom y_t^1 a y_t^2 sú určené rovnicou analogickou (34)

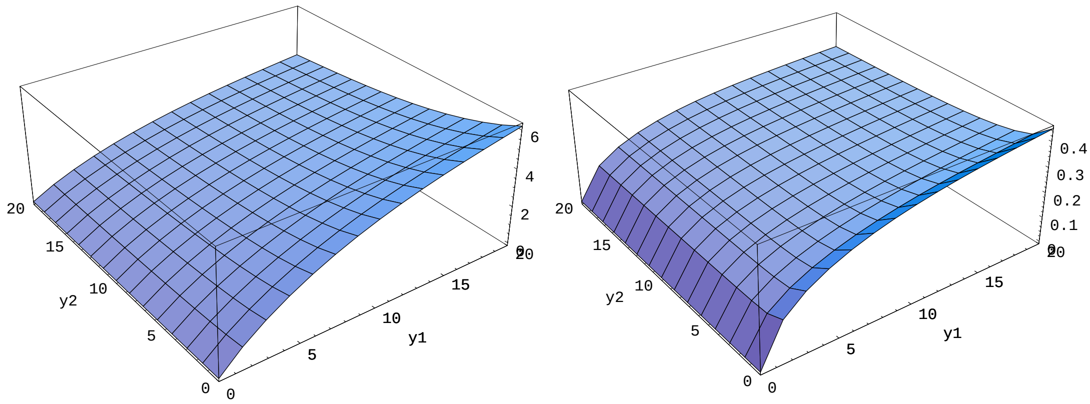
$$1 - 2u_t^1 - u_t^2 = e^{(r^*-\rho)\Delta t} \mathrm{E_t} \left[\frac{x_{t+\Delta t}}{x_t} \left(1 - 2u_{t+\Delta t}^1 - u_{t+\Delta t}^2\right) \right]. \qquad (61)$$

[15] T. j. platí podmienka (49).
[16] Táto vôbec nemusí byť optimálna.

V tejto rovnici je u_t^2 pevne dané, na počiatku je $u_t^2 \equiv 0$. Iterujeme pokým u_t^1 nebude rovné $u_{t+\Delta t}^1$, potom výsledok dosadíme za u_t^2 spôsobom $u_t^2(y_t^1, y_t^2) := u_t^1(y_t^2, y_t^1)$ a opäť iterujeme funkciu u_t^1. Iterácia riadiacej funkcie tu teda tvorí sub-iteračnú procedúru, ktorá nám dáva len pomocný výsledok. Iterovanie skončíme, keď bude platiť $u_t^1(y_t^1, y_t^2) = u_t^2(y_t^2, y_t^1)$. Potom optimálna riadiaca funkcia prvého špekulanta je $u_t^1(y_t^1, y_t^2)$ a druhého $u_t^1(y_t^2, y_t^1)$.

Optimálna hodnotová funkcia sa získa z iterácie hodnotovej funkcie odvodenej z rovnice (52) transformáciou pomocou substitúcii.

Na nasledujúcich obrázkoch je znázornené riešenie pomocou uvedeného postupu. Časový krok Δt a priestorový krok Δy sú rovné 0.2, požadovaná presnosť na rozdiel posledných dvoch iterácií je 1^{-10} a stupeň Gauss-Hermiteovej integrácie je 20.



(a) hodnotová funkcia (b) riadiaca funkcia

Obr. 5: Riešenie úlohy dvoch nekooperujúcich špekulantov

8 Záver

V tejto práci konfrontujeme dve metódy riešenia modelu špekulatívnych menových útokov. Na jednej strane je to analytický prístup, ktorý vedie na nelineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu. Riešenie tejto rovnice je možné aproximovať len rozvojom do mocninového radu, ktorý je prudko nestabilný. Na druhej strane sú konštruktívne metódy, ktoré vedú na úlohu dynamického programovania. Metódy dynamického programovania umožňujú riešiť vhodne formulované úlohy stabilnými iteračnými schémami.

Pre modelovanú úlohu sme našli numerické schémy na hľadanie riadiacej, ako aj hodnotovej funkcie. Obidve sa ukázali ako spoľahlivo konvergujúce k presnému riešeniu a navyše sú stabilné. Ich konštrukcia umožňuje jednoduchou variáciou poskytnúť metódu na riešenie rozšíreného a zložitejšieho modelu dvoch nekooperujúcich špekulantov, ktorého analytické riešenie je postatne komplikovanejšie.

A Dodatok

A.1 Transformácia úlohy

V transformácii úlohy (11), (12), (13), (14) na úlohu (22), (23), (24), (25) pomocou substitúcii (18) a (19) zostáva dokázať rovnicu (24) opisujúcu stochastický vývoj premennej y_t. Urobme najskôr rozvoj funkcie $y_t = \eta\frac{F_t}{x_t}$ pomocou Itovho vzorca

$$dy_t = -\eta\frac{F_t}{x_t^2}dx + \eta\frac{1}{x_t}dF_t + \frac{1}{2}2\eta\frac{F}{x_t^3}dx_t^2. \tag{62}$$

Potom dosadením rovníc (12) a (13) opisujúcich x_t a F_t a vyjadrenia pre u_t priamo dostaneme

$$dy_t = \eta\frac{F_t}{x_t}\left(-\lambda dt - \sigma dw_t + (r^* - \frac{u_t}{y_t})dt + \sigma^2 dt\right), \tag{63}$$

z toho

$$dy_t = (r^* - \lambda - \frac{u_t}{y_t} + \sigma^2)y_t dt - \sigma y_t dw_t. \tag{64}$$

A.2 Odvodenie diferenciálnej rovnice

V tejto časti ukážeme postup odvodenia diferenciálnej rovnice (26) ako ekvivalentnej formulácie úlohy (11), (12), (13), (14). Tento postup je možné viesť z pôvodnej úlohy cez odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice, ktorá sa potom dá rovnakou substitúciou ako pri transformácii úlohy zredukovať na obyčajnú parciálnu rovnicu. Rovnako je možné túto rovnicu priamo odvodiť, ak vychádzame z už transformovaného problému (22), (23), (24), (25). Ukážeme tú druhú variantu[17].

Najskôr použitím Itovho vzorca vyjadríme prvý difernciál pomocnej funkcie $H(s,x,y) = e^{-\rho s}x^2 h(y)$.

$$\begin{aligned}
dH &= -\rho e^{-\rho s}x^2 h(y)ds + 2e^{-\rho s}xh(y)dx + e^{-\rho s}x^2 h'(y)dy + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(2e^{-\rho s}h(y)dx^2 + 4e^{-\rho s}xh'(y)dxdy + e^{-\rho s}x^2 h''(y)dy^2\right) = \\
&= e^{-\rho s}x^2[-\rho h(y) + 2\lambda h(y) + h'(y)y(r^* - \lambda - \frac{u_t}{y} + \sigma^2) + h(y)\sigma^2 + \\
&\quad - 2h'(y)y\sigma^2 + \frac{1}{2}h''(y)y^2\sigma^2]ds = \\
&= e^{-\rho s}x^2\left(h(y)(2\lambda - \rho + \sigma^2) + h'(y)y(r^* - \lambda - \frac{u_t}{y} - \sigma^2) + \frac{1}{2}h''(y)y^2\sigma^2\right)ds
\end{aligned} \tag{65}$$

Využitím tohto výsledku aproximujeme $h(y_{t+\Delta t})$ vo výraze (31) nasledovným spôsobom

$$h(y_t) = \sup_{u_t} \mathrm{E_t}\left[u_t(1-u_t)\Delta t + h(y_t) + \frac{dH(0,x_t,y_t)}{x_t^2}\Delta t\right]. \tag{66}$$

Výraz v zátvorkách už je deterministický, teda operátor očakávania môžeme vynechať a písať

$$0 = \sup_{u_t}\left[u_t(1-u_t) + h(y_t)(2\lambda - \rho + \sigma^2) + h'(y_t)y_t(r^* - \lambda - \frac{u_t}{y_t} - \sigma^2) + \frac{1}{2}h''(y_t)y_t^2\sigma^2\right]. \tag{67}$$

[17] Prvý spôsob je uvedený v článku [5].

V prípade dostatočne malého y_t je podmienka (25) splnená, potom tento výraz dosahuje maximálnu hodnotu pre

$$u_t = \frac{1 - h'(y_t)}{2}, \tag{68}$$

po dosadení dostaneme požadovanú rovnicu (26)

$$\frac{(1 - h'(y_t))^2}{4} + h(y_t)(2\lambda + \sigma^2 - \rho) + h'(y_t)y_t(r^* - \lambda - \sigma^2) + \frac{1}{2}h''(y_t)y_t^2\sigma^2 = 0.$$

Okrajová podmienka $h(0) = 0$ je ekvivalentná podmienke $w(x, 0) = 0$, čo vyjadruje skutočnosť, že s nulovými rezervami špekulant skončil optimalizáciu a jeho ďalší príjem je nulový.

Druhá podmienka $h'(0) = 1$ zabezpečuje, že výmenný kurz neurobí diskrétny skok v momente, keď špekulant minie posledné rezervy. Toto by znamenalo vytvorenie arbitrážnej príležitosti a tým porušenie optimality. Výmenný kurz je v čase po kolapse ovplyňovaný len predajmi špekulanta podľa rovnice (10). Jeho optimálne predaje cudzej meny sú vyjadrené pomocou vzťahov (68) a (19), teda

$$f_t = \frac{x_t}{2\eta}(1 - h'(y_t)). \tag{69}$$

Kombináciou týchto rovníc dostaneme vyjadrenie pre výmenný kurz

$$S_t(x_t, y_t) = \frac{x_t}{2}\left(1 + h'(y_t)\right). \tag{70}$$

Teda $S_t(x_t, 0) = x_t \Leftrightarrow h'(0) = 1$. V nestochastickom prípade $\sigma = 0$ sú obidve okrajové podmienky (27) a (28) ekvivalentné.

A.3 Gauss-Hermiteova kvadratúra

Gauss-Hermiteovo pravidlo sa používa na aproximáciu integrálov na neohraničenom intervale $(-\infty, \infty)$ a má tvar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} w(x_k)f(x_k). \tag{71}$$

Pre dobrú presnosť musí byť funkcia $f(x)$ hladká a funkcia $e^{-x^2}f(x)$ musí mať nevlastné limity rovné 0. Funkcia $f(x)$ je aproximovaná v špeciálne zvolených bodoch x_k polynómom stupňa najviac $n - 1$. Tieto body, nazývané aj uzly, sú koreňmi Hermiteovho polynómu stupňa n. Potom váhy $w(x_k)$ sú dopočítané tak, aby aproximácia integrálu bola presná pre funkcie $f(x)$, ktoré sú polynómami stupňa menšieho ako n.

V našom prípade používame tento spôsob aproximácie na výpočet strednej hodnoty funkcie náhodnej premennej z normovaného normálneho rozdelenia. Teda počítame integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}dx \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}w(x_k)e^{\frac{x_k^2}{2}}g(x_k), \tag{72}$$

kde $g(x)$ je transformácia náhodnej premennej. Ihneď vidíme, že je veľmi nepravdepodobné, že táto aproximácia bude dávať presný výsledok, pretože ak by funkcia $g(x)$ aj bola polynómom, potom $e^{\frac{x^2}{2}} g(x)$ už ním nebude. Pre náš účel je nutné mať presnú aproximáciu pre konštantné funkcie $g(x)$, preto urobíme korekciu váh $w(x_k)$ nasledovne

$$w^a(x_k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sum_{k=1}^n w(x_k) e^{\frac{x_k^2}{2}}} w(x_k), \tag{73}$$

po dosadení potom získame túto formulu

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx \frac{1}{\sum_{k=1}^n w(x_k) e^{\frac{x_k^2}{2}}} \sum_{k=1}^{n} w(x_k) e^{\frac{x_k^2}{2}} g(x_k). \tag{74}$$

V praktickej implementácii výpočtu takýchto integrálov používame výlučne tento vzorec.

Literatúra

[1] Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming.*

[2] Bellman, R. (1962). *Applied Dynamic Programming.*

[3] Blanchard, O. a S. Fischer (1989). *Lectures on Macroeconomics*, 279–291.

[4] Calvo, G. A. a C. M. Reinhart (2000). *Fear of floating*. National Bureau of Economic Research Working Paper.

[5] Černý, A. (1999). *Currency crises: Introduction of spot speculators*. International Journal of Finance and Economics (4), 75–90.

[6] Judd, K. L. (1998). *Numerical Methods in Economics* (2nd ed.).

[7] Kopal, Z. (1955). *Numerical Analysis* (Appendix iv).

[8] Kushner, H. J. and P. Dupuis (2001). *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time* (2nd ed.).