

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Ekonomická a finančná matematika



Oceňovanie derivátov úrokovej miery s využitím
diskrétnych modelov vývoja úrokovej miery

Diplomová práca

Diplomant: Marián Dinga

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Igor Melicherčík, Ph.D.

Bratislava 2003

Čestne prehlasujem, že predkladanú diplomovú prácu som vypracoval samostatne a použil som len literatúru uvedenú v zozname.

Obsah

Úvod	2
1 Základné pojmy	4
2 Deriváty úrokovej miery	6
2.1 Opcie	6
2.2 Forwardové kontrakty	6
2.3 Future kontrakty	6
2.4 Capy	6
3 Modely úrokovej miery	7
3.1 Ho & Lee model	7
3.2 Hull-White model	8
3.3 Black-Derman & Toy model	9
4 Stromy úrokovej miery	11
4.1 Rizikovo-neutrálne oceňovanie	11
4.2 Oceňovanie indukciou odzadu	12
5 Základný term-structure model	13
6 Diskrétné modely úrokovej miery	17
6.1 Ho & Lee model v tvare binomického stromu	17
6.2 Vybudovanie trinomického stromu pomocou Hull-White modelu	21
6.3 Konštrukcia binomického stromu v Black-Derman & Toy modeli	24
7 Kalibrácia modelov na trhové dáta	28
7.1 Záporné úrokové miery v Ho & Lee modeli	28
7.2 Odhad parametra π v Ho & Lee modeli	29
7.3 Porovnanie vývoja cien forwardových a future kontraktov v Ho & Lee modeli	30
7.4 Vplyv parametra σ na cenu opcie v Ho & Lee modeli	31
7.5 Porovnanie cien európskych opcií s analytickými výsledkami v Hull-White modeli	32
7.6 Lognormálny Black-Derman & Toy model	33
7.7 Určenie parametrov a porovnanie modelov	33
Záver	36
Referencie	37

Úvod

V 80-tych a 90-tych rokoch sa množstvo a objem obchodovaných derivátov úrokovej miery prudko zvýšil. Potreby koncových užívateľov (investorov) sa zmenili a množstvo nových produktov, ktoré sa vyvinuli, reflektovali tieto zmeny. Jedným z takýchto produktov sú deriváty úrokovej miery, ktorých výplata (ako aj názov naznačuje) nejakým spôsobom závisia od hodnoty úrokovej miery. Deriváty úrokovej miery sú v súčasnosti jednou z najobchodovanejších foriem finančných derivátov a je veľmi dôležité vedieť ich správne oceniť.

Všeobecnou príčinou vzniku týchto nových derivátov bola potreba hedgovania úrokových rizík investorov. Tí sa potrebovali poistiť proti prílišnému poklesu alebo nárastu úrokových mier, resp. otočenia výnosovej krivky. Hlavnou úlohou pri modelovaní vývoja úrokovej miery je najsť solídny model na predpovedanie budúcich hodnôt úrokovej miery a oceňovanie jej derivátov.

Deriváty úrokových mier sú ťažšie oceniteľné ako deriváty akcií, pretože

- správanie úrokových mier je zložitejšie
- pri akciách stačí popísať vývoj jedného procesu, kým pri úrokových mierach je treba popísať vývoj celej výnosovej krivky
- volatility rôznych bodov na výnosovej krivke sú rôzne.

Úrokové miery a ich dynamika tvoria pravdepodobne výpočtovo najnáročnejšiu časť novodobej finančnej teórie. Pomocou nich sa časovým diskontovaním oceňujú nielen dlhopisy, ale aj mnohé iné typy derivátov. Úrokové miery majú veľký význam aj na podnikovej úrovni, pretože investičné rozhodnutia sú do veľkej miery závislé na očakávaníach týkajúcich sa alternatívnych príležitostí a kapitálových nákladov - oboje závisí od úrokovej miery. Poznanie časovej štruktúry úrokovej miery vo viacerých časových bodoch je základným predpokladom na určenie budúcich úrokových mier (t.j. budúcej časovej štruktúry úrokových mier).

Existuje niekoľko teórií vysvetľujúcich dynamiku časovej štruktúry úrokových mier - napr. hypotéza oddelených trhov, hypotéza prémie za likviditu atď. Iný spôsob je modelovanie časovej štruktúry pomocou stochastických procesov. V našej práci sa budeme venovať tomuto prístupu. Sústredíme sa na term structure modely, ktoré vychádzajú z určitých predpokladov pravdepodobnostného správania sa short rate.

Konkrétne, budeme pracovať s diskretnými modelmi úrokovej miery. Popíšeme si postupy na vytvorenie binomických (resp. trinomických) stromov short rate, pričom budeme dbať, aby boli konzistentné so súčasťou časovou štruktúrou úrokových mier. Rozoberieme si úlohu rizikovo-neutrálnych pravdepodobností pri oceňovaní derivátov úrokovej miery. Pri kalibrovaní stromov budeme používať reálne dáta úrokových mier a reálnu volatilitu úrokových mier. Volatilita sa dá odhadnúť jednoduchým výpočtom z historických dát.

Samotná práca je členená nasledovne: V prvej kapitole uvedieme definície základných pojmov a niektoré základné vzťahy, druhá kapitola je venovaná derivátom úrokových mier. Tretia kapitola sa zaoberá modelmi úrokovej miery a popisuje spojené verzie stochastických modelov vývoja short rate. Sú to konkrétne modely Ho & Lee, Hull-White a Black-Derman & Toy. Štvrtá kapitola je venovaná stromom úrokovej

miery a piata kapitola opisuje základný term structure model a oceňovanie rôznych derivátov. V šiestej kapitole odvodíme postupy na vytvorenie stromov úrokovej miery v diskretných verziách spomenutých modelov. Nakoniec v siedmej kapitole uvedieme niekoľko numerických výsledkov ako ukážku aplikácie uvedenej teórie na vypočítanie cien derivátov úrokovej miery.

Aj touto cestou by som sa rád poďakoval vedúcemu diplomovej práce Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, Ph.D. za odborné vedenie, cenné rady, pripomienky a podnety, ktoré výraznou mierou prispeli k skvalitneniu obsahu práce.

1 Základné pojmy

Úroková miera

Intuitívne úroková miera je niečo veľmi jasné. Uvažujme platbu 1\$, ktorá bude realizovaná s určitou v čase t od dnes. Ak je trhovú cenu tejto platby P_0 , potom sa dá úroková miera na čas t vypočítať z rovnice $P_0 = \frac{\$1}{(1+R(0,t))^t}$. Úrok $R(0,t)$, ktorý rieši túto rovnicu, označíme ako *čistú diskontnú úrokovú mieru* na t časových jednotiek.

Diskontný (bezkupónový) dlhopis s maturitou T

Základný kontrakt založený na úrokovej miere je dohoda o zaplatení určitej sumy dnes za sľub o prijatí vyššej sumy neskôr. Aká je adekvátna hodnota tohto kontraktu? Pre účely našej práce vylúčime možnosť nesplatenia záväzku dlžníkom a budeme uvažovať len bezrizikové požíčovanie. Potom na opísanie tohto kontraktu potrebujeme vedieť dĺžku jeho trvania - maturitu - (označme T) a pomer veľkosti dnešnej platby k budúcej ($P(0,T)$). Teda $P(0,T)$ označuje kontrakt, ktorý prinesie svojmu majiteľovi jednotku hotovosti v pevne stanovenom čase T . Inými slovami, je to *diskontný (bezkupónový) dlhopis s maturitou T* . $P(t,T)$ je hodnota tohto dlhopisu v čase t . $P(T,T)$ je hodnota tohto dlhopisu v čase splatnosti. Nazývame ju aj *nominálnou hodnotou* a predpokladáme, že pri diskontných dlhopisoch sa rovná jednej.

Kupónový dlhopis s maturitou T

Bezkupónový dlhopis prináša jeho vlastníčkovi nenulový cash flow iba v čase splatnosti. Častejšie sa obchoduje s dlhopismi, ktoré v stanovených časových intervaloch (najčastejšie polročne a ročne) vyplácajú stanovené čiastky - kupóny - a v maturite aj nominálnu hodnotu. Nazývame ich *kupónové dlhopisy*. Kupónové dlhopisy sa dajú zostrojiť ako portfólio bezkupónových, čo sa využíva pri oceňovaní derivátov úrokovej miery (napr. opcie na kupónový dlhopis).

Cena dlhopisu $P(t,T)$ je teda funkciou času t a zároveň aj funkciou maturity T . Pre pevné $t = t_0$ predstavuje graf $P(t,T)$ (teraz funkcia T) ceny dlhopisov rôznych maturít v čase t_0 a vo všeobecnosti je to klesajúca funkcia. Pre pevné $T = T_0$ je grafom funkcia času t , ktorá popisuje správanie dlhopisu až do maturity T_0 a býva rastúca.

Časová štruktúra úrokových mier

Jedným z kľúčových pojmov v teórii úrokových mier je *časová štruktúra úrokových mier (term structure of interest rates)*. Je to funkcia, ktorá odzrkadľuje závislosť súčasnej úrokovej miery na maturite T .

Krivka $P(t,T)$ hovorí o cene celého spektra dlhopisov s rôznymi maturitami, ale priamo z nej nezistíme, čo sa na trhu deje. Viac informatívnym údajom je implikovaná priemerná úroková miera ponúkaná dlhopisom na časový interval $\langle t, T \rangle$ (označme ako $R(t,T)$). Pri spojitom úročení vypočítame cenu dlhopisu s maturitou T v čase t

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

a z toho dostávame

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t} \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle.$$

Časová štruktúra úrokových mier je vlastne graf závislosti $R(0, T)$ na maturite T . Ak poznáme term structure v určitom čase, môžeme oceňovať dlhopisy a ďalšie kontrakty s fixnými platbami. Časová štruktúra môže byť klesajúca, konštantná, ale obyčajne je rastúca. Je to z dôvodu vyššej neistoty trhu pri vzdialenejších úrokových mierach, ale ak sú súčasné úrokové miery príliš vysoké a trh očakáva ich pokles, výnosy dlhopisov s krátkou maturitou budú vyššie ako pri dlhopisoch na dlhšie obdobie.

Short rate

Začiatok term structure označujeme ako *short rate* (prípadne *overnight rate*). Je to úrok na veľmi krátku dobu definovaný ako

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Short rate je neúplná informácia o časovej štruktúre a tá sa z nej nedá všeobecne určiť. Na modelovaní budúcej short rate sú však založené niektoré modely, pomocou ktorých sa oceňujú deriváty.

Forwardová miera

Predstavme si, že v čase t sa dohodneme, že v čase $T_1 > t$ kúpime za k jednotiek diskontný dlhopis s hodnotou 1 v čase $T_2 > T_1$. Chceme, aby cena dnešná cena kontraktu bola nulová. Aké musí byť k ? Tento kontrakt sa dá replikovať v čase t kúpený dlhopisu s maturitou T_2 a predaním k T_1 dlhopisov. Počiatočné náklady (t.j. v čase t) sú $kP(t, T_1) - P(t, T_2)$. Postavíme ich rovné nule a dostávame forwardovú cenu nákupu dlhopisu s maturitou T_2 v čase T_1

$$k = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}.$$

Zodpovedajúci výnos je *forwardová miera pokrývajúca periódu* $\langle T_1, T_2 \rangle$ a označíme ju $f(t, T_1, T_2)$. Platí

$$\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} = e^{-f(t, T_1, T_2)(T_2, T_1)}$$

a z toho dostávame

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1}.$$

Ak zvolíme T_1 a T_2 blízko seba, napr. $T_1 = T$ a $T_2 = T + \Delta t$ a necháme $\Delta t \rightarrow 0$, dostávame *okamžitú forwardovú mieru*

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T).$$

Odhadovanie časovej štruktúry z pozorovaných dát na trhu dlhopisov

Základným predpokladom pre vytváranie rôznych modelov úrokovej miery je poznanie súčasnej časovej štruktúry úrokových mier. Tú dokážeme celkom jednoducho odhadnúť pomocou cien dlhopisov pozorovaných na trhu. Jednoduchá idea postupu je zobrať množinu dlhopisov $\{B_j\}$, rozložiť každý z nich na postupnosť platieb (cash flow), diskontovať každú postupnosť vzhľadom na neznámu term-structure a výsledný výraz sa musí rovnať pozorovaným cenám.

2 Deriváty úrokovej miery

Deriváty odvodené od úrokovej miery sú v súčasnom svete asi najžiadanejšou skupinou finančných derivátov. Patria medzi nich call a put opcie, kupónové a bezkupónové dlhopisy, forwardové kontrakty, swapy, capy, floory, floating rate dlhopisy a mnohé iné.

2.1 Opcie

Opcia je kontrakt, ktorý nám dáva právo (nie povinnosť) urobiť niečo v budúcnosti. Konkrétne, *európska call opcia na aktívum* je právo kúpiť toto aktívum za pevne určenú sumu (*strike price*) v pevne určenom dátume (*expiračný čas*), *európska put opcia* je právo toto aktívum predať.

2.2 Forwardové kontrakty

Forwardový kontrakt na claim X je dohoda, uzavretá v čase $t < T$, kúpiť alebo predať v čase T claim X za dohodnutú forwardovú cenu. V čase t neprebíha žiadna výmena hotovosti. Forwardová cena sa dohodne tak, aby mal kontrakt nulovú hodnotu v tomto čase. Označme dohodnutú čiastku, za ktorú bude v čase T prijatý payoff claimu X ako $F_X(t, T)$. Táto čiastka sa nazýva *forwardová cena* claimu X a je predeterminovaná v čase t takým spôsobom (pričom sa berú do úvahy informácie dostupné do času t), aby bola arbitrážna cena kontraktu v čase t rovná nule.

2.3 Future kontrakty

Future kontrakt je podobne ako forwardový kontrakt dohoda medzi dvoma stranami, že v určitom čase v budúcnosti predajú (resp. kúpia) aktívum za určitú cenu. Rozdiel medzi future a forwardovým kontraktom spočíva v tom, že v prípade future kontraktu nie je špecifikovaný presný dodací termín (*delivery date*). V kontrakte sa uvádza iba mesiac, v priebehu ktorého sa musí aktívum dodať (držiteľ short position má právo určiť termín počas celého mesiaca, kedy vykoná dodanie). Cena future kontraktu je zároveň v každom čase udržiavaná na nule. Držiteľ future kontraktu má teda možnosť denne vyrovnávať "ušlý zisk", držiteľ forwardového kontraktu má túto možnosť iba na konci kontraktu. Hull v [2] ukázal, že ak predpokladáme konštantnú bezrizikovú úrokovú mieru, ceny forwardového kontraktu a futures kontraktu s rovnakým delivery date sa rovnajú. V skutočnosti však úrokové miery nie sú konštatné a teda ani ceny jednotlivých kontraktov nie sú rovnaké.

2.4 Capy

Cap úrokovej miery boli navrhnuté ako poistenie voči riziku, že floating rate, za ktorú si požičiavame, sa vyšplhá nad určitú úroveň. Táto úroveň sa nazýva *cap rate*. Neskôr si ukážeme, že cap je vlastne ekvivalentný s portfóliom put opcií na bezkupónový dlhopis.

3 Modely úrokovej miery

Modely, ktoré opisujú pravdepodobnostné správanie sa úrokových mier a sú spojené s pohybmi celej výnosovej krivky, nazývame term structure modely (t.j. modely časovej štruktúry úrokových mier). Oproti Blackovmu prístupu, ktorý vie analyticky oceniť mnohé deriváty, majú tú výhodu, že popisujú stochastické správanie úrokových mier a cien dlhopisov. V práci sa zameriame na term structure modely, ktoré sú založené na popísaní správania short-rate r . Rozlišujeme dva základné typy term structure modelov: *rovnovážne* a *no-arbitrage* modely.

Rovnovážne (equilibrium) modely

Rovnovážne modely vychádzajú z určitých predpokladov o premenných v ekonomike a z nich odvodzujú proces, ktorý sleduje rizikovo-neutrálna short-rate r . Potom zisťujú, čo tento proces implikuje ohľadne cien dlhopisov a opcí. Ceny však vo všeobecnosti nie sú konzistentné so súčasnou term-structure a ich odhad nemusí byť úplne presný. Aj malá chyba odhadu ceny dlhopisu sa stane veľkou pri odhade ceny opcie na dlhopis. V rovnovážnych modeloch drift short rate nie je obvykle funkciou času. Medzi takéto modely patria napr. Vašíčkov model a Cox-Ingersoll-Ross model.

No-arbitrage (bezarbitrážne) modely

Bezarbitrážne modely sú na rozdiel od rovnovážnych konzistentné so súčasnou výnosovou krivkou. Rozdiel medzi týmito dvoma typmi modelov sa dá zhrnúť nasledovne: v rovnovážnych modeloch je počiatočná term structure výstupom modelu, zatiaľ čo v bezarbitrážnych modeloch je počiatočná term structure vstupom. Drift short rate je vo všeobecnosti závislý od času. Tvar výnosovej krivky ovplyvňuje budúci vývoj short rate - ak je krivka rastúca, r bude v priemere tiež rásť a ak je krivka klesajúca, r bude v priemere klesať. Medzi no-arbitrage modely patria napr. Ho & Lee model, Hull-White model či Black-Karasinski model.

3.1 Ho & Lee model

Prvý no-arbitrage model navrhli v roku 1986 Ho a Lee. Uviedli ho vo forme binomického stromu cien dlhopisov. Limitne sa model v spojitom čase dá vyjadriť rovnicou

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dW, \quad (3.1)$$

kde W je štandardný, jednorozmerný Brownov pohyb, $\theta(t)$ je drift (priemerný smer, ktorým sa uberá r v čase t) a σ smerodajná odchýlka short-rate (konštantná). Premenná $\theta(t)$ je funkcia času zabezpečujúca presné vystihnutie počiatočnej (pozorovanej) term structure a je nezávislá na r . Dá sa vypočítať analyticky:

$$\theta(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, t) + \sigma^2 t, \quad (3.2)$$

kde $F(0, t)$ je okamžitá forwardová miera pre maturitu t vnímaná v čase nula. Vidíme teda, že drift short rate je vyjadrený sklonom okamžitej forwardovej krivky a volatilitou short rate.

V Ho & Lee modeli sa bezkupónové dlhopisy a európske opcie na bezkupónové dlhopisy

dajú oceniť analyticky. Výraz pre cenu bezkupónového dlhopisu v čase t ako funkcia short rate:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r(t)(T-t)}, \quad (3.3)$$

kde

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - (T - t) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 t (T - t)^2.$$

V uvedených rovnicach rozumieme pod časom nula súčasnosť. Pre časy v budúcnosti t a T platí $T \geq t$. Tieto rovnice teda definujú cenu bezkupónového dlhopisu v budúcom čase t ako funkciu short rate v čase t a cien bezkupónových dlhopisov v súčasnosti.

Cena európskej call opcie s maturitou T na bezkupónový dlhopis s maturitou s je v čase 0 rovná

$$LP(0, s)N(h) - XP(0, T)N(h - \sigma_P),$$

kde L je hodnota dlhopisu v maturite, X je strike price,

$$\sigma_p = \sigma(s - T)\sqrt{T}$$

a

$$h = \frac{1}{\sigma_P} \ln \frac{LP(0, s)}{P(0, T)X} + \frac{\sigma_P}{2}.$$

Cena put opcie na bezkupónový dlhopis je

$$XP(0, T)N(-h + \sigma_P) - LP(0, s)N(-h).$$

Ho & Lee model presne vystihuje súčasnú časovú štruktúru úrokových mier a umožňuje nám analyticky vypočítať ceny dlhopisov a opcií. Nevýhodou modelu však je, že štruktúra volatilit je obmedzená (všetky úrokové miery majú rovnakú smerodajnú odchýlku). Model neobsahuje ani prvok mean-reversion (neberie ohľad na to, aká vysoká (resp. nízka) je úroková miera v čase) a priemerné smerovanie úrokových mier je v každej časovej perióde rovnaké.

3.2 Hull-White model

Hull a White prezentovali v roku 1990 model, ktorý zdokonaľoval Ho & Lee model a zároveň aj Vašíčkov model:

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dW, \quad (3.4)$$

kde sú premenné rovnaké ako v Ho & Lee modeli, pribudla iba mean-reversion a . Hull-White model je niekedy charakterizovaný ako Ho & Lee model so stupňom mean-reversion na úrovni a . Podobne sa dá stretnúť aj s výrazom "rozšírený Vašíčkov" model, keďže sa od Vašíčkovho modelu líši iba tým, že hodnota, ku ktorej je short-rate "tlačaná", je závislá na čase.

(Vašíček: $dr = a(b - r)dt + \sigma dW$, Hull-White: $dr = a\left(\frac{\theta(t)}{a} - r\right)dt + \sigma dW$).

Funkcia $\theta(t)$ sa dá vypočítať z počiatocnej term structure:

$$\theta(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}). \quad (3.5)$$

Cena dlhopisu v čase t sa dá vyjadriť ako funkcia short rate:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (3.6)$$

kde

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (3.7)$$

a

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - B(t, T) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{4a^3} \sigma^2 (e^{-aT} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1). \quad (3.8)$$

Analytické vzorce na výpočet ceny call a put opcie sú rovnaké ako v Ho & Lee modeli, jediný rozdiel je v hodnote

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(s-T)}] \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}.$$

Štruktúra volatilit v Hull-White modeli závisí od σ aj od a . Volatilita ceny bezkupónového dlhopisu s maturitou T v čase t je

$$\frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(T-t)}].$$

3.3 Black-Derman & Toy model

Problém záporných úrokových mier, ktorý nás sprevádza v Ho & Lee modeli, sa dá jednoducho vyriešiť použitím lognormálnych úrokových mier. Black-Derman & Toy navrhli v r. 1990 model, ktorý vychádza z predpokladu, že logaritmus zmeny short-rate má normálne rozdelenie. Model sa dá vytvoriť algoritmicky - skonštruujeme binomický strom short rate tak, aby presne vystihoval súčasnú časovú štruktúru úrokových mier a volatilit. Model zahŕňa v sebe aj mean-reversion (podobne ako Hull-White model), ktorú dosahuje v čase klesajúcou volatilitou short rate. Ak je úroveň mean-reverzie dostatočne vysoká, volatilita short rate sa blíži v dlhšom časovom horizonte k nule a short rate ku konštante. Tento fakt býva často kritizovaný.

V lognormálnom Black-Derman & Toy modeli neexistujú analytické riešenia pre výpočet cien dlhopisov či opcií. Analýzu a oceňovanie opcií musíme robiť empiricky.

Proces pre short rate má tvar

$$r(t) = U(t)e^{(\sigma(t)W(t))}, \quad (3.9)$$

kde W je štandardný, jednorozmerný Brownov pohyb, $U(t)$ je medián lognormálneho pravdepodobnostného rozdelenia a $\sigma(t)$ je smerodajná odchýlka short rate. Po zlogaritmovaní dostávame

$$\ln r(t) = \ln U(t) + \sigma(t)W(t).$$

Derivujeme podľa t :

$$d \ln r(t) = \frac{\partial \ln U(t)}{\partial t} dt + \sigma(t) dW(t) + W(t) \sigma'(t) dt.$$

Z rovnice (3.9) dosadíme za $W(t)$ a dostávame

$$d \ln r(t) = \left[\frac{\partial \ln U(t)}{\partial t} + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} (\ln r(t) - \ln U(t)) \right] dt + \sigma(t) dW(t), \quad (3.10)$$

kde $\frac{\partial \ln U(t)}{\partial t}$ je drift a $\sigma'(t)$ predstavuje parciálnu deriváciu σ vzhľadom na t .

Výraz $-\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$ je vlastne úroveň mean-reverzie. Ak by sme predpokladali konštantnosť volatility short rate, tento výraz by mal nulovú hodnotu a model by nepodliehal mean-reverzii. Na druhej strane, ak pozorujeme klesajúcosť volatility short rate v čase, úroveň mean-reverzie je kladná. Konkrétne, ak by volatilita short rate klesala exponenciálne podľa funkcie $\sigma(t) = \sigma(0)e^{-at}$, $a > 0$, potom nadobúda mean-reverzia kladnú, konštantnú hodnotu a . Vo všeobecnosti, akákoľvek klesajúca časová štruktúra volatilit má v sebe zakomponovanú kladnú mean-reverziu.

4 Stromy úrokovej miery

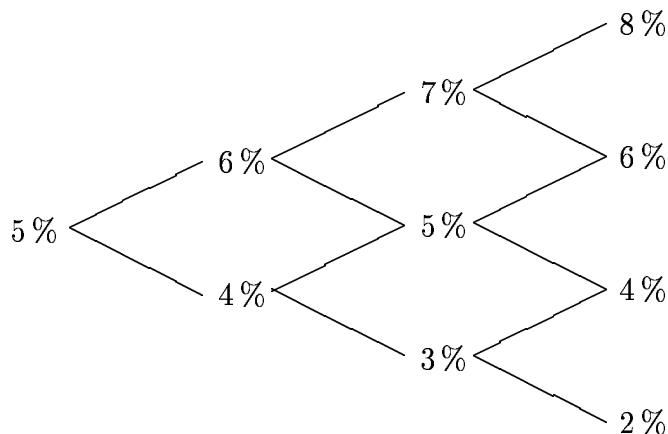
Stromy vývoja úrokovej miery reprezentujú stochastický vývoj short rate v diskretnom čase. Ak je časový krok v strome Δt a my sa nachádzame v čase t , hodnoty miery R v jednotlivých uzloch stromu predstavujú úrok, ktorým sa spojitou úročí pôžička na veľmi krátku dobu $(t, t + \Delta t)$. Pri konštrukcii stromu predpokladáme, že táto miera R sleduje rovnaký stochastický proces ako okamžitá úroková miera r v príslušnom spojitom modeli. Rozdiel napr. od stromov vývoja cien akcií spočíva v spôsobe diskontovania. V prípade cien akcií je diskontná miera rovnaká v každom uzle, zatiaľ čo v stromoch vývoja úrokovej miery sa diskontná miera mení od uzla k uzlu.

Na popísanie vývoja úrokovej miery používame väčšinou binomické alebo trinomické stromy. Binomické stromy sú možno o niečo jednoduchšie na zostrojenie, trinomické stromy poskytujú extra stupeň voľnosti a môžeme nimi zachytiť aj také vlastnosti úrokovej miery ako je mean-reversion.

4.1 Rizikovo-neutrálne oceňovanie

Všetky deriváty budeme oceňovať za predpokladu, že svet (a investori) sú rizikovo-neutrálni. To znamená, že na účely ocenenia budeme predpokladať:

- očakávaný výnos zo všetkých obchodovaných cenných papierov je bezriziková úroková miera
- budúce toky hotovosti (*cashflow*) sa oceňujú diskontovaním ich očakávaných hodnôt bezrizikovou úrokovou mierou.



Obrázok 1: Príklad vývoja úrokovej miery v binomickom modeli

4.2 Oceňovanie indukciou odzadu

Pri oceňovaní opcií začíname na konci stromu v dobe splatnosti opcie (čas T) a postupujeme k predchádzajúcim uzlom. V čase T je payoff opcie známy. Napríklad, put opcia má hodnotu $\max(X - P_T, 0)$ a call opcia má hodnotu $\max(P_T - X, 0)$, kde P_T je cena dlhopisu s maturitou $S \geq T$ v čase T a X je strike price. Keďže predpokladáme existenciu rizikovo-neutrálneho sveta, cena opcií v každom uzle v čase $T - \Delta t$ sa dá vypočítať ako očakávaná hodnota v čase T diskontovaná príslušnou úrokovou mierou, ktorou sa úročí počas periódy $\langle T - \Delta t, T \rangle$. Podobne, cena opcie v každom uzle v čase $T - 2\Delta t$ sa dá vypočítať ako očakávaná hodnota v čase $T - \Delta t$ diskontovaná príslušnou úrokovou mierou, ktorou sa úročí počas periódy $\langle T - 2\Delta t, T - \Delta t \rangle$ atď. Nakoniec, po prejdení všetkými uzlami, dostaneme cenu opcie v čase nula.

5 Základný term-structure model

Na začiatku kapitoly 3 sme uviedli modely zaoberajúce sa správaním celej výnosovej krivky, tzv. term-structure modely. Pre tieto modely sa vyžadujú nasledovné vlastnosti:

- musia byť multiperiodické
- úrokovú mieru, ktorou sa úročí počas periódy $(t - \Delta t, t]$ a ktorá je známa v čase $t - \Delta t$, označíme ako r_t
- filtrácia $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; t = 0, 1, \dots, T\}$ opisuje mieru informácie o cene cenného papiera, ktorá je investorom známa
- označme bankový účet v čase t ako B_t
- platí $r_t = \frac{B_t - B_{t-\Delta t}}{B_{t-\Delta t}}$ pre $t = 1, \dots, T$ a $B_0 = 1$
- cenu bezkupónového dlhopisu s maturitou τ v čase t sme označili $P(t, \tau)$ a táto cena je definovaná pre všetky $\tau; \tau \in [1, T]$
- $P(\cdot, \tau) = \{P(t, \tau); 0 \leq t \leq \tau\}$ je adaptovaný proces taký, že $P(\tau, \tau) = 1$
- cena $P(t, \tau)$ nie je definovaná pre $t > \tau$.

V každom čase t existuje súbor bezkup. dlhopisov $\{P(t, t+1), P(t, t+2), \dots, P(t, \tau)\}$. Tento súbor nazývame *časová štruktúra cien bezkupónových dlhopisov*. Term structure model musí byť zbavený arbitrážnych príležitostí, teda musí existovať rizikovo-neutrálna pravdepodobnostná miera \mathbb{Q} , pod ktorou sú diskontované ceny bezkupónových dlhopisov martingaly¹. Inými slovami, musí existovať nejaká pravdepodobnostná miera \mathbb{Q} ($\mathbb{Q}(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$), že pre všetky τ :

$$P(s, \tau) = B_s E_{\mathbb{Q}}[P(t, \tau)/B_t | \mathcal{F}_s], \quad 0 \leq s \leq t \leq \tau. \quad (5.1)$$

Viem ale, že $P(\tau, \tau) = 1$ a $\frac{B_t}{B_s} = (1 + r_{s+1}) \dots (1 + r_t)$, takže uvažujúc $t = \tau$ vidíme, že ceny bezkupónových dlhopisov musia vyhovovať vzťahu

$$P(s, \tau) = E_{\mathbb{Q}}[B_s/B_{\tau} | \mathcal{F}_s] = E_{\mathbb{Q}}[1/\{(1 + r_{s+1}) \dots (1 + r_{\tau})\} | \mathcal{F}_s], \quad 0 \leq s \leq \tau \quad (5.2)$$

pre rizikovo-neutrálnu mieru \mathbb{Q} . Ak zoberieme $\tau = s+1$, dostávame

$$r_{s+1} + 1 = \frac{1}{P(s, s+1)}, \quad s = 0, 1, \dots, T-1. \quad (5.3)$$

V term structure modeloch vieme s určitosťou budúce hodnoty niektorých cenných papierov (napr. bezkupónových dlhopisov v čase splatnosti). Najprv teda špecifikujeme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}, \mathbb{F})$, kde \mathbb{Q} bude rizikovo-neutrálna pravdepodobnostná miera, potom špecifikujeme okamžitú úrokovú mieru r (ktorej pravdepodobnostné správanie bude s ohľadom na \mathbb{Q}) a nakoniec pomocou (5.2) vypočítame ceny bezkupónových dlhopisov. Dokážeme teda skonštruovať term-structure model konzistentný so súčasnou časovou štruktúrou úrokových mier a nemusí nás znepokojovať

¹teória pravdepodobnostných očakávaní a martingalov je podrobne opísaná napr. v [8], kapitola 2

pravdepodobnostné správanie úrokových mier a bezkupónových dlhopisov v reálnom svete.

Aké bude teda správanie bezkupónových dlhopisov s rôznymi maturitami v čase? Na určenie procesov $P(., 1), P(., 2), P(., 3), \dots$ nemôžeme vziať ľubovoľný stochastický proces, ktorý spĺňa $P(t, \tau) < 1$ pre $t < \tau$ a $P(\tau, \tau) = 1$. Musíme rešpektovať podmienku (5.1), aby sme zabránili vzniku arbitrážnych príležitostí. Skutočne, pri známych $P(\tau, \tau)$ pre $\tau = 1, 2, 3, \dots$ nám (5.3) dáva len jedinú možnosť ako určiť $P(\tau - 1, \tau)$ pre $\tau = 1, 2, 3, \dots$

Pri určovaní cien bezkupónových dlhopisov teda postupujeme v strome odzadu. Ak poznáme ceny bezkupónových dlhopisov vo všetkých uzloch v nejakom čase, ceny v jednotlivých uzloch o jeden krok späť určíme

$$P(s, \tau) = E_{\mathbb{Q}}[(1 + r_{s+1})^{-1}P(s + 1, \tau)|\mathcal{F}_s] = (1 + r_{s+1})^{-1}E_{\mathbb{Q}}[P(s + 1, \tau)|\mathcal{F}_s]. \quad (5.4)$$

Túto rovnicu sme dostali dosadením $t = s + 1$ do (5.1).

Vo všeobecnosti môže byť cena akéhokoľvek claimu (t.j. derivátu) $C^{(t)}$, ktorý nepripúšťa arbitrážne príležitosti prostredníctvom kúpy a predaja derivátov či dlhopisov, vypočítaná pomocou rizikovo-neutrálnych pravdepodobností π ako diskontovaná očakávaná hodnota. Teda:

$$C^{(t)} = (1 + r_{t+1})^{-1}E_{\mathbb{Q}}[(C^{(t+1)} + X^{(t+1)})|\mathcal{F}_t], \quad (5.5)$$

kde $X^{(t+1)}$ je cash flow derivátu v čase $t + 1$.

Európska call opcia

Uvažujme, že európska call opcia na bezkupónový dlhopis $P(., s)$ má v čase τ payoff:

$$X = (P(\tau, s) - K)^+, \quad 0 \leq \tau < s \leq T,$$

kde K je strike price. Jej cenu π_t v čase $t < \tau$ vypočítame nasledovne:

$$\pi_t = B_t E_{\mathbb{Q}}[(P(\tau, s) - K)^+ / B_{\tau} | \mathcal{F}_t], \quad t \leq \tau. \quad (5.6)$$

Forwardový kontrakt

Uvažujme forwardový kontrakt vypísaný v čase t na claim X s dobou splatnosti T ($0 \leq t \leq T$). Forwardovú cenu claimu X sme v kapitole 2 označili ako $F_X(t, T)$. Už poznáme vzťah pre arbitrážnu cenu bezkupónového dlhopisu (5.1), arbitrážna cena claimu X v čase t je analogicky

$$\pi_t(X) = B_t E_{\mathbb{Q}}[X / B_T | \mathcal{F}_t], \quad \forall t \in (0, T), \quad (5.7)$$

kde \mathbb{Q} je rizikovo-neutrálna miera.

Forwardový kontrakt je reprezentovaný premennou $G_T = X - F_X(t, T)$. Arbitrážna cena tohto kontraktu G_T sa v čase t rovná nule, teda $\pi_t(G_T) = 0$. Podľa (5.7) dostávame

$$\pi_t(G_T) = B_t E_{\mathbb{Q}}[G_T B_T^{-1} | \mathcal{F}_t] = B_t (E_{\mathbb{Q}}[X B_T^{-1} | \mathcal{F}_t] - F_X(t, T) E_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1} | \mathcal{F}_t]) = 0. \quad (5.8)$$

Forwardová cena $F_X(t, T)$ claimu X sa v čase $t \leq T$ teda rovná

$$F_X(t, T) = \frac{E_{\mathbb{Q}}[X/B_T | \mathcal{F}_t]}{E_{\mathbb{Q}}[1/B_T | \mathcal{F}_t]} = \frac{\pi_t(X)}{P(t, T)}. \quad (5.9)$$

Future kontrakt

Označme cenu future kontraktu na claim X v čase t ako $\Phi_X(t, T)$, kde T je doba splatnosti future kontraktu. Predpokladajme, že dni, v ktorých sa obchoduje, sú diskkrétne:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

Uvažujme, že v čase t_k vstupujeme do future kontraktu na strane long position. Cena je vtedy $\Phi_X(t_k, T)$. V čase t_{k+1} , keď je cena $\Phi_X(t_{k+1}, T)$, obdržíme platbu $\Phi_X(t_{k+1}, T) - \Phi_X(t_k, T)$. (Ak cena klesla, zaplatíme $-(\Phi_X(t_{k+1}, T) - \Phi_X(t_k, T))$.) V čase $t_n = T$ budeme mať za sebou postupnosť platieb

$$\Phi_X(t_{k+1}, T) - \Phi_X(t_k, T), \Phi_X(t_{k+2}, T) - \Phi_X(t_{k+1}, T), \dots, \Phi_X(t_n, T) - \Phi_X(t_{n-1}, T)$$

v časoch $t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_n$. Hodnota tejto postupnosti v čase $t = t_0$ je

$$B_t E_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{j=k}^{n-1} B_{t_{j+1}}^{-1} (\Phi_X(t_{j+1}, T) - \Phi_X(t_j, T)) | \mathcal{F}_t \right].$$

V čase t_0 nás vstup do future kontraktu nestojí nič - hodnota tohto výrazu je potom nulová.

Cena future kontraktu je teda \mathcal{F}_t -adaptovaný stochastický proces

$$\{\Phi(t, T); 0 \leq t \leq T\},$$

ktorý spĺňa

$$\Phi(T, T) = \pi_T(X) \quad \text{a} \quad (5.10)$$

$$B_t E_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{j=k}^{n-1} B_{t_{j+1}}^{-1} (\Phi_X(t_{j+1}, T) - \Phi_X(t_j, T)) | \mathcal{F}_t \right] = 0 \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.11)$$

Jediný proces², ktorý spĺňa (5.10) a (7.13), je

$$\Phi(t, T) = E_{\mathbb{Q}}[\pi_T(X) | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.12)$$

Ak za claim X zoberieme bezkupónový dlhopis P , cena future kontraktu s maturitou T v čase S je

$$\Phi(t, T) = E_{\mathbb{Q}}[P(T, S) | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.13)$$

kde $P(T, S)$ predstavuje cenu bezkupónového dlhopisu s maturitou S v čase T .

²dôkaz nájdeme v [8], kapitola 27

Cap

Ak robíme platby v časoch $T_i = T_0 + i\delta, i \in \{1, \dots, n\}$, tak platíme v čase T_i δ -forwardovú mieru nastavenú v čase T_{i-1}

$$L(T_{i-1}, T_{i-1}) = \delta^{-1} \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right).$$

Cap nám platí rozdiel medzi touto plávajúcou sadzbou a cap rate k , dohodnutou pri uzatváraní kontraktu

$$\delta(L(T_{i-1}, T_{i-1}) - k)^+$$

v každom čase T_i . Jednotlivá platba uskutočnená v čase T_i sa nazýva *caplet*. Caplet môžeme prepísať ako

$$X = (1 + k\delta)P(T_{i-1}, T_i)^{-1}(K - P_i)^+, \quad (5.14)$$

kde $K = (1 + k\delta)^{-1}$.

Hodnota jednotlivého capletu X v čase t je $B_t E_{\mathbb{Q}}(B_{T_i}^{-1} X | \mathcal{F}_t)$, čo sa podľa (5.14) rovná

$$(1 + k\delta)B_t E_{\mathbb{Q}}(B_{T_{i-1}}^{-1} (K - P(T_{i-1}, T_i)) | \mathcal{F}_t). \quad (5.15)$$

To je zároveň presná hodnota $(1 + k\delta)$ put opcií na bezkupónový dlhopis s maturitou T_i , ktoré majú dobu splatnosti T_{i-1} a strike price K .

Táto ekvivalencia medzi capletom a put opciou sa dá zdôvodniť aj intuitívne. Uvažujme, kedy využijeme j -ty caplet. Je to práve vtedy, ak $L(T_{j-1}, T_{j-1}) > k$, resp.

$$P(T_{j-1}, T_j)^{-1} = 1 + L(T_{j-1}, T_{j-1})\delta > 1 + k\delta = K^{-1}.$$

Táto nerovnosť platí, ak $P(T_{j-1}, T_{j-1}) < K$, čo je stav, kedy využijeme put opciu. Množina udalostí, kedy sa využijú oba kontrakty, je teda rovnaká. Ak využijeme caplet, jeho payoff v čase T_j je $\delta(L(T_{j-1}, T_{j-1}) - k)$, resp.

$$\delta P(T_{j-1}, T_j)(L(T_{j-1}, T_{j-1}) - k) \quad (5.16)$$

v čase T_{j-1} . Payoff $(1 + k\delta)$ put opcií je $(1 + k\delta)(K - P(T_{j-1}, T_j)) = K^{-1}(K - P(T_{j-1}, T_j)) = 1 - (1 + k\delta)P(T_{j-1}, T_j) =$

$$\delta P(T_{j-1}, T_j) \left(\frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{P(T_{j-1}, T_j)} - 1 \right) - k \right), \quad (5.17)$$

čo sa rovná výplatu capletu.

6 Diskrétne modely úrokovej miery

V tejto kapitole si rozoberieme postupy na vytvorenie konkrétnych stromov vývoja úrokovej miery. Po zostrojení týchto stromov vieme oceniť rôzne deriváty úrokovej miery aj inak ako analyticky.

6.1 Ho & Lee model v tvare binomického stromu

Binomický strom je rekombinujúci, čo znižuje výpočtovú náročnosť modelu. Základná idea je modelovať budúce správanie celej term structure. Označme $P_i^{(t)}(T)$ cenu diskontného dlhopisu s maturitou T v čase t , kde i je stav sveta (uzol v binomickom strome). V každej vetve binomického stromu sa cena diskontného dlhopisu zmení z $P_i^{(t)}(\cdot)$ buď na $P_{i+1}^{(t+1)}(\cdot)$ ('posun hore') alebo na $P_i^{(t+1)}(\cdot)$ ('posun dole'). Premenná π definuje pravdepodobnosť posunu hore v binomickom strome pod pravdepodobnostnou mierou \mathbf{P} . Ďalej zavedieme perturbačnú funkciu $h^*(T-t)$, ktorá je nezávislá na stave a určuje veľkosť zmeny v cene dlhopisu za obdobie $\langle t-\Delta, t \rangle$ (Δ je veľkosť časového kroku). Pri posune hore budeme označovať perturbačnú funkciu $h^u(T-t)$ a pri posune dole $h^d(T-t)$. Postup vytvorenia binomického stromu sa dá rozdeliť do troch častí:

- určenie perturbačných funkcií
- odvodenie rizikovo-neutrálnych pravdepodobností
- odvodenie nutných podmienok pre nezávislosť na ceste.

Perturbačné funkcie

Proporčné posuny výnosovej krivky sa dajú zapísať nasledovne:

$$\begin{aligned} P_{i+1}^{(t)}(T) &= \frac{P_i^{(t-\Delta)}(T)}{P_i^{(t-\Delta)}(t)} h^u(T-t) && \text{v hornom stave,} \\ P_i^{(t)}(T) &= \frac{P_i^{(t-\Delta)}(T)}{P_i^{(t-\Delta)}(t)} h^d(T-t) && \text{v dolnom stave.} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Perturbačné funkcie nezávisia všeobecne od času, ale od zostávajúceho času do doby splatnosti dlhopisu. Keďže v čase splatnosti je cena dlhopisu rovná face value, perturbačné funkcie spĺňajú podmienku

$$P_i^{(T)}(T) = h^d(0) = h^u(0) = 1.$$

Rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti

Na odvodenie rizikovo-neutrálnych pravdepodobností zostrojíme portfólio V pozostávajúce z dvoch ľubovoľných bezkupónových dlhopisov s rôznou dobou splatnosti. Investujeme jednu jednotku do bezkupónového dlhopisu s maturitou T a ξ jednotiek do bezkupónového dlhopisu s maturitou $S < T$.

Hodnota portfólia $V = P(T) + \xi P(S)$ v hornom stave $i+1$ v čase $t < s < T$ je

$$V_{i+1}^{(t)}(T, S) = P_{i+1}^{(t)}(T) + \xi P_{i+1}^{(t)}(S) = \frac{P_i^{(t-\Delta)}(T)h^u(T-t) + \xi P_i^{(t-\Delta)}(S)h^u(S-t)}{P_i^{(t-\Delta)}(t)} \quad (6.2)$$

a v dolnom stave má portfólio hodnotu

$$V_i^{(t)}(T, S) = P_i^{(t)}(T) + \xi P_i^{(t)}(S) = \frac{P_i^{(t-\Delta)}(T)h^d(T-t) + \xi P_i^{(t-\Delta)}(S)h^d(S-t)}{P_i^{(t-\Delta)}(t)}. \quad (6.3)$$

Teraz chceme zvoliť takú hodnotu ξ , ktorá zabezpečí bezrizikovosť portfólia počas periódy $(t-\Delta, t)$ (teda $V_{i+1}^{(t)}(T, S) = V_i^{(t)}(T, S)$). Dostávame

$$\xi^* = \frac{P_i^{(t-\Delta)}(T)(h^u(T-t) - h^d(T-t))}{P_i^{(t-\Delta)}(S)(h^d(S-t) - h^u(S-t))}.$$

Dosadením do (6.2) alebo (6.3) dostávame

$$V^{(t)}(T, S) = \frac{P_i^{(t-\Delta)}(T)}{P_i^{(t-\Delta)}(t)} \frac{h^u(T-t)h^d(S-t) - h^u(S-t)h^d(T-t)}{h^d(S-t) - h^u(S-t)} \quad (6.4)$$

Aby sme vylúčili možnosť arbitráže, výnos bezrizikového portfólia musí byť rovný výnosu bezkupónového dlhopisu na jednu periódu $\left(\frac{1}{P_i^{(t-\Delta)}(t)}\right)$. Po niekoľkých úpravách a dosadení za ξ^* dostávame

$$\pi h^u(T-t) + (1-\pi)h^d(T-t) = 1 \quad \forall t, T, \quad t \leq T. \quad (6.5)$$

Premenná π je nezávislá na T a dá sa chápať ako rizikovo-neutrálna pravdepodobnosť. Ho & Lee model predpokladá jedinú rizikovo-neutrálnu pravdepodobnosť a všetky nároky (*claims*) môžeme oceňovať ako keby investori boli rizikovo-neutrálni.

Rizikovo-neutrálne oceňovanie dlhopisov

Oceňovanie diskontných dlhopisov je neutrálne, ak za pravdepodobnosti posunu hore a dole berieme π a $1-\pi$, kde π je definované rovnicou $\pi = \frac{1-h^d(T-t)}{h^u(T-t)-h^d(T-t)}$.

Cenu dlhopisu v čase 0 dostaneme, ak postupujem v strome po uzloch späť až k uzlu v čase 0. Cenu v ľubovoľnom uzle stromu vypočítame pomocou vzťahu

$$P_i^{(t)}(T) = (1+r_{t+1})^{-1}(\pi P_{i+1}^{(t+1)}(T) + (1-\pi)P_i^{(t+1)}(T)),$$

čo je vlastne len iný tvar rovnice (5.4).

Rizikovo-neutrálne oceňovanie derivátov

Môžeme použiť rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti π a $1-\pi$ aj na oceňovanie všeobecnejších produktov, t.j. rôznych derivátov úrokovej miery? Odpoveď na túto otázku je kladná. Postup je analogický ako pri diskontných dlhopisoch.

Nezávislosť na ceste

Pri konštruovaní binomických modelov je veľmi vhodné, ak je binomický strom rekombinujúci, t.j. bod, ktorý dosiahneme posunom hore a následným posunom dole, je totožný s bodom, ktorý dosiahneme posunom dole a následným posunom hore (v našom strome je to bod $P_i^{(t+2\Delta)}(T)$). V opačnom prípade sa výpočtová zložitosť a požiadavky

na pamäť počítača priveľmi zvyšujú. Máme teda dve cesty, ktoré vytvárajú systém dvoch rovníc

$$P_{i+1}^{(t+2\Delta)}(T) = \frac{P_i^{(t)}(T)}{P_i^{(t)}(t+2\Delta)} \frac{h^u(T-t-\Delta)h^d(T-t-2\Delta)}{h^u(\Delta)}$$

$$P_{i+1}^{(t+2\Delta)}(T) = \frac{P_i^{(t)}(T)}{P_i^{(t)}(t+2\Delta)} \frac{h^d(T-t\Delta)h^u(T-t-2\Delta)}{h^d(\Delta)}.$$

Z podmienky na nezávislosť

$$\frac{h^u(T-t-\Delta)h^d(T-t-2\Delta)}{h^u(\Delta)} = \frac{h^d(T-t-\Delta)h^u(T-t-2\Delta)}{h^d(\Delta)}.$$

a úpravou dostávame diferenčnú rovnicu prvého rádu

$$\frac{1}{h^u(T-t-\Delta)} = \frac{\delta^\Delta}{h^u(T-t-2\Delta)} + \frac{\pi(h^u(\Delta) - 1)}{h^u(\Delta)(1-\pi)} = \delta^\Delta \left(\frac{1}{h^u(T-t-2\Delta)} - \pi \right) + \pi,$$

kde

$$\delta^\Delta \equiv \frac{1 - \pi h^u(\Delta)}{h^u(\Delta)(1-\pi)}$$

je parameter, ktorý sa dá chápať ako určitý determinant šírky medzi dvoma perturbačnými funkciami.

Jednotlivé hodnoty perturbačných funkcií získame indukciou vpred:

$$\frac{1}{h^u(\Delta)} = \delta^\Delta(1-\pi) + \pi$$

$$\frac{1}{h^u(2\Delta)} = \delta^\Delta \left(\frac{1}{h^u(\Delta)} - \pi \right) + \pi = \delta^{2\Delta}(1-\pi) + \pi$$

$$\frac{1}{h^u(3\Delta)} = \delta^\Delta \left(\frac{1}{h^u(2\Delta)} - \pi \right) + \pi = \delta^{3\Delta}(1-\pi) + \pi.$$

⋮

$$\frac{1}{h^u(T-t)} = \delta^\Delta \left(\frac{1}{h^u(T-t-\Delta)} - \pi \right) + \pi = \delta^{T-t}(1-\pi) + \pi.$$

Dostávame teda vzťahy pre perturbačné funkcie

$$h^u(T-t) = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{(T-t)}} \quad \text{a} \quad h^d(T-t) = \frac{\delta^{(T-t)}}{\pi + (1-\pi)\delta^{(T-t)}}. \quad (6.6)$$

Z týchto rovníc vieme vyjadriť

$$\delta = \left(\frac{h^d(t, t+\Delta)}{h^u(t, t+\Delta)} \right)^{1/\Delta}, \quad 0 < \delta < 1.$$

Rovnice (6.6), ktoré sme odvodili zo vzťahov pre perturbačné funkcie, rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti a podmienky nezávislosti na ceste, tvoria jadro Ho & Lee modelu. Parameter δ sa nachádza v otvorenom intervale $(0, 1)$ (ak by napr. $\delta = 1$, premenlivosť úrokovej miery by zanikla). Parameter δ jednoznačne určíme pomocou volatility short rate.

Ak poznáme vyjadrenia perturbačných funkcií, rekurzívnym dosadením získame vzorec pre cenu dlhopisu v akomkoľvek uzle binomického stromu:

$$P_i^{(t)}(T) = \frac{P_0^{(0)}(T)}{P_0^{(0)}(t)} \delta^{(T-t)(\frac{t}{\Delta}-i)} \prod_{j=0}^{\frac{t}{\Delta}-1} \frac{\pi + (1-\pi)\delta^{t-(j+1)\Delta}}{\pi + (1-\pi)\delta^{T-(j+1)\Delta}}.$$

Cena dlhopisu na jednu periódu je

$$P_i^{(t)}(t + \Delta) = \frac{P_0^{(0)}(t + \Delta)}{P_0^{(0)}(t)} \frac{\delta^{(t-i\Delta)}}{\pi + (1-\pi)\delta^t}.$$

Ešte musíme ale určiť δ . Z definície short rate vieme, že

$$r_i(t) = -\ln \frac{P_i^{(t)}(t + \Delta)}{\Delta}.$$

Vertikálna vzdialenosť medzi jednotlivými uzlami v strome je potom

$$r_{(i+1)}(t) - r_i(t) = \Delta \ln \delta$$

a teda je konštantná. Variancia úrokovej miery na jednu periódu je

$$\sigma^2 \Delta = Var[r_i(t)] = Var \left[-\ln \frac{P_i^{(t)}(t + \Delta)}{\Delta} \right] = \frac{1}{\Delta^2} \pi(1-\pi)(\ln \delta)^2 \quad \forall i = 0, \dots, t.$$

Nie je teda závislá na čase ani na stave, je konštantná. Vždy keď máme varianciu úrokovej miery exogénne zadanú, napr. odhadom z historických dát, parameter δ nadobúda hodnotu

$$\delta = e^{-\frac{\sigma \Delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}}.$$

Ho & Lee model je najjednoduchší bezarbitrážny model. Avšak jeho hlavnou nevýhodou je, že pripúšťa záporné hodnoty úrokovej miery a neumožňuje volatilitám meniť sa v čase.

6.2 Vybudovanie trinomického stromu pomocou Hull-White modelu

Už vieme, že Hull-White model pre okamžitú úrokovú mieru r vychádza z rovnice

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dW.$$

Predpokladajme, že časový krok v strome bude konštantný a rovný Δt a že úroková miera na periódu Δt (označili sme ju R) je riadená rovnakým procesom ako r :

$$dR = (\theta(t) - aR)dt + \sigma dW.$$

Prvá časť

Celú procedúru si rozdelíme na dve časti. V prvej najskôr zostrojíme trinomický strom pre novú premennú R^* , ktorá je na začiatku nulová a sleduje proces

$$dR^* = -aR^* dt + \sigma dW.$$

Tento proces je symetrický okolo nuly. Premenná $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ je normálne rozdelená (podľa jednej z vlastností Brownovho pohybu). Ak zanedbáme výrazy vyššieho rádu ako Δt , stredná hodnota tejto premennej je $-aR^*(t)\Delta t$ a disperzia je $\sigma^2\Delta t$. Definujme rozstup medzi úrokovými mierami na strome ako ΔR . Z pohľadu minimalizácie chyby je dobrý výber

$$\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}.$$

Na zostrojenie trinomického stromu pre R^* potrebujeme vedieť, ako sa v jednotlivých uzloch strom rozvetvuje. Na obrázku 2 vidíme tri možné spôsoby vetvenia trinomického stromu. Pre príliš vysoké (resp. nízke) hodnoty short-rate sa v Hull-White modeli mení spôsob rozvetvovania tak, aby potlačil short-rate naspäť do želateľnej úrovne. Ak budeme vedieť, v ktorej perióde nastáva takýto jav, potom určíme aj samotné pravdepodobnosti v uzloch.

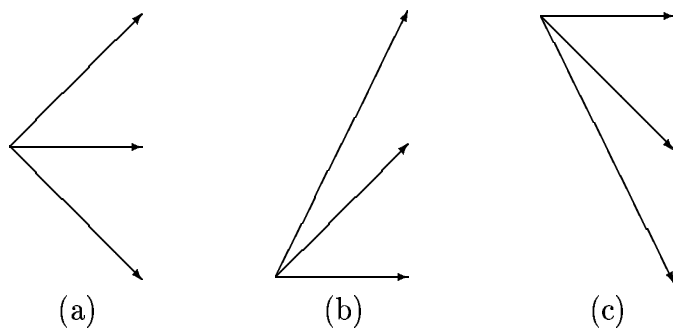
Označme uzol v čase $t = i\Delta t$ (teda po i krokoch) s hodnotou $R^* = j\Delta R$ ako (i, j) . (i, j sú celé čísla, navyše $i > 0$.) Ak je mean-reversion $a > 0$, je nevyhnutné pre príliš vysoké (resp. nízke) hodnoty j zmeniť spôsob rozvetvovania stromu. Definujme ako j_{max} hodnotu j , keď meníme spôsob rozvetvovania stromu z toho na Obr. 2a na ten na Obr. 2c, podobne j_{min} keď meníme z Obr. 2a na Obr. 2b. Hull a White ukázali, že pravdepodobnosti v uzloch sú kladné vždy keď za j_{max} vezmeme najmenšie celé číslo väčšie ako $0.184/(a\Delta t)$ a $j_{min} = -j_{max}$.

Definujme pravdepodobnosti v uzle stromu pre hornú, strednú a spodnú vetvu ako p_u, p_m a p_d . Pravdepodobnosti určíme z rovníc pre strednú hodnotu a varianciu premennej $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ (zmena R^* v čase) a z podmienky na súčet pravdepodobností (musí byť rovný 1). Dostávame tri rovnice o troch neznámych:

$$p_u\Delta R - p_d\Delta R = -aj\Delta R\Delta t$$

$$p_u\Delta R^2 + p_d\Delta R^2 = \sigma^2\Delta t + a^2j^2\Delta R^2\Delta t^2$$

$$p_u + p_m + p_d = 1.$$



Obrázok 2: Rôzne spôsoby vetvenia trinomického stromu

Dosadením $\Delta R^2 = 3\sigma^2\Delta t$ a vyriešením sústavy dostávame:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - aj\Delta t}{2}$$

$$p_m = \frac{2}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + aj\Delta t}{2}.$$

Tieto vyjadrenia pravdepodobností platia iba pre taký uzol (i, j) , aký je znázornený na Obrázku 2a. Pre uzol, v ktorom je vetvenie ilustrované na Obrázku 2b, sú pravdepodobnosti

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + aj\Delta t}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 - 2aj\Delta t$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + 3aj\Delta t}{2}$$

a pre uzol na Obrázku 2c

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - 3aj\Delta t}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 + 2aj\Delta t$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - aj\Delta t}{2}.$$

Vidíme, že pravdepodobnosti závisia iba na j . Sú nezávislé od i - nezáleží teda na tom, v ktorej perióde sa nachádzame.

Druhá časť

Keď už máme zostrojený strom pre R^* , konvertujeme ho na strom pre R . To dosiahneme pripočítaním novej premennej α k už známej R^* . Štruktúra stromu zostane rovnaká, akurát hodnoty úrokovej miery v jednotlivých uzloch sa zmení takým spôsobom, aby dokonale pasovali na súčasnú časovú štruktúru.

Definujme α_i ako $\alpha(i\Delta t)$ - je to hodnota R v čase $i\Delta t$ na strome pre R mínus zodpovedajúca hodnota R^* v čase $i\Delta t$ na strome pre R^* . Definujme $Q_{i,j}$ ako súčasnú hodnotu cenného papiera, ktorý, ak je dosiahnutý uzol (i, j) , vypláca \$1 a v opačnom prípade nulu. Výrazy α_i a $Q_{i,j}$ sa dajú vypočítať pomocou indukcie vpred tak, že je presne vystihnutá súčasná časová štruktúra. Potom už poznáme všetky premenné potrebné na vypočítanie R v každom uzle.

Podme si tento postup názorne ilustrovať: Hodnota $Q_{0,0}$ je 1. Potom vypočítame α_0 tak, aby dávalo správnu cenu bezkupónového dlhopisu s maturitou v čase Δt (to znamená, že α_0 bude rovné počiatkovej úrokovej miere na periódu Δt).

Predpokladajme teraz, že existuje $m \geq 0$ také, že sú už určené všetky $Q_{i,j}$ pre $i \leq m$. V ďalšom kroku určíme α_m tak, že strom úrokových mier správne ocení bezkupónový dlhopis s maturitou v čase $(m+1)\Delta t$. Úroková miera v uzle (m, j) je $\alpha_m + j\Delta R$, takže cena tohto dlhopisu je

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t},$$

kde n_m je počet uzlov na každej strane od stredového uzla v čase $m\Delta t$. Úpravou dostaneme

$$\alpha_m = \frac{\ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta R\Delta t} - \ln P_{m+1}}{\Delta t}.$$

Môžeme pokračovať ďalej a pomocou α_m vypočítame $Q_{i,j}$ pre $i = m+1$:

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k, j) e^{-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t},$$

kde $q(k, j)$ je pravdepodobnosť prechodu z uzla (m, k) do uzla $(m+1, j)$ a sumujeme cez také k , pre ktoré je táto pravdepodobnosť nenulová.

Hlavný rozdiel v implementácii Ho & Lee a Hull-White modelov: Hull a White špecifikujú vzdialenosť medzi jednotlivými uzlami v tom istom čase (ktorá je závislá na volatilitě) a z nich odvodlia pravdepodobnosti. Ho & Lee najprv zadajú pravdepodobnosti a potom nájdu zodpovedajúcu funkciu volatility.

6.3 Konštrukcia binomického stromu v Black-Derman & Toy modeli

Black-Derman & Toy model predpokladá lognormálne rozdelenie zmien short rate a dobre vyhovuje štruktúre volatilit tým, že umožňuje volatilitám meniť sa každú periódu. Označme očakávaný logaritmus zmeny short rate ako μ a volatilitu očakávaného logaritmu zmeny short rate ako σ . Potom má v spojitom čase dynamika logaritmu short rate tvar

$$d \ln r(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dz, \quad (6.7)$$

kde premenná z symbolizuje stav (uzol) v čase a premenná dz predstavuje zmenu stavu (v diskretnom čase je dz náhodná premenná, ktorá nadobúda jednu z hodnôt $\{-1, 1\}$).

Reprezentácia rovnice (6.7) v diskretnom čase je

$$\Delta \ln r(t) = \mu(t)\Delta t + \sigma(t)z\sqrt{\Delta t} = \ln \frac{r(t + \Delta t)}{r(t)} = \ln r(t + \Delta t) - \ln r(t). \quad (6.8)$$

Z toho dostávame

$$r(t + \Delta t) = r(t)e^{(\mu(t)\Delta t + \sigma(t)z(t)\sqrt{\Delta t})} = U(t)e^{\sigma(t)z(t)\sqrt{\Delta t}}, \quad (6.9)$$

kde $U(t) = r(t)e^{\mu(t)\Delta t}$ je medián lognormálneho pravdepodobnostného rozdelenia. Ako určíme hodnotu $U(t)$? Nech $Q_i^{(t)}$ je cena cenného papiera, ktorý vypláca \$1 v čase t , ak je dosiahnutý stav z , v opačnom prípade nulu. Keďže dnešná časová štruktúra úrokových mier je známa, dnešná cena diskontného dlhopisu s ľubovoľnou maturitou je rovná

$$\begin{aligned} P^{(0)}(t + \Delta t) &= \sum_z P_z^{(t)}(t + \Delta t)Q_z^{(t)} = \sum_z \frac{1}{1 + r_z(t)\Delta t} Q_z^{(t)} = \\ &= \sum_z \frac{Q_z^{(t)}}{1 + U(t)e^{\sigma(t)z(t)\sqrt{\Delta t}}\Delta t}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

kde sumujeme cez možné stavy z v čase t .

Ako vstup do modelu slúžia výnosy bezkupónových dlhopisov a jednorôčné volatility (v diskretnom modeli sa volatilita okamžitej jednorôčnej miery rovná volatilita short rate). Jedinou neznámou v rovnici (6.10) teda zostáva výraz $U(t)$. Nanešťastie, nedá sa vyjadriť analyticky, musíme použiť numerické riešenie. Ilustrujme uvedený post-

Maturita	1	2	3	4	5
Výnos	1.93 %	2.33 %	2.73 %	3.12 %	3.50 %

Tabuľka 1: Term structure úrokovej miery.

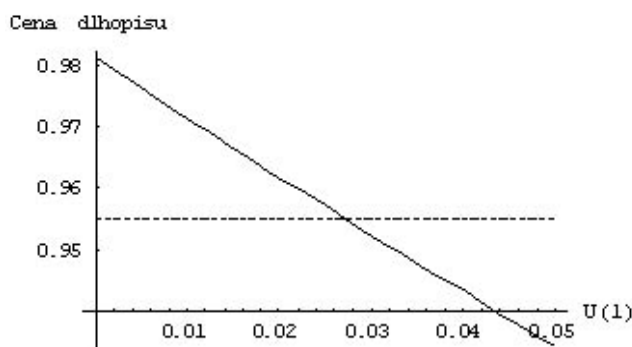
up na konkrétnom príklade: Predpokladajme, že výnosy bezkupónových dlhopisov sú ako v tabuľke 1 a jednorôčná volatilita sa v čase mení ako v tabuľke 2. Ďalej predpokladajme, že martingalová pravdepodobnosť posunu hore je $\pi = 0.5$ a posunu dole $1 - \pi = 0.5$. Jednorôčná úroková miera je hodnota short-rate v uzle 0 binomického stromu ($r_0(0) = 1.93\%$). Akú hodnotu bude mať short-rate v ďalšej perióde?

Čas	1	2	3	4	5
Volatilita (1-ročná)	10.30 %	9.41 %	8.75 %	8.65 %	7.93 %

Tabuľka 2: Term structure jednoročnej volatility.

Rizikovo-neutrálnym ocenením vypočítame hodnoty $Q_{-1}(1) = 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot \left(\frac{1}{1+1.93/100}\right) = 0.490533$ a $Q_1(1) = 0.5 \cdot \left(\frac{1}{1+1.93/100}\right) + 0.5 \cdot 0 = 0.490533$. Dosadením do (6.10) dostávame

$$\begin{aligned}
 P^{(0)}(2) = 0.9550 &= \frac{Q_1(1)}{1 + U(1)e^{\sigma(1) \cdot 1 \cdot \sqrt{\Delta t} \Delta t}} + \frac{Q_{-1}(1)}{1 + U(1)e^{\sigma(1) \cdot (-1) \cdot \sqrt{\Delta t} \Delta t}} = \\
 &= \frac{0.490533}{1 + U(1)e^{0.103 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}}} + \frac{0.490533}{1 + U(1)e^{0.103 \cdot (-1) \cdot \sqrt{1}}}.
 \end{aligned}$$



Obrázok 3: Hľadanie riešenia pre $U(1)$.

Numerickým riešením sme dostali $U(1) = 2.73\%$. Je to jediná hodnota, pre ktorú sa cena bezkupónového dlhopisu v modeli rovná cene bezkupónového dlhopisu v skutočnosti. Teraz môžeme podľa (6.9) vypočítať short rate v oboch uzloch v perióde 1:

$$\begin{aligned}
 r_1(1) &= U(1)e^{\sigma(1) \cdot 1 \cdot \sqrt{1}} = 2.73\%e^{0.103} = 3.028\% \\
 r_{-1}(1) &= U(1)e^{\sigma(1) \cdot (-1) \cdot \sqrt{1}} = 2.73\%e^{-0.103} = 2.465\%.
 \end{aligned}$$

Ďalšie kroky

- Vypočítame hodnotu $Q_i(2)$, $i \in \{2, 0, -2\}$.
- Numericky nájdeme $U(2)$ tak, aby cena 3-ročného bezkupónového dlhopisu v modeli a v skutočnosti bola rovnaká.
- Nájdeme hodnoty short rate vo všetkých troch uzloch v perióde 2 (použitím rovnice $r_i(2) = U(2) \cdot e^{\sigma(2) \cdot i \cdot \sqrt{1}}$).

Čas	0	1	2	3	4	5
Úroková miera		1.93 %	2.33 %	2.73 %	3.12 %	3.50 %
Bezakupónový dlhopis	1	0.9811	0.9550	0.9225	0.8845	0.8420
Volatilita (ročná)		10.30 %	9.41 %	8.75 %	8.65 %	7.93 %
U(t)	1.93 %	2.73 %	3.51 %	4.27 %	5.01 %	5.74 %

	0	1	2	3	4	5
5						8.53 %
4					7.08 %	
3				5.55 %		7.28 %
2			4.23 %		5.96 %	
1		3.028 %		4.66 %		6.21 %
0	1.93 %		3.51 %		5.01 %	
-1		2.465 %		3.91 %		5.30 %
-2			2.90 %		4.22 %	
-3				3.28 %		4.53 %
-4					3.55 %	
-5						3.86 %

Tabuľka 3: Binomický strom vývoja short rate v Black-Derman & Toy modeli.

Výsledok pre $U(t)$ a short rate je je zapísaný v tabuľke.

Predpokladali sme, že zmeny short rate majú lognormálne rozdelenie. Prirodzený logaritmus zmeny short rate má potom normálne rozdelenie a teda

$$\sigma^2 = \pi(1 - \pi) \left[\ln r_{i+1}^{(t+\Delta t)} - \ln r_{i-1}^{(t+\Delta t)} \right]^2 = \frac{1}{4} \left[\ln \frac{r_{i+1}^{(t+\Delta t)}}{r_{i-1}^{(t-\Delta t)}} \right]^2.$$

Po úprave dostávame vyjadrenie volatility pomocou hodnôt short rate dvoch susedných uzlov v čase $t + \Delta t$

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{r_{i+1}^{(t+\Delta t)}}{r_{i-1}^{(t+\Delta t)}} \right]. \quad (6.11)$$

Popísali sme teda postup na zostrojenie binomického stromu pri známej funkcii volatility short rate (resp. volatility jednoročnej úrokovej miery). Iný spôsob je zostrojiť tento strom pomocou volatilit výnosov bezakupónových dlhopisov. Tento spôsob je vyžaduje riešiť o niečo zložitejší systém rovníc, avšak volatilitu vypočítame celkom jednoducho z historických dát.

Odhadovanie volatility výnosu bezakupónového dlhopisu z historických dát

Definujme: $n+1$: počet pozorovaní, r_i : výnos bezakupónového dlhopisu na konci i -teho intervalu, τ : dĺžka času v rokoch. Nech

$$u_i = \ln \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Štandardnú odchýlku s premennej r_i odhadneme nasledovne:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2},$$

kde \bar{u} je priemer hodnôt u_i . Hull v [2] ukázal, že štandardná odchýlka sa rovná $\sigma\sqrt{\tau}$. Teda hodnota s je odhadom $\sigma\sqrt{\tau}$. Volatilita môže byť potom odhadnutá ako

$$\sigma^* = \frac{s}{\sqrt{\tau}}.$$

Pri hľadaní hodnôt short rate v jednotlivých uzloch stromu budeme postupovať numericky tak, aby výsledné hodnoty cien dlhopisov a volatility výnosov (implikované stromom) boli konzistentné s pôvodnými (vstupnými) hodnotami. Ilustrujme si postup na príklade. Na trhu boli pozorované nasledujúce dáta: Jednoročná úroková

Maturita	1	2	3	4	5
Úroková miera	1.30 %	1.63 %	2.05 %	2.45 %	2.90 %
Historická volatilita		10.33 %	9.54 %	9.30 %	9.05 %

miera je zároveň short rate v uzle nula. Ďalej určíme hodnoty short rate $r_1(1)$ a $r_{-1}(1)$ v uzloch v čase 1. Tie nám potom jednoznačne určia strom vývoja ceny 2-

	Short rate			Cena 2-ročného dlhopisu		
	0	1	2	0	1	2
3						
2			?		2.163 %	1000
1		2.163 %			978.8	
0	1.300 %		?	968.2		1000
-1		1.759 %			982.7	
-2			?		1.759 %	1000
-3						

Tabuľka 4: Binomický strom vývoja short rate v Black-Derman & Toy modeli.

ročného bezkupónového dlhopisu. Cena v uzle nula musí byť konzistentná so vstupnými dátami (a naozaj: $\sqrt{1000/968.2} - 1 = 0.0163$). Pri posune hore dlhopis nadobúda cenu 978.8 s jednou periódou do splatnosti a zodpovedajúci výnos do splatnosti je $1000/978.2 - 1 = 0.02163$. Pri posune dole je cena dlhopisu 982.7 a výnos $1000/982.7 - 1 = 0.01759$. Historická volatilita 2-ročného bezkupónového dlhopisu σ_{ZC2} musí spĺňať

$$\sigma_{ZC2} = \frac{1}{2} \ln \frac{y_1}{y_{-1}},$$

kde y_1 a y_{-1} sú výnosy do splatnosti a skutočne platí, že $0.5 \ln \frac{0.02163}{0.01759} = 0.1033$.

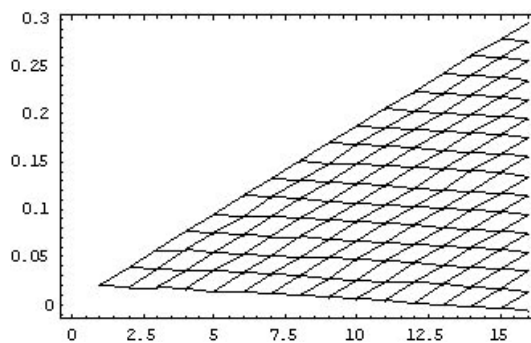
Analogicky postupujeme aj v ďalších periódach a nakoniec získame binomický strom vývoja short rate. Potom už môžeme prejsť k samotnému oceneniu derivátov.

7 Kalibrácia modelov na trhové dáta

V tejto časti sa budeme venovať numerickým výsledkom, budeme aplikovať postupy z predchádzajúcich kapitol a oceníme konkrétne deriváty úrokovej miery. Pri kalibrácii budeme vychádzať zo súčasnej časovej štruktúry úrokových mier. Dáta³ sú z februára 2003. Všetky výpočty sú na amerických dátach a boli prevádzané pomocou systému Mathematica 4.0 a Microsoft Excell. Historická volatilita bola odhadnutá na základe mesačných dát úrokových mier z obdobia január 1974 - február 2003.

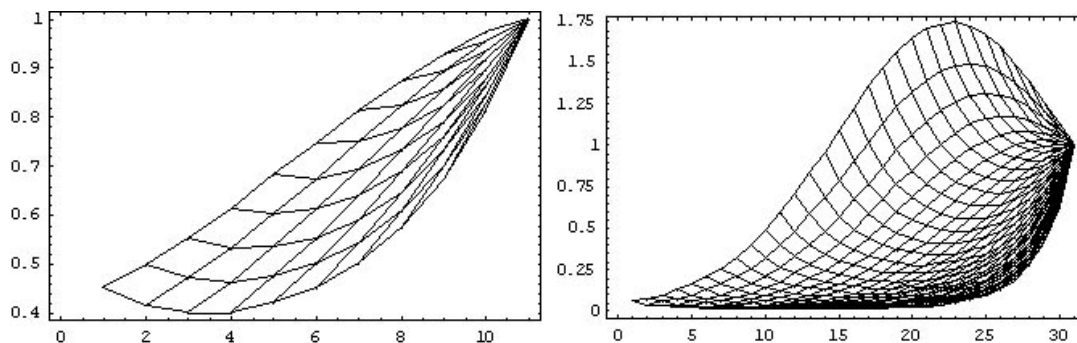
7.1 Záporné úrokové miery v Ho & Lee modeli

Z teórie už vieme, že nevýhodou Ho & Lee modelu je nenulová pravdepodobnosť nastatia zápornej úrokovej miery. Na nasledujúcom obrázku vidíme vývoj short-rate v Ho & Lee modeli. Vidíme, že rozostupy medzi jednotlivými uzlami sú konštantné



Obrázok 4: Binomický strom vývoja short-rate v Ho & Lee modeli.

a short-rate nadobúda v dlhšom časovom horizonte aj záporné hodnoty. Táto skutočnosť sa odrazí aj na cenách dlhopisov:



Graf vľavo ilustruje vývoj ceny bezkupónového dlhopisu s maturitou 10 v binomickom strome. Na vertikálnej osi je cena dlhopisu a na horizontálnej osi je čas. Vidíme, že cena je v každom uzle menšia ako jedna. Graf vpravo ilustruje vývoj ceny bezkupónového dlhopisu s maturitou 30 a po perióde 15 nadobúdajú niektoré uzly hodnoty väčšie ako jedna.

Obrázok 5: Graf vývoja ceny bezkupónového dlhopisu.

³zdroj dát - <http://www.treas.gov/offices/domestic-finance/debt-management/interest-rate/>

7.2 Odhad parametra π v Ho & Lee modeli

V skutočnosti je nereálne, aby mal bezkupónový dlhopis v nejakom čase hodnotu vyššiu ako jedna. V reálnom svete sú totiž úrokové miery vždy kladné, dlhopis má v čase splatnosti hodnotu jedna a v hociktorom inom čase hodnotu menšiu ako jedna. Pomocou parametra δ vieme zaručiť, že do určitého času U zostanú úrokové miery kladné. Ukázali sme si, že ak nadobúdajú úrokové miery záporné hodnoty, potom sú ceny bezkupónových dlhopisov väčšie ako jedna. Uvažujme teraz s podmienkou ohraničujúcou tieto ceny

$$P(t/\Delta, t, t + \Delta) = \frac{P(0, 0, t + \Delta)}{P(0, 0, t)} \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^t} \leq 1,$$

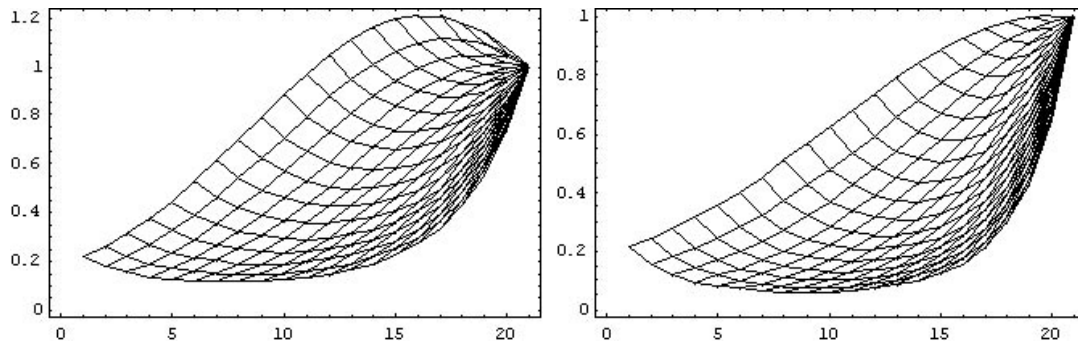
kde $P(t/\Delta, t, t + \Delta)$ je uzol s najvyššou cenou v danom čase t . Po úprave dostávame ohraňenie výberu pravdepodobnosti π

$$\delta \geq \left(\frac{\frac{P(0,0,t+\Delta)}{P(0,0,t)} - \pi}{1 - \pi} \right)^{1/t}.$$

Na určenie najmenej príпустnej hodnoty π riešime rovnicu

$$e^{-\frac{\sigma\Delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}} = \left(\frac{\frac{P(0,0,t+\Delta)}{P(0,0,t)} - \pi}{1 - \pi} \right)^{1/t}$$

a ak existuje riešenie menšie ako jedna, získame pravdepodobnosť garantujúcu kladné úrokové miery až do periódy t . Pri dlhopisoch s dobou splatnosti väčšou ako 20 už



Obidva grafy ilustrujú vývoj ceny bezkupónového dlhopisu s maturitou 20. Na vertikálnej osi je cena dlhopisu a na horizontálnej osi je čas. Na grafe vľavo sme použili pravdepodobnosť $\pi = 0.55$, ktorá nám zaručuje kladné úrokové miery len do periódy 10, na grafe vpravo nám pravdepodobnosť $\pi = 0.77$ zaručuje kladné úrokové miery do periódy 18.

Obrázok 6: Graf vývoja ceny bezkupónového dlhopisu pri rôznych pravdepodobnostiach vetvenia.

neexistujú pravdepodobnosti v intervale $\langle 0, 1 \rangle$ a úrokové miery môžu nadobudnúť aj záporné hodnoty. Avšak aj napriek tejto "anomálii" nám Ho & Lee model dá zmysluplné ceny derivátov, pretože pri oceňovaní sa využíva celý strom, nielen niektoré uzly.

7.3 Porovnanie vývoja cien forwardových a future kontraktov v Ho & Lee modeli

V kapitole (2.3) sme rozobrali rozdiely medzi forwardovými a future kontraktmi. Overme v praxi, či sa ich ceny rovnajú alebo nie. Budeme uvažovať kontrakty s maturitou T na bezkupónový dlhopis s maturitou S .

Forwardovú cenu F podľa (5.9) v stave i a čase t vypočítame ako

$$F(t, T) = \frac{P(t, S)}{P(t, T)}. \quad (7.12)$$

Cena future kontraktu Φ je podľa (5.13)

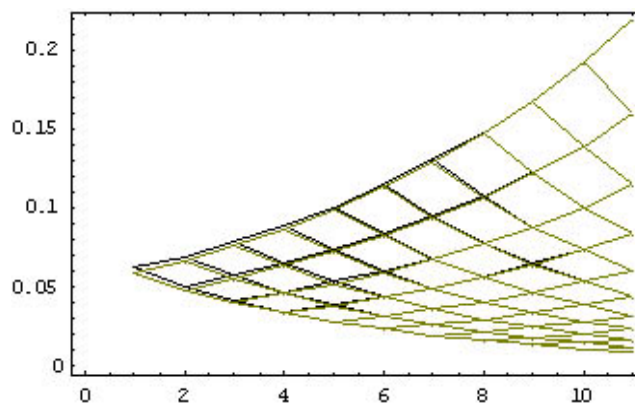
$$\Phi(t, T) = E_{\mathbb{Q}} [P(T, S) | \mathcal{F}_t]. \quad (7.13)$$

V čase nula je teda rozdiel medzi cenami kontraktov

$$\begin{aligned} \Phi(0, T) - F(0, T) &= E_{\mathbb{Q}} [P(T, S)] - \frac{E_{\mathbb{Q}} [B_S^{-1}]}{E_{\mathbb{Q}} [B_T^{-1}]} = \\ &= \frac{1}{E_{\mathbb{Q}} [B_T^{-1}]} [E_{\mathbb{Q}} (B_T^{-1}) E_{\mathbb{Q}} (P(T, S)) - E_{\mathbb{Q}} (B_T^{-1} P(T, S))]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Výraz (7.14) by sa rovnal nule iba vtedy ak by B_T^{-1} a $P(T, S)$ boli nekorelované. To ale nie je pravda - cena dlhopisu zvykne stúpnuť ak nastane pokles úrokovej miery. Teda B_T^{-1} a $P(T, S)$ sú pozitívne korelované a

$$\Phi(0, T) \leq F(0, T).$$



Na obrázku vidíme vývoj ceny 10-ročného forwardového a future kontraktu na bezkupónový dlhopis s maturitou 30. Cena forwardového kontraktu je znázornená čiernou farbou, cena futures kontraktu bledou farbou.

Obrázok 7: Porovnanie vývoja ceny forwardového kontraktu a future kontraktu.

Pre obidva kontrakty sme zostrojili stromy vývoja ich ceny. Zo vzťahov (7.12) a (7.13) sme získali vzorce na výpočet ceny v jednotlivých uzloch stromu:

$$\text{forward: } F_i^{(t)}(T) = \frac{P_i^{(t)}(S)}{P_i^{(t)}(T)} \quad \text{future: } \Phi_i^{(t)}(T, S) = \sum_{j=0}^{T-t} \pi^j (1-\pi)^{T-t-j} \binom{T-t}{j} P_{i+j}^{(T)}(S).$$

Na obrázku 7 vidíme divergenciu vo vývoji ceny oboch kontraktov. V čase nula je cena future kontraktu naozaj nižšia ako cena forwardového kontraktu, v čase maturity kontraktu sa ceny oboch kontraktov vyrovnávajú.

7.4 Vplyv parametra σ na cenu opcie v Ho & Lee modeli

Ďalej oceníme európske call opcie v Ho & Lee modeli. Vo februári 2003 bola pozorovaná nasledujúca term structure úrokových mier:

Maturita	1	2	3	5	7	10
Úroková miera	1.3 %	1.63 %	2.05 %	2.9 %	3.45 %	3.9 %

Tabuľka 5: Časová štruktúra úrokových mier (február 2003)

σ	Strike price						
	84	85	86	87	88	89	90
0.009	5.3537	4.5293	3.7552	2.9811	2.2071	1.4527	1.1575
0.011	5.5262	4.7517	3.9772	3.2027	2.4282	1.7451	1.4493
0.013	5.7466	4.9716	4.1967	3.4218	2.6468	2.0388	1.7425
0.015	5.9644	5.1890	4.4136	3.6383	2.8629	2.3338	2.0370

Opcie sme oceňovali v Ho & Lee modeli s parametrom $\pi = 0.55$ a časovým krokom $\Delta = 1$.

Tabuľka 6: Ceny 2-ročnej európskej call opcie na bezkupónový dlhopis s maturitou 5.

V tabuľke 6 sú zobrazené ceny európskej call opcie na bezkupónový dlhopis pri rôznych strike price a rôznych volatilitách. Čím vyššia je volatilita, tým vyššia je neistota budúceho vývoja úrokovej miery a to sa prejavuje aj na cene opcie. Vidíme, že najmä cena opcie s relatívne vysokou strike price je podstatne vyššia pre väčšiu hodnotu vstupného parametra σ .

7.5 Porovnanie cien európskych opcií s analytickými výsledkami v Hull-White modeli

V nasledujúcej časti oceníme európske call opcie v Hull-White modeli. Postup na vytvorenie trinomického stromu sme rozobrali v kapitole 6.2.

Opcie sme oceňovali pomocou trinomického stromu, pričom sme menili počet krokov. Vidíme, že pre väčší počet krokov (t.j. menšiu dĺžku časového intervalu) nám výsledné hodnoty takmer presne korešpondujú s cenou vypočítanou analytickým vzorcom.

<i>Počet krokov</i>	Strike price					
	Call opcie			Put opcie		
	<i>85</i>	<i>87.5</i>	<i>90</i>	<i>85</i>	<i>87.5</i>	<i>90</i>
5	4.3386	2.3223	0.9286	0.1068	0.5103	1.5364
25	4.3125	2.2754	0.8871	0.8319	0.4660	1.4975
50	4.3124	2.2665	0.8742	0.0835	0.4574	1.4849
100	4.3108	2.2638	0.8752	0.0820	0.4549	1.4861
Analytický	4.3097	2.2623	0.87249	0.0811	0.4536	1.4836

V Hull-White modeli sme oceňovali 2-ročné európske call a j put opcie na 5-ročný bezkupónový dlhopis. Ako vstupné parametre sme zvolili úroveň mean-reverzcie $a = 0.1$ a short rate volatilitu $\sigma = 0.01$.

Tabuľka 7: Oceňovanie európskych call a put opcií v Hull-White modeli.

Ďalej sa pozrieme na vplyv parametra a na cenu opcie v Hull-White modeli.

<i>a</i>	Strike price					
	Call opcie			Put opcie		
	<i>85</i>	<i>87.5</i>	<i>90</i>	<i>85</i>	<i>87.5</i>	<i>90</i>
0.08	4.3395	2.3015	0.9608	0.1094	0.4912	1.5704
0.09	4.3309	2.2772	0.9349	0.1007	0.4669	1.5443
0.1	4.3228	2.2537	0.9096	0.0926	0.4433	1.5190
0.11	4.3152	2.2344	0.8851	0.0848	0.4239	1.4944
0.12	4.3079	2.2173	0.8612	0.0775	0.4067	1.4704

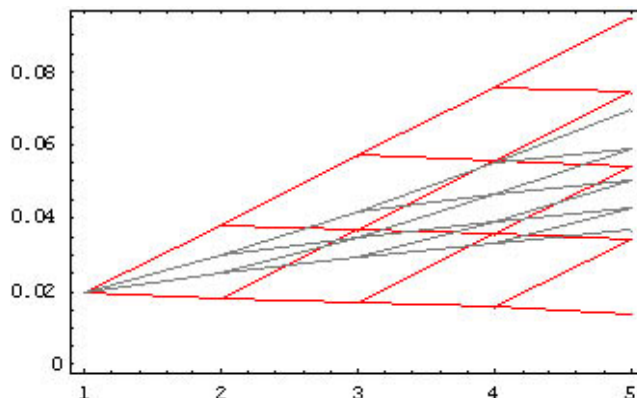
V Hull-White modeli sme oceňovali 2-ročné európske call a j put opcie na 5-ročný bezkupónový dlhopis pri rôznych hodnotách parametra a , zatiaľčo volatilita short rate $\sigma = 0.01$ a počet krokov = 10 sú konštanty.

Tabuľka 8: Ceny európskych call a put opcií v Hull-White modeli.

Vidíme, že zmena vstupného parametra mean-reverzcie má väčší vplyv na cenu opcie s vyššou strike price. Vo všeobecnosti, čím vyššia je úroveň mean-reverzcie, tým nižšia je cena opcie. (Je to v súlade s teóriou, pretože čím vyššia je mean-reverzcia, tým nižšia je neistota ohľadne budúceho vývoja úrokovej miery a tým pádom nižšia cena opcií.)

7.6 Lognormálny Black-Derman & Toy model

Model s logaritmickými mierami má tú výhodu, že ani pri počiatočných nízkych úrokových mierach nenadobúda nikdy záporné hodnoty. Nevýhodou môže byť to, že na rozdiel od Ho & Lee alebo Hull-White modelu neponúka analytický vzorec na výpočet cien opcí, musíme oceňovať pomocou binomického stromu. Na obrázku 8 sme porov-



Vývoj short rate v Ho & Lee modeli je znázornený červenou farbou, vývoj v Black, Derman & Toy modeli šedou farbou.

Obrázok 8: Dva rôzne stromy vývoja short rate.

nali vývoj short rate⁴ v Ho & Lee a Black-Derman & Toy modeli. Vidíme, že strom zostrojený podľa Ho & Lee modelu je širší, rozstupy medzi jednotlivými uzlami v čase sú omnoho širšie. Zároveň sú tieto rozstupy konštantné. Black, Derman & Toy model so svojimi lognormálnymi mierami v súlade s teóriou nepripúšťa short rate k záporným číslam.

7.7 Určenie parametrov a porovnanie modelov

Na to, aby sme modely mohli nejako zmysluplne medzi sebou porovnať, potrebujeme medzi nimi nájsť nejaký spojovací prvok. V prípade Ho & Lee modelu a Hull-White modelu je tým spojivom parameter σ - konštantná volatilita short rate. Black-Derman & Toy model sa však od týchto modelov líši - nielen tým, že využíva logaritmické miery, ale aj tým, že nepracuje s konštantnou volatilitou - volatilita sa v čase mení.

Maturita	1	2	3	5	7
Volatilita	10.45 %	10.33 %	9.54 %	9.05 %	8.72 %

Tabuľka 9: Historická volatilita výnosu bezkupónového dlhopisu

Ako vstup do Black-Derman & Toy modelu sme zobrali súčasné trhové dáta - časovú štruktúru (tabuľka 5) a historickú volatilitu (tabuľka 9). Zobrali sme cenu jednej opcie

⁴počiatočná časová štruktúra - tabuľka 5

vypočítanú týmto modelom a parametre a a σ sme zvolili tak, aby sa ceny vypočítané Black-Derman & Toy modelom a Hull-White modelom rovnali. Konkrétne, 2-ročná európska call opcia na 5-ročný bezkupónový dlhopis so strike price 85 bola ocenená rovnako pre $a = 0.1$ a $\sigma = 0.0107$. Ceny ostatných opcií už ale vykazujú odchýlku - tá je tým väčšia, čím vyššia je strike price.

<i>Model</i>	Strike price					
	<i>85</i>	<i>86</i>	<i>87</i>	<i>88</i>	<i>89</i>	<i>90</i>
Hull-White	<i>4.342</i>	3.605	2.868	2.131	1.394	1.017
Black-Derman & Toy	<i>4.342</i>	3.372	2.404	1.550	0.823	0.310

Oceňovali sme 2-ročnú európsku call opciu na bezkupónový dlhopis s maturitou 5 rokov. Použili sme nasledujúce parametre: dĺžka časového kroku $\Delta = 1$, mean-reversion $a = 0.1$ a volatilita short-rate $\sigma = 0.0107$

Tabuľka 10: Porovnanie cien opcií pre rôzne strike price v Hull-White a Black-Derman & Toy modeli.

V ďalšej časti skúsime nájsť také parametre pre Ho & Lee a Hull-White model, aby pri tej istej volatilita short rate $\sigma = 0.0107$ ocenili nejakú opciu rovnako. Potom zmeníme volatilitu v tabuľke 9 tak, aby aj Black-Derman & Toy model ocenil túto opciu rovnako. Následne porovnáme vývoj cien opcií s rôznymi strike vo všetkých troch modeloch a v prípade Ho & Lee a Hull-White modelu uvedieme aj hodnoty vypočítané analytickým vzorcom.

<i>Model</i>	Strike price					
	<i>85</i>	<i>86</i>	<i>87</i>	<i>88</i>	<i>89</i>	<i>90</i>
Ho & Lee	4.743	3.885	<i>3.027</i>	2.390	1.965	1.540
Ho & Lee (analyticky)	4.627	3.815	3.071	2.408	1.835	1.357
Hull-White ($a = 0.025$)	4.484	3.755	<i>3.027</i>	2.298	1.570	1.206
Hull-White (analyticky) ($a = 0.025$)	4.484	3.680	2.947	2.297	1.738	1.276
Black-Derman & Toy	4.810	3.810	<i>3.027</i>	2.277	1.527	0.777
Hull-White ($a = 0.1$)	4.342	3.605	2.868	2.131	1.394	1.017
Hull-White (analyticky) ($a = 0.1$)	4.337	3.477	2.688	1.994	1.413	0.951

Oceňovali sme 2-ročnú európsku call opciu na bezkupónový dlhopis s maturitou 5 rokov. Použili sme nasledujúce parametre: dĺžka časového kroku $\Delta = 1$, volatilita short-rate $\sigma = 0.0107$, mean-reversion $a = 0.025$ a $\pi = 0.66$.

Tabuľka 11: Porovnanie cien opcií pre rôzne strike price v Ho & Lee, Hull-White a Black-Derman & Toy modeli.

Pre opciu so strike price 87 sa nám podarilo zjednotiť ceny všetkých troch modelov. Pre ilustráciu sme zvolili aj inú hodnotu mean-reverzie pre Hull-White model. Výsledky sú naozaj konzistentné s teóriou - vidíme, že cena opcie vypočítaná Hull-White modelom sa blíži cene opcie z Ho & Lee modelu pre mean-reverziu blízku nule (v teórii sme uviedli, že Ho & Lee model je vlastne špeciálny prípad Hull-White modelu s nulovou mean-reverziou).

Teraz urobíme iné porovnanie - parametre budú rovnaké ako v tabuľke 10, ale spolu so strike price budeme meniť aj maturitu opcie.

<i>Model</i>	Maturita (Strike price)			
	1 (87)	2 (88)	3 (90.5)	4 (94)
Ho & Lee	2.275	2.395	2.246	1.664
Ho & Lee (analytický)	1.906	2.408	2.177	1.628
Hull-White	1.512	2.108	1.985	1.670
Hull-White (analytický)	1.495	1.994	1.850	1.498
Black-Derman & Toy	0.913	1.550	1.575	1.418

Oceňovali sme európsku call opciu na bezkupónový dlhopis s maturitou 5 rokov. Použili sme nasledujúce parametre: dĺžka časového kroku $\Delta = 1$, mean-reversion $a = 0.1$ a volatilita short-rate $\sigma = 0.0107$

Tabuľka 12: Porovnanie cien opcií pre rôznu maturitu v Ho & Lee, Hull-White a Black-Derman & Toy modeli.

Vidíme, že nestacionárna volatilita v Black-Derman & Toy modeli sa odráža v rozdielnych cenách opcií. Tento model oproti zvyšným dvom modelom podhodnocuje opcie na bezkupónový dlhopis. Čím kratšia je doba splatnosti opcie, tým je rozdiel v cene výraznejší.

Nakoniec, porovnáme ceny opcií v Hull-White a Black-Derman & Toy modeli, pričom v BDT modeli nebudeme vychádzať z volatilit určených na základe historických dát, ale nastavíme ich tak, aby sa rovnali s výstupom z Hull-White modelu. Konkrétne, za určujúce sme zobrali hodnoty opcií so strike price 88 a maturitami 1, 2, 3. Potom sme menili strike price a pozorovali sme, ako sa budú vyvíjať ceny opcií s rôznymi dobami splatnosti.

<i>Model</i>	<i>Strike price</i>	Maturita opcie		
		1	2	3
Black-Derman & Toy	88	0.987	2.108	3.831
Hull-White	88	0.987	2.108	3.831
Hull-White (analytický)	88	0.990	1.994	3.820
Black-Derman & Toy	89	0.487	1.381	2.961
Hull-White	89	0.717	1.394	3.013
Hull-White (analytický)	89	0.615	1.413	2.970
Black-Derman & Toy	90	0.004	1.094	2.461
Hull-White	90	0.410	1.016	2.386
Hull-White (analytický)	90	0.358	0.951	2.197

Oceňovali sme európsku call opciu na bezkupónový dlhopis s maturitou 5 rokov. Použili sme nasledujúce parametre: dĺžka časového kroku $\Delta = 1$, mean-reversion $a = 0.1$ a volatilita short-rate $\sigma = 0.01$

Z tabuľky vidíme, že ceny opcií s maturitami 2 a 3 sa odlišujú len nepatrne, zatiaľ čo pre maturitu 1 rok je odchýlka už väčšia.

Záver

Diplomová práca bola venovaná diskretným modelom vývoja úrokovej miery. Analyzovali sme bezarbitrážne modely Ho & Lee, Hull-White a Black-Derman & Toy. Všetky tieto modely sú bezarbitrážne, t. j. presne vystihujú súčasnú časovú štruktúru, ale každý z nich má výhody aj nevýhody oproti zvyšným modelom - sú to otázky týkajúce sa počtu parametrov, existencie analytického riešenia alebo prípustnosti záporných úrokových mier. Ho & Lee model je najjednoduchší jednofaktorový bezarbitrážny model. Ponúka analytické riešenie, ale pripúšťa záporné úrokové miery. Hull-White model je verzia Ho & Lee modelu, ktorá v sebe zahŕňa mean-reverziu. Tiež pripúšťa záporné úrokové miery, ale ponúka bohatšiu štruktúru volatilit úrokových mier pri zachovaní analytického riešenia. Lognormálny Black-Derman & Toy model analytické riešenie neponúka, ale na druhej strane neumožňuje úrokovej miere nadobudnúť záporné hodnoty.

Ukázali sme praktickú implementáciu modelov a zostrojili sme stromy vývoja úrokovej miery. Keď už je strom skonštruovaný, opcie na dlhopis a iné deriváty sa dajú oceniť celkom jednoducho. Popísali sme spôsob oceňovania derivátov úrokovej miery pomocou indukcie odzadu a postup sme aplikovali na ocenenie európske call opcie na bezkupónový dlhopis. Konkrétne výsledky sme ponúkli v siedmej kapitole. Zistené rozdiely medzi cenami opcií vypočítané jednotlivými modelmi sa môžu zdať priveľké, faktom však je, že každý model vychádza z iného stochastického procesu. Navyše, americké úrokové miery sú v súčasnosti dosť nízke a v takej situácii je výber vyhovujúceho modelu obtiažny. Normálne modely sú neuspokojivé, pretože pravdepodobnosť záporných úrokových mier už nie je zanedbateľná. Takisto volatilita úrokových mier je vo všeobecnosti vyššia pri nízkych úrokových mierach ako pri vysokých, čo sa tiež premietne v cenách derivátov.

Napriek týmto pochybnostiam môže práca poslúžiť pre študentov ako úvod do problematiky diskretných modelov úrokovej miery. V budúcnosti by sa dali uvedené modely rozšíriť - analýza by však bola už komplikovanejšia. Konkrétne, dalo by sa uvažovať o nekonštantnej volatilitate aj v modeli s normálnymi mierami alebo o nekonštantnej dĺžke kroku počas vývoja stromu (v nejakej perióde v strome by sa dĺžka kroku zmenila).

Referencie

- [1] Baxter, M. W. a Rennie, A. J. O.: *Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [2] Hull, J. C.: *Options, Futures and Other Derivative Securities*. Prentice-Hall, Inc., Fourth Edition 1989.
- [3] Hull, J. a White, A.: *Pricing Interest Rate Derivative Securities*. Review of Financial Studies, 1990, 3, 573-592.
- [4] Hull, J. a White, A.: *One-factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1993, 28, 235-254.
- [5] Leippold, M. a Wiener, Z.: *Algorithms behind Term Structure Models of Interest Rates I., II*. University of St. Gallen; Hebrew University, 2000.
- [6] Pliska, R. S.: *Introduction to Mathematical Finance - Discrete Time Models*. Blackwell Publishers, Inc., 1997.
- [7] Radhakrishnan, A. R.: *Mispricing of Discount Bond Options in the Black-Derman-Toy Model Calibrated to Term Structure and Cap Volatilities: An Empirical Study*. Department of Finance, New York University, 1998.
- [8] Shreve, S.: *Stochastic Calculus and Finance*. Technical report, Carnegie Mellon University, 1997.
- [9] Vojtek M.: *Stochastické modely úrokovej miery a ich kalibrácia na trhové dáta*. Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 2001.