Mocninové zákony v ekonómii a financiách

Katarína Hatalová

Obsah

Úvod

Vzt'ah medzi ekonómiou a fyzikou má dlhú a zaujímavú históriu. V minulosti boli výnimoční ekonómovia inšpirovaní princípmi Newtonowskej fyziky a štatistickej mechaniky, prit'ahovaní úspechmi týchto teórií. Aplikáciou užitočných metód štatistickej fyziky a nelineárnych dynamík na makroekonomické modelovanie a analýzy finančných trhov vzniká nový odbor - ekonofyzika. Zahŕňa nové pohl'ady na problematiku a tak nachádza zaujímavé zistenia, medzi ktoré patrí aj výskyt mocninových zákonov.

Ciel'om diplomovej práce je poskytnút' súhrnný pohl'ad na mocninové zákony, ktoré sa nachádzajú v ekonómii a financiách. Najmä tých, ktoré charakterizujú teóriu firmy. Ďalej stručne prezentovat' modely, ktoré ponúkajú nahliadnutie na rastové procesy firmy, a simuláciami niektorých z týchto modelov overit' empiricky získané výsledky.

Práca je členená do troch kapitol:

Prvá kapitola obsahuje stručný úvod do problematiky ekonofyziky, prehl'ad štatistickej fyziky ako jej hlavného nástroja, pretože ekonofyzika aplikuje práve metódy štatistickej fyziky na problémy ekonómie a financií. Ďalej uvedieme základne typy mocninového rozdelenia a príklady jeho výskytu z oblastí mimo ekonómie.

Druhá kapitola zahŕňa príklady mocninových zákonov v ekonómii a financiách ako rozdelenie bohatstva a príjmov, fluktuáciami na burze, analýzu fluktuácií rýchlosti rastu hrubého domáceho produktu s porovnaním s rastovými dynamikami pre firmu.

Tretia kapitola sa zaoberá teóriou firmy a je členená do troch čatí:
V prvej časti prezentujeme empirické výsledky pre firmu, chápanú ako komplexný systém navzájom pôsobiacich podjednotiek, vychádzajúc z predpokladov Gibratovho modelu.
V druhej časti predstavíme niekol'ko vysvetl'ujúcich modelov, ktoré slúžia ako spojivo medzi výsledkami získanými empiricky a skutočnost'ou.
V poslednej časti sa venujeme simuláciam dvoch vybraných modelov, hierarchického modelu a modelu 5, kvôli jednoduchej ilustrácii prítomnosti empirických výsedkov vo výstupe modelu.

Kapitola 1

Úvod do ekonofyziky

V tejto kapitole predstavíme pozadie ekonofyziky ako aj štatistickej fyziky, pretože práve metódy štatistickej fyziky sú hlavným nástrojom aplikovaným na ekonomické problémy. Ďalej stručne uvedieme základné druhy mocninových zákonov a ich príklady nachádzajúce sa vo fyzike.

1.1 Štatistická fyzika

Vedecký pokrok vo fyzike v minulom storočí nám umožnil nahliadnúť za oponu základných zákonov prírody, popisujúcich správanie sa atómov, molekúl, elektrónov a ďalších, dokonca subjadrových častíc. Vieme napríklad predpovedať, čo sa stane so sústavou dvoch, alebo troch atómov, ak poznáme presné začiatočné podmienky. Dobre rozumieme elektromagnetickým silám, ktoré medzi takýmito atómami pôsobia, poznáme základné zákony kvantovej mechaniky.

To nás môže viesť k záveru, že naša znalosť zákonov fyziky na mikroskopickej úrovni by mala postačovať na to, aby sme mohli v princípe predpovedať vlastnosti ľubovoľnej makroskopickej sústavy častíc, za predpokladu, že poznáme všetky atómy, z ktorých je zložená. Takýto záver je však prehnane optimistický. Takéto štúdium mikroskopických vlastností všetkých častíc systému cez ich simulácie by nám poskytlo len ich kvantitatívny popis, a nás zaujíma najmä popis kvalitatívny. Vo fyzike musela vzniknúť nová disciplína, ktorá bola schopná dať uspokojivú odpoveď. Nazýva sa *štatistická fyzika.*

Štatistická fyzika je časť teoretickej fyziky, ktorej úlohou je štúdium fyzikálnych objektov tvoriacich súbor mechanických systémov v rovnovážnom stave. Pretože počet stupňov voľnosti štatisticky definovaného objektu je veľmi vysoký, a teda fyzikálne stavy jednotlivých systémov v súbore sa nedajú priamo pozorovať, nemožno udať počiatočné podmienky potrebné na konkrétne riešenie. Namiesto riešenia sa teda definuje vhodná metóda na určenie rovnovážneho stavu; pomocou počtu konfigurácií stavov jeho elementov - mikrostavov, ktoré podmieňujú určitý stav objektu ako celku - makrostav.

V štatistickej fyzike existujú tri druhy štatistických metód v súlade so všeobecnými výsledkami odvodenými v roku 1922 *C.G.Darwinom a R.H. Fowlerom.*

Metóda klasickej štatistiky pochádza od *L.Boltzmanna*, na konkrétne fyzikálne problémy uplatňuje zákony klasickej mechaniky. Použil ju najmä *J.C. Maxwell*, preto sa klasická štatistika nazýva aj Boltzmann - Maxwellovou štatistikou. Gibbsov zákon kanonického rozdelenia je špeciálny prípad klasickej štatistiky.

Ďalšie dva druhy metód majú kvantový charakter, to znamená, že pri štúdiu vlastností elementov fyzikálnych objektov uplatňujú zákony kvantovej mechaniky. Zásady *symetrickej kvantovej štatistiky* objavil *D. Bose*. O jej použitie sa zaslúžil najmä *A. Einstein*. Táto štatistická metóda sa nazýva Bose-Einsteinova. Úspešne sa uplatňuje najmä pri štúdiu elektomagnetického žiarenia v rovnovážnom stave. *Antisymetrická kvantová štatistika* pochádza od *E. Fermiho* a *P.A.M. Diraca* a nazýva sa Fermiho-Diracovou štatistikou a používa sa najmä pri výskume vlastností elektrónov v kovoch, a pri štúdiu elektrónového plynu v okolí jadra atómu.

1.2 Ekonofyzika

Štatistická fyzika sa za posledné roky dosť zmenila, práce zo 60. a 70. rokov poskytli fyzikom nové nástroje na študovanie podstaty. Preto začali aplikovať metódy štatistickej fyziky na biofyziku, medicínu, geomorfológiu, geológiu, evolúciu, ekológiu alebo meteorológiu. Niektoré skupiny fyzikov sa zamerali na problémy ekonómie a financií. Používanie metód a konceptov štatistickej mechaniky a termodynamiky sa prejavuje ako plodné, až do takej miery, že vzniká nové špecifické pole výskumu zvané ekonofyzika.

"Verím, že mikroskopické simulácie trhu zohrávajú v ekonomike a financiách dôležitú úlohu. Ak na jej vysvetlenie treba l'udí mimo ekonomiky a financií - možno fyzikov - nebude to po prvýkrát ked' neekonómovia spravili značné pokroky v tejto oblasti."

Z listu laureáta Nobelovej ceny za ekonómiu Harry M. Markowitza 'ekonofyzikovi' Dietrichovi Staufferovi[1].

Ekonofyzika sa snaží pochopit' a vysvetlit' ekonomické problémy pomocou matematických nástrojov štatistickej fyziky. Zaujímajú sa o distribúciu bohatstva a príjmu, rastu sietí a organizací, 'termodynamiku' teenagerského tehotenstva a vyvíjajú jednoduché modely adaptatívne sa správajúcich agentov v konkurenčnom prostredí.
Ďalej sa venujú štatistikám finančného trhu a to najmä preto, že finančné trhy produkujú obrovské množstvo kvalitných dát a sú miestom, kde sa nachádzajú finančné prostriedky.
Ekonofyzické nástroje sú vhodnejšie na študovanie dynamiky priemyslovej sút'aže, ale z tejto oblasti nie sú potrebné dáta.

1.3 Mocninové zákony

Pri mocninových zákonoch, vždy malé udalosti sú extrémne bežné a naopak, vel'ké udalosti sú extrémne náhodné. Tieto vlastnosti sa pripisujú aj Zipfovmu a Paretovmu zákonu, preto je potrebné uviest' rozdiel medzi nimi...

Zipfov zákon sa obyčajne vzt'ahuje na vel'kost' y nastatia javu relatívneho k jeho poradiu r. George Kingsley Zipf, profesor linguistiky na Harvarde, sa snažil určit' frekvenciu použitia slov v anglickom texte pre tretie, ôsme alebo sté najbežnejšie slovo. Zipfov zákon hovorí, že vel'kost' r-tého najväčšieho nastatia javu je nepriamoúmerné jeho poradiu s h blízko 1

$$y \sim r^{-h}.$$

Pareto sa zaujímal o rozdelenie príjmov. Namiesto toho, aký je r-tý najväčší príjem, sa snažil určit' kol'ko l'udí má príjem väčší ako x. *Paretov zákon* je daný v tvare kumulatívnej distribučnej funkcie:

$$P(X > x) \sim x^{-k},$$

[1] www.econophysics.org

teda hovorí, že existuje iba pár multi-miliardárov, ale väčšina ľudí má len skromný príjem.

Mocninové rozdelenie určuje počet ľudí, ktorých príjem je presne x. Je to pravdepodobnostná distribučná funkcia, asociovaná s kumulatívnou distribučnou funkciou danou Paretovým zákonom, čo znamená

$$P(X = x) \sim x^{-(k+1)} = x^{-\alpha},$$

teda $\alpha = 1 + k$ je exponent mocninového rozdelenia, kde k je parameter Paretovho rozdelenia.

Mocninové zákony charakterizujú súbor škálovo invariantných komplexných systémov, a sú univerzálne, samopodobné a do veľkej miery sú nezávislé od mikroskopických vlastností systému.

Škálová invariancia zjednodušene znamená, že bez nejakej inej vizuálnej stopy, nemôžeme povedať, či sa pozeráme na niečo malé z blízka, alebo niečo veľké z väčšej vzdialenosti.

Treba ešte poznamenať, že na prepojenie medzi kinetikou na jednej strane, deriváciami a integrálmi zlomkového rádu na druhej, slúžia náhodná prechádzka a difúzia.

Náhodná prechádzka predstavuje bod, pohybujúci sa na priamke, a to tak, že v každom danom čase sa pohne o krok dĺžky α v niektorom z dvoch smerov. Potom rozmiestnenie po mnohých krokoch, čo reprezentuje dlhý časový úsek, je Gaussovho rozdelenia. Najjednoduchší model vedúci k *normálnej difúzii* je náhodná prechádzka. Normálnu difúziu nachádzame už v analýzach trhových fluktuácií L. Bacheliea z roku 1900.

Pri *spojitej náhodnej prechádzke* sa pohyb realizuje v ktoromkoľvek čase. Časové intervaly medzi následnými krokmi sú popísané rozdelením čakania $\psi(t)$, ktoré spôsobujú možné prekážky a pasce, odkladajúce skok častice (reprezentujú pamäťové efekty pohybu).

1.4 Príklady mocninových zákonov vo fyzike

Mnoho pozorovaných príkladov sa správa podľa univerzálneho mocninového zákona práve v okolí kritického bodu, čo je spojené so škálovou invarianciou, pretože charakteristická škála fyzikálneho systému v kritickom bode je nekonečno, čo vedie k samopodobnosti, a invariantným fluktuáciam.

Najznámejší príklad mocninových zákonov vo fyzike je *fázový prechod*, kde systém prechádza s neusporiadaného stavu do stavu usporiadaného.

Napríklad chladenie vody, pri prechode cez 0 $°C$ nastáva singularita a dochádza k zmene systému z vody na ľad.

Prechod magnetu cez Curieho teplotu je ďalším príkladom fázového prechodu, pri ktorom sa feromagnetická látka stáva paramagnetickou. Stratu feromagnetických vlastností možno vysvetliť tak, že elementárne magnety (spinové magnetické momenty elektrónov), ktorých magnetické momenty boli pôvodne rovnobežné, získavajú zvyšovaním teploty takú energiu, že sa ich rovnobežnosť naruší.

Ďalším príkladom je *turbulencia plynov*, kde štatistiky rýchlostného poľa majú škálovo invariantné vlastnosti, vysokého stupňa nezávislosti od vlastností vstreknutého plynu.

Napríklad pravdepodobnostné rozdelenie populácie miest na svete sa správa podľa všeobecného pravidla $N(w) \propto w^{-1-\alpha}$, kde $N(w)$ je počet miest s populáciou w a parameter mocninového rozdelenia $\alpha \sim 1$.

Príklady empirických rozdelení veľkostí, ktoré sa správajú podľa mocninových zákonov z iných oblastí sú napríklad *veľkosť častíc piesku, dopad meteorov na Mesiac, počet druhov na rod kvitnúcich rastlín, frekvencia slov v dlhých vetách alebo vypálené lesné plochy atď.*

Kapitola 2

Príklady mocninových zákonov v ekonómii

V 19. storočí si boli ekonómovia istí, že každá spoločnosť bude mať jedinečné rozdelenie bohatstva, závisiace na detailoch jej ekonomickej štruktúry. Ale v roku 1897, inžinier narodený v Paríži, *Vilfredo Pareto*, poprel ich očakávania. Podľa neho nielenže veľmi bohatá hŕstka ľudí drží väčšinu bohatstva, ale aj matematická forma rozdelenia je rovnaká všade, len exponent je rôzny v rozmedzí 2 až 3.

Štúdiom rozdelenia ročných príjmov zistil, že relatívny počet jednotlivcov s ročným príjmom väčším ako daná hodnota w je úmerný mocnine w:

$$Q(w) \sim w^{-\alpha}$$

Iný spôsob prepísania tohoto vzťahu je pomocou pravdepodobnosti $P(w)dw$ toho, že daná osoba má príjem z intervalu $\langle w, dw \rangle$:

$$P(w)dw \sim w^{-(1-\alpha)}dw$$

Ďalšia možnosť je pomocou funkcie príjmu $W(n)$ pre rôzne osoby s klesajúcim poradím, teda $W(1)$ je príjem osoby, ktorá má najvyšší príjem, $W(2)$ je druhý najvýšší príjem . . . potom:

$$W(n) \sim n^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Graf pre $W(n)$ s logaritmickou mierkou zobrazuje priamu čiaru so sklonom $-\frac{1}{\alpha}$.

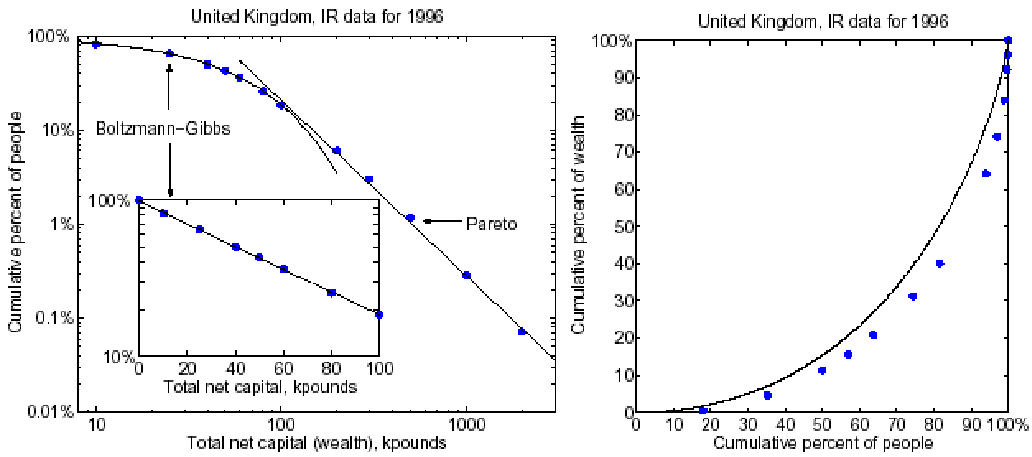
2.1 Rozdelenie bohatstva

V poslednom čase sa mnoho prác zameralo práve na rozdelenie bohatstva a príjmov. Na základe dát dedičskej dane pre rok 1996 pre Veľkú Britániu vypracovali *Adrian Drăgulescu a Victor M. Yakovensko* [4] štúdiu zameranú na kumulatívne pravdepodobnostné rozdelenie bohatstva

$$N(w) = \frac{\textit{počet ľudí, ktorých bohatstvo je väčšie ako } w}{\textit{celkový počet ľudí}}. \tag{2.1}$$

Na aproximovanie dát použili dva spôsoby: mocninový zákon $N(w) \propto 1/w^{\alpha}$, a exponenciálny zákon $N(w) \propto \exp(-w/W)$. Tieto rozdelenia sú charakterizované exponentom α a 'teplotou' W. Zodpovedajúce hustoty pravdepodobnosti $P(w) = -dN(w)/dw$, sú tiež mocninový, resp. exponenciálny zákon.

Z obrázku môžeme vidieť, že bohatstvo je dobre aproximované v log-log škále pre hodnoty väčšie ako $100k£$ mocninovým rozdelením s exponentom $\alpha = 1.9$, a v log-lineárnej škále pre hodnoty do $100k£$ exponenciálnym rozdelením s teplotou $W_{UK} = 59.6k£$.

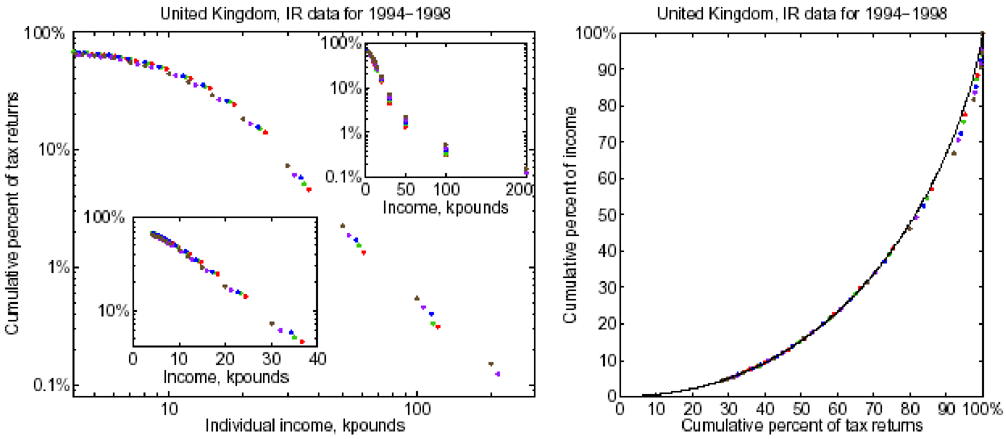


Obr. 2.1 Rozdelenie bohatstva pre UK, Lorenzova krivka.

Obrázok vpravo reprezentuje Lorenzovu krivku pre rozdelenie bohatstva, ktorá znázorňuje kumulatívnu populáciu a kumulatívne bohatstvo. Giniho koeficient, ktorý odzrkadľuje nerovnosť rozdelenia bohatstva, tj. pomer plochy nad krivkou ku ploche trojuholníka, narástol zo 64% na 68% v rokoch 1984 – 1996.

2.2 Rozdelenie príjmov

Pozrime sa teraz na rozdelenie príjmov. Pre nižšie príjmy, dostávame pre roky 1994/95 – 1998/99 rôzne teploty exponenciálneho rozdelenia $N(r) \propto \exp(-r/R)$, a to $R_{UK}^{98/9} = 11.7k£$ (ostatné dostaneme prenásobením $R_{UK}^{98/9}$ faktormi 0.903, 0.935, 0.954, a 0.943). Čo zahŕňa takmer 95% príjmov. Vyššie príjmy aproximuje mocninové rozdelenie $N(r) \propto r^{-\alpha}$ s exponentom $\alpha = 2.0 - 2.3$.



Obr. 2.2 Rozdelenie príjmov UK.

Tieto výsledky kvalitatívne súhlasia so štúdiou *Cranshawa*, ktorý však aproximoval nižšie príjmy Gamma rozdelením

$$\Gamma(r) \propto r^{\beta} \exp(-r/R).$$

Štúdiu japonských dát sa venovali *Ayoama et al.* [5]. Aproximovali vyššie hodnoty príjmu $s \geq 20$ millionov yenov pomocou zákona $r \propto s^{-1.98}$. Rozdelenie dane z príjmu sa dá popísať ako $r \propto t^{-2.05}$, kde t je daň v miliónoch yenov. Je veľmi blízke rozdeleniu príjmov, čo implikuje proporcionalitu daní voči príjmu, $t = 0.30s$. A teda rozdelenie daní z príjmov môžeme vyjadriť v tvare $r \propto s^{-2.06}$ pre $10 < s < 10^4$.

Zaujímavá na rozdelení bohatstva[1] je práve *miera nerovnosti*. Pre Spojené štáty americké, Veľkú Britániu a západnú Európu platí pravidlo, že 20% ľudí vlastní 80% celkového bohatstva, čo zaznamenal už V. Pareto.

[1] Ak vás táto problematika zaujala, odporúčame vám pozrieť si diplomovú prácu Braňa Saxu.

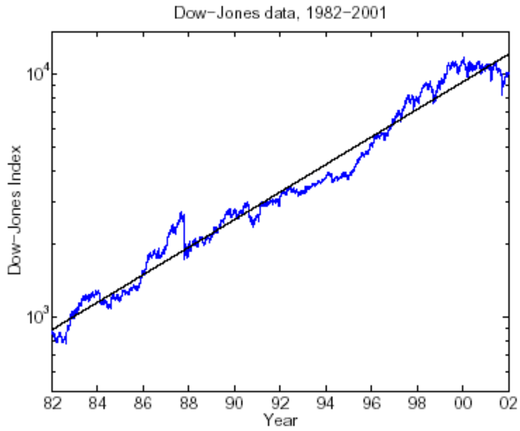
Ekonomická teória predpokladá, že trh je v rovnováhe a agenti sa správajú perfektne racionálne, ale tieto predpoklady nie sú v skutočnom svete splnené. Preto je možné, že ekonómickej teórii sa nedarí za predpokladu rovnováhy vysvetliť spomínané nerovnosti. Práve preto sa mnoho ekonofyzikov snaží vyvinúť jednoduché modely čo najbližšie odrážajúce realitu.

2.3 Rozdelenie fluktuácií na burze

Fyzika, a zvlášť štatistická fyzika, sa dlho zameriavala na objavovanie univerzálnych vlastností v zdanlivo nesúvisiacich systémoch. Finančné trhy reprezentujú komplex mnohých vzájomne pôsobiacich agentov. Preto je prirodzené pýtať sa či trhy vykazujú akékoľvek štatistické štruktúry príbuzné vlastnostiam fyzikálnych komplexných systémov. Trhy produkujú veľké množstvo vysokofrekvenčných dát pre cenové pohyby. Nakoniec existuje aj pragmatický dôvod, cieľ zisku z pohľadu na tržnú mechaniku.

Štúdium finančných trhov fyzikmi má hlboké historické korene. Začína už 1900 slávnymi tézami *Louisa Bacheliera* "Špekulatívna teória", v ktorých rozvinul koncept Brownovho pohybu pre ceny na burze, skôr ako bola prezentovaná slávna Einsteinova teória z roku 1905.

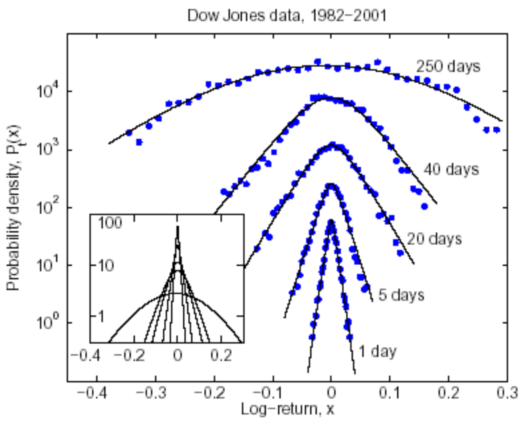
Moderná verzia tejto teórie sa bežne používa vo finančnej literatúre. Určuje Gaussovo rozdelnie pre fluktuácie na finančnom trhu, aj keď je všeobecne známe, že chvosty rozdelenia sú ťažšie ako Gaussove. Súhlasne s týmto tvrdením koeficient Brownovho pohybu nie je konštantný, ale sám je stochastickou premennou. Známy model bol prezentovaný *Stevom Hestonom*.



Obr. 2.3 (a) Vývoj Dow-Jonesovho indexu počas rokov 1982-2001.

Drăgulescu a Yakovensko [7] zderivovali pravdepodobnostné rozdelenie cenových zmien Hestonovho modelu kvôli porovnaniu s dátami.

Logaritmus výnosov $x = \ln(S_2/S_1)$, je logaritmus pomeru cien v dvoch rôznych momentoch času t_2 a t_1, s odrátaním priemerného rastu trhu. Pravdepodobnostné rozdelenie $P_t(x)$ závisí od časového rozdielu $t = t_2 - t_1$, ktorý je zaznamenaný v obrázku.



Obr. 2.4 Pravdepodobnostné rozdelenie logaritmov výnosov pre Dow-Jonesov index.

Krivky zobrazujú Drăgulescovu a Yakovenskovu aproximáciu dát, deriváciou pravdepodobnostnej funkcie Hensonovho modelu, založenej na geometrickom Brownovom pohybe.

Chvosty $\ln P_t(x)$ sú rovné čiary, čo znamená, že sú exponenciálne v x. Pre malé časy t je rozdelenie úzke a chvosty sú takmer vertikálne. S rastúcim časom sa rozdelenie rozširuje.

2.4 Fluktuácie rýchlosti rastu hrubého domáceho produktu

Analýze fluktuácií hrubého domáceho produktu (HDP) sa venovali *Y. Lee, L.A.N. Amaral et al.* [8], ktorí študovali 152 ekonomík počas rokov 1950 až 1992. Zistili, že

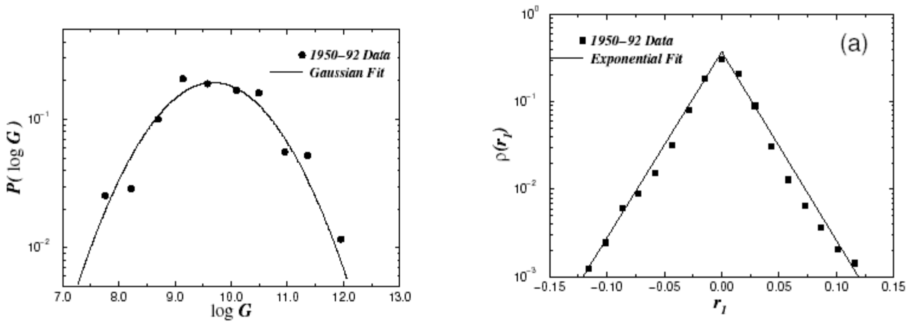
- rozdelenie ročných rýchlostí rastu pre krajiny s daným HDP je konzistentné pre určité obory s exponenciálnym rozkladom;
- šírka rozdelenia sa správa podľa mocninového zákona s exponentom $\beta \approx 0.15$.

Obidve zistenia prekvapivo zodpovedajú výsledkom pre rýchlosť rastu firmy. Len málo analógií sa nachádza medzi ekonomikou a firmou, okrem toho, že sú obe chápané ako komplexný systém pozostávajúci z navzájom pôsobiacich jednotlivcov.

Najprv študovali rozdelenie logaritmov HDP $p(logG)$, ktoré je súhlasné s Gaussovým rozdelením, čo implikuje že $P(G)$ je rozdelené log-normálne.

Rozdelenie ročných rýchlostí rastu $r_1 \equiv log(G_{t+1}/G_t)$ je exponenciálne tvaru

$$\rho(r_1) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_0} \exp\left(- \frac{\sqrt{2}|r_1 - \overline{r_1}|}{\sigma_0} \right).$$



Obr. 2.5 (a) Pravdepodobnostné rozdelenie logaritmov HDP, pre odtrendované dáta. Zobrazené sú priemery počas rokov 1950-1992. Rozdelenie je stacionárne pre rôzne roky. (b)Hustota pravdepodobnosti ročnej rýchlosti rastu, priemerné rýchlosti rastu počas rokov 1950-1992.

Štandardná odchylka

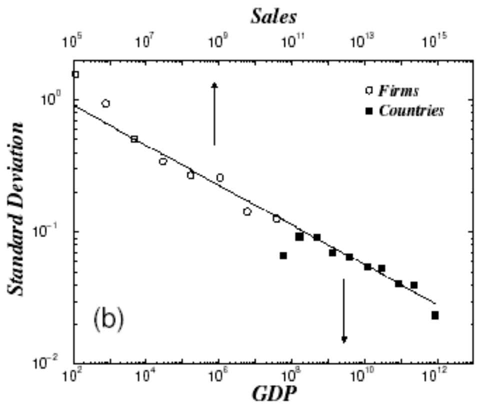
$$\sigma(G) \sim G^{-\beta},$$

s $\beta \approx 0.15$, je zobrazená na Obrázku 2.6, spolu s dátami pre firmy, ktoré predstavíme v nasledujúcej časti.

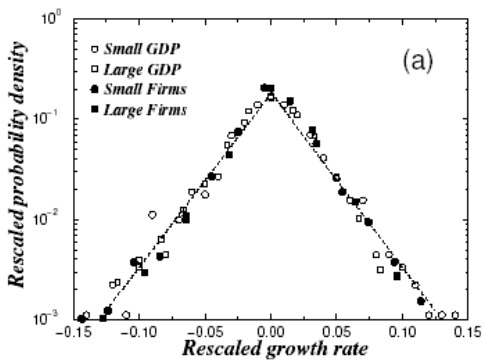
Výsledky kvantitatívne súhlasia s výsledkami pre rast firiem, čo dokumentuje kolaps dát na tú istú krivku pre podmienenú hustotu pravdepodobnosti aj štandardnú odchýlku.
Teda dá sa konštatovat', že rovnaké empirické zákony platia pre rastové dynamiky firmy aj ekonomík, a dá sa aplikovat' spoločný mechanizmus na obe z nich.

Takéto zistenia vedú k dôležitému dôsledku pre ekonomický rast: Aj napriek tomu, že vel'ké ekonomiky majú sklon rozdel'ovat' sa na širšie pole ekonomických aktivít, vedúcich k malým relatívnym fluktuáciam, pozorovaný stupeň diverzifikácie je menší ako keby bol ten proces lineárny, čo zodpovedá parametru $\beta = 0.5$.

Tento efekt je kvantitatívne rovnaký pre firmy aj ekonomiky, čo vytvára zaujímavú možnosť, že spoločný mechanizmus charakterizuje rastovú dynamiku ekonomických organizácií s komplexnou vnútornou štruktúrou. Existencia univerzálneho mechanizmu, ktorý podmieňuje všeobecné zákony,ktoré sú nezávislé od špecifických vlastností systémov, vytvára podklad pre ďalšie aplikácie fyzikálnych metód na problémy ekonómie.



Obr. 2.6 Test podobnosti pre výsledky rýchlosti rastu firiem a ekonomík. Štandardná odchylka rozdelenia ročných rýchlosti rastu firiem aj ekonomík. Pre firmy je použitá horná, a pre ekonomiky spodná mierka. Koeficient β je viditeľne rovnaký, čo reprezentuje zobrazená priamka.



Obr. 2.7 Test podobnosti pre výsledky rýchlosti rastu firiem a ekonomík. Škálovaná podmienená hustota pravdepodobnosti ročných rýchlostí rastu firiem a ekonomík.

Kapitola 3

Teória firmy trochu inak

Tým, že sa štatistickí fyzici orientujú na problémy z ekonomickej oblasti, dostávajú sa aj k otázke chápania a charakteristík firmy.

V klasickej mikroekonomickej teórii je firma charakterizovaná produkčnou funkciou, ktorá transformuje vstupy (prácu, kapitál a materiály) na výstupný produkt. Dynamicky sa dajú chápať prepojenia produkcie medzi jednotlivými obdobiami (periódami) s prihliadnutím na investície do fyzického kapitálu a technologických zmien (ktoré zodpovedajú investíciám do výskumu a vývoja). Zaujíma ich ako sa firmy učia v čase o ich efektivite, relatívnej ku konkurentom, aby mohli vyvinúť *"bohatšiu teóriu firmy"*.

V ekonómii jednotky tvoriace celkový systém sú navzájom konkurujúce si firmy. Vo všeobecnosti majú firmy komplexnú vnútornú štruktúru, každá firma sa skladá z oddelení (podjednotky v každej jednotke). Toto charakterizuje komplexný systém, ktorý zaujíma fyzikov.

3.1 Empirické výsledky

3.1.1 Zistenia

Ako základný podklad pre teóriu firmy predstavíme prácu skupiny ľudí *Amaral, Buldyrev et al.* [10], ktorí analyzovali dáta pre Spojené štáty americké (USA) v rokoch 1974-1993.[1]

[1] Pozorovali dáta priemyselných verejneobchodovateľných firiem USA od roku 1974 do 1993, zdrojom ktorých je Compustat - databáza všetkých firiem USA. Informácie získavajú

Nadväzujú na prácu *H. Simona a spol.*, ktorí skúmali stochastické vlastnosti dynamiky rastu firiem a *R. Lucasa*, ktorý predpokladal, že rozdelenie veľkosti firiem závisí od manažérskych schopností v ekonomike skôr ako na faktoroch, ktoré determinujú veľkosť v konvenčnej teórii firmy.

Základnými výsledkami ich pozorovaní dát pre firmy US sú nasledovné zistenia:

- Rozdelenie veľkostí firiem sa počas 20 rokov nezmenilo (exponenciálne).
- Stredná hodnota a štandardná odchylka ostali približne konštantné.
- Rozdelenie novovzniknutých firiem každý rok sa dá dobre aproximovať log-normálnym rozdelením.

Snažia sa odhaliť objektívne empirické škálovacie regularity pre rast firiem, ktoré by mohli slúžiť ako test pre modely rastu firiem. Zistili, že:

- Rozdelenie logaritmov rýchlosti rastu pre firmy s približne rovnakou veľkosťou vykazujú exponenciálny tvar.
- Fluktuácie rýchlostí rastu (merané ako šírka tohto rozdelenia) sa správajú podľa mocninového zákona

$$\sigma_1 \sim S^{-\beta}.$$

3.1.2 Gibratov model

Najväčší pokrok v tomto smere spravil francúzsky ekonóm *Gibrat*, ktorý roku 1931 predstavil jednoduchý model vysvetľujúci empiricky pozorované rozdelenie veľkosti firiem.

Uvažoval nasledujúce *predpoklady:*

(i) rýchlosť rastu R firmy je nezávislá od jej veľkosti (tj. zákon proporcionálneho efektu),

(ii) po sebe nasledujúce rýchlosti rastu firmy sú nekorelované v čase,

(iii) firmy na seba navzájom nepôsobia.

z formulárov pre US Securities and Exchange Commission.

Matematicky sa dá Gibratov model zapísat' ako stochastický proces:

$$S_{t+\Delta t} = S_t(1 + \epsilon_t)$$

kde ϵ_t je nekorelované náhodné číslo z pevného rozdelenia a varianciou oveľa menšou ako 1 (zvyčajne z Gaussovho rozdelenia). Teda logaritmus S_t sleduje jednoduchú náhodnú prechádzku, a pre dostatočne veľké časové intervaly $u \gg \Delta t$, rýchlosti rastu

$$R_u = \frac{S_{t+u}}{S_t}$$

sú log-normálne rozdelené.

Ak uvažujeme, že všetky firmy vznikli v približne tom istom čase a majú približne rovnakú počiatočnú veľkost', potom rozdelenie veľkostí firiem je tiež log-normálne.

Existujú však pozorovania, ktoré odporujú Gibratovým predpokladom. *Singh a Whitting* merali fluktuácie ako štandardnú odchýlku $\sigma_1(S)$, ktorá klesá s rastúcou veľkost'ou firmy. Toto nie je prekvapivé, pretože veľké firmy majú väčší sklon k rozdeľovaniu sa. Pokles σ_1 s S nie je taký rapídny ako keby firmy boli zložené z nezávislo-konajúcich pridružených oddelení. To implikuje, že relatívna štandardná odchýlka klesá ako $\sigma_1(S) \sim S^{-1/2}$.

Situácia strednej rýchlosti rastu nie je taká jasná, pretože Singh a Witthing pozorovali, že rastie hladko s veľkost'ou firmy. Naopak *Evans a Hall* zistili, že klesá hladko s veľkost'ou firmy (pri použití inej definície pre veľkost'). *Dunne a kol.* zdôrazňujú efekt miery neúspechu firmy a efekt majiteľského stavu (jedno- alebo multijednotkové firmy) na vzt'ah veľkosti a strednej rýchlosti rastu, kde pozorovali negatívny vzt'ah, lebo redukcia ich miery neúspechu premôže redukciu v raste úspešných firiem.

Ďalšia testovateľná implikácia Gibratového zákona je, že rýchlost' rastu veľkosti firmy je nekorelovaná v čase, no literatúra nie je jednotná. Singh a Whitting zistili pozitívnu koreláciu v prvom roku, ale Hall takúto koreláciu nezaznamenal.

3.1.3 Rozdelenie veľkostí firiem

Na to aby sme mohli d'alej skúmat' rozdelenie veľkostí firiem, je potrebné definovat' samotnú veľkost' firmy. Nie je to až také samozrejmé, pretože firmy produkujú rôzne produkty, preto neexistuje univerzálna *definícia pre veľkost' firmy*, ale môže byt' definovaná ako jedna z nasledovných mier: dolárová miera výstupu (objem tržieb), počet zamestnancov, alebo miera vstupu (napr. náklady na výrobu; majetok, podnik a vybavenie, aktíva).

Ďalej uvádzame pozorované výsledky pre objem tržieb (po úprave HDP cenovým deflátorom 1987).

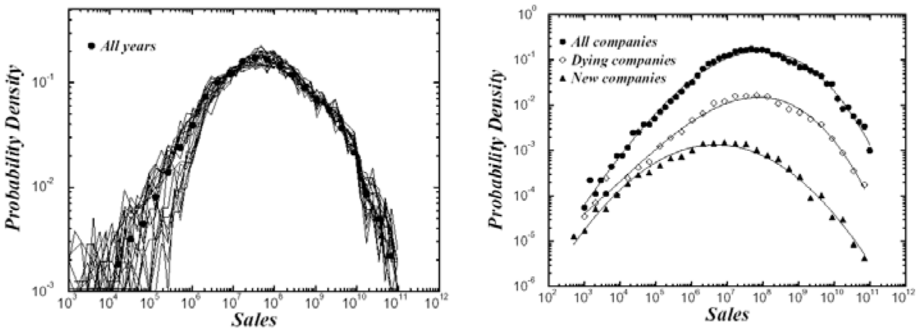
Keďže zákon proporcionálneho efektu implikuje multiplikatívny proces pre rast firiem, je prirodzené študovať logaritmy tržieb. Teda definujeme

$$s_0 \equiv lnS_0$$

$$r_1 \equiv lnR_1 = ln\frac{S_1}{S_0}$$

kde S_0 je veľkosť firmy v danom roku a S_1 veľkosť v nasledujúcom roku.

Stanley zistil, že log-normálne rozdelenie dobre aproximuje dáta pre USA z roku 1993 a jeho výsledky potvrdili *Hart a Oulton* na vzorke približne 80,000 firiem z Veľkej Británie.



Obr. 3.1 (a) Rozdelenie veľkosti firiem pre roky 1974-1993. (b) Priemerné rozdelenie veľkostí všetkých firiem, novovzniknutých a zaniknutých firiem.

Hustota pravdepodobnosti logaritmov veľkosti pre každý rok je zobrazená na obrázku 3.1. Je zrejmé, že rozdelenie je približne stále počas periódy, čo je prekvapivé, pretože neexistuje teoretický podklad na takéto očakávanie. Dá sa predpokladať, že rast ekonomiky je podmienený kompozíciou zmien výstupu a vývojom faktorov, ktoré ekonómovia zaraďujú medzi faktory ovplyvňujúce veľkosť firmy. Toto zistenie odporuje Gibratovému modelu, pretože jeho stochastický proces umožňuje aby sa rozdelenie v čase rozšírilo. Preto musíme uvažovať ďalšie faktory, ktoré nie sú zahrnuté v Gibratovom modeli, ale považujeme ich za dôležité.

Prvým faktorom je *vstup nových firiem.* Rozdelenie veľkostí novovzniknutých firiem je log-normálne s očakávaným stredným počtom nových firiem omnoho menším ako je stredný počet všetkých firiem. Ale nové firmy môžu vzniknúť aj spojením dvoch predtým samostatne existujúcich firiem, potom ich veľkosť je väčšia ako veľkosť ktorejkoľvek pôvodnej firmy. Iný spôsob vzniku firiem môže byť rozpad veľkej firmy na malé oddelenia.

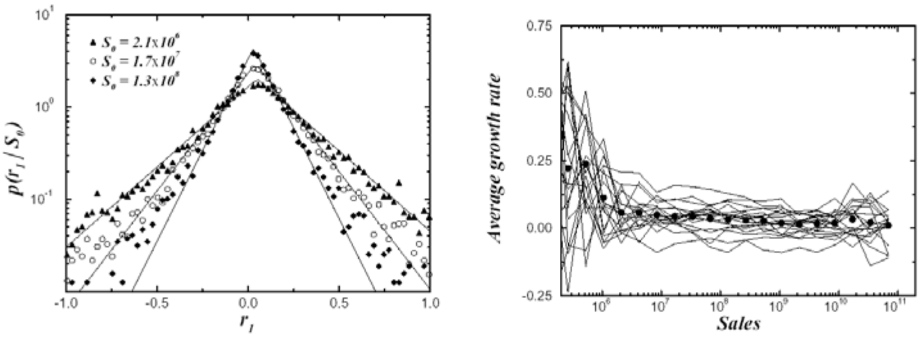
Ďalším faktorom nezahrnutých v Gibratovych predpokladoch je *zánik firiem.* Rozdelenie ich veľkostí je dosť podobné rozdeleniu veľkostí všetkých firiem. Dá sa preto predpokladať, že pravdepodobnosť zániku firmy (splynutie, zmena mena, bankrot) je takmer nezávislé od jej veľkosti.

3.1.4 Rozdelenie rýchlosti rastu a stredná rýchlosť rastu

Rozdelenie $p(r_1|s_0)$ *rýchlosti rastu* od roku 1974 do 1993 je zobrazené na obr. 3.2 pre tri rôzne počiatočné veľkosti. Dajú sa dobre aproximovať 'tent-shaped form', teda rozdelenie nie je Gaussovo, aké sme očakávali z Gibratových výsledkov, ale exponenciálne tvaru

$$p(r_1|s_0) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_1(s_0)} \exp - \frac{\sqrt{2}|r_1 - \overline{r_1}(s_0)|}{\sigma_1(s_0)}$$

s ťažšími chvostami (čo presne dokazuje, že nejde o Gaussovo rozdelenie). Zistenia ukazujú, že dáta každého ročného intervalu dobre fitujú toto rozdelenie, len s malými variáciami parametrov.



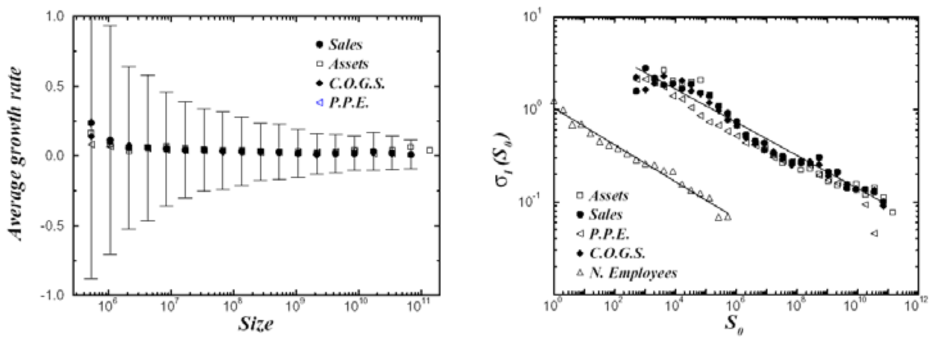
Obr. 3.2 (a) Rozdelenie rýchlosti rastu. (b) Stredná rýchlosť rastu.

Ekonómovia typicky študujú vzťah *strednej rýchlosti rastu* a veľkosti firiem regresiou rýchlostí rastu na veľkosti, niekedy s pridaním kontrolných

premenných. Obrázok 3.2 vpravo zobrazuje $\overline{r}(s_0)$ ako funkciu s_0 pre niektoré roky, ale dáta sú príliš zašumené, teda tam nie je zaznamenateľná závislosť strednej rýchlosti rastu na počiatočnej veľkosti. Jednotlivé krivky odhaduje $\overline{r}(s_0) \sim s_0$, teda sú úmerné konštantám, ktoré majú malú významnosť (menej ako 10^{-2}) so znamienkom $\pm$ podľa roku.
Zo štúdie vyplýva, že ak existuje nejaká závislosť, je veľmi slabá pre akýkoľvek obor veľkostí, kde iné faktory, ako zaujatosť vzorky voči úspešným firmám, môžu byť nepodstatné.
Výsledky sa nemenia ani ak uvažujeme iné definície veľkosti firmy.

Je vidieť, že šírka rozdelenia rýchlosti rastu, tj. *štandardná odchylka rýchlosti rastu*, klesá s nárastom s_0, a teda $\sigma_1(s_0)$ je dobre aproximovateľná zákonom $\sigma_1(s_0) \sim \exp -\beta s_0$, čo implikuje $\sigma(S_0) \sim {S_0}^{-\beta}$ (vidíme, že dáta potvrdzujú vzorce).

Paralelná analýza pre počet zamestnancov ukázala, že rozdelenie rýchlosti rastu firiem a štandardná odchýlka sa správajú rovnako.



Obr. 3.3 Pre rôzne definície veľkosti firmy (a) stredná rýchlosť rastu, (b) štandardná odchýlka rýchlosti rastu.

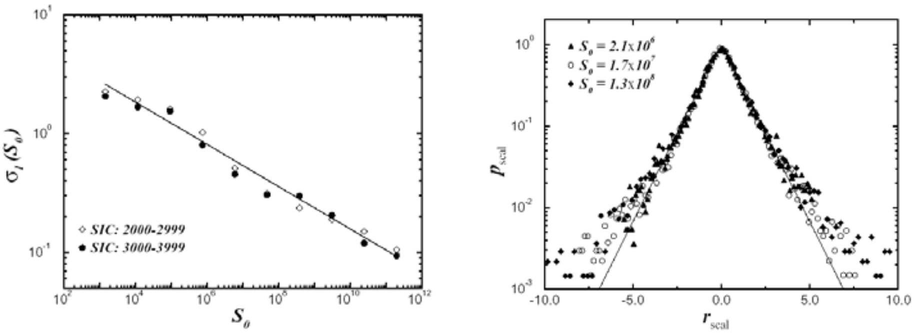
3.1.5 Univerzalita

Treba poznamenať, že rovnice aproximujú rýchlosť rastu odvetvovo odlišných firiem.

Konvenčná teória firmy je založená na produkčnej technológii, ktorá mení produkt na produkt, ale nepredpokladá, že proces riadiaci rýchlosť rastu automobiliek môže byť rovnaký ako ten, čo riadi rýchlosť rastu napr. farmaceutickej alebo papierenskej firmy.

Je to dôležité kvôli univerzalite nachádzajúcej sa v štatistickej fyzike, kde rôzne systémy môžu byť charakterizované rovnakými fundamentálnymi zákonmi nezávisle od mikroskopických detailov.

Preto si firmy rozdelili do dvoch skupín rozdelených podľa SIC kódov[2]. Dosiahnuté výsledky boli pre obe skupiny rovnaké ako výsledky pre celok, teda potvrdili univerzálnosť pre rôzne druhy odvetví.



Obr. 3.4 (a) Štandardná odchýlka dvoch podskupín dát, (b) škálovaná hustota pravdepodobnosti.

V štatistickej fyzike, sa škálovanie fenoménu tohto druhu niekedy reprezentuje graficky, znázornením vhodne škálovanej závislej premennej ako funkcie vhodne škálovanej nezávislej premennej. Ak škálovanie drží, potom dáta pre veľký obor hodnôt parametra kolabujú na jedinu krivku. Na testovanie súčasných dát pre takýto kolaps vykreslíme škálovanú hustotu pravdepodobnosti

$$p_{scal} \equiv \sqrt{2}\sigma(s_0)p(r_1|s_0),$$

ako funkciu škálovanej rýchlosti rastu

$$r_{scal} \equiv \sqrt{2}\frac{|r_1 - r_1|}{\sigma(s_0)}.$$

Dáta kolabujú relatívne dobre na krivku $p_{scal} = \exp -|r_{scal}|$.

[2]Každá firma USA má priradený SIC (Standard Industrial Classification) kód podľa odvetvia.

3.2 Vysvetľujúce modely

V tejto časti predstavíme modely, ktoré by mohli umožniť nahliadnutie na vznik univerzálnych zákonov pre dynamiku firmy. V týchto modeloch sa na základe reálnych predpokladov podarilo získať výsledky porovnateľné s empirickými výsledkami z predchádzajúcej časti.

Najprv uvádzame *Model 1*, v ktorom je rýchlosť rastu firmy ovplyvnená tendenciou dosiahnuť optimálnu veľkosť [11]. Tento model vedie k exponenciálnemu rozdeleniu logaritmov rýchlosti rastu v súhlase s empirickými výsledkami.

Hierarchický stromový model firmy, ktorý umožňuje relativizovať dva parametre k exponentu β, ktorý opisuje závislosť štandardnej odchýlky rozdelenia rýchlosti rastu na veľkosti.

Suttonov model pomocou štatistickej fyziky získava dodatočné predpovede, ktoré môžu byť porovnávané s empirickými výsledkami. Rozdelenie preškálovanej rýchlosti rastu $\pi(v)$ je asymptoticky Gaussove v súlade s empirickými výsledkami.

K nemu *alternatívny model* určuje, že rozdelenie veľkostí sub-sektorov je mocninové, a že sa dá analyticky odvodiť hodnota exponentu β a tvar rozdelenia.

Model 5 dynamicky buduje rôznorodú štruktúru mnohých oddelení, reprodukujúc fakt, že typická firma prechádza sériou zmien v organizácii, prerastajúc z jedného oddelenia na mnoho oddelení, mnoho-výrobkovú firmu. Model zachytáva empirické pozorovania pre veľký rozsah hodnôt parametrov a ponúka možné vysvetlenie pevnosti empirických výsledkov.

3.2.1 Model 1

Tento model sa snaží nájsť jednoduchú hodnovernú modifikáciu Gibratových predpokladov, ktorá by viedla k exponenciálnemu rozdeleniu rýchlosti rastu firmy. Toto dosiahneme vynechaním predpokladu (ii) nekorelovaných rýchlostí rastu, a uvažovaním, že nasledovné rýchlosti rastu sú korelované takým spôsobom, že veľkosť firmy konverguje k optimálnej veľkosti S^*. Táto hodnota je blízka hodnote minimálneho bodu na krivke priemerných nákladov z konvenčnej ekonomickej teórie, a môže sa meniť len pomaly (v rokoch).

Ak ďalej uvažujeme firmy s počiatočnou veľkosťou S_0, potom veľkosť firmy sa v čase mení, ale zostáva v okolí S^*. V jednoduchom prípade, rastový proces má konštantnú spätnú tendenciu, napr.

$$\frac{S_{t+u}}{S_t} = \begin{cases} k(1+\epsilon_t), & S_t < S^*, \\ \frac{1}{k}(1+\epsilon_t), & S_t > S^*, \end{cases}$$

kde k je konštanta väčšia ako 1 a ϵ_t je nekorelované Gaussovo náhodné číslo s nulovou strednou hodnotou a varianciou ${\sigma_\epsilon}^2 \ll 1$. Tieto dynamiky sú v ekonomike nazývané regresia smerom k strednej hodnote.

Prepísaním do tvaru logaritmov, dostávame

$$r_{t+\Delta t} - r_t = -\ln k \; sgn(r_t - r^*) + \ln(1+\epsilon_t)$$

kde $r^* \equiv \log \frac{S^*}{S_0}$. Ďalšími úpravami dostávame pre veľké časy $t \gg \Delta t$, že rýchlosť rastu je rozdelená podľa Boltzmannovho rozdelenia

$$p(r_1|s_0) = \frac{\ln k}{{\sigma_\epsilon}^2} \exp\left(- \frac{2\ln k |r_1 - r^*|}{{\sigma_\epsilon}^2} \right).$$

Teda dostávame rovnicu s $r(s_0)$, a

$$\sigma_1(s_0) = \frac{{\sigma_\epsilon}^2}{\sqrt{2}\ln k}.$$

Tento model nevysvetľuje zistenia o mocninovej závislosti štandardnej odchýlky rýchlostí rastu veľkosti. Preto v nasledujúcej časti analyzujeme hierarchický model manažmentu, ktorý môže vysvetliť túto mocninovú závislosť.

3.2.2 Hierarchický model

Virtuálne všetky firmy majú hierarchickú rozhodovaciu štruktúru. Prijateľným vysvetlením jednoduchého zákona riadiaceho rýchlosť rastu všetkých firiem môže byť, že rastový proces je určovaný vlastnosťami manažérskych hierarchií. Čo sa zameriava viac na technológiu manažmentu ako na technológiu produkcie ako základ pochopenia rastu firmy pripomínajúc Lucasov model rozdelenia veľkostí firiem.

Firmy chápeme ako pozostávajúce z mnohých obchodných jednotiek. Teda veľkosť firmy je daná sumou veľkostí jednotiek firmy, a nie ich násobením, preto je vhodné sledovať štandardnú odchýlku ročných zmien veľkostí firiem a nie logaritmus rýchlosti rastu.

Predpokladajme, že firma na začiatku každej periódy je zložená z jednotiek rovnakej veľkosti. Preto firma s veľkosťou S_0 má $N = S_0/\overline{\xi}$ jednotiek, kde $\overline{\xi} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$ je priemerná veľkosť jednotky a ξ_i je veľkosť jednotky i. Ďalej predpokladáme, že ročná zmena veľkosti δ_i každej jednotky je z pevného rozdelenia, s nulovou strednou hodnotou a varianciou Δ, ktorá je nezávislá na S_0. Musí platiť, že $\Delta \ll \overline{\xi}^2$, aby sme zaistili, že jednotky zostanú pozitívne. Preto je potrebné aby sa firma na začiatku každej periódy reorganizovala takým spôsobom, aby jednotky mali rovnakú veľkosť a tým zaistili predchádzajúcu podmienku.

Ak ročné zmeny veľkostí rôznych oddelení sú nezávislé, potom model je triviálny. Keďže $\langle\delta_i\rangle = 0$, máme

$$\langle S_1\rangle = S_0 + \sum_{k=1}^{N}\langle\delta_i\rangle = S_0,$$

ďalej

$$\langle {S_1}^2\rangle = \left\langle\left(S_0 + \sum_{i=1}^{N}\delta_i\right)^2\right\rangle = {S_0}^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\langle\delta_i\delta_j\rangle = {S_0}^2 + N\Delta,$$

a teda pre varianciu dostávame

$$\Sigma^2(S_0) = N\Delta = S_0\frac{\Delta}{\overline{\xi}} \sim S_0.$$

Využitím faktu, že $\Sigma(S_0) \sim {S_0}^{1-\beta}$, dostávame $\beta = 1/2$. Pozorovania však ukázali omnoho menšiu hodnotu β, čo znamená prítomnosť silných pozitívnych korelácií medzi jednotkami firmy.

Preto uvažujeme hierarchický model, kde hlava stromu reprezentuje hlavu firmy, ktorej politika prechádza na nižšiu úroveň, a tak ďalej až na konečné jednotky v poslednej úrovni, ktoré konajú podľa danej politiky. Tieto jednotky majú opäť strednú veľkosť $\overline{\xi} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$ a ročnú zmenu s nulovou strednou hodnotou a varianciou Δ.

Ďalej predpokladáme, že uzly každej úrovne, okrem poslednej, sú spojené s presne z jednotkami z nižšej úrovne. Potom počet jednotiek N je rovný z^n, kde n je počet úrovní.

Ak sa hlava firmy rozhodne pre politiku, podľa ktorej by každá jednotka v najnižšej úrovni mala zmeniť svoju veľkosť o δ_0, keby sa táto politika dostala k poslednej úrovni bez akýchkoľvek zmien, potom δ_i by boli identické a teda

$$\langle {S_1}^2 \rangle = {S_0}^2 + N^2\Delta,$$

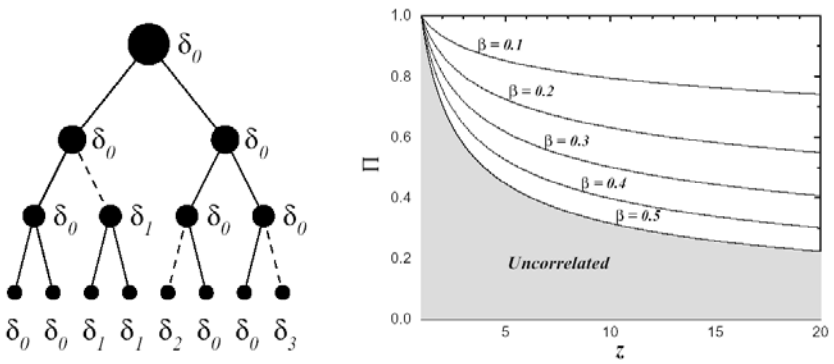
z čoho dostávame

$$\Sigma_1{}^2(S_0) = N^2\Delta = {S_0}^2\frac{\Delta}{\bar{\xi}^2},$$

a teda $\beta = 0$.

Takéto uvažovanie však nie je realistické, nedá sa očakávať, že by politika hlavy firmy prešla cez všetky úrovne perfektne koordinovane. V niektorých úrovniach môžu byť manažéri s lepšími informáciami, a preto je vhodnejšie uvažovať nejakú voľnosť v rozhodovaní, ako chybu organizácie napr. slabú komunikáciu alebo neposlušnosť.

Preto ďalej uvažujeme, že manažéri v uzloch hierarchického modelu nasledujú politiku svojho šéfa s pravdepodobnosťou π, a s pravdepodobnosťou $(1-\pi)$ vytvoria novú nezávislú politiku. Tu potom manažér koná ako hlava menšej firmy, tvorenej jednotkami pod jeho kontrolou. Veľkosť firmy sa teda stáva náhodnou premennou, ktorej štandardná odchýlka sa dá vypočítať z numerických simulácií, alebo použitím rekurzívnych vzťahov medzi úrovňami stromu.



Obr. 3.5 (a) Štruktúra hierarchického modelu, (b)fázový diagram, každá dvojica (π, z) má svoju korešpondujúcu hodnotu β.

Hlavným výsledkom je, že variancia fluktuácií v $n-$úrovňovom hierarchickom strome je daná vzťahom

$$\Sigma^2(n) = \Delta(z^n\frac{1-\pi^2}{1-z\pi^2} - z\pi^{2n}\frac{z-1\pi^2}{1-z\pi^2}).$$

Pri uvažovaní rôznych možností pre β pre $n >> 1$ konečne dostávame

$$\beta = \begin{cases} -\frac{\ln \pi}{\ln z}, & \pi > z^{-\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{2}, & \pi < z^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Táto rovnica má dva limitné prípady, a to keď $\pi = 1$, tj. absolútna kontrola, $\beta = 0$, zatiaľ čo pre $\pi < 1/z^{1/2}$ rozhodnutia vyšších úrovní nemajú štatistický efekt na rozhodnutia urobené v nižších úrovniach, a $\beta = 1/2$. Naviac pre danú hodnotu $\beta < 1/2$ úroveň kontroly π bude klesajúcou funkciou z: $\pi = z^{-\beta}$.

3.2.3 Kombinácia týchto dvoch modelov

V našom prípade *Model 1*, jednoduchou modifikáciou Gibratových predpokladov, určuje exponenciálne rozdelenie rýchlosti rastu firmy (podľa empirických výsledkov teda určuje práve tvar rozdelenia), a *hierarchický model* určuje druhé empirické zistenie, mocninovú závislosť štandardnej odchýlky produkcie na veľkosti firmy. Zaujíma nás, či sa tieto dva modely dajú spojiť do jedného, ktorý by určoval obidve empirické zistenia.

V hierarchickom modeli, rýchlosti rastu firiem sú výsledkom mnohých nezávislých rozhodnutí. Je ale dôležité, z akého rozdelenia sú jednotlivé rozhodnutia vyberané. Ak uvažujeme, že rozhodnutia sú z Gaussovho rozdelenia, výstup nie je Gaussov v chvostoch. Existuje $2^{z^{n+1}-1}/(z-1)$ možných konfigurácií rozhodnutí, čo definuje rozdelenie s rôznymi m

$$p_n(S_1) = \sum_m p_m^n \frac{1}{\sqrt{2\pi m\Delta}} e^{-(S_1 - S_0)^2/2m\Delta},$$

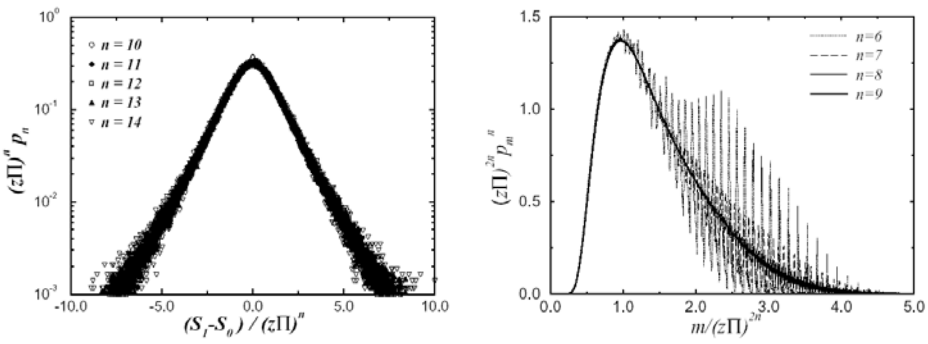
ktoré už nie je naďalej Gaussovo kvôli p_m^n.

Konečné rozdelenie výstupu firmy S_1 bude dané konvolúciou dvoch hustôt p_m^n a Gaussovej s varianciou $m\Delta$. Podľa teórie martingalov, pre každé vstupné rozdelenie $f(x)$ s nulovou strednou hodnotou a varianciou Δ, výstupné rozdelenie konverguje pre $n \to \infty$ k rozdeleniu

$$\frac{1}{\Sigma_1(n)} g_f\left(\frac{x}{\Sigma_1(n)}\right),$$

kde g_f nie je závislá na n ale na f. Preto výsledné rozdelenie bude exponenciálne, a treba nájsť nejaké vhodné vstupné rozdelenie.

Ak uvažujeme, že vstupné rozdelenie je exponenciálne vo výraze $S_1 - S_0$, pre malé σ_1, výstupné rozdelenie je takmer exponenciálne so širšími chvostami, čo je konzistentné s empirickými výsledkami.



Obr. 3.6 (a) Hustota pravdepodobnosti výstupného rozdelenia, pre modely s rôznym počtom úrovní pri vstupnom exponenciálnom rozdelení, (b) numerický odhad výpočtu koeficientov p_n^m generovacej funkcie $p_n(s)$.

Preto v limite pre malé σ_1, môžeme kombinovat' tieto dva modely, predpokladajúc, že model 1 produkuje vstupné rozdelenie pre hierarchický model. Tento dodatočný predpoklad nám určuje obidve empirické zistenia. Pre veľké σ_1, je potrebné d'alšie doladenie.

3.2.4 Suttonov model

Ďalším modelom, ktorý stručne predstavíme je Suttonov model. *Sutton* [12] predpokladal, že všetky časti firmy veľkosti S v menších podčastiach sú rovnako pravdepodobné. Toto je druh mikrokanonického, predpokladu minimálnej informácie. Pre fyzikálne systémy je podobný predpoklad overený Liouvillovou teorémou, ktorá je dôsledkom Hamiltonových dynamík, preto je zaujímavé hľadat' analógiu tejto teorémy pre stochastické dynamiky odrážajúce organizáciu firmy.

Jeho výsledky môžu byt' priamo odvodené pomocou veličiny $\mathcal{N}(R, K, S)$, definovanej nasledovne:

$$\sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=s_1}^{\infty} \dots \sum_{s_K=s_{K-1}}^{\infty} \delta\left(S - \sum_{i=1}^{K} s_i\right) \int \prod_{i=1}^{K} P(\eta_i) d\eta_i \delta\left(R - \sum_{i=1}^{K} s_i \eta_i\right),$$

t.j. počet častí celého čísla S, z presne K celých čísel $s_1, s_2, ..., s_K$, tak že celková absolútna rýchlost' rastu R je daná sčítaním nezávislých náhodných premenných η_i, s váhami veľkostí častí s_i.[3]

Pomocou Fouriérovej transformácie na $\hat{\mathcal{N}}(q,\mu,\lambda)$ a metódy sedlového bodu ($K^* \approx \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda}$), dostávame

$$\hat{\mathcal{N}}(q=0,\mu=0,\lambda\to 0) \sim \exp\Big(\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty dv\ln(1-e^{-v})\Big) = \exp\Big(\frac{\pi^2}{6\lambda}\Big).$$

Inverznou Laplaceovou transformáciou $\hat{\mathcal{N}}(q=0,v=0,\lambda\to 0)$ ľahko overíme, že pre veľké S:

$$\mathcal{N}(S) \sim \exp[b\sqrt{S}], \qquad b = \pi\sqrt{\frac{2}{3}},$$

čo reprezentuje Hardy-Ramanujanov výsledok pre veľké S.

Ďalšími úpravami nakoniec dostávame, že priemerný počet podjednotiek je rovný $\sqrt{S}\ln S$, s relatívnymi (nie Gaussovými) fluktuáciami, ktoré idú k nule ako $1/lnS$. Priemerná veľkosť podjednotiek je teda $\sqrt{S}/\ln S$.

Preto najpravdepodobnejšie rozdelenie veľkého celého čísla S je rozdelenie na $\sqrt{S}$ častí veľkosti $\sqrt{S}$ (vynechaním logaritmov).

V skutočnosti sa ale firma skladá z $\sqrt{S}$ častí veľkosti 1, $\sqrt{S}/2$ častí veľkosti 2, ..., a jednej časti veľkosti $\sqrt{S}$. Presnejšie priemerný počet výskytu $N(s|S)$ časti veľkosti s, vo firme veľkosti S, pre $1 \ll s \ll S$ môžeme aproximovať

$$N(s|S) \approx \mathcal{N}(S)\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\frac{bks}{2\sqrt{S}}) \sim \frac{\mathcal{N}(S)}{\exp(\frac{bs}{2\sqrt{S}})-1}.$$

Rozdelenie veľkostí podsektorov sleduje, v Suttonovom modeli, Bose-Einsteinove rozdelenie. Toto rozdelenie sa správa ako mocninový zákon $1/s$, pre $s \ll \sqrt{S}$ a rozkladá sa exponenciálne rýchlo pre $s \gg \sqrt{S}$.

$N(s|S)$ umožňuje vyjadriť varianciu $\sigma_R^2(S)$ absolútnej rýchlosti rastu R ($\sigma_R^2(S) \approx 1.13955...\sigma_0^2 S^{3/2}$). Teda podmienená variancia absolútnych návratov rastie ako $S^{3/2}$ a variancia relatívneho návratu $r = R/S$ klesá ako $S^{-1/2}$, čo je ekvivalentné s tvrdením $\beta = 1/4$ pre rýchlosť rastu firmy správajúcu sa podľa mocninového zákona $\sigma(S) \sim S^{-\beta}$.[4]

[3]Kde δ je Diracova delta fumkcia pre spojité a Kroneckerova delta pre diskrétne premenné.

[4]Stanley et al. zistili $\beta \approx 0.18$.

3.2.5 Alternatívny model k Suttonovmu modelu

Predpokladáme, že firmy sa skladajú z agregovaných jednotiek, ktoré majú a priori určité rozdelenie veľkosti, za ktoré vyberieme mocninové rozdelenie, pretože rozdelenie veľkostí firiem v krajine je mocninové a existuje prijateľný dynamický model, ktorý vedie k mocninovému rozdeleniu veľkostí.

Ďalej predpokladáme, podobne ako v Suttonovom modeli, že každá podjednotka vo firme má náhodnú rýchlosť rastu.

Úlohou obchodného manažmentu je, do určitého rozsahu, prerozdeľovať príjem každého sektoru takým spôsobom, aby umožnili menej výkonným podjednotkám dobehnúť ostatné. Preto dynamický model pre veľkosť $s_i(t)$ danej podjednotky je

$$\frac{ds_i}{dt} = \gamma\Big(\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} s_j(t) - s_i(t)\Big) + \eta_i(t)s_i(t),$$

kde prvé dva výrazy opisujú redistribúciu zdrojov medzi podjednotkami, a posledný výraz opisuje náhodnú rýchlosť rastu. Parameter γ meria silu prerozdeľovania.

Dá sa ukázať, že stacionárne rozdelenie pre takýto stochastický proces má mocninové chvosty, $p(s) \sim s^{-1-\mu}$, s $\mu = 1 + \gamma/\sigma_0^2$.
Z tohto dôvodu predpokladáme, že a priori rozdelenie veľkostí podjednotiek má mocninové chvosty

$$p(s) \approx \frac{\mu s_0^{\mu}}{s^{1+\mu}} \qquad (s \to \infty),$$

predpokladáme, že firma sa skladá z ľubovolného počtu K takýchto podjednotiek, s určitými a priori váhami $\mathcal{Q}(K)$. To znamená, že ak náhodne vyberieme firmy v krajine, existuje proporcionálna pravdepodobnosť k $\mathcal{Q}(K)$ pre túto firmu, že sa skladá práve z K sektorov. Nenormalizované rozdelenie rýchlostí rastu pre danú firmu veľkosti S, v tomto modeli, je dané

$$\mathcal{N}(R,S) = \sum_{K=1}^{\infty} \mathcal{Q}(K) \int \prod_{i=1}^{K} p(s_i)ds_i\delta\Big(S-\sum_{i=1}^{K} s_i\Big) \int \prod_{i=1}^{K} P(\eta_i)d\eta_i\delta\Big(R-\sum_{i=1}^{K} s_i\eta_i\Big)$$

Môžeme predpokladať, že $\mathcal{Q}(K)$ sa správa podľa mocninového zákona $\mathcal{Q}(K) \sim K^{-1-\alpha}$, a že $\mu > 1$. Pre $P(S)$ dostávame nasledovné výsledky:

$$\mathcal{N}(S) \sim \frac{1}{S^{1+\alpha}} \qquad (\alpha \leq \mu); \qquad \mathcal{N}(S) \sim \frac{1}{S^{1+\mu}} \qquad (\alpha \geq \mu);$$

Druhý prípad $\alpha \geq \mu$ nastáva v situácii, keď veľké firmy pozostávajú len z malého počtu sektorov, čo vedie k tomu, že variancia rýchlostí rastu R rastie proporcionálne k veľkosti S, tj. prípad $\beta = 0$, čo nezodpovedá empirickým dátam. Preto budeme ďalej predpokladať, že $\alpha \leq \mu$. V tomto prípade je priamy vzťah medzi chvostom $\mathcal{Q}(K)$ a chvostom rozdelenia veľkostí firiem. Empiricky pozorovaná hodnota $\alpha \approx 1.05$.

Škálovanie *fluktuácií rýchlosti rastu* závisí od parametra μ, teda v prípade $\mu > 2$, variancia relatívnej rýchlosti rastu klesá ako $S^{-1/2}$ (tj. $\beta = 1/2$), a rozdelenie rýchlosti rastu je Gaussovo.

Zaujímavejší prípad nastáva pre $1 < \mu < 2$, kedy exponent škálovania závisí od parametra, $\beta = (\mu - 1)/2$, a teda β je z intervalu medzi $\beta = 1/2$ pre $\mu = 2$ a $\beta = 0$ pre $\mu = 1$. V tomto prípade rozdelenie rýchlostí rastu je škálované ako $rS^{(\mu-1)/\mu}$, potom empirická hodnota $\beta \approx 0.18$ zodpovedá $\mu = 1.36$, ktoré je väčšie ako empirická hodnota $\alpha \approx 1.05$, teda podmienka pre konzistenciu analýzy je splnená.

V prípade, že $\mu < 1$ rozdelenie nie je univerzálne.

Podmienené rozdelenie veľkostí sektorov, $P(s|S)$, závisí od hodnoty α. Pre $\alpha \leq \mu$ je $P(s|S)$ spojením mocninového zákona, ktorý odráža a priori rozdelenie veľkostí sektorov; a malý hrb, ktorý sa vytráca pre veľké hodnoty S, teda

$$P(s|S) \approx \frac{\mu s_0^{\mu}}{s^{1+\mu}} \qquad (s \ll S); \qquad P(s|S) \approx \frac{F(s/S)}{S^{1+\mu-\alpha}} \qquad (s \sim S),$$

kde $F(.)$ je určitá škálovacia funkcia, ktorá sa stratí pre $s > S$.

V prípade, že $\alpha > \mu$ je druhá čať dôležitá pre $S \to \infty$, a režim mocninového zákona zmizne. Teda počet sektorov je malý a ich typická veľkosť je porovnateľná s S.

3.2.6 Model 5

Tento model je ďalším zo štúdií *Amarala, Buldyreva et al.* [13]. Chápe firmu ako súbor oddelení, ktoré prechádzajú mnohými zmenami počas jednej periódy, ktorá sa snaží prerásť z výroby jedného produktu na firmu na mnohých trhoch.

Firma je vytvorená s jedným oddelením veľkosti $\xi_1(t = 0)$. Veľkosť firmy rozumieme ako súčet veľkostí jednotlivých oddelení $S \equiv \sum_i \xi_i(t)$ v čase t. Máme definovanú minimálnu veľkosť S_{min}, čo je najmenšia veľkosť potrebná na prežitie firmy v konkurenčnom prostredí. Predpokladáme, že veľkosť každého oddelenia i sa vyvíja podľa náhodného multiplikatívneho procesu

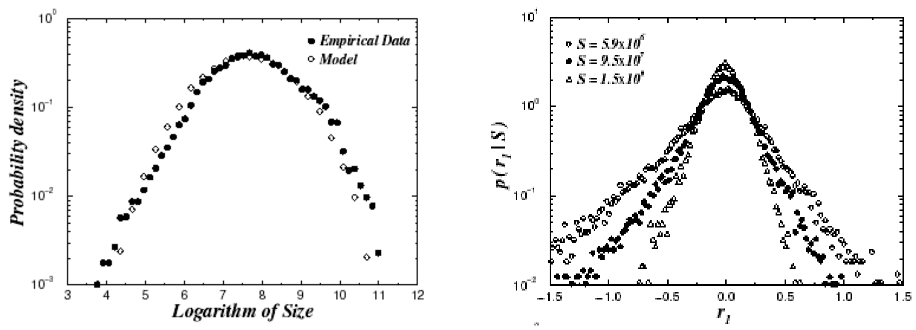
$$\Delta\xi_i(t) \equiv \xi_i(t)\eta_i(t),$$

kde $\eta_i(t)$ je náhodná premenná z Gaussovho rozdelenia s nulovou strednou hodnotou a varianciou V, nezávislou od ξ_i.

Oddelenia sa vyvíjajú nasledovným spôsobom:

- Ak $\Delta\xi_i(t) < S_{min}$ oddelenie i zmení svoju veľkosť na $\xi_i(t+1) = \xi_i(t) + \Delta\xi_i(t)$. Ak sa jeho veľkosť stane menšou ako minimálnou, tj. $\xi_i(t+1) < S_{min}$ s pravdepodobnosťou p_a je oddelenie i absorbované prvým oddelením, pretože už nie je viac životaschopné.
- Ak $\Delta\xi_i(t) > S_{min}$ potom s pravdepodobnosťou $(1-p_f)$ zmení oddelenie i svoju veľkosť na $\xi_i(t+1) = \xi_i(t) + \Delta\xi_i(t)$; a s pravdepodobnosťou p_f nezmení svoju veľkosť, $\xi_i(t+1) = \xi_i(t)$ a vznikne nové oddelenie veľkosti $\xi_j(t+1) = \Delta\xi_i(t)$.

Dynamický proces teda riadia parametre S_{min}, V, p_a a p_f. Minimálna veľkosť len nastavuje škálu, preto vlastnosti modelu nezávisia od jeho hodnoty.



Obr. 3.7 (a) Hustota pravdepodobnosti logaritmov veľkosti firmy modelu a dát pre rok 1994 pre priemyselné firmy USA, pri použití parametrov S_{min} z log-normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 5×10^5, $V = 0.15$, $p_f = 0.8$, $p_a = 0.05$, a $l = 50$; (b) hustota pravdepodobnosti ročnej rýchlosti rastu pre firmy rôznych veľkostí pri použití rovnakých parametrov; rozdelenie je 'tent-shaped' podobne ako v empirických výsledkoch.

Porovnávaním predikcií modelu pre rozdelenie veľkostí firiem s empirickými dátami dostali nasledovné obory pre parametre: $V = 0.1 - 0.2$; $p_a = 0.01 - 1$; a $p_f = 0.1 - 1.0$ pri definovaní roku ako l iterácií. Nenašla sa viditeľná závislosť výsledkov na počte zmien v perióde pre hodnoty $l = 20$, 30, alebo 50.

Empirické výsledky predpisujú rozdeleniu rýchlosti rastu exponenciálnu formu, a štandardnej odchýlke mocninový zákon. Výsledky modelu sú s týmito zákonmi konzistentné, a rovnici

$$\sigma_1(S) \sim S^{-\beta}$$

vyhovuje hodnota parametra $\beta = 0.17 \pm 0.03$. To nám umožňuje škálovať' rozdelenie rýchosti rastu pre rôzne veľkosti firiem.

Kvôli štruktúre firmy potrebujeme hustotu pravdepodobnosti $\rho_1(\xi_i|S)$ nájdenia oddelenia veľkosti ξ_i vo firme veľkosti S. Preto vyslovíme hypotézu, že

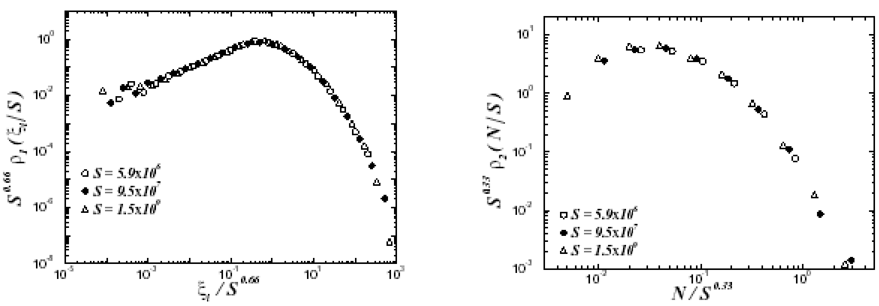
$$\rho_1(\xi_i|S) \sim S^{-\alpha} f_1(\xi_i/S^{\alpha}).$$

Z obrázku 3.8 (a) je zjavné, že hypotéza je overená empirickými výsledkami, a hodnota exponentu $\alpha = 0.66 \pm 0.05$.

Ďalšia hypotéza, že hustota pravdepodobnosti $\rho_2(N|S)$ nájdenia firmy s veľkosťou S pozostávajúcej z N oddelení sleduje

$$\rho_2(N|S) \sim S^{-(1-\alpha)} f_2(N/S^{1-\alpha}).$$

je zobrazená v obrázku 3.8 (b) overená empirickými výsledkami.



Obr. 3.8 (a) Kolaps dát pri podmienenej hustote pravdepodobnosti ρ_1, (b) a podmienenej hustote pravdepodobnosti ρ_2.

Na základe tejto štúdie zistili, že predikcie modelu sú len slabo citlivé na hodnoty parametrov, čo môže byť' spôsobené tým, že firmy z rôznych odvetví sú popísané veľmi podobnými empirickými zákonmi. Škálovacie zákony platia aj napríklad pre Japonsko, s hodnotou parametra $\beta \approx 0.2$.

3.3 Simulácie

V tejto časti pomocou počítačových simulácií skúmame hierarchický stromový model a model 5, predstavené v predchádzajúcej časti. Snažíme sa pre ilustráciu ukázať vlastnosti modelov a na základe grafickej analýzy ich porovnať s empirickými výsledkami [10, 11, 13].

Na počítačové simulácie sme v obidvoch prípadoch použili matematický softvér MATLAB 6.1.

3.3.1 Hierarchický model

Hierarchický model, predstavený v časti 3.2.2 reprezentuje organizáciu rozhodovania firmy, pretože predpokladáme, že rastový proces závisí od vlastností manažérskych hierarchií.

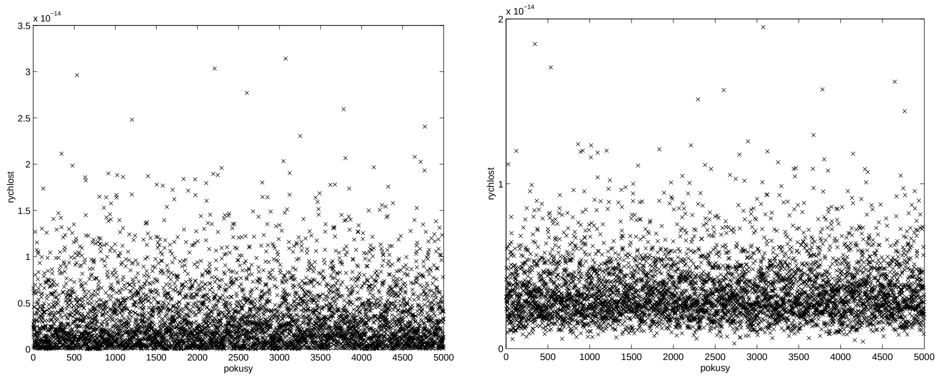
Ukázali sme si, že vhodným vstupným rozdelením pre tento model je exponenciálne rozdelenie Modelu 1, $p(r_1|s_0)$. V tomto rozdelení však vystupujú premenné r^* a k , ktoré vychádzajú z krivky priemerných nákladov v konvenčnej ekonomickej teórii, keďže veľkosť konverguje k optimálnej veľkosti S^*, minimálnej hodnote tejto krivky.

V našich simuláciach sme generovali rozhodnutia δ o zmene veľkosti jednotlivých podjednotiek firmy pre uzly, kde vznikala nová politika. Výsledná veľkosť firmy je $S_1 = S_0(1 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_i) = S_0(1 + r_1)$.

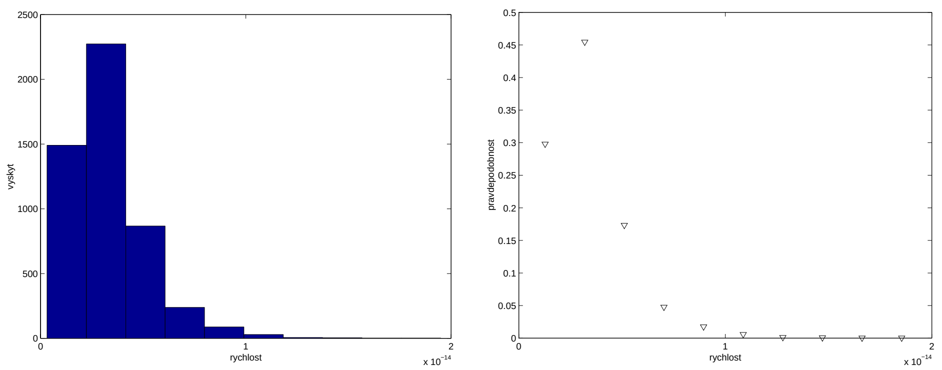
Pre rozhodnutia sme použili dva druhy vstupného rozdelenia, a to Gaussove a exponenciálne s varianciou vyhovujúcou podmienke $\Delta \ll (\frac{S_0}{z^n})^2$.

1. Exponenciálne vstupné rozdelenie
Počiatočné podmienky modelu:

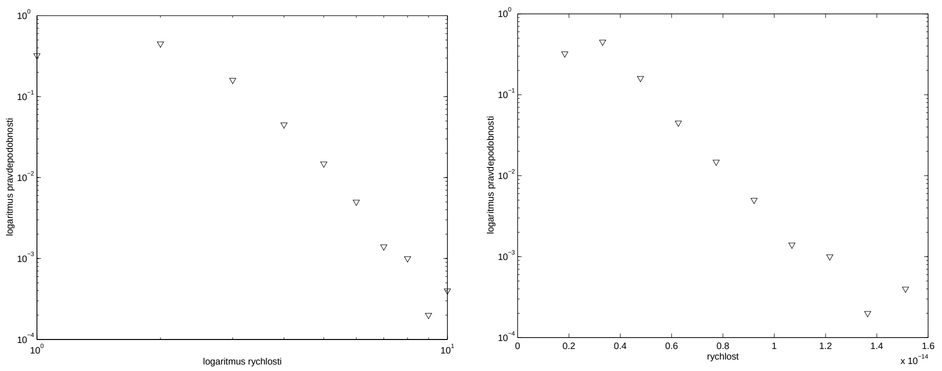
- počet pokusov 5000
- počet vetiev $z = 2$
- počet úrovní $n = 0, 1, 2...8$
- pravdepodobnosť prevzatia politiky od vyššej úrovne $\pi = 0.87$
- počet koncových jednotiek $N = 2^n = 1, 2, ...128, 265$
- vstupné rozdelenie rozhodnutí $\delta \sim \exp(3.5527e - 015)$



Obr. 3.9 Obrázky zobrazujú rýchlosť ročného rastu pozorovanú pre 5000 firiem s rovnakou počiatočnou veľkosťou a s počtom úrovní (a) $n = 0$, (b) $n = 6$.



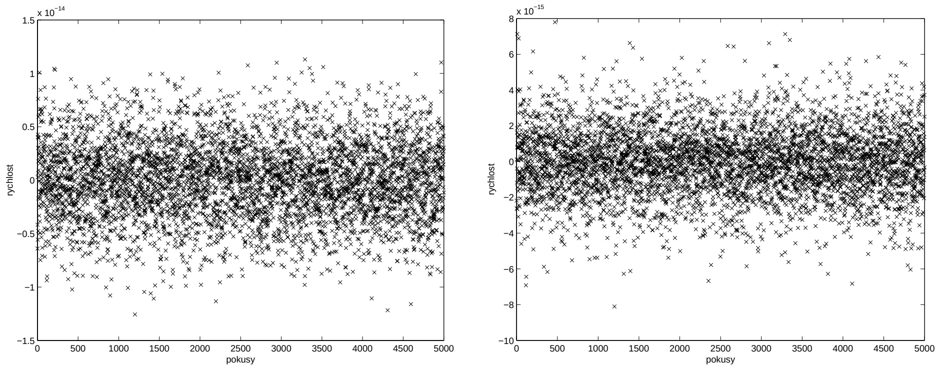
Obr. 3.10 Príklad (a) histogramu a (b) hustoty pravdepodobnosti rozdelenia pre $n = 6$.



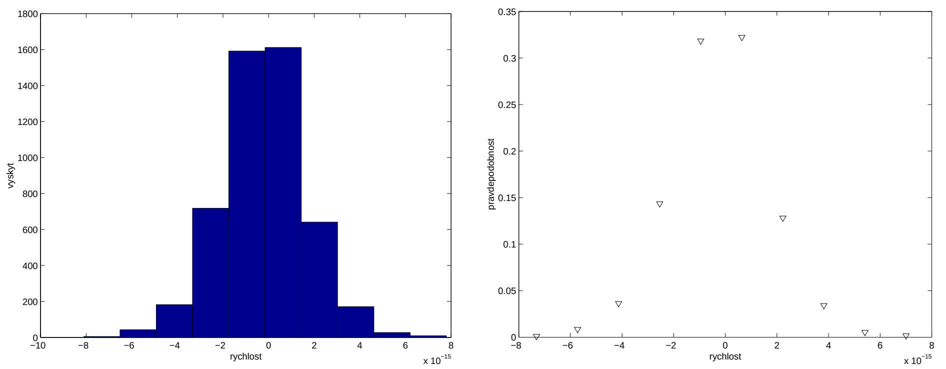
Obr. 3.11 Pravdepodobnoť rozdelenia $n = 8$ v (a) log-log mierke, (b) log-lineárnej mierke.

2. Gaussovo vstupné rozdelenie

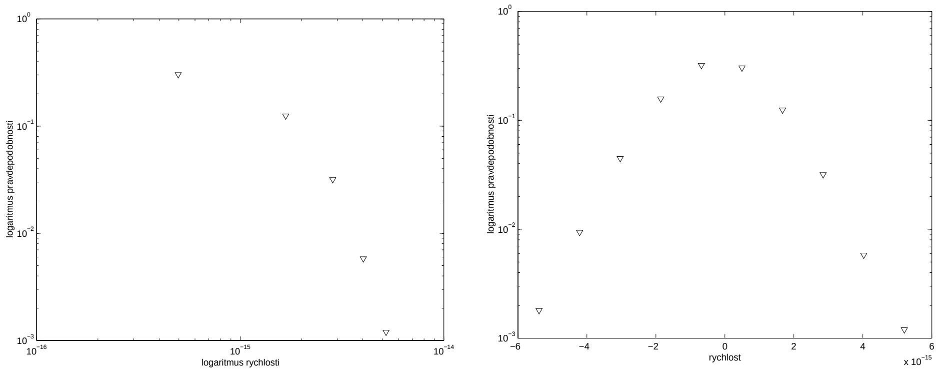
- počet pokusov 5000
- počet vetiev $z = 2$
- počet levelov $n = 0,\ 1,\ 2...8$
- pravdepodobnosť prevzatia politiky od vyššieho levelu $\pi = 0.87$
- počet koncových jednotiek $N = 2^n = 1,\ 2,\ ...128,\ 265$
- vstupné rozdelenie rozhodnutí $\delta \sim N(0, 3.5527e - 015)$



Obr. 3.12 Obrázky zobrazujú rýchlosť ročného rastu pozorovanú pre 5000 firiem s rovnakou počiatočnou veľkosťou a s počtom úrovní (a) $n = 0$, (b) $n = 6$.



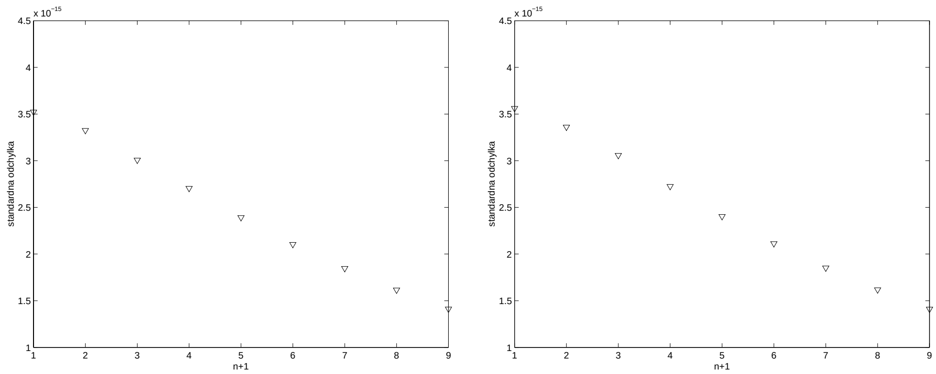
Obr. 3.13 Príklad (a) histogramu a (b) hustoty pravdepodobnosti rozdelenia pre $n = 6$.



Obr. 3.14 (a) Obr. 3.14 Pravdepodobnoť rozdelenia $n = 8$ v (a) log-log mierke, (b) log-lineárnej mierke.

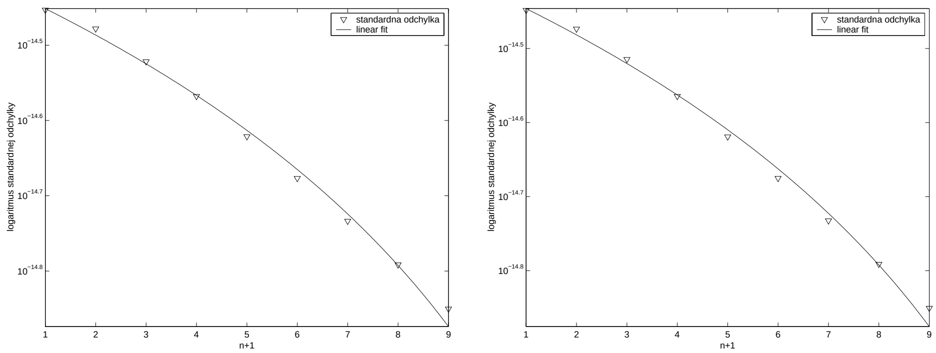
Zhrnutie:

Prvý výsledok - Rozdelenie logaritmov rýchlostí rastu pre firmy s približne rovnakou počiatočnou veľkosťou má exponenciálny tvar; v obrázku 3.11 sa dá vidieť časť 'tent-shaped' formy pravdepodobnosti rozdelenia logaritmov rýchlosti rastu pre exponenciálny vstup, a v obrázku 3.14 tvar pravdepodobnosti rozdelenia pre normálne rozdelenie vstupu.



Obr. 3.15 Štandardná odchýlka rýchlosti rastu v závislosti od počtu úrovní $\sigma_1(n)$ pre (a) exponenciálne rozdelenie vstupu (b) normálne rozdelenie vstupu.

Druhý výsledok - Fluktuácie rýchlostí rastu (teda štandardná odchýlka rozdelenia) sa správajú ako mocninový zákon; sa dá vidieť v obrázkoch 3.15, na ktorých je zobrazená závislosť štandardnej odchýlky od počtu úrovní hierarchického stromu pre exponenciálne a Gaussove vstupné rozdelenie. Lineárne fitovanie je zobrazené na obrázkoch 3.16, reprezentuje ho priama čiara.



Obr. 3.16 Štandardná odchýlka rýchlosti rastu v závislosti od počtu úrovní v log-log mierke $\sigma_1(n)$ pre (a) exponenciálne rozdelenie vstupu (b) normálne rozdelenie vstupu.

3.3.2 Model 5

Model 5 reprezentuje dynamický proces vzniku, rastu a zániku oddelení v organizácií firmy. Tento proces bol popísaný v predchádzajúcej časti. Teraz sa pokúsime reprodukovať výsledky z [13].

Veľkosť každého oddelenia i sa vyvíja podľa náhodného multiplikatívneho procesu

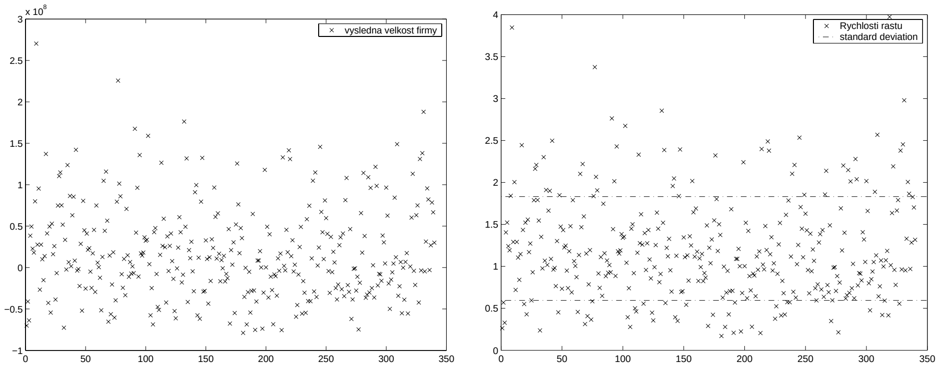
$$\Delta\xi_i(t) \equiv \xi_i(t)\eta_i(t).$$

- Ak $\Delta\xi_i(t) < S_{min}$ oddelenie i zmení svoju veľkosť na $\xi_i(t+1) = \xi_i(t) + \Delta\xi_i(t)$. Ak sa jeho veľkosť stane menšou ako minimálnou, tj. $\xi_i(t+1) < S_{min}$ s pravdepodobnosťou p_a je oddelenie i absorbované prvým oddelením, pretože už nie je viac životaschopné.

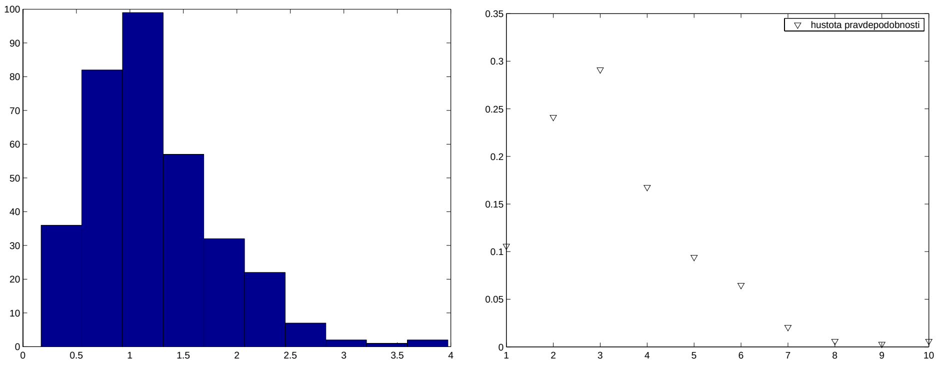
- Ak $\Delta\xi_i(t) > S_{min}$ potom s pravdepodobnosťou $(1-p_f)$ zmení oddelenie i svoju veľkosť na $\xi_i(t+1) = \xi_i(t) + \Delta\xi_i(t)$; a s pravdepodobnosťou p_f nezmení svoju veľkosť, $\xi_i(t+1) = \xi_i(t)$ a vznikne nové oddelenie veľkosti $\xi_j(t+1) = \Delta\xi_i(t)$.

Počiatočné podmienky:

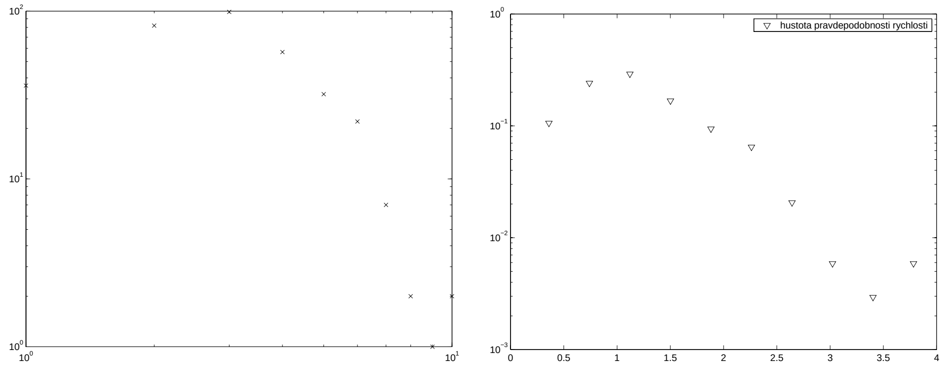
- počet pokusov 340
- počiatočná veľkosť prvého oddelenia $\xi_1 = 9.5 \times 10^7$
- pravdepodobnosť vytvorenia nového oddelenia $p_f = P(\Delta\xi_i > S_{min})$
- pravdepodobnosť absorbcie oddelenia $p_a = P(\xi_i < S_{min})$
- $\eta_i \sim N(0, 0.15)$
- $l = 30$
- $S_{min} = 5 \times 10^5$



Obr. 3.17 Výskyt (a) veľkostí a (b) rýchlosti rastu firiem.



Obr. 3.18 (a) Histogram rozdelenia logaritmov rýchlostí, (b) zodpovedajúca hustota pravdepodobnosti.



Obr. 3.19 Rozdelenie pravdepodobnosti logaritmov rýchlosti rastu v (a) log-log škále, (b) log-lineárnej škále.

Zhrnutie:

Prvý výsledok - Rozdelenie logaritmov rýchlostí rastu pre firmy s približne rovnakou počiatočnou veľkosťou má exponenciálny tvar; na obrázku 3.19 (b) sa dá vidieť časť 'tent-shaped' formy pravdepodobnosti rozdelenia logaritmov rýchlosti rastu.

Druhý výsledok - Fluktuácie rýchlostí rastu sme nesledovali...

Záver

Cieľom práce bolo poskytnúť pohľad na mocninové zákony nachádzajúce sa v ekonómii a financiách. Snažili sme sa predstaviť 'ekonofyzickálnu' teóriu rastových analýz firmy.

Priblížili sme niekoľko modelov, ktoré môžu slúžiť na pochopenie dôležitých dynamických a rastových procesov firmy.

Pomocou počítačových simulácií sa nám podarilo ilustratívne reprodukovať výsledky získané zo štúdií hierarchického modelu a modelu 5, v súlade s empirickými výsledkami.

Štúdie rastu firmy citované v práci, boli realizované pre dáta priemyselných firiem USA, Japonska a Veľkej Británie. Bolo by zaujímavé podobnú analýzu aplikovať na dáta pre Slovensko, keby sme mali k dispozícii potrebné údaje. Teda práca môže slúžiť ako motivácia pre analýzu skutočných dát.

Literatúra

[1] Jean-Philippe Bouchaud: *Power-laws in economy and finance: some ideas form physics*, cond-mat[5]/0008103, (2000).

[2] William J.Reed: *The Pareto, Zipf and other power laws.*

[3] Victor M. Yakovensko: *Reaserch in Econophysics*, cond-mat/0302270, (2003).

[4] Adrian Drăgulescu, Victor M. Yakovensko: *Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States*, cond-mat/0103544, (2001).

[5] Hideaki Aoyama, Yuichi Nagahara, Mitsuhiro P. Okazaki, Wataru Souma, Hideki Takayasu, and Misako Takayasu: *Pareto's law for income of individuals and debt of bankrupt companies*, cond-mat/0006038, (2000).

[6] Adrian Drăgulescu, Victor M. Yakovensko: *Statistical mechanics of money*, cond-mat/0001432, (2000).

[7] Adrian Drăgulescu, Victor M. Yakovensko: *Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility*, cond-mat/0203046, (2002).

[8] Youngki Lee, Luis A. Nunes Amaral, David Canning, Martin Meyer, and H. Eugene Stanley: *Universal features in the growth dynamics of complex organisations*, cond-mat/9804100, (1998).

[9] H. Eugene Stanley, Luis A. Nunes Amaral, Sergey V. Buldyrev, P. Gopikrishnan, V. Plerou, and Michael A. Salinger: *Self-organized complexity in economics and finance*,(2002), [6]

[5] xxx.lanl.gov, arxiv.org/abs/cond-mat

[6] www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.022582899

[10] Luis A. Nunes Amaral, Sergey V. Buldyrev, Shlomo Havlin, Heiko Leschhorn, Philipp Maass, Michael A. Salinger, H. Eugene Stanley, and Michael H. R. Stanley: *Scaling behavior in economics: I. Empirical results for company growth*, cond-mat/9702082, (1997).

[11] Luis A. Nunes Amaral, Sergey V. Buldyrev, Shlomo Havlin, Heiko Leschhorn, Philipp Maass, Michael A. Salinger, H. Eugene Stanley, and Michael H. R. Stanley: *Scaling behavior in economics: II. Modeling of company growth*, cond-mat/9702085, (1997).

[12] Matthieu Wyart, Jean-Philippe Bouchaud: *Statistical models for company growth*, cond-mat/0210479, (2002).

[13] Luis A. Nunes Amaral, Sergey V. Buldyrev, Shlomo Havlin, Michael A. Salinger, H. Eugene Stanley: *Power Law Scaling for a System of Interacting Units with Complex Internal Structure*, cond-mat/9707342, (1997).