Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave
Ekonomická a finančná matematika

DIPLOMOVÁ PRÁCA

apríl 2003, Bratislava

Veronika Oláhová

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Ekonomická a finančná matematika

Diferenčné systémy s racionálnymi očakávaniami

Diplomová práca

Diplomantka: Veronika Oláhová
apríl 2003, Bratislava
Vedúci diplomovej práce: RNDr. Juraj Zeman, CSc.

Prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracovala samostatne pod vedením vedúceho diplomovej práce a uviedla som všetku použitú literatúru.

Veronika Oláhová

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce RNDr. Jurajovi Zemanovi, CSc.
za inšpiráciu, cennú pomoc a trpezlivosť.

Veronika Oláhová

Obsah

0 Úvod

V reálnom svete, v ktorom nie je budúcnosť známa, závisí ľudské správanie do veľkej miery od očakávaní. Neurčitosť reálneho sveta môžeme v modeloch vyjadriť náhodnými premennými. Matematickým nástrojom, vyjadrujúcim práve správanie sa ľudí v neurčitej ekonomike, sú racionálne očakávania.

Racionálne očakávania sa v súčasnosti využívajú napríklad v ekonomických modeloch, ktoré sa snažia vysvetliť fluktuácie v produkcii ekonomík (RBC[1] modely). Poznáme niekoľko možných prístupov k riešeniu modelov s očakávaniami tohto typu.

Cieľom tejto diplomovej práce je popísanie matematického aparátu, ktorý sa na riešenie systémov s racionálnymi očakávaniami využíva. Jednotlivé prístupy k riešeniu sú v práci aplikované na ekonomický model popisujúci reálny hospodársky cyklus - RBC model. Teoreticky ho popisujeme v kapitole 2. Vstupné koeficienty modelu vychádzajú zo slovenských dát. Kapitola 1 je venovaná teórii racionálnych očakávaní. Na jednoduchom diferenčnom systéme tu vysvetľujeme základné pojmy a operácie využívané v tejto teórii.

V práci presnejšie popisujeme tri spôsoby riešenia systému s racionálnymi očakávaniami. Prvým prístupom je metóda odvodená v práci Blancharda a Kahna [6]. Táto metóda, popísaná v kapitole 4, prehľadne rieši viacrozmerný systém bez presného zadania exogénnej premennej. Pre túto metódu uvádzame aj vety o existencii riešenia a ich dôkazy. V kapitole podrobne popisujeme ukážkové riešenie základného RBC modelu. Jeho riešenie pozostáva z hľadania Eulerových rovníc, ich loglinearizácie a následného výpočtu optimálneho riadenia.

Druhým prístupom k riešeniu je metóda neurčitých koeficientov. Podrobne ju popisujeme v kapitole 5. Riešenie je odvodené pre rovnaký diferenčný systém ako pri metóde Blancharda a Kahna. Sekcia s riešením RBC modelu obsahuje len aplikáciu samotnej metódy na zjednodušený model, ktorý bol upravený v kapitole 4.

V kapitole 6 približujeme tretí prístup, ktorým je dynamické programovanie. Tento postup pracuje s maximalizáciou úžitkovej funkcie za podmienky vyjadrenej stavovou rovnicou. Popisujeme teóriu, ktorá umožňuje numerické riešenie zadaného modelu. RBC model riešime numericky na počítači.

V každej z kapitol opisujúcich metódy uvádzame riešenie v rovnakom tvare, čo umožňuje neskoršie porovnanie metód. V poslednej kapitole 7 porovnávame riešenia RBC modelu, ktoré boli vypočítané popísanými postupmi.

[1] Real Business Cycle

1 Diferenčné systémy s racionálnymi očakávaniami

Pojmom diferenčný systém s racionálnymi očakávaniami označujeme diskrétny dynamický systém, ktorý obsahuje operátor racionálneho očakávania. Na jednoduchom príklade priblížime jednotlivé pojmy a vlastnosti, ktoré sprevádzajú pojem racionálne očakávania.

Definujme diferenčný systém popísaný v [5]:

$$p_t = a\mathrm{E}[p_{t+1}|\Omega_t] + cx_t. \tag{1.1}$$

Množina Ω_t označuje tzv. informačnú množinu v čase t. Ω_t obsahuje bežné a minulé hodnoty všetkých premenných vystupujúcich v modeli. Pre $\forall t$ platí $\Omega_{t-1} \subseteq \Omega_t$. Táto vlastnosť vyjadruje to, že nedochádza k strate informácie v čase. Všetky premenné, ktoré poznáme v čase $t-1$, poznáme aj v čase t. Označenie $\mathrm{E}[p_{t+1}|\Omega_t]$ vyjadruje očakávanie p_{t+1} vytvorené vzhľadom na informačnú množinu Ω_t. V práci využívame skrátené označenia operátora:

$$\mathrm{E}[p_{t+1}|\Omega_t] =_t p_{t+1} = \mathrm{E}_t\, p_{t+1}.$$

Aby sme mohli nájsť vývoj riešenia p, musíme definovať, ako agenti žijúci v systéme formujú svoje racionálne očakávania. Preto definujeme ďalšie potrebné predpoklady.

Prvým predpokladom je, že agenti poznajú celý model. Na svete však zväčša tento prípad perfektnej infomácie o systéme nenastáva. Druhým predpokladom je, že všetci agenti v systéme majú rovnakú informáciu v čase t. Ani tento predpoklad v skutočnom svete neplatí.

Na riešenie systémov s racionálnymi očakávaniami poznáme rôzne postupy. Jednoduchým postupom je opakovaná substitúcia. Všetky metódy sú založené na zákone iterovaných očakávaní. Zákon hovorí: Nech Ω je informačná množina a nech ω je jej podmnožinou. Potom pre akúkoľvek premennú x platí

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[x|\Omega]|\omega] = \mathrm{E}[x|\omega].$$

Ak aplikujeme tento zákon na informačnú množinu Ω_t uvažovanú v čase t, dostávame vzťah:

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[x|\Omega_{t+1}]|\Omega_t] = \mathrm{E}[x|\Omega_t].$$

Spomenuli sme, že jedným z možných postupov riešenia je opakovaná substitúcia. Tento spôsob riešenia sa využíva len v jednoduchých modeloch (skôr jednorozmerných) a preto ho popisujeme len stručne. Postup riešenia dobre charakterizuje prácu s racionálnymi očakávaniami. Nasledujúci postup rieši systém (1.1).

Prepíšme systém (1.1) do času $t+1$ vzhľadom na informačnú množinu Ω_t na obidvoch stranách rovnice:

$$\mathrm{E}[p_{t+1}|\Omega_t] = a\mathrm{E}[\mathrm{E}[p_{t+2}|\Omega_{t+1}]|\Omega_t] + c\mathrm{E}[x_{t+1}|\Omega_t].$$

Využitím zákona iterovaných očakávaní dostávame vzťah:

$$\mathrm{E}[p_{t+1}|\Omega_t] = a\mathrm{E}[p_{t+2}|\Omega_t] + c\mathrm{E}[x_{t+1}|\Omega_t].$$

Substituovaním tohto vzťahu do systému (1.1) získame:

$$p_t = a^2\mathrm{E}[p_{t+2}|\Omega_t] + ac\mathrm{E}[x_{t+1}|\Omega_t] + cx_t.$$

Opakovaným rekurzívnym substituovaním do času T získavame riešenie:

$$p_t = c\sum_{i=0}^{T} a^i\mathrm{E}[x_{t+i}|\Omega_t] + a^{T+1}\mathrm{E}[p_{t+T+1}|\Omega_t].$$

Nech $T \to \infty$. Vidíme, že pri tejto podmienke očakávanie premennej x nesmie rásť viac ako exponeciálne. Podmienkou na konvergenciu sumy s premennou x je, že jej očakávanie nebude rásť mierou väčšou ako $\frac{1}{a} - 1$. Potom ak,

$$\lim_{T\to\infty} a^{T+1}\mathrm{E}[p_{t+T+1}|\Omega_t] = 0,$$

tak fundamentálne riešenie systému (1.1) je v tvare:

$$p_t = c\sum_{i=0}^{\infty} a^i\mathrm{E}[x_{t+i}|\Omega_t].$$

V modeloch s racionálnymi očakávaniami rozlišujeme premenné na stavové a riadiace (resp. na predeterminované a nepredeterminované). Rozdiel v týchto premenných je veľký. Stavová (predeterminovaná) premenná x_{t+1} je funkcia len premenných známych v čase t, t. j. premenných z informačnej množiny Ω_t. Pre túto premennú platí:

$$x_{t+1} =_t x_{t+1}.$$

Riadiaca (nepredeterminovaná) premenná p_{t+1} je funkciou premenných z informačnej množiny Ω_{t+1}. Rovnosť $p_{t+1} =_t p_{t+1}$ platí len za predpokladu, že realizácie všetkých premenných v Ω_{t+1} sú rovnaké s očakávaniami podmienenými vzhľadom na Ω_t.

Model, popísaný v tejto kapitole, napomáha pochopiť princíp využitia racionálnych očakávaní a ich vlastnosti. V ďalších kapitolách práce spomenieme zložitejšie modely využívajúce racionálne očakávania.

1.1 História racionálnych očakávaní

V polovici 70. rokov veľa krajín zaznamenalo tzv. stagfláciu. Tento pojem popisuje súčasnú existenciu vysokej inflácie a veľkej nezamestnanosti. Vtedajší makroekonomóvia tento jav nepredpovedali. Po niekoľkých rokoch výskumu bolo odvodené presvedčivé vysvetlenie stagflácie. Bolo založené na nepriaznivých šokoch na strane cien a výstupu.

Hypotézu racionálnych očakávaní zaviedol v roku 1961 John F. Muth[2]. Malá skupina ekonómov, tvorená R. Lucasom, T. Sargentom a R. Barrom, viedla boj proti hlavnému prúdu makroekonómov. Lucasov a Sargentov hlavný argument bol postavený na tom, že Keynesiánski ekonómovia ignorujú efekt očakávaní na správanie v ekonomike. Argumentovali, že správnou cestou je predpoklad, že ľudia tvoria svoje očakávania najracionálnejšie ako vedia a to na základe informácií, ktorú majú k dispozícii. Blanchard [2] uvádza, že po uvedení racionálnych očakávaní:

- keynesiánske modely by nemali byť využívané na určovanie riadenia.
- keynesiánske modely nemôžu vysvetliť dlhotrvajúce odchýlky výstupu od prirodzenej hladiny.
- teória riadenia by mala byť zmenená (možné využitie teórie hier).

Myšlienka, že racionálne očakávania sú správnym predpokladom, začala byť široko akceptovaná. Nie je to preto, že by makroekonómovia verili, že by ľudia, firmy a účastníci finančného trhu vždy tvorili svoje očakávania racionálne. Racionálne očakávania sa skôr stávajú prirodzeným orientačným bodom, kým makroekonómovia neurobia ďalší pokrok v pochopení, ako sa skutočné očakávania líšia od racionálnych.

[2]MUTH, J. F.: *Rational Expectations and the Theory of Price Movements.* Econometrica 29, p. 315–335.

2 Základný RBC model

Základný RBC model slúži v našej práci k prezentácii praktického výpočtu diferenčných systémov s racionálnymi očakávaniami pomocou prezentovaných metód riešenia.

2.1 Definícia modelu

V tejto kapitole opisujeme často využívaný model, ktorý je diskrétnym variantom Ramseyho modelu s racionálnymi očakávaniami [3].

Model popisuje ekonomiku, ktorá pozostáva z množstva identických firiem a množstva identických domácností. Nekonečne žijúce domácnosti menia svoju spotrebu a ponuku práce v čase. Ceny trhu vnímajú domácnosti a firmy ako dané. Každá z domácností musí rozdeliť svoj disponibilný čas medzi voľno l_t a prácu h_t. Súčet času venovaného práci a času normalizujme na jednotku, t. j. $l_t + h_t = 1$.

Úžitková funkcia pre reprezentatívneho člena domácnosti pre každú periódu je vyjadrená pomocou postupnosti spotreby a voľného času. Domácnosti maximalizujú svoj celoživotný očakávaný úžitok riadením svojej spotreby c_t a odpracovanému času h_t v každom čase t:

$$\max \quad \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - h_t), \qquad \text{kde } \beta \in (0,1).$$

Konštanta β predstavuje diskontný faktor. Popisuje jav, kedy domácnosti majú vyšší úžitok zo súčasnej spotreby ako zo spotreby neskoršej. Tento faktor zabezpečuje konečnú hodnotu nekonečnej sumy v účelovej funkcii. Predpokladajme, že u je spojitá funkcia diferencovateľná v oboch svojich argumentoch. Ďalej predpokladajme, že je striktne konkávna a rastúca v oboch argumentoch.

Vstupmi produkčnej funkcie modelu sú agregované premenné, kapitál K_t, práca H_t a technológia A_t, kde $K_t, H_t \geq 0$. Domácnosti ponúkajú svoj kapitál a prácu firmám, ktoré pracujú s technológiou a produkujú tak spoločne výstup Y. Predpokladajme, že agregovaná produkčná funkcia $f(K_t, H_t) : \mathbf{R}_+^{\mathbf{2}} \to \mathbf{R}$ je spojito diferencovateľná, monotónna a konkávna v oboch argumentoch osobitne. Ďalej predpokladajme, že $f(0,0) = 0$. Agregovaný výstup ekonomiky je určený produkčnou funkciou:

$$Y_t = e^{Z_t} f(K_t, H_t),$$

kde Z_t je náhodný parameter produktivity. Tento parameter je zdrojom šokov v ekonomike a tým aj jej neurčitosti. Predpokladajme, že tento náhodný parameter je tvorený autoregresným procesom 1. rádu:

$$Z_{t+1} = \rho Z_t + \varepsilon_{t+1}, \qquad \text{kde } \rho \in (0,1)$$

a ε je náhodná premenná z rozdelenia N(0,σ^2).

Výstup je rozdelený v každom čase t medzi spotrebu C a investície I:

$$Y_t = C_t + I_t.$$

Domácnosti v čase $t = 0$ disponujú počiatočným kapitálom K_0, ktorý prenajímajú firmám. Kapitál v čase $t + 1$ popisuje stavová rovnica (*law of motion*):

$$K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t = K_t + Y_t - C_t - \delta K_t.$$

Konštanta δ vyjadruje mieru amortizácie kapitálu v každej perióde. Firmy si prenajímajú kapitál a najímajú pracovnú silu od domácností. V každej perióde maximalizujú svoj zisk:

$$\max_{K_t, H_t} p_t[e^{Z_t} f(K_t, H_t) - r_t K_t - w_t H_t],$$

kde p_t vyjadruje cenu obchodovanej komodity na trhu v čase t. Práca a kapitál sú ohodnotené ich marginálnymi produktami. Reálne platy w_t a reálny úrok r_t v čase t možno vyjadriť v tvare:

$$r_t = e^{Z_t} f_K(K_t, H_t)$$
$$w_t = e^{Z_t} f_H(K_t, H_t).$$

Ak predpokladáme, že produkčná funkcia f má koštantné výnosy z rozsahu, potom v rovnováhe majú firmy zisk nulový. Domácnosti sa snažia vyriešiť zložitý problém. Snažia sa zvoliť veľkosť spotreby c_t, invetícií i_t a dĺžku pracovného času h_t v každom časovom okamihu t tak, aby maximalizovali očakávanú hodnotu svojej diskontovanej úžitkovej funkcie.

Rovnovážny stav, pri ktorom maximalizujeme úžitok domácností a zisk firiem (tzv. decentralizovaná ekonomika), nazývame trhová rovnováha. V prípade, že sa zaoberáme len maximalizáciou úžitku domácnosti bez ohľadu na firmy, hovoríme o riešení sociálneho plánovača. Prístup k riešeniu typu modelu, ktorý sme popísali vyššie, navrhli Prescott a Mehra[3]. Navrhli riešiť model decentralizovanej ekonomiky centrálnym plánovačom. Tento fakt je založený na využití dvoch fundamentálnych viet o blahobyte. Dôsledkom 1. fundamentálnej vety je, že akákoľvek alokácia trhovej rovnováhy pre popisovanú ekonomiku je Pareto optimálnou alokáciou. 2. fundamenálna veta hovorí, že pre každú Pareto optimálnu alokáciu v našom modeli existuje systém cien, ktorý s danou alokáciou tvorí trhovú rovnováhu. Teda podmienka kompetitívneho trhu, konštantné výnosy z rozsahu, homogénni agenti a absencia rušivých vplyvov (dane, peniaze) implikujú, že alokácia zdrojov dosiahnutá decentralizovanou ekonomikou bude rovnaká ako výber sociálneho plánovača.

[3]MEHRA, R., PRESCOTT, E.: *The Equity Premium: A Puzzle.* Journal of Monetary Economics 15, 2, p. 145–162.

V definícii modelu využívame agregované per capita premenné označované veľkými písmenami. V práci ďalej využívame iné per capita premenné označované malými písmenami. Veľkými písmenami sú označené premenné všeobecne známe agentami v ekonomike. Malými písmenami označujeme premenné, ktoré môžu priamo domácnosti ovplyvňovať. V rovnováhe sa tieto dva druhy premenných rovnajú. Využitie fundamentálnych viet nám umožňuje postup, v ktorom nemusíme rozlišovať tieto dva druhy premenných. Rovnosť alokácie trhovej rovnováhy a riešenia sociálneho plánovača v modeli popísanom nižšie je možné dokázať. Ďalej budeme využívať len premenné označované malými písmenami. Premenné je nutné rozlišovať v prípade modelov s poruchami (dane, peniaze).

Tvar základného RBC modelu použitého pre praktické výpočty je jednoduchý kvôli lepšej názornosti použitých spôsobov riešení. Úžitková funkcia $u(.)$ má loglineárny tvar:

$$u_t = \ln c_t + \ln(1 - h_t).$$

Riešime sociálny plánovač definovaný nasledovne:

$$\max_{\{c_j,\, h_j\}_{j=0}^{\infty}} \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\ln c_t + \ln(1 - h_t)) \tag{2.1}$$

Účtovné obmedzenia agentov:

$$\left.\begin{array}{l} c_t + i_t = y_t \\ i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t \end{array}\right\} \quad c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = y_t \tag{2.2}$$

$$y_t = e^{Z_t} k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} \tag{2.3}$$

$$Z_t = \rho Z_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \tag{2.4}$$

Produkčná funkcia je modifikovanou Cobb-Douglasovou funkciou vynásobenou náhodnou premennou. Táto funkcia má konštantné výnosy z rozsahu. Náhodná premenná Z_t produkuje šoky, ktoré menia náhodne výstup ekonomiky. Riešime model, do ktorého vstúpi jeden šok, ktorého očakávaná hodnota postupne odznieva. Agenti modelu prispôsobujú svoje správanie tomuto šoku. Ak by do modelu šok nevstúpil, systém by ostal v rovnováhe. Všetky premenné by nadobúdali svoju rovnovážnu hodnotu. Vstupom šoku do ekonomiky sa všetky premenné odchýlia od svojho rovnovážneho stavu. Podrobný popis zmeny premenných po vstupe šoku do ekonomiky uvádzame v kapitole 4.3.

2.2 Špecifikácia modelu

Do RBC modelu vstupujú mnohé parametre, ktoré charakterizujú popisovanú ekonomiku. V práci sa nezaoberáme priamo kalibráciou modelov. Využívame hodnoty parametrov, ktoré sme prebrali z práce [4]. V práci kalibrovali základný RBC model pre slovenské údaje. Kalibrácia vychádzala zo štvrťročných dát z rokov 1993–2000. Parametre použité pri výpočtoch sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke:

$\alpha = 0{,}33$	podiel kapitálu na produkcii
$\beta = 0{,}981$	diskontný faktor
$\delta = 0{,}031$	miera amortizácie kapitálu
$\rho = 0{,}95$	autokorelácia šokov
$\sigma = 0{,}007$	štandardná odchýlka šokov

Všetky koeficienty okrem koeficientu σ sú potrebné priamo pre hľadanie optimálneho riadenia. Koeficient σ je potrebný pre simuláciu priebehu premenných RBC modelu.

3 Riešenie modelov s racionálnymi očakávaniami

Riešenie diferenčných modelov s racionálnymi očakávaniami pozostáva v hľadaní zobrazenia, ktoré transformuje stavové premenné na riadiace premenné. Ekonomicky túto transformáciu možno interpretovať nasledovne. Agenti (napr. domácnosti) na základe stavových premenných (kapitálu k_t a technológie Z_t) rozhodujú o riadiacich premenných (spotrebe c_t a odpracovanom čase h_t). Vzťah medzi stavovými a riadiacimi premennými nazývame funkcia optimálneho riadenia (*desicion rules*). Metódy, ktoré sa v súčasnosti v makroekonómií používajú pre výpočet predpisu riešenia, môžeme rozdeliť do dvoch kategórií [8]. Obidve hľadajú pevný bod nejakej funkcionálnej rovnice.

Prvý prístup, Eulerova metóda, priamo vedie k predpisu optimálneho riadenia. Tento spôsob riešenia využíva nutné a postačujúce podmienky prvého rádu na definovanie operátora, ktorého definičný obor a obor hodnôt je priestor spojitých ohraničených funkcií. Operátor zobrazuje priestor funkcií sám na seba. Jeho jediný pevný bod je optimálnou riadiacou funkciou skúmanej ekonomiky. Najzložitejšou úlohou je nájsť práve spomínaný priestor funkcií. Problém je možné vyriešiť zvolením si vhodnej množiny funkcií.

Druhým prístupom je výpočet pomocou hodnotovej funkcie (*value function*). Operátor, vytvorený pre tento spôsob riešenia, zobrazuje priestor ohraničených funkcií na seba tak, že práve hodnotová funkcia je jediným pevným bodom tohto operátora. Problémom tohto spôsobu výpočtu je jeho zložitosť, ktorá nevedie, bez špecifických predpokladov, k presnému predpisu riešenia.

V nasledujúcich kapitolách podrobne popíšeme tri možné postupy riešenia diferenčných modelov s racionálnymi očakávaniami. Riešenie metódou neurčitých koeficientov (kapitola 5) a riešenie metódou podľa Blancharda a Kahna (kapitola 4) reprezentujú riešenia Eulerovou metódou. Druhý prístup k výpočtu riešenia predstavuje priame riešenie dynamickým programovaním (kapitola 6).

4 Riešenie podľa Blancharda a Kahna

Riešenie Blancharda a Kahna uverejnené v práci [6] môžeme zaradiť k Eulerovým metódam. Tento spôsob riešenia môžeme využiť aj v modeloch, v ktorých nemaximalizujeme účelovú funkciu za určitých ohraničení.

Príkladom môže byť systém s racionálnymi očakávaniami, ktorý obsahuje posunuté očakávania súčasných a budúcich premenných. Môžeme ho interpretovať ako model multiplikátorového akcelerátora (*multiplier accelerator model*). Definujeme ho nasledovne:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= C_t + I_t + G_t, && (4.1)\\
C_t &= \alpha(Y_t +_t Y_{t+1}) + \epsilon_t, \qquad \alpha > 0, && (4.2)\\
I_t &= \beta({}_tY_{t+1} -_{t-1} Y_t) + \eta_t, \qquad \beta > 0, && (4.3)
\end{aligned}
$$

kde Y_t predstavuje HDP v čase t, C_t spotrebu v čase t a I_t investície v čase t. ϵ_t a η_t sú poruchy vstupujúce do modelu.

4.1 Definícia základného systému

Všeobecný systém diferenčných rovníc s racionálnymi očakávaniami definujeme v maticovom tvare [6]:

$$
\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ {}_tP_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_t \\ P_t \end{bmatrix} + \gamma Z_t \tag{4.4}
$$

s počiatočnou podmienkou $X_{t=0} = X_0$, kde

X_t	-	$n \times 1$ vektor predeterminovaných premenných v čase t,
P_t	-	$m \times 1$ vektor nepredeterminovaných premenných v čase t,
Z_t	-	$k \times 1$ vektor exogénnych premenných,
${}_tP_{t+1}$	-	agentovo očakávanie premennej P_{t+1} pozorovanej v čase t,
A	-	matica typu $(n+m) \times (n+m)$ a
γ	-	matica typu $(n+m) \times k$; $\quad n, m, k \in \mathbf{N}$.

Podmienka
$\forall t \quad \exists \bar{Z}_t \in \mathbf{R^k}$, $\theta_t \in \mathbf{R}$ pre ktoré platí

$$
-(1+i)^{\theta_t} \bar{Z}_t \leq E[Z_{t+i}|\Omega_t] \leq (1+i)^{\theta_t} \bar{Z}_t, \ \forall i \geq 0
$$

zabezpečuje, aby exogénna premenná nerástla príliš rýchlo. Očakávania Z_{t+i} vzhľadom na Ω_t nesmú rásť viac ako exponenciálne. Túto podmienku spĺňa často používaný autoregresný proces prvého rádu $Z_t = \rho Z_{t-1} + \varepsilon_t$, kde $\rho \in (0,1)$ a $\varepsilon \sim N(0, \Sigma)$, pričom kovariančná matica $\Sigma = \operatorname{diag}\{\sigma_{11}^2, \ldots, \sigma_{kk}^2\}$.

Dôležitou otázkou je prepis riešeného modelu do požadovaného tvaru (4.4). Nie každý model je možné prepísať do tejto formy. Pre zápis modelu (4.1)–(4.3) je nutná substitúcia $X_t =_{t-1} Y_t$, z čoho vyplýva rovnosť $X_{t+1} =_t Y_{t+1}$. Model následne môžeme zapísať v tvare:

$$\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ {}_tY_{t+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{bmatrix} \beta & (1-\alpha) \\ \beta & (1-\alpha) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_t \\ \epsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix}.$$

Model má singulárnu maticu A. Tento príklad ukazuje aj absenciu nutnej spojitosti predeterminovanými a nepredeterminovanými premennými.

Medzi modely, ktoré nie je možné prepísať do požadovaného tvaru, patria modely obsahujúce minulé očakávania súčasných a minulých premenných. Jednoduchým príkladom je rovnica:

$$P_t = \alpha({}_{t-1}P_t -_{t-1} P_{t+1}) + \epsilon_t.$$

V tomto prípade nie je možné nájsť transformáciu, ktorá by umožnila zápis do tvaru (4.4).

4.2 Riešenie systému

Riešením systému diferenčných rovníc je postupnosť funkcií premenných z Ω_t, ktoré spĺňajú (4.4) pre všetky realizácie týchto premenných. Požadujeme, aby očakávania premenných X_t a P_t neexplodovali:
$\forall t \quad \exists \begin{bmatrix} \bar{X}_t \\ \bar{P}_t \end{bmatrix} \in \mathbf{R^{n+m}}, \sigma_\mathbf{t} \in \mathbf{R}$ také, že

$$-(1+i)^{\sigma_t}\begin{bmatrix} \bar{X}_t \\ \bar{P}_t \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} E[X_{t+i}|\Omega_t] \\ E[P_{t+i}|\Omega_t] \end{bmatrix} \leq (1+i)^{\sigma_t}\begin{bmatrix} \bar{X}_t \\ \bar{P}_t \end{bmatrix}, \ \forall i \geq 0.$$

Táto podmienka vnáša realitu do popisovaného modelu. Je nereálne, aby agenti modelu očakávali neprimerané hodnoty premenných.

Pre ďalšie odvodzovanie riešenia je nutné transformovať model do kánonickej formy. Matica A je transformovaná do Jordanovej kánonickej formy:

$$A = C^{-1}JC, \tag{4.5}$$

kde J je diagonálna matica tvorená vlastnými hodnotami, ktoré sú zoradené zostupne podľa svojej absolútnej hodnoty. Ďalej ju rozložíme do tvaru:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix},$$

kde J_1 je matica typu $\bar{n} \times \bar{n}$, tvorená vlastnými hodnotami vnútri jednotkového kruhu a J_2 je matica typu $\bar{m} \times \bar{m}$, tvorená vlastnými hodnotami mimo jednotkového kruhu. Na blokové matice dekomponujeme aj ostatné matice:

$$C \equiv \begin{bmatrix} C_{11}(\bar{n} \times n) & C_{12}(\bar{n} \times m) \\ C_{21}(\bar{m} \times n) & C_{22}(\bar{m} \times m) \end{bmatrix};$$

$$B \equiv C^{-1} \equiv \begin{bmatrix} B_{11}(n \times \bar{n}) & B_{12}(n \times \bar{m}) \\ B_{21}(m \times \bar{n}) & B_{22}(m \times \bar{m}) \end{bmatrix}; \qquad \gamma \equiv \begin{bmatrix} \gamma_1(\bar{n} \times k) \\ \gamma_2(\bar{m} \times k) \end{bmatrix}.$$

Predpokladajme, že matica C_{11} je plnej hodnosti, čo implikuje plnú hodnosť matice B_{11}.

Nasledujúce tvrdenia hovoria o jednoznačnosti riešenia.

Tvrdenie 1: *Nech matica B_{11} má plnú hodnosť. Pre systém (4.4) existuje jediné riešenie, ak počet vlastných hodnôt matice A mimo jednotkového kruhu je rovný počtu nepredeterminovaných premenných, t. j. $\bar{m} = m$.*

Pre tento prípad Blanchard a Kahn vo svojej práci [6] uverejňujú explicitné riešenie nášho systému lineárnych rovníc:

pre $t = 0:$ $\qquad X_t = X_0,$

pre $t > 0:$

$$X_t = B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-1} -$$

$$-(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E[Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1}], \tag{4.6}$$

pre $t \geq 0:$

$$P_t = -C_{22}^{-1}C_{21}X_t - C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E[Z_{t+i}|\Omega_t]. \tag{4.7}$$

Toto rekurzívne riešenie je možné prepísať do konečnej formy:

$$X_t = -\sum_{j=1}^{t} B_{11}J_1^{j-1}(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E[Z_{t+i-j}|\Omega_{t-j}] +$$

$$+\sum_{j=1}^{t} B_{11}J_1^{j-1}B_{11}^{-1}\gamma_1 Z_{t-j} + B_{11}J_1^{t}B_{11}^{-1}X_0, \qquad \text{pre } t > 0,$$

$$P_t = -\sum_{j=1}^{t} B_{21}J_1^{j-1}(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E[Z_{t+i-j}|\Omega_{t-j}] -$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty} C_{22}^{-1}J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E[Z_{t+i}|\Omega_t] +$$

$$+\sum_{j=1}^{t} B_{21}J_1^{j-1}B_{11}^{-1}\gamma_1 Z_{t-j} + B_{21}J_1^{t}B_{11}^{-1}X_0, \qquad \text{pre } t \geq 0.$$

Rekurzívne riešenia (4.6) a (4.7) sú vhodné pre počítačové simulácie.

Blanchard a Kahn ďalej v práci [6] uvádzajú rekurentné riešenie pre systém s dvoma premennými, z ktorých jedna je predeterminovaná a jedna nepredeterminovaná premenná. Matica A je v takom prípade typu 2×2. Nech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1(1 \times k) \\ \gamma_2(1 \times k) \end{bmatrix},$$

nech λ_1, λ_2 sú vlastné hodnoty matice A, $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$ a nech

$$\mu \equiv (\lambda_1 - a_{11})\lambda_1 - a_{12}\lambda_2.$$

Potom existuje jediné riešenie, ktoré má podľa autorov tvar:

pre $t = 0$:
$$X_t = X_0,$$

pre $t > 0$:
$$X_t = \lambda_1 X_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-1} + \mu \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_2^{-i-1} \mathrm{E}(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1}),$$

pre $t \geq 0$:
$$P_t = a_{12}^{-1}[(\lambda_1 - a_{11})X_t + \mu \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_2^{-i-1} \mathrm{E}(Z_{t+i}|\Omega_t)].$$

Pri využití tohto tvaru riešenia pre systém s maticou A typu 2×2 v numerických výpočtoch[4] sme nevypočítali správne riešenie. Po bližšej analýze sme zistili, že tento zjednodušený zápis, využívajúci len koeficienty matice A a jej vlastné hodnoty, nie je správny. Môžeme si všimnúť, že do riešenia vôbec nevstupuje konštanta γ_2. Nezhody so skutočným riešením nastali len v konštante pri člene $\mathrm{E}(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$, resp. pri $\mathrm{E}(Z_{t+i}|\Omega_t)$. Pri odvodzovaní sme využili všeobecné rekurzívne riešenie (4.6) a (4.7). Jednotlivé blokové matice B_{ij}, C_{ij}, $i, j = 1, 2$ sme nahradili výrazmi, ktoré závisia len od koeficientov matice A a jej vlastných hodnôt. Pretože vytvorenie matice C v Jordanovom kánonickom tvare nie je jednoznačné, zvolili sme jednoduchší z mnohých možných tvarov matice C. Nami odvodené riešenie pre systém s jednou predeterminovanou a jednou nepredeterminovanou premennou má tvar:

pre $t = 0$:
$$X_t = X_0,$$

pre $t > 0$:
$$X_t = \lambda_1 X_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-1} + \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{21}}(a_{21}\gamma_1 + (\lambda_2 - a_{11})\gamma_2) \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_2^{-i-1} \mathrm{E}(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1}),$$

pre $t \geq 0$:
$$P_t = \frac{1}{\lambda_2 - a_{11}}[-a_{21}X_t + (a_{21}\gamma_1 + (\lambda_2 - a_{11})\gamma_2) \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_2^{-i-1} \mathrm{E}(Z_{t+i}|\Omega_t)].$$

Tvrdenie 2: *Nech matica B_{11} má plnú hodnosť. Systém (4.4) nemá riešenie, ak počet vlastných hodnôt mimo jednotkového kruhu je väčší ako počet nepredeterminovaných premenných, t. j. $\bar{m} > m$.*

Tvrdenie 3: *Nech matica B_{11} má plnú hodnosť. Systém (4.4) má nekonečne veľa riešení, ak počet vlastných hodnôt mimo jednotkového kruhu je menší ako počet nepredeterminovaných premenných, t. j. $\bar{m} < m$.*

Ak je nami skúmaný model tvorený nutnou podmienkou pre maximalizáciu kvad-

[4]Popis výpočtov je uvedený v kapitole 4.3

ratickej funkcie s lineárnymi ohraničeniami, matica A má štruktúru, pri ktorej je podmienka $\bar{m} = m$ vždy splnená [6]. Táto podmienka je silno zviazaná s vlastnosťou sedlového bodu, ktorá sa často objavuje v kontexte s modelmi rastu. Vieme, že veľa modelov ma túto vlastnosť.

V tejto kapitole popisujeme aj dôkazy týchto viet pomocou transformácie maticou C, ktorá vystupuje v kánonickom rozklade matice A. Blanchard a Kahn v práci [6] popísali nasledujúci spôsob odvodenia jednotlivých viet o jednoznačnosti riešenia systému (4.4).

Nasledujúce transformácie sú spoločnými úpravami potrebnými pre dôkazy pre všetky spomínané vety. Uvažujme systém (4.4) v čase $t + i$ a použime operátor očakávania vzhľadom na informačnú množinu Ω_t na oboch stranách systému:

$$\begin{bmatrix} {}_tX_{t+i+1} \\ {}_tP_{t+i+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} {}_tX_{t+i} \\ {}_tP_{t+i} \end{bmatrix} + \gamma \, {}_tZ_{t+i}, \qquad \forall i \geq 0. \tag{4.8}$$

Zaveďme transformáciu, v ktorej matica C je matica definovaná pri rozložení matice A do kánonickej formy (4.5):

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Q_t \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} X_t \\ P_t \end{bmatrix}.$$

Vynásobením vzťahu (4.8) maticou C a využitím kánonického rozkladu matice A (4.5) získame systém:

$$\begin{bmatrix} {}_tY_{t+i+1} \\ {}_tQ_{t+i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_tY_{t+i} \\ {}_tQ_{t+i} \end{bmatrix} + C \, \gamma \, {}_tZ_{t+i}, \qquad \forall i \geq 0. \tag{4.9}$$

Invertovateľnosťou matice C je zabezpečené to, že informácia o X_t a P_t je ekvivalentná s informáciou o Y_t a Q_t. Aj existencia resp. jednoznačnosť riešenia systému (4.9) je ekvivalentná s existenciou resp. jednoznačnosťou riešenia systému (4.8). Táto transformácia nemá vplyv na informačnú množinu Ω_t. Systém (4.9) je možné rozložiť na dva subsystémy. Prvých $\bar{n}$ riadkov tvorí subsystém:

$${}_tY_{t+i+1} = J_1 \, {}_tY_{t+i} + (C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2) \, {}_tZ_{t+i}, \qquad \forall i \geq 0 \tag{4.10}$$

Ďalších $\bar{m}$ riadkov tvorí subsystém:

$${}_tQ_{t+i+1} = J_2 \, {}_tQ_{t+i} + (C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2) \, {}_tZ_{t+i}, \qquad \forall i \geq 0.$$

Z konštrukcie prvého subsystému vyplýva, že je stabilný (diagonálne prvky matice J_1 sú vnútri jednotkového kruhu). Druhý subsystém by naopak nekonečne rástol, ak by nebola splnená podmienka, ktorá jednoznačne určuje premennú Q_t:

$$Q_t = -\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1} (C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2) \, {}_tZ_{t+i}. \tag{4.11}$$

Preto existencia a jednoznačnosť riešení závisí na existencii a jednoznačnosti postupnosti Y_t. Riešenie Y_t musí spĺňať (4.10) a vzťah:

$$\begin{bmatrix} X_t \\ P_t \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} Y_t \\ Q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ Q_t \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Ak vyjadríme prvých n riadkov rovnice (4.12) v čase $t = 0$ získavame vzťah:

$$X_0 = B_{11}Y_0 + B_{12}Q_0. \tag{4.13}$$

Odpočítaním očakávaných hodnôt v čase t prvých n riadkov rovnice (4.12) od skutočných hodnôt rovnakých riadkov určíme vzťah:

$$X_{t+1} -_t X_{t+1} = B_{11}(Y_{t+1} -_t Y_{t+1}) + B_{12}(Q_{t+1} -_t Q_{t+1}).$$

Pretože premenná X_t je predeterminovaná, platí $X_{t+1} =_t X_{t+1}$ a preto:

$$0 = B_{11}(Y_{t+1} -_t Y_{t+1}) + B_{12}(Q_{t+1} -_t Q_{t+1}). \tag{4.14}$$

Teraz pristúpime priamo k dôkazom viet o existencii riešenia.

Dôkaz tvrdenia 1:

Predpokladajme plnú hodnosť matice B_{11}. To je ekvivalentné s plnou hodnosťou matice C_{22}. Ak $\bar{m} = m$, potom existuje inverzná matica B_{11}^{-1}. Hodnota Q_0 je určená z (4.11). Zo vzťahu (4.13) je následne jednoznačne určené aj Y_0. Z (4.10) určíme ${}_0Y_1$ a Y_1 je určené zo vzťahu (4.14). Rekurzívne získame celé riešenie systému. Pomocou spätnej tranformácie maticou C^{-1} môžeme získať riešenie v premenných X_t a P_t. □

Dôkaz tvrdenia 2:

Ak $\bar{m} > m$, matica B_{11} vytvára viac ako $\bar{n}$ reštrikcií na premennú Y_0 vo vzťahu (4.13). Tým je tento vzťah preurčený a preto nemá vo väčšine prípadov žiadne riešenie. Ak nastane prípad, že Y_0 neexistuje, potom neexistuje ani P_0. □

Dôkaz tvrdenia 3:

V prípade ak $\bar{m} < m$, vzťah (4.13) je nedostatočne určený. Zo vzťahu (4.14) vyplýva, že nie je jednoznačne určená premenná Y_t pri danom ${}_tY_{t+1}$. Vo všeobecnosti $Y_{t+1} =_t Y_{t+1} + W_{t+1}$, kde W_{t+1} je náhodná premenná taká, že pre ňu platí:

$$W_{t+1} \in \Omega_{t+1}; \qquad {}_{t-j}W_{t+1} = 0 \quad \forall j \geq 0; \qquad B_{11}W_t = B_{12}({}_{t-1}Q_t - Q_t). \tag{4.15}$$

Pretože B_{11} nie je invertovateľná, náhodná premenná W_t môže zahŕňať aj premenné iné ako Z_t. Preto všeobecné riešenie je (4.11) pre Q_0 a

$$Y_t = J_1Y_{t-1} + (C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)Z_{t-1} + W_t,$$

kde W_t spĺňa podmienky (4.15) a Y_0 spĺňa (4.13). Riešenie v základných premenných môžeme získať opäť transformáciou cez maticu C^{-1}. □

4.3 Riešenie RBC modelu

V nasledujúcej kapitole riešime základný RBC model prezentovaný v kapitole 2. Dôležitou a najzložitejšou časťou výpočtu je transformácia zadaného systému do tvaru, pre ktorý je riešenie odvodené. Skúmaný model je nelineárny a nejde priamo o diferenčný systém s racionálnymi očakávaniami. Maximalizujeme v ňom úžitkovú funkciu (2.1) za podmienok (2.2), (2.3) a (2.4). Stavovou premennou systému je premenná kapitálu k_t, premenná Z_t je exogénnou premennou a riadiacimi premennými sú spotreba c_t a odpracovaný čas h_t.

Problém vyriešime nájdením extrému úžitkovej funkcie (2.1) viazanej na podmienku (2.2). Domácnosti maximalizujú svoj očakávaný celoživotný úžitok. Nutnými podmienkami pre extrém sú Eulerove rovnice. Tie majú tvar:

1. Eulerova rovnica:

$$\frac{1}{c_t} = \beta \mathrm{E}_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} (1 + \alpha \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} - \delta) \right] \tag{4.16}$$

2. Eulerova rovnica:

$$\frac{1}{1-h_t} = \frac{(1-\alpha) y_t}{c_t h_t} \tag{4.17}$$

4.3.1 Loglinearizácia RBC modelu

Obe Eulerove rovnice sú nelineárne a preto ich pred riešením metódou podľa Blancharda a Kahna musíme linearizovať. Použijeme tzv. loglinearizáciu okolo rovnovážneho bodu. Eulerove rovnice spolu s (2.2), (2.3) a (2.4) hľadajú rovnovážny bod $(\bar{k}, \bar{Z}, \bar{c}, \bar{h}, \bar{y}, \bar{r}, \bar{w})$ systému. Rovnovážne stavy všetkých premenných sú konštantné:

$$\bar{r} = \frac{1}{\beta} + \delta - 1 = M$$

$$\bar{h} = \frac{(1-\alpha) M}{\alpha (2M/\alpha - M - \delta)}$$

$$\bar{k} = \left[\frac{M}{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha - 1}} \bar{h}$$

$$\bar{c} = (1-\alpha) \bar{k}^{\alpha} \bar{h}^{-\alpha} (1 - \bar{h})$$

$$\bar{y} = e^{\bar{Z}} \bar{k}^{\alpha} \bar{h}^{1-\alpha}, \qquad \text{kde } \bar{Z} = 0$$

$$\bar{w} = (1-\alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{h}}.$$

Premenné r_t, w_t, y_t je možné zo systému jednoducho eliminovať. Premenné k_t, Z_t, c_t a h_t transformujeme na nové premenné s vlnkou. Táto transformácia predstavuje už spomínanú loglinearizáciu. Nové transformované premenné vyjadrujú percentuálnu zmenu zadaných premenných od ich rovnovážneho stavu. Transformácia vyzerá nasledovne:

$$\tilde{x}_t \equiv \ln x_t - \ln \bar{x} = \ln \frac{x_t}{\bar{x}} \approx \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}.$$

Ak substituujeme $e^{Z_t} = A_t$, potom $Z_t - \bar{Z} = \tilde{A}_t$. V ďalšom kroku lineárne aproximujeme pomocou týchto pomocných premenných Eulerove rovnice a stavovú rovnicu (2.2). Získame lineárny tvar 2. Eulerovej rovnice (4.17):

$$\tilde{c}_t + \left(\frac{\bar{h}}{1-\bar{h}} + \alpha\right)\tilde{h}_t = \tilde{A}_t + \alpha\tilde{k}_t. \tag{4.18}$$

Pri úprave 1. eulerovej rovnice definujme:

$$\tilde{b}_{t+1} = \ln\frac{1 + r_{t+1} - \delta}{c_{t+1}} - \ln\frac{1 + \bar{r} - \delta}{\bar{c}}.$$

Z tohto následne:

$$\tilde{b}_{t+1} = (1-\alpha)\frac{\bar{r}}{1+\bar{r}-\delta}\left[-\tilde{k}_{t+1} + \tilde{h}_{t+1} + \frac{1}{1-\alpha}\tilde{A}_{t+1}\right] - \tilde{c}_{t+1}.$$

Použitím vlastnosti, že $\ln \mathrm{E}_t e^{\tilde{b}_{t+1}} = \mathrm{E}_t\tilde{b}_{t+1}$ (platí pre $\tilde{b}_t$ normálne rozdelené[5]), získame lineárny tvar 1. Eulerovej rovnice (4.16):

$$-\tilde{c}_t = \mathrm{E}_t\tilde{b}_{t+1}. \tag{4.19}$$

Pre očakávanú hodnotu v čase t relatívnej hodnoty technologického pokroku $\tilde{A}_t$ platí:

$$\mathrm{E}_t\tilde{A}_{t+1} = \rho\tilde{A}_t. \tag{4.20}$$

4.3.2 Riešenie loglinearizovaného RBC modelu

V linearizovanom RBC modeli je ďalej nutné redukovať jednu riadiacu premennú a to $\tilde{c}_t$ pomocou linearizovanej 2. Eulerovej rovnice (4.18). Z linearizovanej stavovej rovnice:

$$\tilde{k}_{t+1} = (1+\bar{r}-\delta)\tilde{k}_t + \frac{(1-\alpha)\bar{y}}{\bar{k}}\tilde{h}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_t + \frac{\bar{y}}{\bar{k}}\tilde{A}_t \tag{4.21}$$

a linearizovaných Eulerových rovníc modelu (4.18), (4.19) a vzťahu (4.20) dostávame potrebný tvar diferenčného systému:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{k}_{t+1} \\ {}_t\tilde{h}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{h}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}\tilde{A}_t. \tag{4.22}$$

[5]Táto vlastnosť je podrobnejšie popísaná v [3] v poznámke na str. 167.

Jednotlivé konštanty majú tvar:

$D_{11} = 1 - \delta + \bar{r} - \alpha\frac{\bar{c}}{\bar{k}} = K1$ $\qquad$ $D_{12} = (1-\alpha)\frac{\bar{y}}{\bar{k}} + \frac{\bar{c}(\alpha + \frac{\bar{h}}{1-\bar{h}})}{\bar{k}} = H1$

$D_{21} = -\alpha + M\,K1 + \alpha\,K1$ $\qquad$ $D_{22} = \alpha + \frac{\bar{h}}{1-\bar{h}} + M\,H1 + \alpha\,H1$

$E_{11} = 1$ $\qquad$ $E_{22} = M + \alpha + \frac{\bar{h}}{1-\bar{h}}$

$G_1 = -\frac{\bar{c}}{\bar{k}} + \frac{\bar{y}}{\bar{k}} = A1$ $\qquad$ $G_2 = -1 + M\,A1 - M\,\rho/(1-\alpha) + \rho + \alpha\,A1$

pričom $M = \frac{\bar{r}(1-\alpha)}{1+\bar{r}-\delta}$. Maticu na ľavej strane systému (4.22) prenásobíme jej inverznou maticou a tým získame systém (4.4), pre ktorý je odvodené riešenie. Pre výpočet jednotlivých hodnôt riešenia $\tilde{k}_t$ a $\tilde{h}_t$ sme zvolili rekurentný vzorec riešenia. Využívame pritom vzťah:

$$\mathrm{E}[\tilde{A}_{t+i}|\Omega_t] = \rho^i \tilde{A}_t.$$

Získavame rekurentné riešenie:

$$\tilde{k}_t = 0.933266\tilde{k}_{t-1} - 0.433579\tilde{A}_{t-1},$$

$$\tilde{h}_t = -0.187868\tilde{k}_t + 0.459374\tilde{A}_t.$$

Z hodnôt $\tilde{k}_t$ a $\tilde{h}_t$ sme vypočítali hodnoty $\tilde{c}_t$ z linearizovanej 2. Eulerovej rovnice (4.18). Riešenie je možné prepísať do tvaru:

$$\tilde{c}_t = 0.549949\tilde{k}_t + 0.462182\tilde{A}_t,$$

$$\tilde{h}_t = -0.187868\tilde{k}_t + 0.459374\tilde{A}_t.$$

Získali sme tak predpis pre optimálne riadenie v premenných s vlnkou. Optimálnym riadením je lineárna funkcia stavových (predeterminovaných) premenných. Na základe počiatočných hodnôt stavových premenných je možné vypočítať optimálne riadenie v danom čase. Spätnou transformáciou $x = \tilde{x}\bar{x} + \bar{x}$ získame priebeh stavových a riadiacich premenných v absolútnych hodnotách.

Podľa tvrdenia 1 má riešená úloha jediné riešenie, pretože počet vlastných hodnôt mimo jednotkového kruhu je rovný počtu nepredeterminovaných premenných. Počet nepredeterminovaných v našom prípade je 1 (premenná $\tilde{h}_t$) a vlastné hodnoty matice A sú 1,09226 a 0,933266.

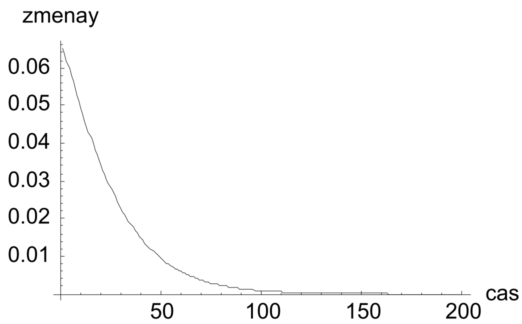
4.3.3 Kvantitatívna analýza RBC modelu

Funkcia optimálneho riadenia je lineárna funkcia stavových premenných. Samotná funkcia nám o správaní sa ekonomiky po vstupe nečakaného technologického šoku veľa nepovie. Dobrú názornú pomoc nám poskytuje impulse-response funkcia (IRF). Táto funkcia popisuje reakciu najdôležitejších makroekonomických ukazovateľov na jeden náhodný technologický šok. V analýze sa zameriavame na základné premenné RBC modelu.

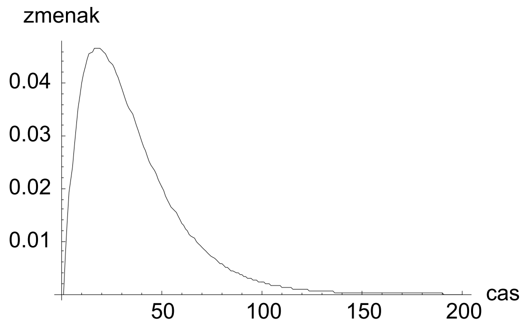
Počiatočný šok Z_0 sme zvolili na úrovni $0,05$, t. j. $\tilde{A}_0 = Z_0 - \bar{Z} = 0,05$. Počiatočnou hodnotou kapitálu k_0 je jeho rovnovážny stav, t. j. $\tilde{k}_t = 0$. Porovnaním maximálnych odchýlok od rovnovážneho stavu, získavame náhľad na priebeh ukazovateľov ekonomiky. Nasledujúca tabuľka prezentuje maximálnu percentuálnu zmenu pozorovaných premenných od rovnovážneho stavu:

y	6.5389 %
k	4.67109 %
c	3.69424 %
h	2.29687 %
i	23.1277 %

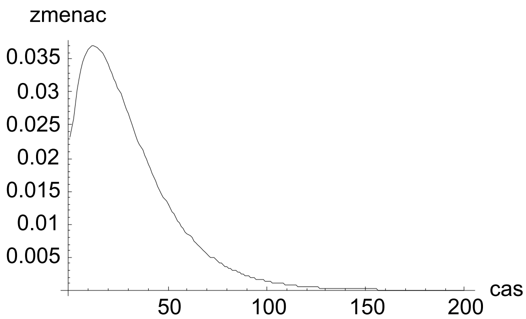
Najväčšiu zmenu pri nečakanom šoku zaznamenávajú investície. Maximálna zmena od rovnovážneho stavu investícii je až 23,13 %. Pomocou nasledujúcich grafov, ktoré znázorňujú priebeh premenných s vlnkou, bližšie približujeme priebeh každej zo spomínaných premenných. Investície a odracovaný čas klesajú prudko. Pri týchto ukazovateľoch môžeme pozorovať zápornú odchýlku od rovnovážneho stavu. Kapitál a spotreba domácností rastú a po dosiahnutí určitej hladiny postupne klesajú k rovnovážnemu stavu. Produkcia po vstupe šoku okamžite rastie a potom zaznamenávame už len jej pokles.



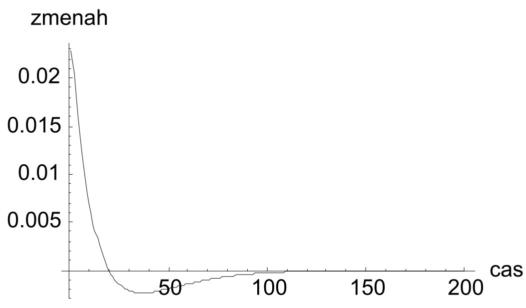
Obr. 1: Priebeh premennej $\tilde{y}_t$



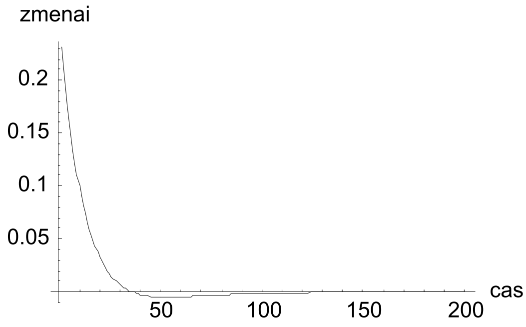
Obr. 2: Priebeh premennej $\tilde{k}_t$



Obr. 3: Priebeh premennej $\tilde{c}_t$

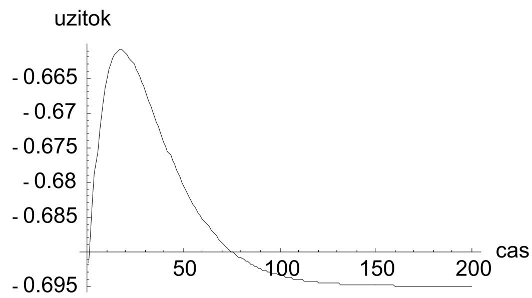


Obr. 4: Priebeh premennej $\tilde{h}_t$



Obr. 5: Priebeh premennej $\tilde{i}_t$

Nahliadnime teraz do javov, ktoré začínajú prebiehať po vstupe pozitívne technologického šoku. Zmena spôsobená šokom sa najprv prejaví na produkcii y_t. Produkcia vplyvom pozitívneho šoku vzrastie. Domácnosti sa snažia následne maximalizovať hodnotu svojej úžitkovej funkcie. Zvolia si výšku spotreby c_t a odpracovaný čas h_t. Dôsledkom zvýšenia miezd venujú viac času práci a nie voľnému času. Zvyšujú svoju spotrebu. Ako môžeme vidieť na obr. 6, úžitok domácností v jednotlivých periódach rastie.



Obr. 6: Vývoj hodnôt úžitkovej funkcie domácností $\ln c_t + \ln(1 - h_t)$ v čase.

Zvyšovaním objemu investícií i_t sa zvyšuje objem kapitálu k_t v ekonomike. Ten sa postupne akumuluje. Investície zároveň prudko klesajú. Šok postupne „odznieva“, ekonomika sa postupne dostáva do pôvodnej rovnovážnej hladiny.

Ekonomika po zaznamenaní pozitívneho technologického šoku zaznamená len krátkodobé zlepšenie a opätovne sa vracia do svojho rovnovážneho stavu. Hoci investície zaznamenávajú po šoku najvyššiu pozitívnu zmenu, práve investície najrýchlejšie klesajú do svojej rovnovážnej hodnoty.

5 Riešenie metódou neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov hľadá priamo tvar funkcie optimálneho riadenia. Predpokladáme tvar riešenia v lineárnom tvare s neznámymi koeficientami. Našou úlohou je nájsť predpis pre hľadané koeficienty a tým určiť optimálne riadenie.

5.1 Definícia základného systému

Systém s racionálnymi očakávaniami riešený metódou neurčitých koeficientov vyjadríme v tvare:

$$\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ {}_tP_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_t \\ P_t \end{bmatrix} + \gamma Z_t \tag{5.1}$$

$$Z_t = \rho Z_{t-1} + \epsilon_t \tag{5.2}$$

s počiatočnou podmienkou $X_{t=0} = X_0$, kde

P_t - $n \times 1$ vektor nepredeterminovaných premenných v čase t,
X_t - $m \times 1$ vektor predeterminovaných premenných v čase t,
${}_tP_{t+1}$ - agentovo očakávanie premennej P_{t+1} pozorovanej v čase t,
Z_t - $k \times 1$ vektor exogenných premenných,
γ - $(n+m) \times n$ konštantná matica,
A - $(n+m) \times (n+m)$ konštantná matica a
ϵ_t - $k \times 1$ je vektor bieleho šumu[6].

Zadanie tohto modelu nemá všeobecne zadanú exogénnu premennú, ako je to v riešení podľa Blancharda a Kahna. Rovnica (5.2) predstavuje autoregresný proces prvého rádu. Toto špecifické zadanie exogénnej premennej zjednodušuje odvodzovanie riešenia pomocou tejto metódy.

5.2 Riešenie systému

Hlavnou myšlienkou tohto spôsobu riešenia je predpoklad o tvare riešenia. Predpokladajme riešenie v tvare [7]:

$$P_t = \Phi X_t + \Gamma Z_t \tag{5.3}$$

$$X_{t+1} = \Pi_1 X_t + \Pi_2 Z_t \tag{5.4}$$

Matice Φ, Γ, Π_1 a Π_2 sú reálne. Tieto matice tvoria neurčité koeficienty riešenia. Nasledujúcim odvodením získavame vzorce pre jednotlivé koeficienty a tým aj hľadané riešenie systému.

Ak vzťah (5.3) vyjadríme vzhľadom na čas $t+1$ a následne použijeme operátor očakávania vzhľadom na informačnú množinu Ω_t získame:

$${}_tP_{t+1} = \Phi \, {}_tX_{t+1} + \Gamma \, {}_tZ_{t+1} = \Phi(\Pi_1 X_t + \Pi_2 Z_t) + \Gamma \rho Z_t. \tag{5.5}$$

[6] Vektor náhodných premenných z rozdelenia $N(0, \Sigma)$, kde $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_{11}^2, \ldots \sigma_{kk}^2\}$.

Ďalej substituujeme (5.5), (5.3) a (5.4) do zadania systému (5.1) a (5.2). Z maticového zápisu výsledných koeficientov pri vektore X_t získame rovnosť súčinu blokových matíc:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi\Pi_1 \\ \Pi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \Phi \end{bmatrix}, \tag{5.6}$$

kde I je jednotková matica požadovaného rozmeru. Pre koeficienty pri vektore Z_t platí:

$$\Phi\Pi_2 + \Gamma\rho = A_{22}\Gamma + \gamma_2 \tag{5.7}$$

$$\Pi_2 = A_{12}\Gamma + \gamma_1. \tag{5.8}$$

Označme štvorcové matice vo vzťahu (5.6) $M(M$ je jednotková matica) a N (matica napravo). Predpokladajme, že $|N - \lambda M|$ je nenulové pre nejaké komplexné číslo λ. Podľa [7] všeobecná Schurova dekompozičná teoréma garantuje existenciu unitárnych matíc Q a Z, takže $QMZ = S$ a $QNZ = T$, kde S a T sú trojuholníkové matice. Predpokladajme, že pomery vlastných hodnôt t_{ii}/s_{ii} sú usporiadané zostupne. Táto vlastnosť nám zabezpečí možnosť jednoduchšieho vyjadrenia neznámych koeficientov.

Prenásobením vzťahu (5.6) maticou Q a zo vzťahov $QM = SH$, $QN = TH$ a $H \equiv Z^{-1}$ získavame vzťah:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi\Pi_1 \\ \Pi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

Následne je možné vyjadriť hľadaný parameter Φ (pretože $HZ = I$) z prvej rovnice v blokovom tvare:

$$\Phi = -H_{11}^{-1}H_{12} = Z_{12}Z_{22}^{-1}.$$

Riešenie je podmienené existenciou inverznej matice Z_{22}^{-1}.

Podobným postupom získame aj koeficient Π_1 za predpokladu existencie inverznej matice S_{22}^{-1}:

$$\Pi_1 = Z_{22}S_{22}^{-1}T_{22}Z_{22}^{-1}.$$

Neznáme koeficienty Γ a Π_2 získame kombináciou predchádzajúcich predpisov pre Φ a Π_1 so vzťahmi (5.7) a (5.8). Výsledná rovnica má tvar:

$$G\Gamma + \Gamma\rho = F,$$

kde $G \equiv \Phi A_{12} - A_{11}$ a $F \equiv \gamma_2 - \Phi\gamma_1$. Ďalšie riešenie Γ načrtáva vo svojej práci McCallum[7]. Túto rovnicu je možné riešiť numericky. Ako posledný získavame koeficient Π_2 zo vzťahu (5.8).

[7]MCCALLUM, B. T. : *On non-uniqueness in rational expectations models: An attempt at perspective.* Journal of Monetary economics 11, 1983, p. 139-168.

5.3 Kritériá riešiteľnosti

Podľa [7] rôzne hodnoty parametra Φ a tým následne aj rôzne riešenia systému môžme získať rôznym usporiadaním vlastných hodnôt t_{ii}/s_{ii}. Blanchard a Kahn zoraďujú tieto hodnoty podľa klesajúcej absolútnej hodnoty týchto hodnôt a odvodili, že jediné riešenie získavame práve vtedy a len vtedy, ak počet čísel s absolútnou hodnotou menšou ako jedna sa rovná počtu predeterminovaných premenných X_t (veta 1 v kapitole 4).

5.4 Riešenie RBC modelu

Doteraz sme všeobecne popísali teoreticky metódu neurčitých koeficientov. V tejto časti práce prakticky vypočítame RBC model, ktorý je v popísaný Eulerovými rovnicami a následne linearizovaný v kapitole 4.3. Aj pri tomto spôsobe riešenia si ako riadiace premenné zvolíme spotrebu c_t a odpracovaný čas h_t. Stavovými premennými sú kapitál k_t a exogénna premenná Z_t.

Pri riešení nevyužívame maticové zápisy teoretického odvodenia metódy v kapitole 5.1. Zadaný model nie je rozsiahly, preto využívame len postup odvodenia riešenia. Ako sme už uviedli, základom metódy neurčitých koeficientov je predpoklad o tvare riešenia skúmaného modelu. Predpokladajme tvar:

$$\tilde{h}_t = a_{HK}\tilde{k}_t + a_{HA}\tilde{A}_t \tag{5.9}$$

$$\tilde{c}_t = a_{CK}\tilde{k}_t + a_{CA}\tilde{A}_t \tag{5.10}$$

kde a_{HK}, a_{HA}, a_{CK} a a_{CA} sú neznáme koeficienty. Po ich nájdení získame riešenie v premenných s vlnkou. Riešenie v zadaných premenných je možné získať jednoduchou spätnou transformáciu.

Linearizované Eulerove rovnice (4.19) a (4.18) spolu s linearizovanou rovnicou (4.21), s predpisom riešenia (5.9), (5.10) a s vlastnosťou exogénnej premennej (4.20) vytvoria lineárny systém dvoch rovníc s premennými $\tilde{k}_t$ a $\tilde{A}_t$:

$$(a_{CK} + \frac{\bar{h}}{1-\bar{h}}\, a_{HK})\tilde{k}_t + (a_{CA} + \frac{\bar{h}}{1-\bar{h}}\, a_{HA})\tilde{A}_t = (\alpha - \alpha\, a_{HK})\tilde{k}_t + (1 - \alpha\, a_{HA})\tilde{A}_t,$$

$$-(a_{CK}\tilde{k}_t + a_{CA}\tilde{A}_t)/K = (-1 + a_{HK} - \frac{a_{CK}}{K})[(1 - \delta + \bar{r} + \frac{(1-\alpha)\bar{y}\, a_{HK}}{\bar{k}} - \frac{\bar{c}\, a_{CK}}{\bar{k}})\tilde{k}_t +$$
$$+(\frac{(1-\alpha)\bar{y}\, a_{HA}}{\bar{k}} - \frac{\bar{c}\, a_{CA}}{\bar{k}} + \frac{\bar{y}}{\bar{k}} + \rho(a_{HA} + \frac{1}{1-\alpha} - \frac{a_{CA}}{K}))\tilde{A}_t],$$

kde $K = \frac{(1-\alpha)\bar{r}}{1+\bar{r}-\delta}$. Obe strany rovníc sú lineárne funkcie týchto premenných s neznámymi koeficientami. Porovnaním korešpondujúcich koeficientov v tomto systéme získavame 4 rovnice so 4 neznámymi koeficientami a_{HK}, a_{HA}, a_{CK} a a_{CA}. Vyriešením tohto systému rovníc dostávame predpis pre optimálne riadenie:

$$\tilde{c}_t = 0.549949\tilde{k}_t + 0.462182\tilde{A}_t,$$

$$\tilde{h}_t = -0.187868\tilde{k}_t + 0.459374\tilde{A}_t.$$

Po zadaní počiatočných hodnôt $\tilde{A}_0$ a $\tilde{k}_0$ z rovníc (5.9) a (5.10) a z linearizovanej stavovej rovnice (4.21) dostávame priebeh riešenia v premenných s vlnkou. Spätnou transformáciou $x = \tilde{x}\bar{x} + \bar{x}$ môžeme získať riešenie v premenných bez vlnky.

Optimálne riadenie, ktoré získavame riešením metódou neurčitých koeficientov je rovnaké s riešením, ktoré sme získali metódou Blancharda a Kahna.

6 Riešenie dynamickým programovaním

Metóda riešenia dynamickým programovaním sa líši od riešení popísaných v predchádzajúcich kapitolách. Tento spôsob riešenia využíva hodnotovú funkciu. Pri hľadaní optimálneho riadenia je potrebné numerické riešenie na počítači.

6.1 Definícia základného systému

Na úvod predstavíme základy dynamického programovania. V ekonomickej teórii riešime najčastejšie úlohu na nekonečnom časovom horizonte, t. j. maximalizujeme (alebo minimalizujeme) účelovú funkciu s diskontným koeficientom [9]:

$$\max_{\{P_j\}_{j=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(X_t, P_t), \tag{6.1}$$

s počiatočnou podmienkou $X_{t=0} = X_0$, kde
X_t - $n \times 1$ vektor stavových premenných v čase t,
P_t - $m \times 1$ vektor riadiacich premenných v čase t a
β - diskontný faktor $\beta \in (0, 1)$.

Diskontný koeficient zaručuje, že maximálna hodnota účelovej funkcie je konečná. Úlohou je nájsť nekonečnú postupnosť riadení $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$. Ďalej je úloha daná stavovou diferenčnou funkciou (*law of motion*):

$$X_{t+1} = F(X_t, P_t), \qquad t \geq 0 \tag{6.2}$$

s počiatočným X_0 daným. Funkcie r a F sa nemenia v čase, preto tejto úlohe hovoríme autonómna úloha na nekonečnom časovom horizonte. Predpokladáme, že funkcia r je konkávna funkcia a množina $\chi = \{(X_{t+1}, X_t) : X_{t+1} \leq F(X_t, P_t), P_t \in \mathbf{R^m}\}$ je konvexná a kompaktná. Dynamické programovanie hľadá funkciu
$D : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$, t. j. optimálne riadenie nezávislé od času, ktorá zobrazuje stavové premenné X_t na riadiace premenné P_t.

Pojem hodnotová funkcia $V(X)$ vyjadruje optimálnu hodnotu pôvodnej maximalizačnej úlohy pri ľubovoľnej počiatočnej podmienke $X \in \chi$. Definujme

$$V(X_o) = \max_{\{P_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(X_t, P_t)$$

za podmienky (6.2) a s X_0 daným. Hľadanie nekonečnej postupnosti riadení, ktoré sú riešením systému (6.1)–(6.2), zameníme za postupné hľadanie optimálnej hodnoty $V(x)$ a optimálneho riadenia D, ktoré riešia nekonečný počet maximalizačných úloh:

$$V(X_t) = \max_{P_t} \{r(X_t, P_t) + \beta V(F(X_t, P_t))\}, \qquad t \geq 0$$

pre každú hodnotu vektora X_t. Túto rovnicu nazývame Bellmanova rovnica dynamického programovania. Pre úlohu na nekonečnom časovom horizonte je táto rovnica len nutnou podmienkou optimality. Optimálnou hodnotou rovnice je práve optimálne riadenie $D(X_t)$ a pre každý vektor X_t spĺňa:

$$V(X_t) = r(X_t, D(X_t)) + \beta V(F(X_t, D(X_t))), \qquad t \geq 0.$$

Ide o funkcionálnu rovnicu s neznámymi funkciami $D(x)$ a $V(x)$, ktorú môžeme riešiť rôznymi metódami. Tie závisia najmä na tvare funkcie r a F.

Vráťme sa k riešeniu maximalizačnej úlohy s racionálnymi očakávaniami. Táto úloha stochastického dynamického programovania je modifikáciou úlohy (6.1) s podmienkou (6.2). Definujme ju v tvare:

$$\max_{\{P_t\}_{t=0}^{\infty}} \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(X_t, Z_t, P_t), \qquad \text{kde } \beta \in (0,1)$$

pričom Z_t je $k \times 1$ vektor stavových exogénnych premenných. Tieto premenné nezávisia od ostatných typov premenných systému. Diferenčné rovnice popisujúce vývoj vektora exogénnych premenných a stavových premenných definujeme nasledovne:

$$X_{t+1} = F(X_t, Z_t, P_t), \qquad t \geq 0$$

$$Z_{t+1} = A(Z_t) + \varepsilon_{t+1}, \qquad t \geq 0$$

s počiatočným X_0 a Z_0 daným. ε je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných (rozmeru $k \times 1$) so strednou hodnotou rovnou 0 a konečnou kovariančnou maticou $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_{11}^2, \sigma_{22}^2, \ldots, \sigma_{kk}^2\}$. Všetky ostatné vlastnosti, platné pre funkciu r a množinu stavových premenných, sú rovnaké ako v prvotnom probléme (6.1)–(6.2) bez racionálnych očakávaní. Neurčitosť systému sa prejavuje v diferenčnej rovnici s náhodnou premennou. Táto úloha s neurčitosťou sa od úlohy (6.1)–(6.2) líši v tom, že v tejto stochastickej úlohe maximalizujeme očakávanú a nie skutočnú hodnotu účelovej funkcie.

Bellmanova rovnica stochastického dynamického programovania má v tomto prípade tvar:

$$V(X_t, Z_t) = \max_{P_t}\{r(X_t, Z_t, P_t) + \beta \mathrm{E}[V(F(X_t, Z_t, P_t), A(Z_t) + \varepsilon_{t+1}) | \Omega_t]\}, \qquad t \geq 0. \tag{6.3}$$

Ω_t predstavuje už definovanú informačnú množinu, obsahujúcu všetky premenné známe do času t vrátane.

Pri určitých predpokladoch optimálna hodnotová funkcia pre problém (6.3) je rovnaká pre akúkoľvek kovariančnú maticu Σ pre ε. Z toho vyplýva, že aj optimálne riadenie je nezávislé od kovariančnej matice Σ. Táto vlastnosť je splnená, ak predpokladáme, že účelová funkcia je kvadratická a stavové rovnice sú lineárne. To nám umožňuje riešiť problém dynamického programovania s racionálnymi očakávaniami bez použitia operátora očakávania. Riešime preto problém bez neurčitosti, kde kovariančná matica Σ je rovná nulovej matici. Náhodná premenná je nahradená svojou strednou hodnotou, v našom prípade nulou. Túto dôležitú vlastnosť popíšeme a zdôvodníme neskôr v nasledujúcej kapitole.

6.2 Riešenie systému

Pristúpme k riešeniu funkcionálnej rovnice:

$$V(X_t, Z_t) = \max_{P_t}\{r(X_t, Z_t, P_t) + \beta V(F(X_t, Z_t, P_t), A(Z_t))\}.$$

Urobme špecifický predpoklad o tvare funkcie r, F a A. Predpokladajme, že funkcia r je kvadratická a funkcie F a A sú lineárne. Tento predpoklad nám zabezpečí prijateľný tvar optimálneho riadenia a optimálnej hodnotovej funkcie. Pri týchto podmienkach je optimálne riadenie lineárnou funkciou stavových premenných a hodnotová funkcia je kvadratická. Takto špecifikovanému problému hovoríme lineárno-kvadratický problém dynamického programovania (LQ problém).

Pre jednoduchosť sa najprv zaoberajme úlohou bez diskontovania. Predpokladajme kvadratickosť účelovej funkcie a lineárnosť stavovej rovnice. Riešime teda autonómnu LQ úlohu na nekonečnom časovom horizonte:

$$\max_{\{P_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty}\{X_t^T Q X_t + P_t^T R P_t\}$$

so stavovou rovnicou $X_{t+1} = AX_t + BP_t$ s X_0 daným. Matica Q je záporne semidefinitná a symetrická. Matica R je záporne definitná symetrická. Predpokladajme, že hodnotová funkcia je kvadratická, t. j. $V(X) = X^T W X$, kde W je záporne semidefinitná symetrická matica. Substituovaním stavovej rovnice do Bellmanovej rovnice dynamického programovania získavame rovnicu:

$$V(X_t) = X_t^T W X_t = \max_{P_t}\{X_t^T Q X_t + P_t^T R P_t + (AX_t + BP_t)^T W (AX_t + BP_t)\}. \quad (6.4)$$

Nutná podmienka 1. rádu pre maximalizáciu výrazu napravo v (6.4) dáva výraz:

$$(R + B^T W B)P_t = -B^T W A X_t$$

pre každé P_t. To nám dáva optimálne riešenie:

$$P_t = -(R + B^T W B)^{-1} B^T W A\, X_t.$$

Optimálne riadenie je lineárna funkcia $P_t = -HX_t$ stavovej premennej X_t, kde

$$H = -(R + B^T W B)^{-1} B^T W A.$$

Substituovaním optimálneho riadenia do pravej strany rovnice (6.4) získavame Riccatiho maticovú rovnicu:

$$W = Q + A^T[W - WB(R + B^TWB)^{-1}B^TW]A.$$

Matica W je symetrická a záporne semidefinitná matica.

Pre úlohu s diskontným koeficientom

$$\max_{\{P_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t(X_t^TQX_t + P_t^TRP_t), \qquad \beta \in (0,1)$$

s lineárnou stavovou rovnicou

$$X_{t+1} = AX_t + BP_t, \qquad t \geq 0 \tag{6.5}$$

platí rovnaká vlastnosť ako v predchádzajúcej LQ úlohe s malou obmenou v explicitnom vyjadrení optimálneho riadenia a hodnotovej funkcie. Hodnotová funkcia je kvadratická $V(X) = X^TW_\beta X$, kde matica W_β je riešením rovnice:

$$W_\beta = Q + \beta A^T[W_\beta - \beta W_\beta B(R + \beta B^TW_\beta B)^{-1}B^TW_\beta]A. \tag{6.6}$$

Optimálne riadenie má v tomto prípade tiež lineárny tvar $P_t = -H_\beta X_t$, kde

$$H_\beta = \beta(R + \beta B^TW_\beta B)^{-1}B^TW_\beta A.$$

Maticu W_β je možné vypočítať numericky iteračne predpisom

$$W_\beta^{j+1} = Q + \beta A^T[W_\beta^j - \beta W_\beta^j B(R + \beta B^TW_\beta^j B)^{-1}B^TW_\beta^j]A$$

pri zadaní počiatočnej iterácie $W_\beta^0 = 0$. Za určitých podmienok platí konvergencia iterácie $\lim_{k\to\infty} W^k = W$.

Podmienku, za ktorej dochádza ku konvergencii iteračného procesu, charakterizujeme stručne. Ak substituujeme optimálne riadenie $P_t = -HX_t$ do stavovej rovnice $X_{t+1} = AX_t + BP_t$, tak získavame diferenčný systém $X_{t+1} = (A - BH)X_t$. Tento systém považujeme za stabilný, ak $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ z akéhokoľvek počiatočného bodu $X_0 \in \mathbf{R^n}$. Predpokladajme, že vlastné hodnoty matice $(A - BH)$ sú rôzne a využime Jordanovu dekompozíciu $(A - BH) = C\Lambda C^{-1}$. Stĺpce matice C sú tvorené vlastnými vektormi, matica Λ je diagonálna matica s vlastnými hodnotami matice $(A - BH)$ na diagonále. Zapíšme skúmaný diferenčný systém v tvare:

$$X_t = C\Lambda^tC^{-1}X_0.$$

Z tohto vyplýva, že systém je stabilný pre všetky $X_0 \in \mathbf{R^n}$ práve vtedy, keď vlastné hodnoty matice $(A - BH)$ sú v absolútnej hodnote ostro menšie ako jedna. Viac môže čitateľ nájsť napríklad v [9].

Stochastická LQ úloha dynamického programovania:

$$\max_{\{P_t\}_{t=0}^{\infty}} \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (X_t^T Q X_t + P_t^T R P_t),$$

$$X_{t+1} = AX_t + BP_t + \varepsilon_t, \qquad t \geq 0$$

kde $\varepsilon \sim N(0, \Sigma)$ a počiatočné X_0 je dané. Hodnotová funkcia pre tento problém má tvar:

$$V(X) = X^T W_\beta X + d,$$

kde W_β je jednoznačne určená záporne semidefinitná matica Riccatiho maticovej formy pre LQ úlohu s diskontným faktorom (6.6). Skalár d je v tvare:

$$d = \beta(1-\beta)^{-1} \mathrm{tr}\ W_\beta \Sigma.$$

Optimálne riadenie je lineárna funkcia $P_t = -H_\beta X_t$, kde

$$H_\beta = \beta(R + \beta B^T W_\beta B)^{-1} B^T W_\beta A.$$

Všimnime si, že optimálne riadenie je v tomto stochastickom prípade rovnaké ako v prípade, kedy do systému nevstupuje žiadna náhodná premenná. Táto vlastnosť sa nazýva princíp ekvivalencie určitosti (*certainty equivalence principle*). Dôkaz tejto vlastnosti je jednoduchý, ale pracný. Čitateľ ho môže nájsť podrobne popísaný v [9]. Táto vlastnosť vychádza z kvadratického tvaru účelovej funkcie, lineárnosti stavovej rovnice a z vlastnosti $E[\varepsilon_{i+1}|\Omega_t] = 0$. Tento princíp necharakterizuje teda problémy stochastického riadenia vo všeobecnosti.

Funkcia r v maximalizovanej účelovej funkcii je často nelineárna. Predchádzajúca teória dynamického programovania vychádzala z kvadratickej formy tejto funkcie. Kydland a Prescott navrhujú nahradiť funkciu $r(x)$ práve kvadratickou formou $x^T S x$.

Vyberieme si bod $\bar{x}$ (vhodným výberom je rovnovážny bod) a aproximujeme funkciu $r(x)$ Taylorovým polynómom druhého rádu v okolí zvoleného bodu $\bar{x}$:

$$\hat{r}(x) = r(\bar{x}) + (x - \hat{x})^T \frac{\partial r}{\partial x}(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \hat{x})^T \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x^T}(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

Numerickú aproximáciu môžeme vypočítať nasledovným spôsobom. Nech funkcia $r(x)$ je aproximovaná nasledovne:

$$r(x) \approx r(\bar{x}) + m^T(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T Q (x - \bar{x}),$$

kde m je numerická aproximácia prvej parciálnej derivácie vypočítaná vzťahom:

$$m_i r(\bar{x}) = \frac{1}{2\tilde{h}}[r(\bar{x} + h^i) - r(\bar{x} - h^i)],$$

pričom h_i je nulový vektor s $\tilde{h}$ na i-tom mieste a $\tilde{h}$ je dostatočne malé. Aproximácia Q je odhadom druhej parciálnej derivácie numericky počítanej vzťahom:

$$Q_{ii}^2 r(\bar{x}) = \frac{1}{\tilde{h}^2}[r(\bar{x}+h^i)+r(\bar{x}-h^i)-2r(\bar{x})]$$

$$Q_{ij}^2 r(\bar{x}) = \frac{1}{4\tilde{h}^2}[r(\bar{x}+h^i+h^j)+r(\bar{x}+h^i-h^j)-r(\bar{x}-h^i+h^j)+r(\bar{x}-h^i-h^j)]$$

pričom h_i je nulový vektor s $\tilde{h}$ na i-tom mieste a $\tilde{h}$ je dostatočne malé. Podľa tejto aproximácie a (6.6) ďalej môžeme iteratívne nájsť hľadané optimálne riadenie.

6.3 Riešenie RBC modelu

Pri tomto spôsobe riešenia je vhodnejšie zvoliť si ako riadenie investície i_t v čase t a nie spotrebu c_t, ako to bolo v predchádzajúcich spôsoboch riešenia. Zjednoduší to ďalšiu úpravu modelu do formy, ktorú je možné iteratívne riešiť. Riadiace premenné modelu sú preto c_t a h_t, stavovými premennými modelu sú k_t a Z_t. V definícii modelu sa objavuje priamo premenná c_t, preto ju nahradíme ekvivalentným zápisom

$$c_t = y_t - i_t = e^{Z_t} k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} - i_t.$$

V riešenom RBC modeli je

$$r(k_t, Z_t, i_t, h_t) = \ln(e^{Z_t} k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} - i_t) - \ln(1-h_t).$$

Stavové rovnice sú lineárne a majú tvar:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{6.7}$$

$$Z_{t+1} = \rho Z_t. \tag{6.8}$$

Nasledujúci postup prehľadne načrtáva praktický iteratívny postup riešenia autonómnej LQ úlohy na nekonečnom časovom horizonte. V zápise využívame stĺpcový vektor $w = (k, Z, i, h)$.

- Stavové rovnice (6.7) a (6.8) môžeme vďaka ich lineárnosti zapísať v maticovej forme $(k, Z) = Nw$, kde

$$N = \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Hodnotovú funkciu v j-tej iterácii zapíšeme v tvare $V_j(k, Z) = \kappa_j + \eta_j^T(k, Z) +$ $+(k, Z)^T \Theta_j (k, Z)$. Zvolíme $V_0 = 0$, t. j. κ_0, η_0 a Θ_0 sú nulové.

∇ Kým nebude splnená presnosť koeficientov κ_j, η_j a Θ_j (rozdiel predchádzajúcich a novovypočítaných koeficientov) pokračujeme v iteráciách.

- ▷ Dosadením j-tej iterácie hodnotovej funkcie do hodnotovej funkcie V_{j+1} a využitím lineárneho vzťahu $(k, Z) = Nw$ získame tvar hodnotovej funkcie v $(t+1)$-tej iterácii:

$$V_{j+1}(k, Z) = \max_{h,i}[r(\bar{w}) + m^T(w-\bar{w}) + \frac{1}{2}(w-\bar{w})^T Q(w-\bar{w}) + \beta\kappa_j + \beta\eta_j^T Nw + \\ + \beta w^T N^T \Theta_j Nw]$$

- ▷ Kvôli maximalizácii podľa riadiacich premenných rozdelíme vektor w na vektor riadiacich (i, h) a vektor stavových premenných (k, Z). Pomocou nutnej podmienky prvého rádu pre extrém nájdeme vzťah pre optimálne riadenie.
- ▷ Po dosadení predpisu optimálneho riadenia do vzťahu pre hodnotovú funkciu $V_{j+1}(k, Z)$ a po jej upravení na kvadratický tvar $V_{j+1}(k, Z) = \kappa_{j+1} + \eta_{j+1}^T(k, Z) + (k, Z)^T\Theta_{j+1}(k, Z)$ dostávame vzťahy pre nové koeficienty κ_{j+1}, η_{j+1} a Θ_{j+1}.

- Po splnení požadovanej presnosti, z poslednej iterácie získavame predpis pre optimálne riadenie.

V prílohe práce môže čitateľ nájsť celý program obsahujúci algoritmus riešenia. Pri numerickom hľadaní riešenia musíme zvoliť zastavovacie kritérium. V našom prípade je to presnosť, kedy považujeme riešenie za dostatočne presné. Presnosť určujeme ako maximálnu hodnotu z rozdielov jednotlivých prvkov κ, η a Θ. Požadovanú presnosť sme zvolili na úrovni 10^{-7}. Pri zmene tejto požadovanej presnosti sme nedosiahli významne rozdielne výsledky koeficientov. Inak je to v prípade numerickej presnosti prvej a druhej derivácie využitej v riešení. Pomocou analytického výpočtu derivácie úžitkovej funkcie v rovnovážnom bode sme zistili, že najpresnejšiu deriváciu dosiahneme pri voľbe kroku $\tilde{h} = 10^{-5}$. Pri tejto voľbe kroku rozdiel medzi skutočnou hodnotou derivácie v rovnovážnom bode a numerickou deriváciou je maximálne rádovo 10^{-10}. Pri takejto voľbe požadovaných parametrov numerického výpočtu získavame riešenie v premenných bez vlnky. Optimálne riadenie má v tomto prípade aj konštatný člen b:

$$\begin{bmatrix} i_t \\ h_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_t \\ Z_t \end{bmatrix}$$

Presný predpis optimálneho riadenia vypočítaného pomocou dynamického programovania je:

$$i_t = 0.504042 - 0.0357336\, k_t + 1.08305\, Z_t, \tag{6.9}$$

$$h_t = 0.542554 - 0.0113606\, k_t + 0.20982\, Z_t. \tag{6.10}$$

Tento zápis optimálneho riadenia transformujeme do premenných s vlnkou, aby bolo možné porovnať jednotlivé metódy riešenia. Zároveň musíme získať namiesto premennej $\tilde{i}_t$ premennú $\tilde{c}_t$. Zápis (6.10) môžeme prepísať do tvaru:

$$\tilde{h}_t = \frac{\bar{k}c_{21}}{\bar{h}}\tilde{k}_t + \frac{c_{22}}{\bar{h}}\tilde{A}_t.$$

Pre transformáciu rovnice (6.9) je potrebné využiť zápis $i_t = y_t - c_t$ pričom následne aproximujeme $y_t = e^{Z_t}k_t^{\alpha}h_t^{1-\alpha}$ Taylorovým polynómom prvého rádu okolo rovnovážneho stavu premenných. Definujme stĺpcový vektor $\bar{s} = (\bar{k}, \bar{Z}, \bar{c}, \bar{h})$. Po krátkych úpravách získavame vzťah:

$$\tilde{c}_t = \left[\frac{\bar{k}}{\bar{c}}(-c_{11} + \frac{\partial u}{\partial k}(\bar{s}) + c_{21}\frac{\partial u}{\partial k}(\bar{s}))\right]\tilde{k}_t + \left[\frac{1}{\bar{c}}(-c_{12} + \frac{\partial u}{\partial z}(\bar{s}) + c_{22}\frac{\partial u}{\partial h}(\bar{s}))\right]\tilde{A}_t.$$

Optimálne riadenie, ako lineárna funkcia stavových premenných s vlnkou, má pri riešení metódou dynamického programovania tvar:

$$\tilde{c}_t = 0.549945\ \tilde{k}_t + 0.462177\ \tilde{A}_t,$$

$$\tilde{h}_t = -0.187866\ \tilde{k}_t + 0.459378\ \tilde{A}_t.$$

7 Porovnanie metód riešenia

Jednotlivé použité metódy porovnávame na základe náročnosti prípravných výpočtov, numerických výpočtov a numerickej presnosti. V nasledujúcej tabuľke zhrnieme výsledky použitých metód, t. j. porovnáme predpisy optimálneho riadenia základného RBC modelu s parametrami kalibrovanými na slovenských dátach. Tabuľka porovnáva koeficienty a_{CK}, a_{CA}, a_{HK} a a_{HA} vypočítané popísanými metódami.

použitá metóda	$\mathbf{a_{CK}}$	$\mathbf{a_{CA}}$	$\mathbf{a_{HK}}$	$\mathbf{a_{HA}}$	**max. BK**[8]
metóda podľa Blancharda a Kahna	0.549949	0.462182	-0.187868	0.459374	0
metóda neurčitých koeficientov	0.549949	0.462182	-0.187868	0.459374	1.11355×10^{-13}
riešenie dynamickým programovaním	0.549945	0.462177	-0.187866	0.459378	5.11805×10^{-6}

Môžeme povedať, že metódou podľa Blancharda a Kahna vypočítame rovnaké koeficienty ako pri použití metódy neurčitých koeficientov. Obidve metódy vychádzajú z Eulerových rovníc, ktoré je nutné loglinearizovať. Metóda neurčitých koeficientov využíva na hľadanie neznámych koeficientov numerické hľadanie[9] koreňov systému 4 rovníc o 4 neznámych. Metóda podľa Blancharda a Kahna využíva invertovanie a násobenie matíc. Nevýhodou často využívanej metódy neurčitých koeficientov, že prvotný predpoklad o riešení môže nechať nejaké riešenie neodhalené. Veľkou nevýhodou týchto dvoch Eulerových metód je ich ťažká prispôsobivosť. Pri akejkoľvek zmene zadania modelu je nutné opätovne vyrátať Eulerove rovnice, loglinearizovať ich a potom použiť jednu z Eulerových metód. Už pri jednoduchom základnom RBC modeli popísanom v tejto práci sú tieto odvodenia a výpočty veľmi neprehľadné, aj keď nie zložité.

Riešenie pomocou dynamického programovania je postavené na inej báze. Aj v tomto prípade sú nutné zjednodušenia modelu. Základný RBC model, ktorý je nelineárny, transformujeme na autonómnu LQ úlohu dynamického programovania. Nutné je naprogramovať cyklus, ktorý sa zastavuje pri dosiahnutí zvolenej presnosti. Postup vyžaduje výpočet derivácie (prvej a druhej). V našej práci tieto derivácie v rovnovážnom stave odhadujeme. To zjednodušuje neskoršiu manipuláciu s programom. Výhodou tohto postupu je práve jeho prispôsobivosť. Po zmene počiatočných hodnôt, akými sú počet riadiacich a stavových premenných, rovnovážne stavy premenných a funkcia r, môžeme okamžite vypočítať optimálne riadenia skúmaného systému. Výsledné koeficienty tohto postupu sa od koeficientov vypočítaných metódou Blancharda a Kahna líšia viac ako je to pri metóde neurčitých koeficientov. Stále ale môžeme tento rozdiel považovať za zanedbateľný.

Pri analýze makroekonomických modelov s racionálnymi očakávaniami by sme preto odporúčali použiť riešenie dynamickým programovaním. Tento spôsob rešenia je po prvotnom odvodení a naprogramovaní veľmi ľahké aplikovať na ďalšie modely.

[8]Maximálna odchýlka od koeficientov vypočítaných pomocou danej metódy od koeficientov vypočítanej podľa metódy Blancharda a Kahna.

[9]V programe MATHEMATICA 3.0. používame napríklad príkaz FindRoot.

8 Záver

Racionálne očakávania tvoria neodmysliteľnú časť makroekonomickej teórie súčasnosti. Predpoklady racionálnych očakávaní, akými sú poznanie celého modelu všetkými agentami a rovnaká informovanosť jednotlivých agentov, sú v reálnom svete nesplnené. Napriek tomu je tento typ očakávaní veľkým krokom vpred v ekonomickej teórii. Ich využitie je rozsiahle. Očakávania sa môžu objaviť napríklad v diferenčných systémoch alebo v diskrétnych modeloch, v ktorých maximalizujeme účelovú funkciu za určitých podmienok.

V našej práci sme popísali tri prístupy k riešeniu systémov s racionálnymi očakávaniami. Matematický aparát, na ktorom sú riešenia postavené, obsahujú len pojmy a vlastnosti nutné pre správne pochopenie práce výpočtu. Zamerali sme sa na aplikáciu teoretického postupu do praktického riešenia modelu.

Riešený RBC model je veľmi jednoduchým systémom. V literatúre je často podrobne popísaný a čitateľ ho pravdepodobne dobre pozná. Odvodzovania a výpočty sú v tomto prípade pre čitateľa prehľadnejšie a rýchlejšie ako by to pri inom, možno zaujímavejšom, modeli.

Eulerove metódy–metóda Blancharda a Kahna a metóda neurčitých koeficientov, sú charakteristické tým, že riešenie je odvodené pre model, ktorý je v tvare diferenčného systému s racionálnymi očakávaniami. Maximalizačné úlohy sú riešené tak, že diferenčným systémom sa stávajú nutné podmienky pre extrém tejto úlohy. Týmto spôsobom sme riešili aj ukážkový RBC model. Dynamické programovanie umožňuje len riešenie maximalizačnej úlohy.

Vzorový RBC model sme vyriešili všetkými troma spôsobmi riešenia. Za výsledok riešenia sme považovali predpis optimálneho riadenia prepísaného do premenných s vlnkou. Porovnanie metód nám dalo priaznivé závery. Môžeme povedať, že všetkými metódami sme dospeli k rovnakému riešeniu. Odchýlky medzi riešeniami jednotlivých metód sú veľmi malé a považujeme ich za zanedbateľné. Pri riešení modelov s racionálnymi očakávaniami by sme uprednostnili postup dynamického programovania, pretože umožňuje rýchlu modifikáciu modelu bez opätovných algebraických úprav.

Práca vytvára prehľad teórie racionálnych očakávaní a zaoberá sa aj praktickou aplikáciou racionálnych očakávaní. Je možné rozšíriť ju v dvoch smeroch. Podrobnejšie je možné popísať teóriu riešenia, t. j. hlbšie rozobrať matematickú stránku riešenia. Druhým zaujímavých rozšírením je makroekonomický výskum. Dobrým využitím racionálnych očakávaní sú simulácie, či predikcia makroekonomických ukazovateľov.

9 Príloha

Príloha je tvorená kompletnými programami v programe MATHEMATICA[10].

9.1 Program pre riešenie podľa Blancharda a Kahna

Definovanie používaných parametrov:

```
alfa=0.33; bet=0.981; delta=0.031; ro=0.95;
```

Výpočet rovnovážneho stavu:

```
M=1/bet-1+delta;
hss=(M*(1-alfa)/alfa)/(M/alfa-delta+(1-alfa)*M/alfa);
kss=(M*hss^(alfa-1)/alfa)^(1/(alfa-1));
css=(1-alfa)*kss^alfa *hss^(-alfa)*(1-hss);
yss=kss^alfa*hss^(1-alfa);
rss=M;
wss=(1-alfa)*yss/hss;
```

Definovanie pomocných konštánt:

```
K=(rss*(1-alfa)/(1+rss-delta));
K1=1-delta+rss-alfa*css/kss;
H1=(1-alfa)*yss/kss+css*(alfa+hss/(1-hss))/kss;
A1=-css/kss+yss/kss;

Af={{K1,H1},{-alfa+K*K1+alfa*K1,alfa+hss/(1-hss)+K*H1   +alfa*H1}};
gamaf={{A1},{-1+K*A1-K*ro/(1-alfa)+ro+alfa*A1}};
B={{1,0},{0,K+alfa+hss/(1-hss)}};
```

Výpočet matice A a γ:

```
A=Inverse[B].Af;
gama=Inverse[B].gamaf;
ev=Eigenvalues[A];
gama1=gama[[1]][[1]];gama2=gama[[2]][[1]];
ev1=ev[[2]];ev2=ev[[1]];
```

Výpočet blokových matíc potrebných pre rekurentný vzorec:

```
X=JordanDecomposition[A];
Q=Join[X[[1]][[1]],X[[1]][[2]]];
b11=Q[[1]];b12=Q[[2]];b21=Q[[3]];b22=Q[[4]];
d=b11*b22-b12*b21;
mi=-b12*(ev2-ev1)*(-b21*gama1+b11*gama2)/d;

c=Table[0,{200}];
Hbk=c;Abk=c;Kbk=c;
Abk[[1]]=0.05;Kbk[[1]]=0;

For[i=1,i<200,
    Kbk[[i+1]]=ev1*Kbk[[i]]+(gama1+mi/(ev2-ro))*Abk[[i]];
    Abk[[i+1]]=ro*Abk[[i]];
    Hbk[[i]]=b21/b11*Kbk[[i]]-(-b21*gama1+b11*gama2)*Abk[[i]]/(b11*(ev2-ro));
    i++
    ]

Ack=alfa-(alfa+hss/(1-hss))*b21/b11;
Aca=1+(alfa+hss/(1-hss))*(-b21*gama1+b11*gama2)/(b11*(ev2-ro));
Ahk=b21/b11;
Aha=-(-b21*gama1+b11*gama2)/(b11*(ev2-ro));
```

[10] softvér MATHEMATICA 3.0 od Wolfram Research

9.2 Program pre metódu neurčitých koeficientov

Výpočet neznámych koeficientov:

```
{Ack,Aca,Ahk,Aha}={Ack,Aca,Ahk,Aha}/.FindRoot[{
        Ack+Ahk*(hss/(1-hss)+alfa)==alfa,
        Aca+Aha*(hss/(1-hss)+alfa)==1,
        -Ack/(rss*(1-alfa)/(1+rss-delta))==
                (-1+Ahk- Ack/(rss*(1-alfa)/(1+rss-delta)))*
                ((1-delta+rss)+(1-alfa)*yss*Ahk/kss-css*Ack/kss),
        -Aca/(rss*(1-alfa)/(1+rss-delta))==
                (-1+Ahk- Ack/(rss*(1-alfa)/(1+rss-delta)))*
                ((1-alfa)*yss*Aha/kss-css*Aca/kss+yss/kss)+
                ro*(Aha+1/(1-alfa)-Aca/(rss*(1-alfa)/(1+rss-delta)))},
        {Ack,10},{Aca,10},{Ahk,10},{Aha,10}]

For[i=1,i<200,
        {{c[[i]]},{h[[i]]}}={{Ack,Aca},{Ahk,Aha}}.{{k[[i]]},{A[[i]]}};
        k1=(1-delta+rss)*k[[i]]+(1-alfa)*yss/kss*h[[i]]-css/kss*c[[i]]+
                    yss/kss*A[[i]];
        A1=ro*A[[i]];
        k[[i+1]]=k1;
        A[[i+1]]=A1;
    i++
    ]
```

9.3 Program pre riešenie dynamickým programovaním

```
eps=0.00001;
riad=2;
stav=2;;
DM={{1-delta,0,1,0},{0,ro,0,0}};
```

Úžitková funkcia:

```
r[{{k_},{Z_},{i_},{h_}}]:=Log[Exp[Z]*k^alfa*h^(1-alfa)-i]+Log[1-h];
ss={{kss},{0},{iss},{hss}};
tss=Transpose[ss];
```

Odhad prvej a druhej derivácie v rovnovážnom stave:

```
ht=1/100000; h=ht*IdentityMatrix[4];
mr[q_,j_]:=(r[q+h[[j]]]-r[q-h[[j]]])/(2*ht);
der1={Table[0,{4}]};
For[i=1,i<stav+riad+1,
        der1[[1,i]]=(r[ss+h[[i]]]-r[ss-h[[i]]])/(2*ht);
        i++]
Q=IdentityMatrix[4];
For[i=1,i<stav+riad+1,
  For[j=1,j<stav+riad+1,
        If[i==j,Q[[i,i]]=(r[ss+h[[i]]]+r[ss-h[[i]]]-2*r[ss])/(ht^2),
                Q[[i,j]]=(r[ss+h[[i]]+h[[j]]]-r[ss+h[[i]]-h[[j]]]-
                         r[ss-h[[i]]+h[[j]]]+r[ss-h[[i]]-h[[j]]])/(4*ht^2)
            ];
      j++
     ];
i++]
```

Iteratívny výpočet hodnotovej funkcie:

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`;
o=0;  m=Table[0,{stav}];  n=0*IdentityMatrix[stav]; iii=0;
presnost=1000;

While[presnost>eps,
        g=der1-tss.Q+bet*m.DM;
        gt=Transpose[g];
        gg1=TakeMatrix[g,{1,1},{1,stav}];
        gg2=TakeMatrix[g,{1,stav+1},{1,stav+riad}];
        g1=Transpose[gg1]; g2=Transpose[gg2];

        P=Q/2+bet*Transpose[DM].n.DM;
        P11=TakeMatrix[P,{1,1},{riad,riad}];
        P12=TakeMatrix[P,{1,1+riad},{riad,riad+stav}];
        P21=TakeMatrix[P,{riad+1,1},{riad+stav,riad}];
        P22=TakeMatrix[P,{riad+1,riad+1},{riad+stav,riad+stav}];

        U=Inverse[Transpose[P22]+P22];
        V=P21+Transpose[P12];

        a=r[ss]-der1.ss+tss.Q.ss/2+bet*o;

        o1=a-gg2.U.g2+gg2.Transpose[U].P22.U.g2;
        m1=gg1-gg2.U.V-gg2.Transpose[U].Transpose[P12]-gg2.Transpose[U].P21+
               gg2.Transpose[U].P22.U.V+gg2.Transpose[U].Transpose[P22].U.V;
        n1=P11-P12.U.V-Transpose[V].Transpose[U].P21+
               Transpose[V].Transpose[U].P22.U.V;

        presnost=Max[Abs[o-o1],Abs[m-m1],Abs[m-m1]];
        o=o1; n=n1; m=m1;
        iii++;
    ]
```

Transformácia na systém s premennými s vlnkou:

```
-kss*(t[[1,1]]-derk-derh*t[[2,1]])/css
-(t[[1,2]]-derz-derh*t[[2,2]])/css
kss*t[[2,1]]/hss
t[[2,2]]/hss
```

Literatúra

[1] FELDERER, B., HOMBURG, S.: *Makroekonomika a nová makroekonomika.* Elita, 1995.

[2] BLANCHARD, O. J.: *Macroeconomics.* Prentice-Hall International, Inc., 1997.

[3] ROMER, D.: *Advanced Macroeconomics.* McGraw Hill, New York, 1996.

[4] BRIATKA, Ľ.: *Home Production in RBC models.* Diplomová práca. FMFI UK Bratislava, 2002.

[5] BLANCHARD, O. J., FISHER S.: *Lectures on macroeconomics.* Massachusetts Institute of Technology, 1989.

[6] BLANCHARD, O. J., KAHN, Ch. M.: *The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations.* Econometrica, Volume 48, Issue 5, 1980, p. 1305 – 1312.

[7] MCCALLUM, B. T.: *Solutions to Linear Rational Expectations Models: A Compact Exposition.* http://www.nber.org/papers/t0232.pdf (2002-10-01).

[8] COOLEY, T. F.: *Frontiers of Business Cycle Research.* Princeton University Press, Princeton, 1995.

[9] LJUNGQVIST, L., SARGENT, T. J.: *Recursive Macroeconomics Theory*, The MIT Press, Cambridge, 2000.

[10] HALICKÁ, M.: *Optimálne riadenie I.* ÚAM MFF UK, Bratislava, 1999.