K a p i t o l a 2

2.1 MOCENSKÉ INDEXY

Rozhodovanie situácií, kde jednotlivec alebo skupina jednotlivcov musí urobiť kolektívne rozhodnutie je každodenný fenomén. Napríklad, v parlamente je to kolektívne rozhodnutie poslancov, či daný návrh zákona bude prijatý alebo zamietnutý. Všeobecne v každom takomto systéme existujú špecifické pravidlá pre rozhodovanie, napr. aký druh koalície môže vzniknúť, koľko hlasov je potrebných na schválenie a podobne. Rôzne druhy majoritných pravidiel sa obvykle používajú v národných parlamentoch, kde je parlamentná demokracia. Hlavná idea „hlasovacej sily“, mocenských indexov, je pomerne zložitá. Prvým návrhom bolo jednoducho použiť sumu hlasov jednotlivých koalícií. Bohužiaľ, takýto spôsob nie je najlepší. Ukážeme si to na jednoduchom príklade. Predpokladajme 3 strany, *A, B* a *C*. Strany *A* a *B* majú po 30 hlasov navzájom a strana *C* má iba 1 hlas. Situácii, ktorá nám takto vznikla, sa zvyčajne nazýva „zakopaný snem“. Žiadna zo strán nemá viac ako 50% hlasov, predpokladáme jednoduchú väčšinu, preto vzniká nutnosť vytvorenia koalície na získanie majority. Vidíme, že *A* má na výber dve možnosti: *B alebo C.* To isté platí aj pre *B a C*. Všetky strany môžu byť účastníkmi dvoch možných koalícií, ktoré takto už získajú majoritu. Ako alternatívu k počtu hlasov by sme mali skôr predpokladať počet koalícií, ktoré môže strana vytvoriť na získanie potrebnej majority. Predpokladajme, že máme štyri strany s nasledujúcimi počtami hlasov: $A=B=C=30$ a $D=1$. Teraz *D* nemá podľa našej volebnej schémy žiadnu volebnú silu, pretože žiadna koalícia nepotrebuje jeho hlas k získaniu majority. Teda stana *D* má nulový koaličný potenciál. Ale čo sa stane, ak *D* bude maž 29 hlasov? Stále bude mať nulovú volebnú silu? Pridelený počet hlasov stranám *A, B a C* vytvára takzvaný „interval nulovej hlasovacej sily“ o veľkosti [1, 29] hlasov. Teda *D* nemôže svojim správaním nijako zmeniť výsledok hlasovania. Takto môžeme definovať mocenský index: *Moc strany P s n členmi sa rovná počtu koalícii, pre ktoré sú členovia strany P absolútne nevyhnutní na získanie väčšiny, majority.* Takto je definovaný aj ***Banzalfov mocenský index.*** Mayersonova hodnota je interpretovaná ako určitá modifikácia Shaplyeovej hodnoty pre normálnu hru, v ktorej komunikácia medzi hráčmi je obmedzená neorientovaným grafom. Každá hrana grafu reprezentuje priamu kooperatívnu komunikáciu medzi hráčmi, ktorí sú reprezentovaní uzlami na každom konci hrany.

V tejto kapitole si ukážeme polynomiálny algoritmus založený na generovaní funkcií na riešenie Myersonovej hodnoty vo volebných hrách obmedzených neorientovaným grafom. V závere použijeme nový generujúci algoritmus pre počítanie Myersonovej hodnoty v Rade ministrov Európskej únie obmedzenej komunikačnou hviezdovitou štruktúrou.

2.1.2 MYERSON HODNOTA PRE HLASOVACIE HRY

Vo všeobecnosti, je ťažké definovať hlavnú myšlienku hodnoty indexu. V špeciálnych prípadoch, ako napr. volebná „sila“ sa ukazujú určité indície, ktoré si teraz ukážeme. Prvý „mocenský index“ bol navrhnutý Shapleyom a Shubikom [15], ktorí použili Shapleyovu hodnotu [14] v prípade jednoduchých hier. Ďalší koncept pre „silu“ volebných hlasov bol predstavený Banzhafom [1]. Jeho index bol použitý v argumentoch v rôznych súdnych pojednávaniach.

Jednoduchá hra je funkcia $v : 2^N \to \{0,1\}$, taká, že $v(N) = 1$ a v je neklesajúca, teda *v(S)* $\leq$ *v(T),* kde $S \subseteq T \subseteq N$. Koalícia vyhrá voľby, ak *v(S)= 1* a prehrá, ak *v(S) = 0.* Množina všetkých víťazných koalícií je označená *W*. Predstavme si teraz triedu hier nazvaných ***vážené volebné hry***.

Budeme používať symboly $[q; w_1, \ldots, w_n]$, kde q je kvóta, teda počet hlasov potrebných na priatie voľby a $w_1, \ldots, w_n$ sú váhy, nezáporné celé čísla. Ďalej platí $0 < q \leq \sum_{i=1}^{n} w_i$. Teda máme n hráčov, w_i je počet hlasov hráča i, a q je kvóta potrebná pre koalíciu, aby vyhrala. Potom, ***jednoduchú hru*** môžeme zapísať takto:

<u>Definícia 1:</u> funkcia $v: 2^N \to \{0,1\}$ definovaná pre všetky $S \subseteq N$ tak , že

$$w(S) = \sum_{i \in S} w_i \ , \ kde \ v(S) = \begin{cases} 1, \ldots ak \ldots w(S) \geq q, \\ 0, \ldots ak \ldots w(S) < q, \end{cases}.$$

<u>Definícia 2:</u> ***Shapley-Shubik index*** pre jednoduchú hru (N ,v) je vektor

$$\Phi(N,v) = (\phi_1(N,v), \ldots\ldots, \phi_n(N,v)) \text{ daný ako}$$

$$\phi_i(N,v) = \sum_{\{i \in S \subseteq N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})) =$$

$$= \sum_{\{S \in W : S \setminus \{i\} \notin W\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}.$$

Teraz si predstavíme hry, v ktorých je spolupráca medzi hráčmi čiastočná. Niekoľko modelov čiastočnej spolupráce bolo odvodených ako deriváty, ktoré sú odvozené z komunikačných situácií, ktoré boli predstavené v prácach Myersona [12] a analyzované v práci Owenoma [13]. Zadajme graf

G=(N,E) a uvažujme $F = \{S \subseteq N : (S, E(S))$ je súvislý podgraf G$\}$. Množina patriaca k *F* sa nazýva ***reálna koalícia***.

Pre ľubovoľné $S \subseteq N$, maximálna reálna podmnožina *S* sa nazýva ***komponent*** S. Graf ***reštrikčnej hry*** *(N , v^F)* je definovaný pre všetky $S \subseteq N$, kde $v^F(S) = \sum_{T \in \prod(S)} v(T)$, kde $\prod(S)$ je výber komponentov S.

Definícia 3: ***Myersonova hodnota*** pre hráča *i* je daná $\Phi_i(N, v^F)$ pre všetky $i \in N$.

Ďalej *n*-strom *G = (N,E)* je súvislý, necyklický graf s |N| = n vrcholov a *j*-podstrom *S* z *G* je množina j vrcholov z G, ktorý indukuje súvislý podgraf z G . Podgraf *B* z grafu *G* je blok z *G*, ak buď *B* je most, alebo je to maximálne 2-vrcholový súvislý podgraf z grafu *G*. Graf *G* je blok grafu, ak každý blok je úplný graf. Ak *G* je necyklický graf alebo strom, tak *G* je blok graf.

Konvexná geometria je kombinatorický výpis z konvexných množín predstavených Edelmanom a Jamisonom [5].

Definícia 4: Systém množín $F \subseteq 2^N$ je ***konvexný simplex*** nad *N,* ak spĺňa podmienky:

(C1) $0 \in F$,

(C2) prienik *F* je uzavretá množina,

(C3) ak $S \in F$ *a* $S \neq N$ potom existuje $i \in N / S$ tak, že $S \cup \{i\} \in F$.

Poznamenajme, že vlastnosť *(C3)* implikuje $N \in F$. Edelman a Jamison [5] dokázali, že graf $G = (N,E)$ je súvislý blok grafu, ak a iba ak výber F z podmnožín N, ktoré navodili spojené podgrafy je konvexná geometria.

Prvok i množiny $S \in F$ je *extrémny bod* z S, *ak* $S \setminus \{i\} \in F$. Množina extrémnych bodov S je označená ***ex(S)***. Ak F je *konvexná množina* a $S \in F$, potom interval $[S^-, S] = \{C \in F : S^- \in C \in S\}$ je *Booleova algebra*, kde $S^- = S \setminus ex(S)$. Tak $[S^-, S]$ je izomorfná až $2^{ex(S)}$. Taktiež považujeme interval $[T, T^+]$, kde $T \in F$ a množina $T^+ = \{i \in N : T \cup \{i\} \in F\}$. Bilbao [2] dokázal nasledujúce tvrdenia pre Myerson hodnotu.

<u>Veta 1:</u> Majme (N, v) hru a nech $G=(N, E)$ je súvislá časť grafu. Ak F je množina podmnožín N, ktoré vytvoria spojité podgrafy, tak Myerson hodnotu pre ľubovoľného hráča i dostaneme ako

$$\phi_1(N, v^F) = \sum_{\{T \in F_i^+\}} \frac{(t-1)!(t^+ - t)!}{t^+!}(v(T) - v(T \setminus \{i\})) +$$

$$+ \sum_{\{T \in F_i \setminus F_i^+\}} \frac{(t-1)!(t^+ - t)!}{t^+!} v(T) - \sum_{\{T \in F_i^+\}} \frac{(t)!(t^+ - t - 1)!}{t^+!} v(T).$$

$$F_i = \{T \in F : i \in T\}, \quad F_i^+ = \{T \in F : i \in ex(T), (T \setminus \{i\})^+ = T^+\},$$

$$F_i^+ = \{T \in F : i \notin T, T \cup \{i\} \in F, T^+ \neq (T \cup \{i\})^+\},$$ kde $t = |T|$, $t^+ = |T^+|$.

<u>Veta 2:</u> Majme (N, v) hru, pre ktorú $v(i) = 0$ pre všetky $i \in N$. Potom Myersonova hodnota pre ľubovoľného hráča $i \in ex(N)$ je

$$\phi_1(N, v^F) = \sum_{\{T \in F\}} \frac{(t-1)!(t^+ - t)!}{t^+!}(v(T) - v(T \setminus \{i\})),$$

kde t = | T | , t^+ =| T^+ |.

Takto môžeme získať priame vzorce pre Myersonovu hodnotu vážených volebných hier obmedzených hviezdami.

Veta 3: Nech [q ; $w_1, \ldots, w_n$] je vážená volebná hra taká, že $w_i < q$ pre všetky $i \in N$ a majme $K_{1,n-1}$ hviezdu s n vrcholmi . Ak $i \in ex(N)$, potom $\phi_1(N, v^F) = \sum_{j=2}^{n} \frac{(j-1)!(n-j)!}{n!} \left(\sum_{j=2}^{q-1+w_i} c^i_{k_j} \right)$, kde c^i_{kj} je číslo z j-podstromu T z $K_{1,n-1}$, ktorý obsahuje i a spĺňa $w(T) = k$.

Dôkaz: Predpokladajme ,že hráč 1 je stred hviezdy $K_{1,n=-1}$. Potom $ex(N)=\{2,...,n\}$ a pre všetky $T \in F$, pre ktoré platí | T | ≥ 2 , dokážeme, že $1 \in T$ a $T^+=N$. Podľa vety 2 platí

$$\phi_1(N, v^F) = \sum_{\{T \in F : |T| \geq 2\}} \frac{(t-1)!(t^+ - t)!}{t^+!}(v(T) - v(T \setminus \{i\})) =$$

$$= \sum_{\{T \in F : |T| \geq 2\}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}(v(T) - v(T \setminus \{i\})) \quad \text{pre všetky } i \in ex(N) \quad \square$$

Odkiaľ $v(T) - v(T \setminus \{i\}) = 1$ *len a len,* ak $w(T) \in [q, q+w_i-1]$, $\phi_1(N, v^F) = \sum_{j=2}^{n} \frac{(j-1)!(n-j)!}{n!} \left(\sum_{k=q}^{q-1+w_i} c^i_{kj} \right)$, kde c^i_{kj} je číslo z j-podstromu T z $K_{1,n-1}$ ktorý obsahuje i a spĺňa $w(T) = k$ $\square$

Veta 4 : Majme [q ; $w_1, \dots, w_n$] je vážená volebná hra s $w_i < q$ pre všetky $i \in N$ a majme $K_{1,n-1}$ hviezdu s n vrcholmi. Ak hráč 1 je stredom $K_{1,n-1}$ potom $\phi_1(N, v^F) = \sum_{j=2}^{n} \frac{(j-1)!(n-j)!}{n!} \left(\sum_{k=q}^{w(N)} c_{kj}^i \right)$,

kde c_{kj}^i je číslo z j-podstromu T z $K_{1,n-1,}$ ktorý obsahuje 1 a spĺňa $w(S)=k$.

Dôkaz: Nech hráč 1 je centrum hviezdy $K_{1,n-1}$. Odtiaľ $v(i)=0$ pre všetky $i \in N$, teda z vety 1 vyplýva , že

$$\phi_1(N, v^F) = \sum_{\{T \in F_1^+ : |T| \geq 2\}} \frac{(t-1)!(t^+ - t)!}{t^+!} (v(T) - v(T \setminus \{1\})) +$$

$$+ \sum_{\{T \in F_1^+ : |T| \geq 2\}} \frac{(t-1)!(t^+ - t)!}{t^+!} v(T) - \sum_{\{T \in F_1^+ : |T| \geq 2\}} \frac{(t)!(t^+ - t - 1)!}{t^+!} v(T).$$

Z definície vyplýva , že

$$\{T \in F_1^+ : |T| \geq 2\} = \{T \in F : 1 \in ex(T), (T \setminus \{1\})^+ = T^+, |T| \geq 2\} =$$

$$= \{T \in F : (T \setminus \{1\})^+ = T^+, |T| = 2\}.$$

Odkiaľ $T = (T \setminus \{1\})^+ \neq T^+ = N$ pre všetky hrany T z hviezdice pre $n \geq 3$, alebo množina je prázdna . Predpokladajme , že

$$\{T \in F : 1 \notin T, T \cup \{1\} \in F, T^+ \neq (T \cup \{1\})^+ \neq 0 .$$

Odtiaľ pre ľubovoľné $T \in F$ s $|T| \geq 2$ dostaneme ,že hráč 1 je centrum, čo je ale *spor* . Preto dostávame

$$\phi_1(N,v^F)=\sum_{\{T\in F_1\ :|T|\geq 2\}}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}v(T)=\sum_{\{T\in F\ :|T|\geq 2\}}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}v(T)=$$

$$=\sum_{\{j=2\}}\frac{(j-1)!(n-j)!}{n!}\left(\sum_{k=q}^{w(N)}c_{kj}^{1}\right),$$

kde c_{kj}^{i} je číslo z j-podstromu *T z $K_{1,n-1}$*, ktorý obsahuje hráča 1 a spĺňa *w(T)=k* □

2.1.3 GENERUJÚCE FUNKCIE PRE WHITNEYHO ČÍSLA

Nech *G=(N , E)* je strom s *|N|* = *n* vrcholmi . Čísla *A_j (G)* z *j*-podstromu nazývame *j-Whitneyho číslo z mriežky substromu* Stanley [17]. Whitneyho čísla spĺňajú pre cestu *P* a hviezdu *$K_{1,n-1}$* s *n* vrcholmi ľubovoľného stromu *G*, nasledovné $A_j(P)=n-j+1\leq A_j(G)\leq\binom{n-1}{j-1}=A_j(K_{1,n-1})$.

Jamison [8,9] predkladá generujúcu funkciu $\Phi_G(z)=\sum_{j=1}^{n}A_j(G)z^j$, pre Whitneyho čísla zo stromu. Najprv predpokladajme lokálne alebo koreňové verzie. Ak *p* je ľubovoľný vrchol grafu *G*, potom $\varphi_G(p,z)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(G;p)z^j$,

kde *a_j (G;p)* je číslo *j*-podstromu stromu *G,* ktorý obsahuje vrchol *p* grafu *G*. Nech *G_p* je strom z *G* s koreňom *p* a nech *D (i; G_p)={k∈ N : i* leží na ceste od *k* k *p* }, je množina potomkov vrcholov *i* v *G_p*. Na zjednodušenie zápisu φ_G*(i | p ; z)* zavedieme funkciu, ktorú budeme označovať φ_D (i ; z) , kde *D=D(i;G_p)*.

Veta 5 : Pre ľubovoľné vrcholy *p* v strome *G* máme:

a) $\varphi(p;z) = z\prod(1+\varphi(i\mid p;z))$, kde súčin prechádza cez všetkých susedov *i,* vychádzajúcich z vrcholu p v grafe *G*.

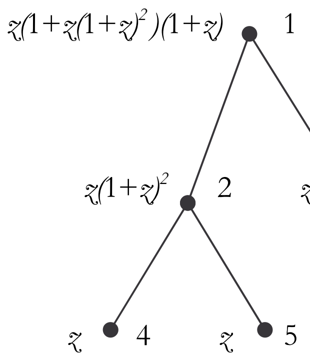
b) $\phi_G(z) = \sum \varphi(i\mid p;z)$, kde súčet prechádza cez všetky vrcholov *i* stromu *G*.

Dôkaz : Vyplýva z vety 2.1 od Jamisona [8] . □

Príklad : Zostrojme strom *G=(N , E)*, kde

N = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 },

E = { { 1 , 2 } , { 1 , 3 } , { 2 , 4 } , { 2 , 5 } }.



Obrázok č. 2.2: Whitneyove čísla

Algoritmus pre vypočítanie Whitneyovho čísla grafu *G* je znázornený na obrázku č.2 .Prvý koreň grafu *G* je vo vrchole 1 a je súvislý so z. Následne rekurzívne dostaneme:

$\varphi(3\,|\,1;z) = \varphi(4\,|\,1;z) = \varphi(5\,|\,1;z) = z,$
$\varphi(2\,|\,1;z) = z(1+\varphi(4\,|\,1;z))(1+\varphi(5\,|\,1;z) = z(1+z)^2,$
$\varphi(1;z) = z(1+\varphi(3\,|\,1;z))(1+\varphi(2\,|\,1;z) = z(1+z)(1+z(1+z)^2).$

Použijúc vetu 5 (b) ktorá implikuje, že

$$\Phi_G(z) = \sum_{i=1}^{5} \varphi(i\,|\,1;z) = z(1+z)(1+z(1+z)^2) + z(1+z)^2 + 3z =$$

$$= 5z + 4z^2 + 4z^3 + 3z^4 + z^5.$$

Výber F z podmnožiny N, ktorá obsahuje podstrom G, je

$$F = \{0, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\},$$

$$\{1,2,5\}, \{2,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, N\}.$$

Výsledkom sú potom tieto Whitneyove čísla:

$A_1(G) = 5, A_2(G) = 4, A_3(G) = 3, A_4(G) = 3, A_5(G) = 1$ □

Implementácia Jamisonovho (p) algoritmu podľa vety 5 je nasledovná.

ALGORITMUS :

Input : strom G ma koreň v p

$\varphi(p;z) \leftarrow z$

for i sused p **do**

$\varphi(p;z) \leftarrow \varphi(p;z)(1 + Jamison(i))$

endfor

Output: $\varphi(p;z)$

2.1.4 GENEROVANIE FUNKCIÍ PRE VÁHOVÉ VOLEBNÉ HRY

Prezentujme teraz generujúcu funkciu pre vypočítanie Myersonovej hodnoty vo váhovej volebnej hre [q ; $w_1, \dots, w_n$], ktorá je ohraničená stromom $G = (N, E)$. Generujúca funkcia čísel A_{kj} (G) z reálnych koalícií S, hráčov j a váhou $w(S)=k$ je daná $\Psi_G(x,z) = \sum_{k\geq 1}\sum_{1\leq j\leq n} A_{kj}(G)x^k z^j$

Ak p je ľubovoľný vrchol z G, z koreňovej verzie dostávame $\Psi_G(p;x,z) = \sum_{k\geq 1}\sum_{1\leq j\leq n} c_{kj}(G;p)x^k z^j$, kde c_{kj} $(G;p)$ je číslo z j-podstromu G, ktorý obsahuje p a platí $w(S) = k$.

<u>Veta 7 :</u> Nech [q ; $w_1, \dots, w_n$] je váhová hra. Pre ľubovoľný vrchol p v strome G dostaneme:

(a) $\psi(p;x,z) = x^{w_p} z \prod (1+\psi(i \mid p;x,z))$,

kde súčin ide cez všetkých susedov i z p v grafe G.

(b) $\psi_G(x,z) = \sum \psi(i \mid p;x,z)$,

kde súčet ide cez všetky vrcholy i z G

<u>Dôkaz</u> **:** (a) Môžeme použiť vetu 5 (a), z ktorej získame

$$\psi(p;x,z) = x^{w_p} z \prod (1+\psi(i \mid p;x,z)) = \sum_{\{S\in F: p\in S\}} \prod_{i\in S} x^{w_i} z =$$

$$= \sum_{\{S\in F: p\in S\}} x^{w(S)} z^{|S|} = \sum_{k\geq 0}\sum_{1\leq j\leq n} c_{kj}(G;p)x^k z^j ,$$

kde F je vyber z j – podstromu zo stromu G.

(b) Vyplýva priamo z vety 5 (b) □

2.5 MYERSONOVA HODNOTA V EURÓPSKEJ ÚNII

V súčasnosti majú v Európskej únii skutočnú moc dve inštitúcie: ***Rada ministrov*** a ***Európska komisia***. Obe majú totiž právo iniciovať legislatívu záväznú pre všetky členské štáty. Tu sa však ich právomoci rozchádzajú. Orgánom, ktorý má právo navrhnuté európske zákony aj schváliť, je Rada ministrov zložená z rezortných ministrov všetkých členských štátov. Jej najvyššou formou je Európska rada zložená zo šéfov štátov a vlád, ktorá sa schádza najmenej dvakrát do roka a prijíma kľúčové politické rozhodnutia. Rada vždy reprezentuje záujmy členských štátov, keďže jej členovia – ministri alebo premiéri – sa zodpovedajú pred národnými parlamentmi. Slovensko bude mať v tomto dôležitom orgáne „skromných" 7 z celkového počtu 321 hlasov, takže pri obhajobe národných záujmov bude vždy potrebovať spojencov. Druhá mocná inštitúcia – Európska komisia, nemá síce sama právo uzákoniť legislatívu, má však silné výkonné a kontrolné právomoci, ktorými bdie nad jej dodržiavaním. Opiera sa pritom o Európsky súdny dvor, na ktorý podáva žaloby za porušenie európskych zákonov. Každá krajina, vrátane Slovenska, bude mať v tomto orgáne jedného komisára. Slovenský komisár však v žiadnom prípade nebude brániť záujmy Slovenska. Európska komisia totiž stráži výlučne spoločné európske záujmy a zodpovedá sa Európskemu parlamentu. Ten je jedinou demokraticky zvolenou európskou inštitúciou a Slovensko v ňom bude mať 14 z celkového počtu 732 poslancov. Europarlament sa však na naozajstný parlament iba podobá. V skutočnosti mu chýba základná kompetencia každého parlamentu – právo navrhovať a schvaľovať zákony. Popri konzultačnej a spolurozhodovacej funkcii má táto nákladná a málo efektívna európska inštitúcia iba dve silné právomoci: schvaľuje rozpočet Európskej únie a môže odvolať Európsku komisiu. Komisii pozerá na prsty aj Európsky účtovný dvor, ktorý kontroluje míňanie európskych peňazí. Vstupom do Únie získa Slovensko po 9 zástupcov aj v dvoch konzultačných európskych orgánoch - Ekonomickom a sociálnom výbore a Výbore regiónov.

V nasledujúcich modeloch sme použili toolbox DiscreteMath 'Combinatorica', ktorý sa používa v počítačovom systéme Mathematica na riešenie kombinátorických úloh a úloh z teórie grafov. Balíček zahŕňa nástroje na riešenie kooperatívnych hier, vrátane riešenia konceptov, ako napr. Shapleyove hodnoty.

Herne a Nurmi [7], Widgren [18] a Lane a Maeland [11] vo svojich prácach študovali mocenské indície (Shapley-Shubik a Banzhaf). Teraz si preveríme ich teóriu v praxi na príklade z Európskej únii.

2.5.1 MODEL EU15

Hra zahŕňa krajiny v rade EU, ktoré sú definované nasledovne:

N = {GE, UK, FR, TO, SP, NE, GR, BE, PO, SW, AU, DE, FI, IR, LU},

v = [q; 10, 10, 10, 10, 8, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2], je váhový vektor, ktorý nám hovorí, koľko zástupcov má príslušná krajina v rade EU a $q_1 = 62$, $q_2 = 65$, $q_3=70$ sú kvóty (q - počet hlasov potrebných na zvolenie). Prezentujeme výsledky zo systému Mathematica wolframem, ktoré sme dostali pri počítaní

Myerson hodnoty zo súhrnu volebných hlasov v Rade ministrov v Európskej únii.

Okrem toho, je táto hra obmedzená komunikačnou štruktúrou danou hviezdou $K_{1,14}$, ktorá udáva, že stupeň Nemecka (NE) je 14 a ďalšie krajiny majú stupeň 1. Potom množina súvislých koalícií je daná

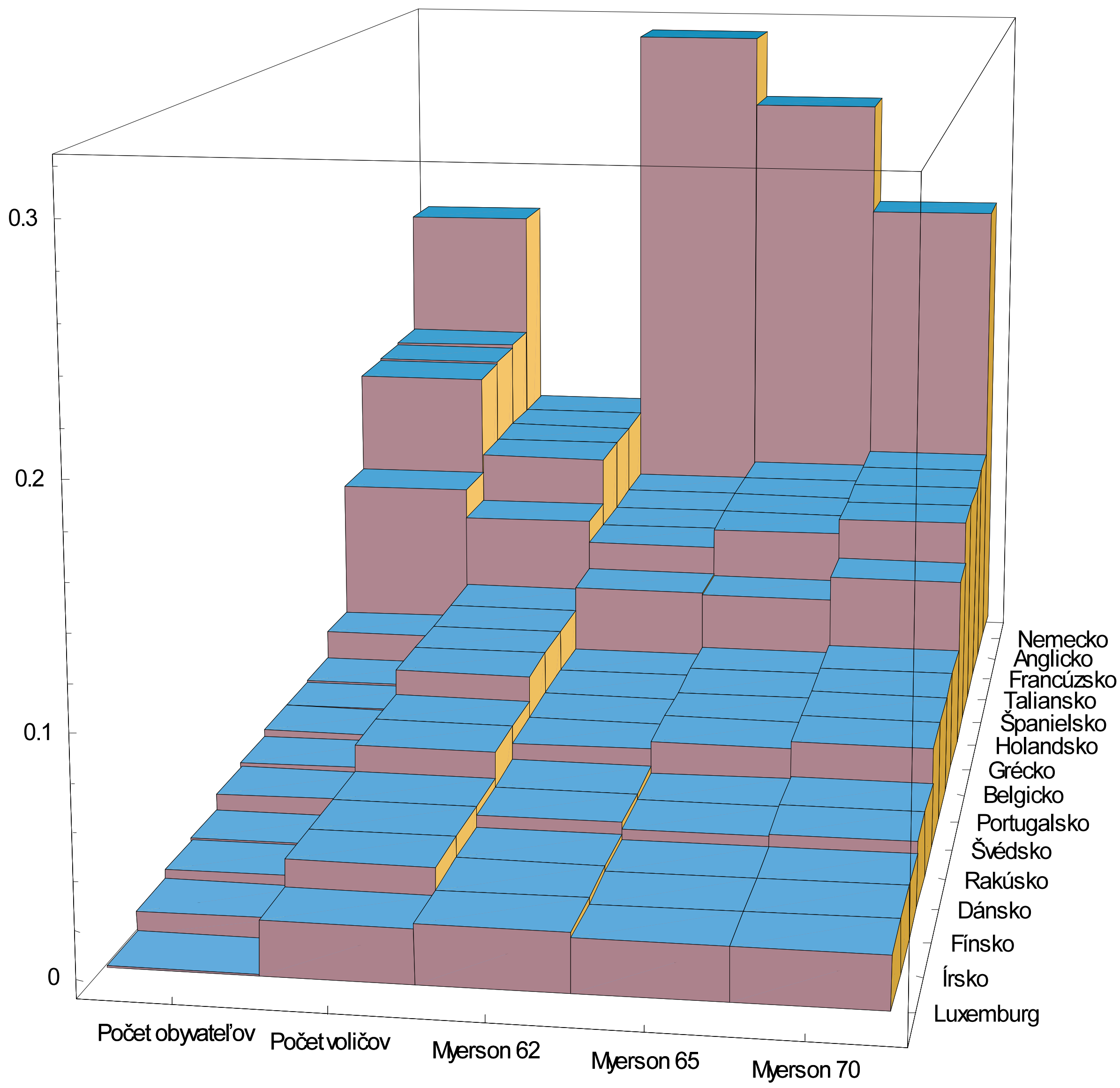
$$F = \{S \subseteq N : Nemecko \in S \;\; alebo \; |S| = 1\} .$$

Výsledky simulácie sú nasledovné:

Tabuľka č.2.1: Myersonove hodnoty pre jednotlivé krajiny EU15 pri kvótach 62, 65 a 70 potrebných na víťazstvo

	# obyvateľov	# voličov	Myerson 62	Myerson 65	Myerson 70
Nemecko	0.219	0.115	0.317	0.282	0.227
Anglicko	0.157	0.115	0.0816	0.0904	0.0977
Francúzsko	0.156	0.115	0.0816	0.0904	0.0977
Taliansko	0.155	0.115	0.0816	0.0904	0.0977
Španielsko	0.106	0.0920	0.0816	0.0904	0.0977
Holandsko	0.0414	0.0575	0.0682	0.0673	0.0782
Grécko	0.0281	0.0575	0.0381	0.0416	0.0445
Belgicko	0.0273	0.0575	0.0381	0.0416	0.0445
Portugalsko	0.0268	0.0575	0.0381	0.0416	0.0445
Švédsko	0.0236	0.0460	0.0381	0.0416	0.0445
Rakúsko	0.0215	0.0460	0.0304	0.0274	0.0284
Dánsko	0.0141	0.0345	0.0304	0.0274	0.0284
Fínsko	0.0137	0.0345	0.0252	0.0226	0.0230
Írsko	0.00966	0.0345	0.0252	0.0226	0.0230
Luxemburg	0.00109	0.0230	0.0252	0.0226	0.0230

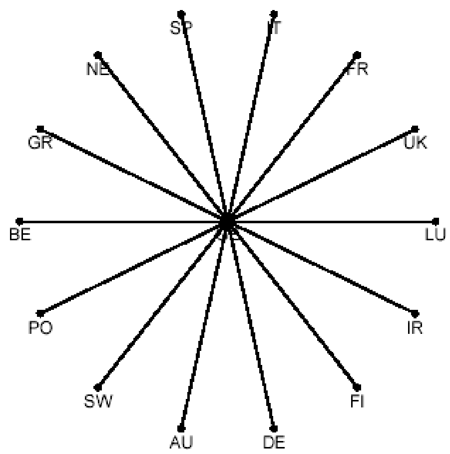
Obrázok č.2.5: Graf Myersonových hodnôt pre jednotlivé krajiny EU15 pri kvótach 62, 65 a 70



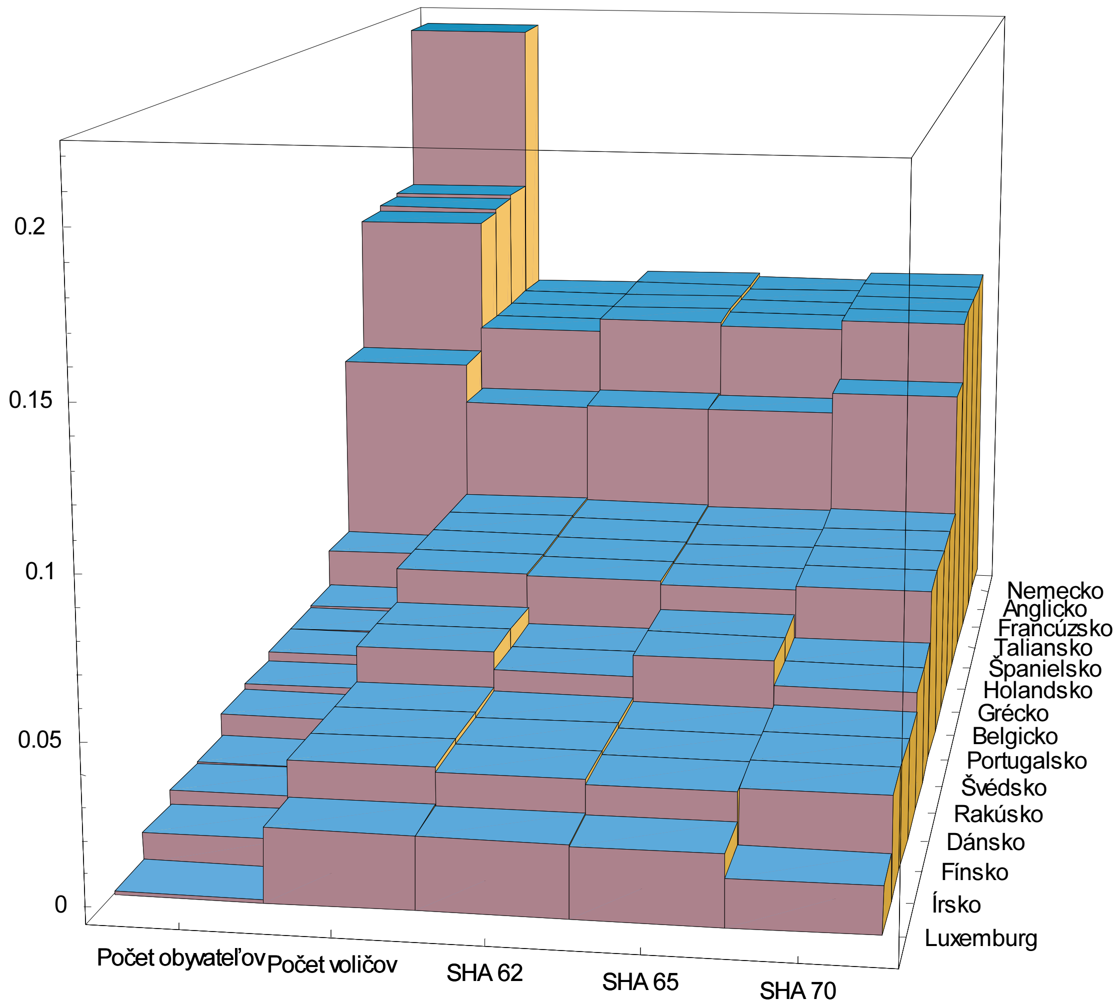
Tabuľka č.2.2: Shapley-Shubikove indexy pre jednotlivé krajiny EU15 pri kvótach 62, 65 a 70 potrebných na víťazstvo

	# obyvateľov	# voličov	SHA 62	SHA 65	SHA 70
Nemecko	0.219	0.115	0.120	0.118	0.121
Anglicko	0.157	0.115	0.120	0.118	0.121
Francúzsko	0.156	0.115	0.120	0.118	0.121
Taliansko	0.155	0.115	0.120	0.118	0.121
Španielsko	0.106	0.0920	0.0924	0.0921	0.0994
Holandsko	0.0414	0.0575	0.0566	0.0558	0.0566
Grécko	0.0281	0.0575	0.0566	0.0558	0.0566
Belgicko	0.0273	0.0575	0.0566	0.0558	0.0566
Portugalsko	0.0268	0.0575	0.0566	0.0558	0.0566
Švédsko	0.0236	0.0460	0.0402	0.0472	0.0388
Rakúsko	0.0215	0.0460	0.0402	0.0472	0.0388
Dánsko	0.0141	0.0345	0.0331	0.0316	0.0324
Fínsko	0.0137	0.0345	0.0331	0.0316	0.0324
Írsko	0.00966	0.0345	0.0331	0.0316	0.0324
Luxemburg	0.00109	0.0230	0.0226	0.0220	0.0149

Obrázok č.2.6: Hra s obmedzenou komunikačnou štruktúrou danou hviezdou $K_{1,14}$



Obrázok č.2.7: Shapley-Shubikove indexy pre jednotlivé krajiny EU15 pri kvótach 62, 65, a 70



Program tvorí prílohu B.

2.5.2 MODEL EU27

Hra zahŕňa krajiny, o ktorých sa predpokladá, že sa stanú členmi EU v roku 2004, a sú definované nasledovne:

N = {GE, UK, FR, IT, SP, PL, RU, NE, GR, CZ, BE, HU, PO, SW, BU, AU, SR, DE, FN, IR, LI, LA, SL, ES, CY, LU, MA},

v = [q; 29, 29, 29, 29, 27, 27, 14, 13, 12, 12, 12, 12, 12, 10, 10, 10, 7, 7, 7, 7, 7, 4, 4, 4, 4, 4, 3] je váhový vektor, ktorý nám hovorí, koľko zástupcov má príslušná krajina v rade EU a $q_1 = 193$, $q_2 = 207$, $q_3=220$ sú kvóty (q - počet hlasov potrebných na zvolenie). Prezentujeme výsledky zo systému Mathematica wolframem, ktoré sme dostali pri počítaní Myersonovej hodnoty zo súhrnu volebných hlasov v Rade ministrov v Európskej Únii. Okrem toho, je táto hra obmedzená komunikačnou štruktúrou danou hviezdou $K_{1,26}$, ktorá udáva, že stupeň Nemecka (NE) je 26 a ďalšie krajiny majú stupeň 1. Potom množina súvislých koalícii je daná

$$F = \{S \subseteq N : Nemecko \in S \ \ alebo\ |S| = 1\} .$$

Program tvorí prílohu Apendix B.

Výsledky simulácie sú nasledovné:

Tabuľka č.2.3: Myersonove hodnoty pre jednotlivé krajiny EU27 pri kvótach 62, 65 a 70 potrebných na víťazstvo

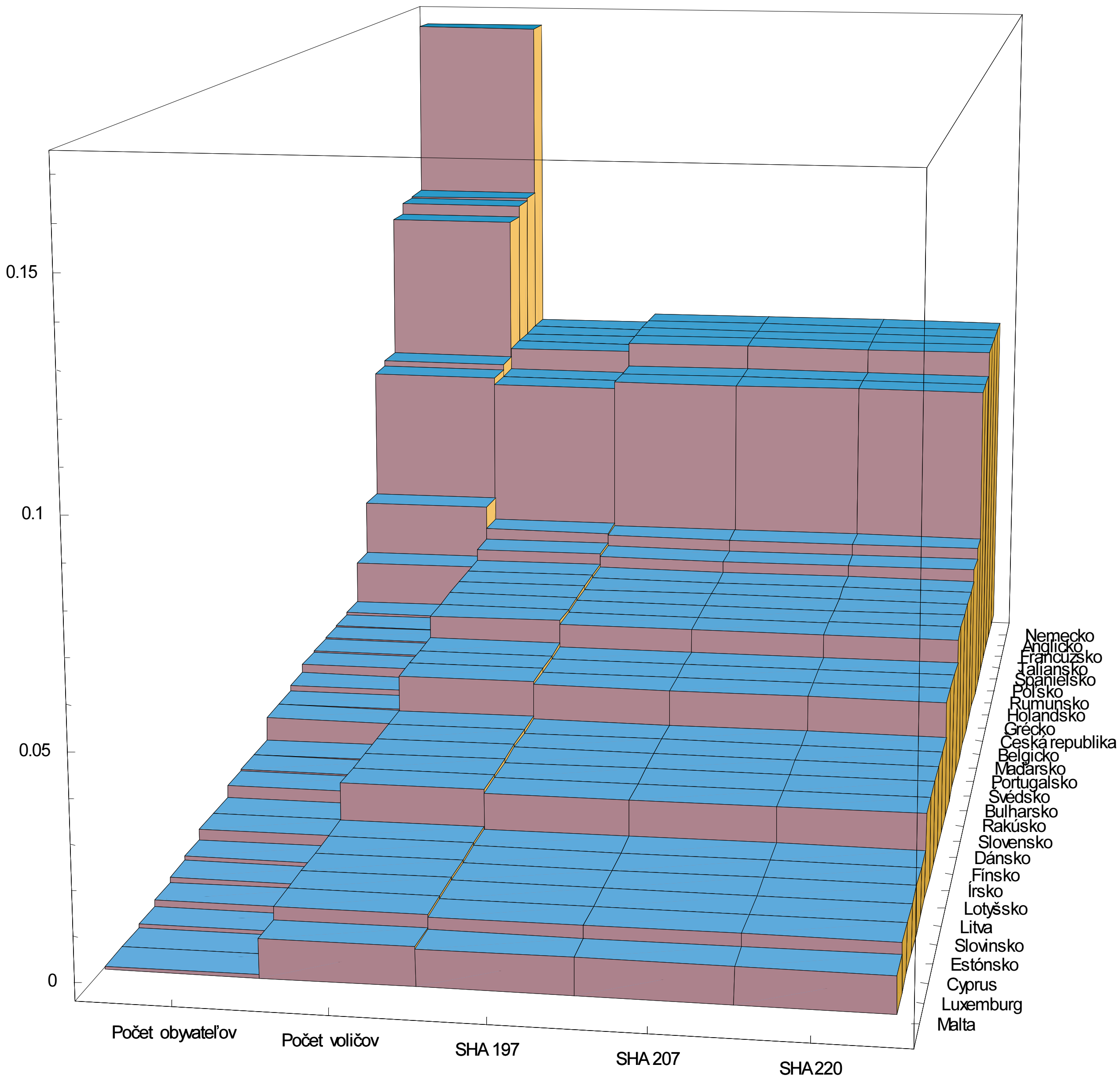
	# obyvateľov	# voličov	Myerson 193	Myerson 207	Myerson 220
GE	0.170	0.0841	0.449	0.410	0.374
UK	0.123	0.0841	0.0483	0.0518	0.0550
FR	0.123	0.0841	0.0483	0.0518	0.0550
IT	0.120	0.0841	0.0483	0.0518	0.0550
SP	0.0819	0.0783	0.0483	0.0518	0.0550
PL	0.0804	0.0783	0.0446	0.0478	0.0508
RU	0.0467	0.0406	0.0446	0.0478	0.0508
NE	0.0328	0.0377	0.0221	0.0237	0.0251
GR	0.0219	0.0348	0.0205	0.0219	0.0232
CZ	0.0214	0.0348	0.0189	0.0201	0.0214
BE	0.0212	0.0348	0.0189	0.0201	0.0214
HU	0.0210	0.0348	0.0189	0.0201	0.0214
PO	0.0207	0.0348	0.0189	0.0201	0.0214
SW	0.0184	0.0290	0.0189	0.0201	0.0214
BU	0.0171	0.0290	0.0156	0.0167	0.0177
AU	0.0168	0.0290	0.0156	0.0167	0.0177
→ SR	0.0112	0.0203	0.0156	0.0167	0.0177
DE	0.0110	0.0203	0.0108	0.0116	0.0122
FN	0.0107	0.0203	0.0108	0.0116	0.0122
IR	0.00778	0.0203	0.0108	0.0116	0.0122
LI	0.00769	0.0203	0.0108	0.0116	0.0122
LA	0.00507	0.0116	0.0108	0.0116	0.0122
SL	0.00411	0.0116	0.00614	0.00656	0.00694
ES	0.00301	0.0116	0.00614	0.00656	0.00694
CY	0.00156	0.0116	0.00614	0.00656	0.00694
LU	0.000892	0.0116	0.00614	0.00656	0.00694
MA	0.000788	0.00870	0.00614	0.00656	0.00694

Tabuľka a Graf znázorňujú obyvateľstvo, počet voličov a Myersonove hodnoty pre hlasovacie hry v Rade Európskeho spoločenstva, EU27 ohraničenej „nemeckou hviezdou“ $K_{1,26}$. Používame väčšinové hlasovacie pravidlo, predpokladané v prípadoch potrebnej kôry 193 (3/4), 207 (5/7) a 220 (4/5) hlasov z 276 voličov v Rade EU.

Tabuľka č.2.4: Shapley-Shubikove indexy pre jednotlivé krajiny EU27 pri kvótach 62, 65 a 70 potrebných na víťazstvo

	# obyvateľov	# voličov	SHA 193	SHA 207	SHA 220
GE	0.170	0.0841	0.0867	0.0867	0.0867
UK	0.123	0.0841	0.0867	0.0867	0.0867
FR	0.123	0.0841	0.0867	0.0867	0.0867
IT	0.120	0.0841	0.0867	0.0867	0.0867
SP	0.0819	0.0783	0.0802	0.0801	0.0802
PL	0.0804	0.0783	0.0802	0.0801	0.0802
RU	0.0467	0.0406	0.0399	0.0399	0.0399
NE	0.0328	0.0377	0.0370	0.0370	0.0370
GR	0.0219	0.0348	0.0340	0.0340	0.0340
CZ	0.0214	0.0348	0.0340	0.0340	0.0340
BE	0.0212	0.0348	0.0340	0.0340	0.0340
HU	0.0210	0.0348	0.0340	0.0340	0.0340
PO	0.0207	0.0348	0.0340	0.0340	0.0340
SW	0.0184	0.0290	0.0282	0.0282	0.0282
BU	0.0171	0.0290	0.0282	0.0282	0.0282
AU	0.0168	0.0290	0.0282	0.0282	0.0282
→ SR	0.0112	0.0203	0.0196	0.0196	0.0196
DE	0.0110	0.0203	0.0196	0.0196	0.0196
FN	0.0107	0.0203	0.0196	0.0196	0.0196
IR	0.00778	0.0203	0.0196	0.0196	0.0196
LI	0.00769	0.0203	0.0196	0.0196	0.0196
LA	0.00507	0.0116	0.0111	0.0111	0.0111
SL	0.00411	0.0116	0.0111	0.0111	0.0111
ES	0.00301	0.0116	0.0111	0.0111	0.0111
CY	0.00156	0.0116	0.0111	0.0111	0.0111
LU	0.000892	0.0116	0.0111	0.0111	0.0111
MA	0.000788	0.00870	0.00830	0.00829	0.00830

Obrázok č.2.8: Shapley-Shubikove indexy pre jednotlivé krajiny EU27 pri kvótach 193, 207, a 220



ZÁVER.

V súčasnosti neexistuje žiadna literatúra zaoberajúca sa hlasovacími hrami v slovenčine. Touto diplomovou prácou sme sa pokúsili poskytnúť všeobecný prehľad teórie volebných hier, vybudovanie terminológie a načrtnutie základných problémov, ktoré sa v tejto teórii vyskytujú. Všetky poznatky sme získali z odborných článkov, ktoré sú prístupné na internete. Problematika volebných hier je medziodborová vedná disciplína, ktorej sa venujú jednak ekonómovia, sociológovia, ba dokonca aj právnici. V druhej kapitole sme sa podrobnejšie zaoberali novým princípom generovanie mocenských indexov. Mocenský index sme definovali nasledovne: *Moc strany P s n členmi sa rovná počtu koalícií, pre ktoré sú členovia strany P absolútne nevyhnutní na získanie majority.* Mayersonova hodnota je interpretovaná ako určitá modifikácia Shaplyeovej hodnoty pre normálnu hru, v ktorej je komunikácia medzi hráčmi obmedzená neorientovaným grafom. Každá hrana grafu reprezentuje priamu kooperatívnu komunikáciu medzi hráčmi, ktorí sú reprezentovaními uzlami na každom konci hrany.

V súčasnej dobe sú najpoužívanejšie indexy: Myersonova hodnota a Shapley-Shubikov index. Teóriu týchto mocenských indexov sme aplikovali na modely EU15 a EU27 s obmedzenou komunikačnou štruktúrou danou hviezdou $K_{1,14}$ resp. $K_{1,26}$.

V softwérovom balíčku Mathematica sme naprogramovali generovanie Myersonovej hodnoty a Shapley-Shubikovho indexu. Výsledky simulácie nám dávajú jasnú predstavu o tom, ako ovplyvní „mocenskú silu“ jednotlivých krajín EU pribratie nových členov. Za zmienku stojí aj fakt akú veľkú „volebnú silu“ bude mať Slovensko v novej Európe.

LITERATÚRA:

[1] Banzhaf, J. F. III (1965). Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis. Rutgers Law Review 19, 317—343.

[2] Bilbao, J. M. (1998). Values and potential of games with cooperation structure. International Journal of Game Theory 27, 131—145.

[3] Bilbao, J. M. (2000). Cooperative games on combinatorial structures. Kluwer Academic Publishers, Boston.

[4] Carter, M. (1993). Cooperative games. In H. R. Varian, Ed., Economic and Financial Modeling with Mathematica. Springer-Verlag, Berlin, 167—191.

[5] Edelman, P. H. and R. E. Jamison (1985). The theory of convex geometries. Geometriae Dedicata 19, 247—270.

[6] Gacs, P. and L. Lovasz (1999). Complexity of Algorithms. Lecture Notes, Yale University,http://www.esi2.us.es/˜mbilbao/pd.les/complex.pdf

[7] Herne, K. and H. Nurmi (1993). The distribution of a priori voting power in the EC Council of Ministers and the European Parliament. Scandinavian Political Studies 16, 269—284.

[8] Jamison, R. E. (1987). Alternating Whitney sums and matchings in trees, Part I. Discrete Mathematics 67, 177—189.

[9] Jamison, R. E. (1989/90). Alternating Whitney sums and matchings in trees, Part II. Discrete Mathematics 79, 177—189.

[10] Knuth, D. E. (1976). Big omicron and big omega and big theta. ACM SIGACT News 8, 18—24.

[11] Lane, J. E. and R. Maeland (1995). Voting power under the EU Constitution. Journal of Theoretical Politics 7, 223—230.

[12] Myerson, R. B. (1977). Graphs and cooperation in games. Mathematics of Operations Research 2, 225—229.

[13] Owen, G. (1986). Values of graph-restricted games. SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 7, 210—220.

[14] Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. Annals of Mathematical Studies 28, 307—317.

[15] Shapley, L. S., and M. Shubik (1954). A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System. American Political Science Review 48, 787—792.

[16] Skiena, S. (1990). Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

[17] Stanley, R. P. (1986). Enumerative Combinatorics, Vol I. Wadsworth, Monterey, California.

[18] Widgren, M. (1994). Voting power in the EC decision making and the consequences of two diserent enlargements. European Economic Review 38, 1153—1170.

[19] Wolfram, S. (1991). Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

[20.] Dennis Mueller, Public Choice (New York: Cambridge University Press, 1979),

[21.] Peter Ordeshook, Game Theory and Political Theory: An Introduction (Cambridge University Press, 1986).

[22.] Steve Brams, Rational Politics (Washington: CQ Press, 1985).

[23.] J. Green and J. J.,Public Decision (Amsterdam: North Holland, 1979).

Register

P r í l o h a A

ZÁKLADNÉ POJMY

Teória hier (TH) sa zaoberá riešením konfliktných a nekonfliktných situácií.

Nekonfliktná situácia je taká rozhodovacia situácia, ktorej sa zúčastňuje iba jeden hráč. Aby sa mohol rozhodnúť, musí poznať množinu všetkých svojich možných rozhodnutí a vedieť oceniť všetky svoje rozhodnutia.

Konfliktná situácia *(konflikt)* je taká rozhodovacia situácia, ktorá vyhovuje nasledujúcim podmienkam:

- Počet účastníkov konfliktu je konečný.
- Každý účastník konfliktu pozná množinu všetkých svojich rozhodnutí (stratégií) a množiny rozhodnutí svojich súperov.
- Každý účastník konfliktu vie oceniť svoje rozhodnutie vzhľadom na rozhodnutie svojich súperov.

Na základe určitých kritérií si účastníci konfliktnej situácie vyberú jednu svoju stratégiu. Konflikt sa rieši z hľadiska prvého účastníka. Predpokladajme, že aspoň jeden účastník je ***inteligentný,*** t.j. rozhoduje sa tak, aby boli jeho rozhodnutia čo najvýhodnejšie pre neho. ***Neinteligentných*** účastníkov charakterizuje náhodný mechanizmus rozhodovania (príroda). Ak poznáme mechanizmus správania neinteligentného účastníka, hovoríme o ***rizikovom rozhodovaní,*** v opačnom prípade o ***rozhodovaní pri neurčitosti***. Účastník konfliktu, ktorý sa s pravdepodobnosťou *p* chová ako inteligentný a s pravdepodobnosťou *1-p* ako neinteligentný, sa **nazýva** ***p- inteligentný.***

Rozoznávame nasledujúce druhy konfliktných situácií :

- ***Antagonistický konflikt.*** Ak sa konfliktu zúčastňujú 2 inteligentní účastníci a volia svoje stratégie tak, aby si zabezpečili maximálne výhry. Pričom výhra jedného účastníka ide na úkor druhého účastníka (spoločenské hry, vojenský konflikt).
- ***Neantagonistický konflikt***. Konfliktu sa zúčastňujú najmenej 2 účastníci. Aj tu inteligentní účastníci maximalizujú svoje výhry. Výhra jedného účastníka ide na úkor ostatných účastníkov. Ak navyše účastníci môžu uzatvárať záväzné dohody o svojich rozhodnutiach, hovoríme o ***kooperatívnej teórii.*** Ak dochádza aj k prerozdeľovaniu výhier účastníkov, hovoríme o ***kooperatívnej teórii s prenosnou výhrou.*** Ak však výhry nie je možné znovu prerozdeliť, hovoríme o ***kooperatívnej teórii s neprenosnou výhrou.***

V prípadoch, keď účastníci konfliktu majú možnosť viackrát za sebou rozhodovať hovoríme, že majú viac ***ťahov***(šach, dáma, piškôrky). Podľa počtu účastníkov delíme konfliktné situácie na konflikty s dvoma účastníkmi a viacerými účastníkmi.

1.1 HRA V NORMÁLNOM TVARE

Podobnosť medzi salónnymi hrami a ekonomickými alebo vojenskými rozhodnutiami matematicky formalizovali J. von Neuman a O. Morgenstern. U nás sa problematikou zaoberali Turnovec, Chobot a Winkelbauer.

Definícia 1.1 **:** Nech Q={1,2,3,…,N} je konečná neprázdna množina. Jej prvky nazveme ***hráčmi.*** Ďalej máme N množín $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ a N reálnych funkcií $M_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N), \ldots, M_N(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$ definovaných na množine $X_1 x X_2 x X_3 x \ldots x X_N$.

Hrou N hráčov v normálnom tvare rozumieme množinu $\{Q; X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N; M_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N), \ldots, M_N(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)\}$, kde Q je množina hráčov, X_i je priestor stratégií i-teho hráča, $x_i \in X_i$ je stratégia i-teho hráča a $M_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) < 0$ hovoríme, že hráč i zaplatí (prehrá) čiastku $-M_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$

Hru v normálnom tvare považujeme za matematický model konfliktnej situácie. Každý hráč $i \in Q$ volí nejaký prvok $x_i \in X_i$. Potom hráči svoje voľby zverejnia a i-ty hráč dostane čiastku $M_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$ .Predpokladá sa, že všetkým hráčom sú známe všetky prvky hry, t.j. aj stratégie ostatných hráčov.

Príklad A.1.2. $Q=\{1, 2\}, X_1=\{0, 1\}, X_2=\{0, 1\}$

$$M_1(x_1, x_2)=2x_1 + x_2, \quad M_2(x_1, x_2)=-2x_1 - x_2$$

Výplaty hráča 1 sú $M_1(0, 0)=0$, $M_1(0, 1)=1$, $M_1(1, 0)=2$, $M_1(1, 1)=3$ a hráča 2 sú platby $M_2(0, 0)=0$, $M_2(0, 1)=-1$, $M_2(1, 0)=-2$, $M_2(1, 1)=-3$. Hráč 2 nikdy nevyhráva. Ak sú obaja hráči inteligentní, snažia sa čo najviac vyhrať a čo najmenej prehrať. Budú voliť $x_1=1$, $x_2=0$.

Definícia 1.2.*:** Hru v normálnom tvare nazveme ***konečnou, ak priestory stratégií všetkých hráčov sú konečné množiny, ináč ju nazveme ***nekonečnou*** •

Príklad A.1.3. Príklad A.1.2 je konečná hra.

***Definícia 1.2.*:** Hru v normálnom tvare, v ktorej $\forall i \in Q$,

$$\forall x_i \in X_i \ , \ \sum_{i \in Q} M_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_N) = K \ ,$$

kde K je konštanta nezávislá na voľbe stratégií $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$, nazývame ***hra s konštantným súčtom výplat.*** Ak K=0 hovoríme o ***hre s nulovým súčtom výplat.*** Ak súčet $\sum_{i \in Q} M_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_N) = K$ závisí od zvolených stratégií hovoríme o ***hre s nekonštantným súčtom*** •

Príklad A.1.4. Príklad A.1.2 je hra s nulovým súčtom.

Príklad A.1.5. $Q=\{1, 2, 3\}, X_1=\{0, 2\}, X_2=\{1, 2\}, X_3=\{2, 3, 4\}$

$M_1(x_1, x_2, x_3)= x_1 + 2x_2 + 3x_3$,

$M_2(x_1, x_2, x_3)=- x_1 + 2x_2 - x_3$,

$M_3(x_1, x_2, x_3)= x_2 + x_3$,

Pretože platí $\sum_{i=1}^{3} M_i(x_1, x_2, x_3) = 5x_2 + 3x_3$ ide o hru 3 hráčov v normálnom tvare s nekonštantným súčtom.

Príklad A.1.6. Dve firmy **A** a **B** súťažia o trhy v n krajinách. Firmy **A, B** už investovali čiastky [Sk] a_i , b_i , $i =1, ..., n$ a chcú investovať do reklamy a rozvoja služieb čiastky a, b. Predpokladá sa, že obe firmy investujú rovnako efektívne, a tak celkový objem objednávok i-tej krajiny s_i sa rozdelí proporcionálne k investovaným sumám. Ako majú optimálne investovať firmy **A, B** čiastky *a, b?*

Budeme predpokladať, že do každej z krajín investovala aspoň jedna firma t.j. $a_i + b_i > 0$. Označíme x_i, y_i dodatočný počet Sk investovaných firmami A, B do i-tej krajiny s priestormi stratégií

$$X = \left\{ x \in E_n^+ \ : \sum_{j=1}^{n} x_j = a \right\}$$

$$Y = \left\{ y \in E_n^+ : \sum_{j=1}^{n} y_j = b \right\}$$

Celkový objem objednávok získaných firmami A., B je

$$M_1(x+y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i + x_i) s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i},$$

$$M_2(x+y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(b_i + y_i) s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i}.$$

Vidíme, že ide o nekonečnú hru dvoch hráčov s konštantným súčtom

$$M_1(x, y) + M_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} s_i = K.$$

1.2 NEKONFLIKTNÁ ROZHODOVACIA SITUÁCIA

Matematickým modelom nekonfliktnej rozhodovacej situácie je hra v normálnom tvare, v ktorej sa snaží jediný hráč, nájsť v priestore stratégií X_i takú stratégiu $x_i \in X_i$, ktorá mu zabezpečí maximálnu výhru $M(x_i)$.

Definícia 1.4.*:** Nech $\{Q, X, M(x)\}$ je hra v normálnom tvare, ktorá je modelom nekonfliktnej situácie. ***Optimálnou stratégiou v tejto hre rozumieme taký prvok $x^* \in X$, pre ktorý platí

$$M(x^*) = \max_{x \in X} M(x)$$

Ak taký prvok neexistuje hovoríme, že hra nemá riešenie •

2.1 ANTAGONISTICKÝ KONFLIKT

Matematickým modelom antagonistického konfliktu je hra 2 hráčov s konštantným súčtom. Stratégia hráčov je tu založená na zásade: *Kto sa odchýli nemôže si prilepšiť.* Žiadna odchýlka od takej stratégie hráča nemôže priniesť hráčom výhodu za predpokladu, že súper (druhý hráč) zachováva túto stratégiu.

Definícia 2.1.* :** Nech $\{Q = \{1,2\}, x, y, M_1(x,y), M_2(x,y)\}$ je hra v normálnom tvare s konštantným súčtom. Stratégie $x^* \in X$ a $y^* \in Y$ nazveme ***rovnovážne, ak pre $\forall x \in X$ a $\forall y \in Y$ je

$$M_1(x, y^*) \le M_1(x^*, y^*)$$

$$M_2\left(x^*,y\ \right)\le M_2\left(x^*,y^*\right)$$

Dvojicou x^*,y^* budeme tiež nazývať ***rovnovážnou stratégiou hry***. Ak je

$$\{Q=\{1,2\},X,Y,M(x,y)\}$$

hra v normálnom tvare 2 hráčov s nulovým súčtom, potom môžeme nerovnosti

$M_1\left(x,y^*\right)\le M_1\left(x^*,y^*\right)$ a $M_2\left(x,y^*\right)\le M_2\left(x^*,y^*\right)$ prepísať

$$M\left(x,y^*\right)\le M\left(x^*,y^*\right)\le M\left(x^*,y\right)$$

Číslo $M\left(x^*,y^*\right)$ nazývame ***cena hry*** •

3.1 NEANTAGONISTICKÝ KONFLIKT DVOCH ÚČASTNÍKOV

Častejšie ako s antagonistickými konfliktmi sa stretávame s konfliktmi, v ktorých každý z inteligentných účastníkov sleduje svoje záujmy, ktoré sú len *čiastočne protichodné*. Vzniká možnosť koordinácie volebných rozhodnutí s cieľom dosiahnuť obojstranne výhody.

<u>Definícia 3.1.</u> **:** Nech X,Y sú neprázdne množiny. ***Neantagonistickou hrou dvoch hráčov*** rozumieme hru v normálnom tvare

$$\{Q=\{1,2\},X,Y,M_1(x,y),M_2(x,y)\}$$

s nekonštantným súčtom

$$M_1(x,y)+M_2(x+y)=\mu(x,y)$$

Hovoríme o neantagonistickej hre:

- ***nekooperatívnej*** – ak nie je možná dohoda medzi hráčmi,

- ***kooperatívnej s prenosnou výhrou*** – ak je možná dohoda medzi hráčmi o stratégii aj prerozdelení výhry.
- ***kooperatívnej s neprenosnou výhrou*** – ak je možná len dohoda medzi hráčmi o stratégii •

Definícia 3.2. **:** Nech $\left(x^*, y^*\right)$ je dvojica rovnovážnych stratégií v hre $\left\{Q=\{1,2\}, X, Y, M_1(x,y), M_2(x,y)\right\}$ s vlastnosťou

$$M_1\left(x^*, y^*\right) \geq M_1\left(x^*, y^*\right),$$

$$M_2\left(x, y^*\right) \geq M_2\left(x^*, y^*\right),$$

kde $\left(x^*, y^*\right)$ je ľubovoľná iná dvojica rovnovážnych stratégií hry $\left\{Q=\{1,2\}, X, Y, M_1(x,y), M_2(x,y)\right\}$. Potom dvojicu $\left(x^*, y^*\right)$ nazveme ***dominovanou dvojicou rovnovážnych stratégií*** *(dominovanou rovnovážnou stratégiou)* hry •

$M_1(x,y), M_2(x,y)$	**1**	**2**	**3**
1	3,2	1,2	→ **8,9**
2	1,1	4,4	-4,3
3	→ **8,9**	1,-2	-3,-3

Tabuľka 3.1: Dominovane rovnovážne stratégie

Príklad A.3.1. (Dve dominovane rovnovážne stratégie) Máme nekooperatívnu hru určenú tabuľkou 3.1. Rozhodnime, či je dominujúca rovnovážna stratégia hry racionálnou voľbou oboch hráčov.

V tejto hre máme dve dvojice dominujúcich rovnovážnych stratégií $x^*=1,\ y^*=3$ *a* $x^*=3,\ y^*=1$. Pri nedostatku komunikácie medzi hráčmi sa môže stať, že zvolia $x^*=1,\ y^*=1$ *a* $x^*=3,\ y^*=3$, ktoré sú pre oboch hráčov nepriaznivé. Pre racionálnu voľbu to nestačí, je potrebná dohoda o stratégii.

Problematickú situáciu v príklade 3.1 možno vylúčiť nasledujúcou definíciou.

<u>Definícia 3.3.</u> **:** Nech I je ľubovoľná množina indexov, taká že $\left(x_i^*, y_i^*\right)$, $i \in I$ sú dvojice rovnovážnych stratégií hry $\left\{Q=\{1,2\}, X, Y, M_1(x,y), M_2(x,y)\right\}$. Potom množinu Z dvojíc rovnovážnych stratégií nazveme ***zámennou sústavou,*** ak sa funkčné hodnoty výplatných funkcií nezmenia pri zámene $x_i^*, i \in I$ za x a $y_i^*, i \in I$ za y, t.j.

$$Z=\left\{\left(x_i^*, y_i^*\right): i \in I, M_1\left(x_i^*, y_j^*\right)=m_1^*, M_2\left(x_i^*, y_j^*\right)=m_2^*, j \in I\right\}.$$

4.1 HRY N HRÁČOV

Budeme predpokladať, že každý z N hráčov ($N \geq 2$) je inteligentný hráč.

4.1.1 NEKOOPERATÍVNE HRY N HRÁČOV

Definícia 4.1. : N-ticu stratégií $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, ..., x_N^*\right), x_i^* \in X_i, i = 1, ..., N$ nazveme ***rovnovážnou stratégiou*** v hre N hráčov v normálnom tvare

$$\left\{Q = \{1, ..., N\}; X_1, ..., X_N; M_1(x), ..., M_N(x)\right\},$$

ak pre $\forall i = 1, ..., N \quad \forall x_i \in X_i$ platí

$$M_1\left(x^*_1, ..., x^*_{i-1}, x_i, x^*_{i+1}, ..., x^*_N\right) \le M_i\left(x^*_1, ..., x^*_N\right) \bullet$$

Poznámka: Rovnovážna stratégia nič nehovorí o priebehu konfliktu, ak sa od nej odchýlia obaja hráči naraz! Je významná najmä, ak je určená jednoznačne.

Veta 4.1: Nech hra N hráčov má v normálnom tvare tieto vlastnosti:

- X_i sú *kompaktné konvexné podmnožiny euklidovského* E^{mi}*,i=1,...,N priestoru,*
- $M_i\left(x_1, ..., x_i, ..., x_N\right)$ *sú konkávne funkcie v premenných* $x_i \in X_i$,
- funkcia $\sum_{i=1}^{N} M_i(x)$ je spojitá na $X_1 \times X_2 \times X_3 \times ... \times X_N$,
- $\forall x_i \in X_i$ pevné funkcie $M_i\left(x_1, ..., x_i, ..., x_N\right)$ spojité na množine $X_1 \times ... \times X_{i-1} \times X_{i+1} ... \times X_N$.

Potom má hra *aspoň* jednu N-ticu *rovnovážnych stratégií.*

4.1.2 KOOPERATÍVNE HRY N HRÁČOV

Kľúčovými pojmami v teórii kooperatívnych hier viacerých hráčov je pojem ***koalícia a koaličná štruktúra.***

Definícia 4.2: Uvažujme hru v normálnom tvare s množinou hráčov *Q={1,2,...,N}*. ***Koalíciou*** v tejto hre nazývame každú podmnožinu $S \subset Q$. ***Koaličnou štruktúrou*** v tejto hre rozumieme množinu

$$K = \left\{ K_i : i = 1,...,r; K_i \subset Q \; ; \bigcup_{i=1}^{r} K_i = Q \right\}.$$

Ak pre koaličnú štruktúru *K* platí pre $\forall i, j \in Q, i \neq j$ $K_i \bigcap K_j = 0$, hovoríme o „voľnej“ ***disjunktnej koaličnej štruktúre (DKŠ),*** v opačnom prípade hovoríme o ***nedisjunktnej koaličnej štruktúre (NKŠ)*** •

4.1.3 HRY V TVARE CHARAKTERISTICKEJ FUNKCIE

Pri analýze hier s DKŠ s prenosnými výhrami nie je nutné sledovať činnosť hráčov tvoriacich koalíciu, stačí poznať kvantitatívnu charakteristiku sily koalície.

Definícia 4.3: Nech *Q={1,2,...,N}*. ***Charakteristickou funkciou*** hry s množinou hráčov *Q* rozumieme (množinovú) reálnu funkciu

$$v : S \to R, S \subset Q,$$

ktorá má tieto vlastnosti:

$$v(0) = 0$$
$$v(S_1) + v(S_2) \leq v(S_1 \cup S_2), \forall S_1, S_2 \subset Q, S_1 \cap S_2 = 0$$

Dvojicu (Q, v) nazývame (kooperatívnou) ***hrou N hráčov v tvare charakteristickej funkcie*** •

Poznámka : Superaditívnosť

$$v(S_1) + v(S_2) \leq v(S_1 \cup S_2), \forall S_1, S_2 \subset Q, S_1 \cap S_2 = 0$$

charakteristickej funkcie vyjadruje vlastnosť, že výhra väčšej koalície je najmenej rovná súčtu výhier menších koalícií.

Definícia 4.4: Hru v tvare charakteristickej funkcie nazveme ***hrou s konštantným súčtom,*** ak pre každú koaličnú štruktúru $\{K_1, K_2, K_3, ..., K_r\}$ platí

$$v(K_1) + v(K_2) + ... + v(K_r) = v(Q) \bullet$$

P r í l o h a B

ZDROJOVÝ KÓD PROGRAMU ZO SOFTVERA MATHEMATICA

Clear[n, graph, weight, edges, q, f]
n = 27; graph = Star[n];

countries = {"GE", "UK", "FR", "IT", "SP", "PL", "RU", "NE", "GR", "CZ", "BE","HU", "PO", "SW", "BU", "AU", "SR", "DE", "FN", "IR", "LI", "LA", "SL","ES", "CY", "LU", "MA"};

population = {82.038, 59.247, 58.966, 57.612, 39.394, 38.667, 22.489, 15.760, 10.533, 10.290, 10.213, 10.092, 9.980, 8.854, 8.230, 8.082, 5.393, 5.313, 5.160, 3.744, 3.701, 2.439, 1.978, 1.446, 0.752, 0.429, 0.379};
PUE = SetPrecision[%/Plus @@ %, 3]

ShowLabeledGraph[graf, countries]

weights = {29,29,29, 29,27,27,14,13, 12,12, 12, 12, 12, 10, 10, 10, 7,7, 7, 7, 7, 4, 4, 4, 4, 4, 3};
VUE = SetPrecision[%/Plus @@ %, 3]

edges = Flatten[Prepend[{n}, #]] & /@ Partition[Range[n - 1], 1]
f[{i_}, weights_List, edges_List] :=
Module[{arcs, A, adjacents, factor, value},arcs = edges;
A = Select[arcs, (MemberQ[#, i]) &];adjacents = Complement[Flatten[A], {i}];
arcs = Complement[arcs, A];
factor = (1 + f[#, weights, arcs]) & /@ Partition[adjacents, 1];
value = z*x^(weights[[i]])*Times @@ factor;
factor =. & /@ Partition[adjacents, 1];
Return[value]]

MyersonStarPlayer[i_, weights_List, q_] :=
Module[{g, coeff, m, gg},g = Expand[f[{i}, weights, edges]];coeff = CoefficientList[g, x];
m = Exponent[g, x] + 1;gg = Apply[Plus, coeff[[Range[q + 1, Min[m, q + weights[[i]]]]]]];
Sum[Coefficient[gg, z^j]*(j - 1)!*(n - j)!, {j, 2, n}]/n!]

MyersonStarCenter[weights_List, q_] :=
Module[{g, coeff, m, gg},g = Expand[f[{n}, weights, edges]];coeff = CoefficientList[g, x];
m = Exponent[g, x] + 1;gg = Apply[Plus, coeff[[Range[q + 1, m]]]];
Sum[Coefficient[gg, z^j]*(j - 1)!*(n - j)!, {j, 2, n}]/n!]

MyersonStarExtreme[weights_List, q_] := Module[{value},
value = Table[MyersonStarPlayer[i, weights, q], {i, n - 1}];
Return[value]]

MyersonStar[weights_List, q_] :=

```
Prepend[MyersonStarExtreme[weights, q], MyersonStarCenter[weights, q]]

b = SetPrecision[MyersonStar[weights, 207], 3];
a = SetPrecision[MyersonStar[weights, 193], 3];
c = SetPrecision[MyersonStar[weights, 250], 3];

TableForm[Transpose[{PUE, VUE, a, b, c}],
  TableHeadings -> {countries, {"# obyvatelov", "# voli\[CHacek]ov",
      "Myerson 193", "Myerson 207", "Myerson 220 \n"}}]

grafMyeUE =
  BarChart3D[{Reverse[PUE], Reverse[VUE], Reverse[a], Reverse[b], Reverse[c]},
    Boxed -> True, BoxRatios -> {0.5, 1, 0.5}, ViewPoint -> {0.4, -2.5, 0.5},
    Ticks -> {{{1, "Po\[CHacek]et obyvate\:017eov"}, {2,
          "Po\[CHacek]et voli\[CHacek]ov"}, {3, "Myerson 193"}, {4,
          "Myerson 207"}, {5, "Myerson 220"}}, {{27, "Germany"}, {26,
          "United Kingdom"}, {25, "France"}, {24, "Italy"}, {23,
          "Spain"}, {22, "Poland"}, {21, "Romania"}, {20,
          "Netherlands"}, {19, "Greece"}, {18, "Czech Republic"}, {17,
          "Belgium"}, {16, "Hungary"}, {15, "Portugal"}, {14,
          "Sweeden"}, {13, "Bulgaria"}, {12, "Austria"}, {11,
          "Slovak Republic"}, {10, "Denmark"}, {9, "Finland"}, {8,
          "Ireland"}, {7, "Lithuania"}, {6, "Latvia"}, {5, "Slovenia"}, {4,
          "Estonia"}, {3, "Cyprus"}, {2, "Luxembourg"}, {1, "Malta"}},
      Automatic}, DefaultFont -> {"Arial", 12}]

ssG[weights_List] := Times @@ (1 + z x^weights)
Length[ssG[votosUE] // Expand]
ssPowerPlus[weights_List, q_Integer] :=
Module[{n = Length[weights], delw, sw, g, gg, coefi},

Table[delw = Delete[weights, i];
g = ssG[delw];
sw = Apply[Plus, delw] + 1;
coefi = CoefficientList[g, x];
gg = Apply[Plus, coefi[[
Range[Max[1, q - weights[[i]] + 1], Min[q, sw]]]]];
Sum[Coefficient[gg, z, j] j! (n - j - 1)!, {j, n - 1}], {i, n}]/n!]

Timing[ssPowerPlus[votosUE, 62]]
Timing[ssPowerPlus[votosUE, 70]];

shaUE = Table[SetPrecision[ssPowerPlus[votosUE, i], 3], {i, 193, 221}];

TableForm[Transpose[{PUE, VUE,
SetPrecision[shaUE[[2]], 3], SetPrecision[shaUE[[5]], 3],
    SetPrecision[shaUE[[9]], 3]}],
TableHeadings -> {countries, {"# obyvate\:017eov", "# voli\[CHacek]ov",
"SHA 193", "SHA 207", "SHA 220 \n "}}]
```

```
grafMyeUE =
 BarChart3D[{Reverse[PUE], Reverse[VUE], Reverse[shaUE[[2]]],
    Reverse[shaUE[[5]]], Reverse[shaUE[[9]]]}, Boxed -> True,
  BoxRatios -> {0.5, 1, 0.5}, ViewPoint -> {0.4, -2.5, 0.5},
  Ticks -> {{{1, "Po\[CHacek]et  obyvate\:017eov"}, {2,
        "Po\[CHacek]et  voli\[CHacek]ov"}, {3, "SHA 193"}, {4,
        "SHA 207"}, {5, "SHA 220"}}, {{27, "Germany"}, {26,
        "United Kingdom"}, {25, "France"}, {24, "Italy"}, {23,
        "Spain"}, {22, "Poland"}, {21, "Romania"}, {20,
        "Netherlands"}, {19, "Greece"}, {18, "Czech Republic"}, {17,
        "Belgium"}, {16, "Hungary"}, {15, "Portugal"}, {14,
        "Sweeden"}, {13, "Bulgaria"}, {12, "Austria"}, {11,
        "Slovak Republic"}, {10, "Denmark"}, {9, "Finland"}, {8,
        "Ireland"}, {7, "Lithuania"}, {6, "Latvia"}, {5, "Slovenia"}, {4,
        "Estonia"}, {3, "Cyprus"}, {2, "Luxembourg"}, {1, "Malta"}},
    Automatic}, DefaultFont -> {"Arial", 12}]

TableForm[Transpose[{PUE, VUE, a, shaUE[[1]], b, shaUE[[2]], c, shaUE[[3]]}],
TableHeadings -> {countries, {"Po\[CHacek]et obyvate\:017eov",
     "Po\[CHacek]et voli\[CHacek]ov", "Myerson 62", "SHA 62", "Myerson 65",
     "SHA 65", "Myerson 70", "SHA 70 \n"}}
```