FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika

MODELOVANIE ROZDELENIA BOHATSTVA V SPOLOČNOSTI

Diplomant: Branislav Saxa
Vedúci práce: Doc. RNDr. Ján Boďa, CSc.

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

ČESTNE PREHLASUJEM, ŽE SOM TÚTO DIPLOMOVÚ PRÁCU VYPRACOVAL SAMOSTATNE S VYUŽITÍM UVEDENEJ LITERATÚRY.

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Jánovi Boďovi CSc. za užitočné rady a skvelú motiváciu pri tvorbe tejto práce. Úprimne ďakujem svojim rodičom za všestrannú podporu počas celého štúdia. V neposlednom rade ďakujem všetkým inšpiratívnym ľuďom, vďaka ktorým boli roky na vysokej škole tak zaujímavé.

Obsah

Úvod

Rozdelenie bohatstva v spoločnosti do veľkej miery ovplyvňuje náladu obyvateľstva v krajine. Tá je často rozhodujúca pre stabilitu spoločenského zriadenia a tak aj pre celkový blahobyt obyvateľov. Vlastnosti rozdelenia príjmov a bohatstva pritom odrážajú prerozdeľovacie procesy, ktoré medzi jednotlivcami prebiehajú a ktoré pre svoju komplexnosť nie sú zďaleka popísané.

Jednou z takýchto vlastností je mocninové rozdelenie. Napriek tomu, že to nie je najcharakteristickejšia črta distribúcie bohatstva, venujeme mu v práci samostatnú kapitolu. Dôvodom je jeho rozšírený výskyt v ekonomických a finančných dátach, kde je väčšinou výsledkom aktivity agentov, ktorí sa o svojom správaní rozhodujú na základe správania agentov z ich okolia. Súčasťou prvej kapitoly je okrem zhrnutia pozorovaní takýchto dát aj analýza slovenských dát. Skúmali sme rozdelenie denných zmien výmenného kurzu slovenskej koruny voči euru od októbra 1998, kedy centrálna banka zrušila fixný režim výmenného kurzu.

V druhej kapitole sa venujeme výsledkom pozorovaní rozdelenia príjmu a bohatstva v najväčších trhových ekonomikách. Tie odhaľujú spoločné črty rozdelenia v krajinách, v ktorých je miera deformácií pri procese rozdeľovania pomerne malá. Prvou ťažiskovou časťou práce - rozdelením príjmov na Slovensku - sa zaoberá tretia kapitola. Analyzovali sme v nej príjmy domácností ako aj dostupné údaje o príjmoch jednotlivcov.

V poslednej kapitole sa venujeme jadru našej snahy - modelovaniu rozdelenia bohatstva. V simuláciach pritom sledujeme vývoj rozdelenia bohatstva agentov, ktorí sú na začiatku úplne rovnocenní. Postupne do ich aktivity pridávame čo najjednoduchšie črty, ktoré odrážajú reálne procesy a ovplyvňujú výsledné rozdelenie. Cieľom je sledovať vplyv jednotlivých prvkov. So získanými poznatkami sa otvára možnosť popísať model, ktorý generuje rozdelenie kvalitatívne porovnateľné s pozorovaným a správa sa pri tom podľa jednoduchých, ale rozumných pravidiel.

Kapitola 1
VÝSKYT MOCNINOVÉHO ZÁKONA V EKONÓMII A FINANCIÁCH

Téma mocninového rozdelenia v ekonómii a financiách zažíva v posledných rokoch renesanciu. Záujem bol naštartovaný najmä zo strany ekonofyziky, ktorá s chuťou hľadá fyzikálne analógie a snaží sa vysvetľovať mikroskopické vzťahy v ekonomických a finančných dejoch. Výzvy však v tom istom čase prichádzajú aj z biológie, meteorológie a prostredia informačných technológií, kde sa výskyt mocninového rozdelenia v poslednom čase takisto objavuje a skúma. Všade je spojený s neurčitým správaním agentov združených do komplexného systému. Agenti sa o svojej aktivite rozhodujú v rovnakom prostredí a čase, často na základe rovnakých informácií, ovplyvnení konaním ostatných agentov. Mechanizmus vedúci k mocninovému rozdeleniu je však vo väčšine prípadov stále nepopísaný. Náročnosť spracovania dát v spojení s rastúcou kapacitou výpočtových systémov je ďalším faktorom spôsobujúcim záujem o túto tému doslova v posledných mesiacoch. Napriek tomu je treba spomenúť štúdiu, ktorú v roku 1897 predstavil Pareto a ktorá pravdepodobne ako prvá popisovala platnosť "univerzálneho mocninového zákona", ktorému malo podliehať rozdelenie bohatstva vždy a vo všetkých krajinách. Neskoršie výskumy výrazne podlomili univerzálnosť tohto pravidla, avšak pojmy Paretov mocninový zákon, respektíve Paretovo rozdelenie si svoje miesto udržali.

1.1 Rozdelenie príjmov a bohatstva v spoločnosti

Aj keď mocninové rozdelenie popisuje distribúciu bohatstva len čiastočne, bohatstvo je pravdepodobne najznámejším príkladom z ekonomickej oblasti, v ktorom bola črta mocninového zákona identifikovaná. Podľa [3] boli v minulosti distribúcii bohatstva postupne pripisované mnohé rozdelenia: Levyho, lognormálne, Gamma rozdelenie, exponenciálne i rôzne formy mocninového. Táto pestrosť nevznikla len rôznymi dátami alebo vývojom rozdelenia v čase, ale hlavne rôznymi prístupmi k dátam. Pre potreby jednotlivých skúmaní sa rozdelenie považovalo raz za homogénne, inokedy sa celé spektrum majetku rozdelilo na dve alebo tri skupiny podľa veľkosti (nízka príjmová vrstva, stredná trieda a najvyššia príjmová skupina) a tie sa skúmali samostatne, pričom aj hľadanie mechanizmov vysvetľujúcich jednotlivé rozdelenia sa opieralo o rozdiely v praktickom nadobúdaní bohatstva u jednotlivých tried (u najnižšej vrstvy sú to zrejme iba mzdy a sociálne transfery, u najbohatšej skupiny plynie väčšina príjmov zo ziskov z investícií).

Pri týchto analýzach sa pojmy rozdelenie bohatstva a rozdelenie príjmov nie-kedy voľne zamieňajú ([4]), inokedy rozlišujú a skúmajú samostatne ([5]). Napriek tomu, že svojou podstatou sú rozdielne (bohatstvo je stavová veličina, príjem sa uvažuje ako "tok" bohatstva), v skutočnosti sú na sebe silne závislé a ich empirické rozdelenia sú z rovnakých tried ([5]).

Pri skúmaní dát sa pre potreby príjmu uvažuje spravidla celkový hrubý ročný príjem zahŕňajúci mzdu, sociálne transfery aj zisky plynúce z vlastníctva aktív. Takéto dáta sú zbierané väčšinou pre daňové účely. Údaje o celkovom bohatstve nie sú k dispozícii priamo (ak sa v niektorých krajinách aj robia majetkové priznania, hranica pre povinnosť podať takéto priznanie je pomerne vysoká a údaje vypovedajú len o najvyššej príjmovej skupine), avšak dajú sa rekonštruovať z údajov o majetku zomrelých. Do toho sa napríklad vo Veľkej Británii zahŕňa všetok majetok, teda peňažné prostriedky, akcie, nehnuteľnosti ako i hnuteľný majetok. Na druhej strane sa od tohto odpočítavajú záväzky([5]).

Ako teda vyzerá rozdelenie príjmov resp. bohatstva? Pri sledovaní distribúcie príjmov sa používa tzv. kumulatívna pravdepodobnosť $N(x)$, ktorá je definovaná ako pravdepodobnosť, že náhodný človek zo súboru má príjem väčší alebo rovný ako x:

$$N(x) = P(X \geq x) = \int_x^{\infty} f(r)dr \tag{1.1}$$

kde f je hustota rozdelenia pravdepodobnosti príjmu jednotlivca, X je náhodná premenná z tohoto rozdelenia. Štatistika vzťahujúca sa k $N(x)$ bude teda definovaná ako podiel počtu ľudí s príjmom väčším ako x a celkového počtu sledovaných osôb.

Zo skúmaní, ktoré prebehli v poslednom čase na dátach viacerých krajín a ktorým sa budeme podrobne venovať v samostatnej kapitole vyplýva, že pre väčšinu ľudí z nízkej a strednej príjmovej skupiny (resp. pre príjmy menšie ako istá hranica) je rozdelenie príjmov dobre popísané exponenciálnym rozdelením, teda

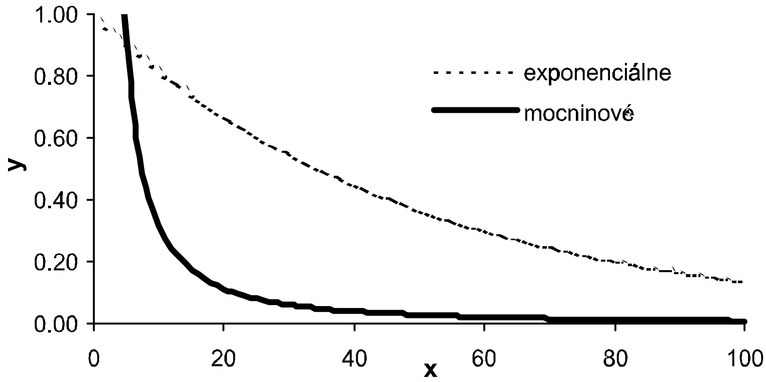
$$N(x) \approx e^{-\frac{x}{W}} \tag{1.2}$$

kde W je konštanta. Takto popísanej kumulatívnej pravdepodobnosti zodpovedá hustota rozdelenia pravdepodobnosti v tvare

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{W}}}{W} \tag{1.3}$$

To sa dá ukázať integráciou podľa vzťahu (1.1):

$$N(x) = \int_x^{\infty} f(r)dr = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{r}{W}}}{W}dr = \frac{1}{R}R \int_{-\infty}^{-\frac{x}{W}} e^y dy = e^{-\frac{x}{W}} \tag{1.4}$$



Obrázok 1 **Lineárno-lineárne zobrazenie**

Prekvapujúco, pre pomerne úzku skupinu ľudí s najvyššími príjmami (podľa [6] je to menej ako 3% populácie) sa charakter rozdelenia mení a je veľmi dobre popísané mocninovým rozdelením

$$N(x) \approx x^{-\alpha} \tag{1.5}$$

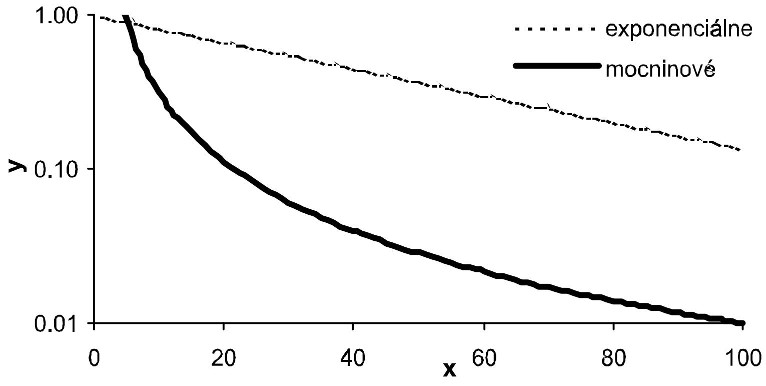
Táto zdanlivo okrajová črta je veľmi dobre podložená skúmaním reálnych dát. Na druhej strane, vznik tohoto mocninového chvosta nie je jednoznačne vysvetlený. Aj preto mu v tejto práci venujeme zvláštnu pozornosť. Ďalšie vlastnosti rozdelenia príjmov a bohatstva získané z dát sú diskutované podrobne v druhej kapitole, slovenským podmienkam je venovaná tretia a piata kapitola. Okrem toho sú v štvrtej kapitole predstavené modely, ktoré simulujú proces rozdeľovania príjmov z mikroskopického pohľadu.

Pre väčšiu zrozumiteľnosť používame v texte okrem bežného zobrazenia (os x - lineárna, os y - lineárna) aj log-lineárne zobrazenie (os x - lineárna, os y - logaritmická) a log-log zobrazenie (os x - logaritmická, os y - logaritmická). Výhodou týchto škálovaní je fakt, že v log-lineárnom zobrazení je exponenciálna funkcia reprezentovaná úsečkou, zatiaľ čo v log-log grafe je takto reprezentovaná mocninová funkcia. To samozrejme, najmä v našom skúmaní, výrazne zjednodušuje prvotnú identifikáciu rozdelení. Pre úplnosť uvádzame grafy exponenciálneho a mocninového rozdelenia vo všetkých troch zobrazeniach.

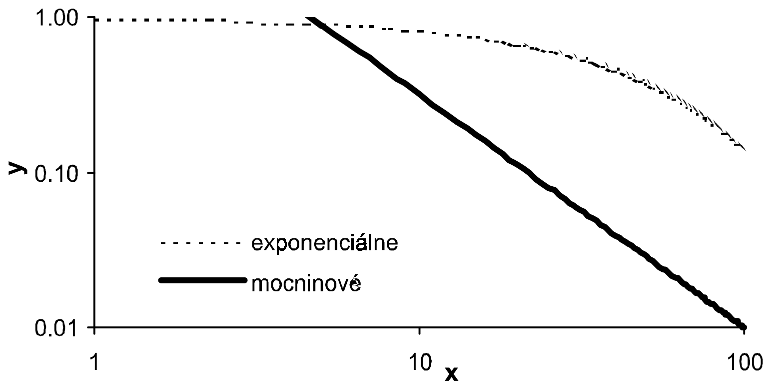
1.2 Rozdelenie veľkosti a rastu firiem

Podobne ako obyvateľstvo, aj firmy predstavujú ekonomických agentov, ktorí sa o svojom správaní rozhodujú v rovnakom prostredí a v tom istom čase. Predpoklad výskytu mocninového zákona v rozdeleniach dát súvisiacich s rastom a veľkosťou firiem je preto oprávnený.

Veľkosť firmy sa dá definovať či už cez obrat, počet zamestnancov alebo objem aktív. Rovnako sa dá sledovať zisk spoločnosti. Alternatívny prístup zvolili autori v [8], keď skúmali údaje o zbankrotovaných spoločnostiach v Japonsku. Ako kritérium



Obrázok 2 **Log-lineárne zobrazenie:** os x je lineárna, os y logaritmická; exponenciálna funkcia $y = e^{-x/W}$ je reprezentovaná úsečkou



Obrázok 3 **Log-log zobrazenie:** os x je logaritmická, os y takisto; mocninová funkcia $y = x^{-\alpha}$ je reprezentovaná úsečkou

veľkosti zvolili výšku dlhu, ktorý po sebe zaniknutá firma zanechala. Dlh je možno interpretovať ako záporné bohatstvo firmy a tak dostávame analógiu s hlavnou témou tejto práce - rozdelením bohatstva obyvateľov.

Pre 100 najväčších japonských bankrotov v období rokov 1997 až 2000 konštatovali autori rozdelenie kumulatívnej pravdepodobnosti v tvare

$$N(x) \approx x^{-1}$$

kde x je výška dlhu. Toto je podľa autorov v zhode s predchádzajúcim výskumom, ktorý rovnaké rozdelenie potvrdil pre výšku ziskov firiem. Chceme však upozorniť, že autori dospeli k publikovanému záveru pravdepodobne len na základe grafického porovnania, ktoré môže právom vyvolávať pochybnosti. Na druhej strane sú väčšie odchýlky v týchto údajoch zdôvodniteľné. Majitelia problémových firiem majú totiž dobrú motiváciu pre účtovné kamuflácie, ktoré robia tieto dáta menej dôveryhodné.

Iné skúmania sa pokúšali empiricky potvrdiť mocninové rozdelenie rastu firiem. Ako však uvádza [14], v tomto prípade by mohlo byť mocninové rozdelenie iba hrubou aproximáciou. Potvrdila sa ale črta spoločná s rastom bohatstva obyvateľov - miera rastu je nezávislá na veľkosti bohatstva.

V čase písania tohoto textu sa rozdelením rastu a veľkosti firiem podrobnejšie zaoberá Katarína Hatalová vo svojej diplomovej práci *Mocninové zákony v ekonómii a financiách*.

1.3 Hospodárske cykly a výskyt recesií v trhových ekonomikách

Objem a rast hrubého domáceho produktu (HDP) sú údaje, ktoré výnimočným spôsobom agregujú aktivitu agentov, ktorí sa navzájom ovplyvňujú. Keďže práve interakcia sa ukazuje ako významný predpoklad pre vznik mocninového rozdelenia, Ormerod a Mountfiled skúmali v [11] výskyt tohto javu v údajoch sedemnástich trhových ekonomík. Pre ročné údaje za roky 1870 až 1994 autori sledovali dĺžku trvania recesií a ich veľkosť. Recesia bola pritom pre potreby tohto skúmania chápaná ako jeden a viac rokov záporného reálneho rastu HDP na obyvateľa*. Dĺžka recesie je počet rokov so záporným rastom, veľkosť recesie je reálny kumulatívny pokles objemu HDP počas recesie.

Čo sa týka dĺžky trvania, z 336 pozorovaných recesií trvalo vyše 200 recesií jeden rok. Na druhej strane, najdlhšia zaznamenaná recesia mala 7 rokov. Pre sedem rôznych trvaní teda autori vyrátali frekvenciu a porovnali s predpokladom rozdelenia v tvare

$$N = \alpha D^{-\beta} \tag{1.6}$$

kde D je dĺžka trvania a N je frekvencia. Výsledkom boli koeficienty $\alpha = 209.6$, $\beta = 1.69$, pri štandardných odchýlkach 13.4 resp. 0.2. Porovnaním skutočných hodnôt

*V markoekonómii sa za recesiu zvyčajne uvažujú aspoň dva po sebe idúce štvrťroky so záporným reálnym rastom HDP.

s hodnotami ktoré sú výstupom funkcie 1.6 vysvitlo, že mocninové rozdelenie predpokladá oproti skutočnosti väčší výskyt recesií s dlhším trvaním. Jedným z rozumných vysvetlení je fakt, že hospodárska politika vlády a centrálnej banky má možnosti (a reálne ich využíva) priebeh ekonomických cyklov vyhladzovať. Krátkym recesiám sa väčšinou vyhnúť nedarí. Po zaregistrovaní poklesu však vzrastá politický tlak na to, aby štát intervenoval či už štátnymi investíciami (vláda) alebo uvoľnením menovej politiky (centrálna banka). Opätovné naštartovanie hospodárstva sa prejaví kladným rastom HDP a recesia v definovanom slova zmysle sa končí. Túto hypotézu čiastočne podporil aj ďalší test, pri ktorom autori ignorovali jednoročné recesie. Tentoraz dostali podstatne lepší fit s koeficientom $\beta = 3.23$.

Keďže korelácia medzi veľkosťou a dĺžkou trvania recesie nie je podľa autorov výrazná, skúmajú aj rozdelenie veľkosti. Tá je definovaná ako percentuálny pokles objemu reálneho HDP od začiatku recesie po jej koniec. Fit je podstatne horší ako v prvom prípade (štandardná odchýlka priemeru závislej premennej je 41% oproti 0.3% v predchádzajúcom prípade, pričom do popredia ešte viac vystupuje prevaha slabších recesií. Aj v tomto prípade sa však aproximácia mocninovým rozdelením ukazuje ako rozumná.

1.4 Rozdelenie prírastkov cien akcií a dlhopisov; zmeny výmenného kurzu

Empirické mocninové rozdelenia boli pozorované aj v cenách nástrojov finančných trhov, konkrétne v cenách dlhopisov, akcií a vo výmenných kurzoch. Z hľadiska skúmania majú tieto produkty oproti správaniu sa obyvateľstva a firiem dve veľké výhody. Prvou je dostupnosť veľkého množstva kvalitných dát, ktoré umožňujú použitie sofistikovaných štatistických metód. Druhou je nedeformovanosť trhu. Oproti obyvateľstvu a firmám totiž na finančnom trhu funguje podstatne menej pravidiel, zákonov a obmedzení, ktoré by mohli výsledky odchyľovať od ich prirodzeného vývoja.

Údaj, ktorý nás zaujíma je zmena ceny x produktu za časový interval δt, teda

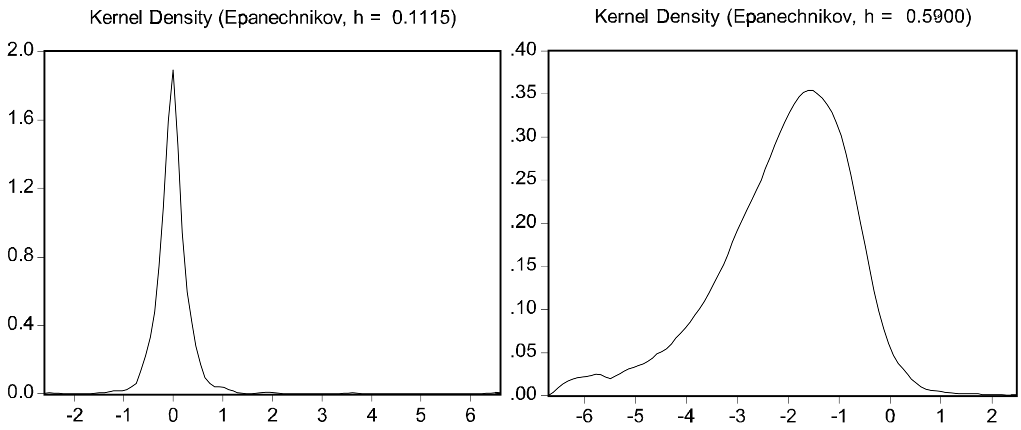
$$\delta x_t = x(t) - x(t - \delta t)$$

Podľa [2] môžu byť chvosty týchto rozdelení dobre popísané mocninovým zákonom v tvare

$$P(\delta x) = \frac{\delta x_0^\mu}{|\delta x_0^\mu|^{1+\mu}}$$

pričom hodnota μ sa ukazuje byť napr. pre denné zmeny cien amerických akcií univerzálna a blízka $\mu = 3$. S rastúcim δt sa však celé rozdelenie viac približuje normálnemu a exponent popisujúci mocninový chvost rozdelenia sa zvyšuje.

Pri modeloch oceňovania alebo pri kontrole rizika sa rozdelenie prírastkov zvyčajne uvažuje ako normálne, resp. lognormálne. Aj keď to nie je jadrom tejto práce, skúmali sme rozdelenie denných zmien výmenného kurzu slovenskej koruny voči euru. Vychádzali sme z oficiálneho kurzu Národnej banky Slovenska. Ten pre každý pracovný deň odráža priemer kurzu na medzibankovom devízovom trhu zafixovaný o 11:00



Obrázok 4 **Rozdelenie pravdepodobnosti relatívnych denných zmien kurzu EURSKK za obdobie 1.10.1998-19.3.2003**. Naľavo rozdelenie r_t, napravo logr_t. Testy zamietli normálne aj lognormálne rozdelenie.

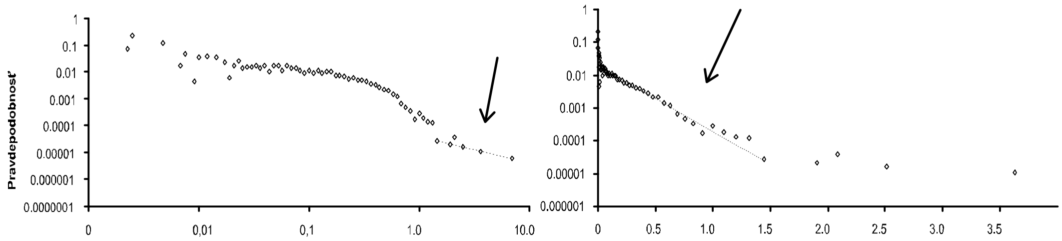
hod. predchádzajúceho pracovného dňa. Pre 1116 hodnôt z obdobia 1. októbra 1998 až 19. marca 2003 sme vyrátali relatívnu dennú zmenu kurzu, teda

$$r_t = \frac{ER_t - ER_{t-1}}{ER_{t-1}}$$

kde ER_t je výmený kurz v deň t.

Absolútne hodnoty denných zmien sme rozdelili do 100 intervalov, ktorých šírka exponenciálne narastala. Vypočítali sme početnosť upravenú o šírku intervalu a výsledok zobrazili. Pre lepšiu predstavu o rozdelení sme pre hodnoty r_t a $\log r_t$ vykreslili aj kernelovskú hustotu (použili sme kernel Epanechnikov, šírku pásem 0.1115 a 0.59). Ako sa dá tušiť z grafov, Kolmogorov-Smirnov test zamietol normálne aj lognormálne rozdelenie. Na grafe s log-lineárnym zobrazením je vidno, že pre väčšinu intervalu (okrem chvosta, ktorý predstavuje najväčšie denné zmeny) je rozdelenie dobre popísané exponenciálnym rozdelením. Pri skúmaní chvosta na log-log grafe je s istou opatrnosťou možno potvrdiť mocninový chvost na ktorý upozorňuje [2].

Rozsiahlejší výskum na amerických akciách je popísaný v [15]. Autori skúmali dáta pre časové intervaly δt v rozmedzí od 5 minút po 4 roky. Pre časy do približne 16 dní konštatovali mocninový chvost s $\mu = 3$. Pre dlhšie intervaly rozdelenie pomaly konverguje k normálnemu.



Obrázok 5 **Log-log (vľavo) a log-lineárne zobrazenie (vpravo) rozdelenia pravdepodobnosti relatívnych denných zmien kurzu EURSKK za obdobie 1.10.1998-19.3.2003**. Prerušované čiary naznačujú mocninový chvost pre najväčšie denné zmeny a exponenciálne rozdelenie pre zvyšok.

Kapitola 2
VÝSLEDKY ŠTATISTICKÝCH POZOROVANÍ ROZDELENIA PRÍJMU A BOHATSTVA VO SVETE

Táto časť si nekladie za cieľ vyčerpávajúco zhrnúť všetky doteraz zverejnené skúmania rozdelenia príjmov. Vyberáme výsledky štyroch analýz, ktoré podľa nášho názoru prispievajú k lepšej predstave o empirických dátach. Dve z nich vychádzajú z japonských štatistík, jedna pokrýva príjmy obyvateľov USA. Výsledky popisujúce rozdelenie bohatstva vychádzajú z údajov z Veľkej Británie.

2.1 Výsledky z dát získaných v USA v rokoch 1992-1997

Dragulescu a Yakovenko v [3] skúmali mesačné príjmy jednotlivcov získané z výberových zisťovaní spolu s dátami z daňových priznaní. Spolu disponovali piatimi sadami údajov, ktoré vznikli v rokoch 1992-1997. Veľkosti vzoriek sa pritom pohybovali od tisícok a stotisícok (vo výberových zisťovaniach) až po 122 miliónov údajov z daňových priznaní. Autori skúmali nakoľko je možné získané údaje popísať exponenciálnym rozdelením v tvare (1.2), teda

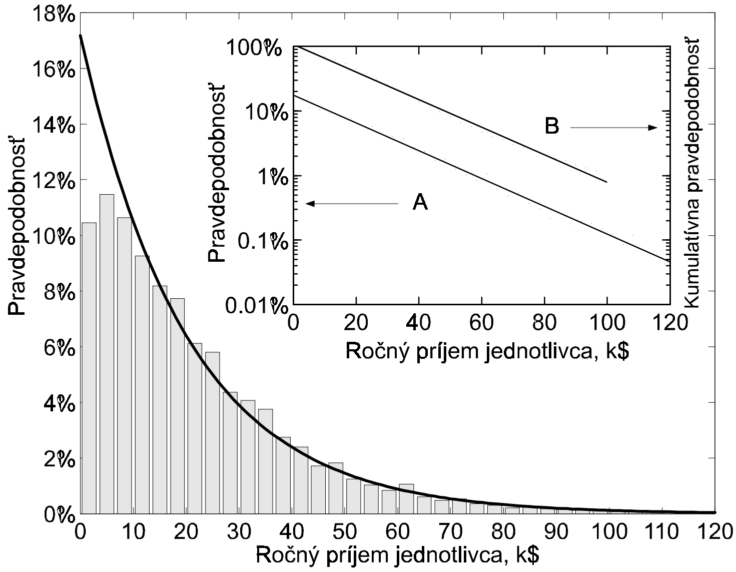
$$N(x) \approx e^{-\frac{x}{W}}$$

a zbehli regresiu na všetkých piatich sadách. Aj keď číselná informácia chýba, autori konštatovali, že exponenciálne rozdelenie dobre popisuje získané dáta. Pre lepšiu predstavu uvádzame grafy pre skúmania z roku 1996 a 1997.

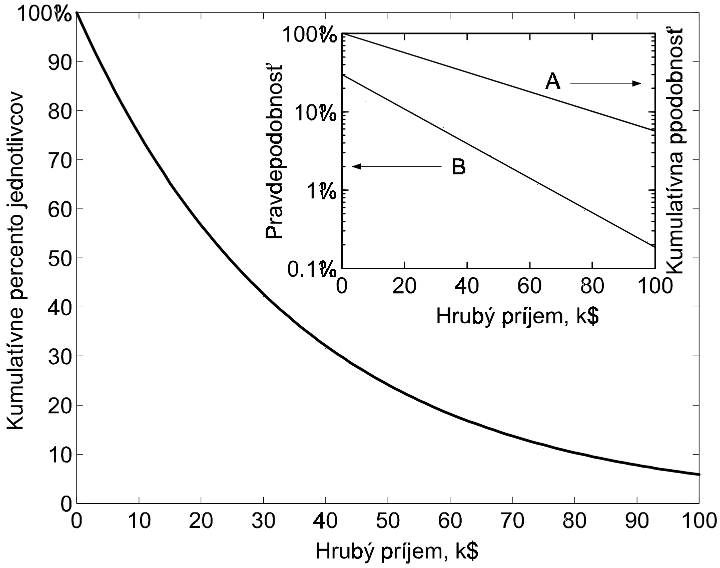
Koeficienty W získané z regresie sú \$23242 pre rok 1996 a \$35200 pre rok 1997. Napriek tomu, že v analýze nebol pomerne veľký rozdiel medzi týmito dvoma údajmi diskutovaný, podľa nás by mohol byť spôsobený rozdielnou vzorkou. Dáta z roku 1996 boli totiž získané pri výberovom zisťovaní u vyše stotisíc ľudí (cca 0,05% populácie), čo umožňuje získať nevychýlený odhad. Pri údajoch z roku 1997 ide o daňové priznania, ktoré zvyčajne nepokrývajú práve najchudobnejšie skupiny obyvateľstva.

2.2 Výsledky z dát získaných v Japonsku v roku 1998

Suoma v [1] použil tri rôzne zdroje údajov o príjmoch obyvateľov Japonska v roku 1998. Prvý zdroj obsahoval zoznam pokrývajúci 84515 najbohatších obyvateľov, ktorí zaplatili daň z príjmu vo výške 10 miliónov jenov a viac. Druhý a tretí zdroj síce pokrývali viac ako 50 miliónov obyvateľov všetkých príjmových skupín, avšak Suoma mal k dispozícii iba počty ľudí v jednotlivých príjmových intervaloch. Autor tieto



Obrázok 1 **Rozdelenie príjmov jednotlivcov v USA z roku 1996** a jeho aproximácia **exponeciálnym** rozdelením. Vo výseku rozdelenie pravdepodobnosti a kumulatívnej pravdepodobnosti v log-lineárnom zobrazení. Zdroj [3]



Obrázok 2 **Rozdelenie kumulatívnej pravdepodobnosti pre USA**; daňové údaje z roku 1997. Vo výseku rozdelenie pravdepodobnosti a kumulatívnej pravdepodobnosti v log-lineárnom zobrazení. Zdroj [3]

tri sady spojil a po analýze navrhol mocninové rozdelenie pre 1% najbohatšej časti populácie a lognormálne rozdelenie v tvare

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\log^2(x/x_0)}{2\sigma^2}} \tag{2.1}$$

pre zvyšných 99% populácie (x_0 je stredná hodnota, σ^2 je disperzia). Pri mocninovom rozdelení v tvare získal koeficient $\alpha = 2.06$, v časti ktorú popisuje lognormálnym rozdelením koeficienty $x_0 = 4.10^6$ jenov, $\beta = 2.68$.

Pri porovnaní s výsledkami z časti 2.1 vyvstáva otázka, prečo v prvom prípade viedli údaje pre väčšinu populácie (bez najbohatšieho 1%) k exponenciálnemu rozdeleniu, v druhom k lognormálnemu. Aj sám Suoma poznamenáva, že skúmanie rozdelenia príjmu tejto časti populácie je v jeho práci nedostatočné z dôvodu nízkeho počtu dát. Aj keď v texte nikde nešpecifikuje počet intervalov do ktorých mal príjmy 99% obyvateľov rozdelené, graf naznačuje, že ich bolo len 10.

2.3 Rozdelenie bohatstva zomrelých vo Veľkej Británii.

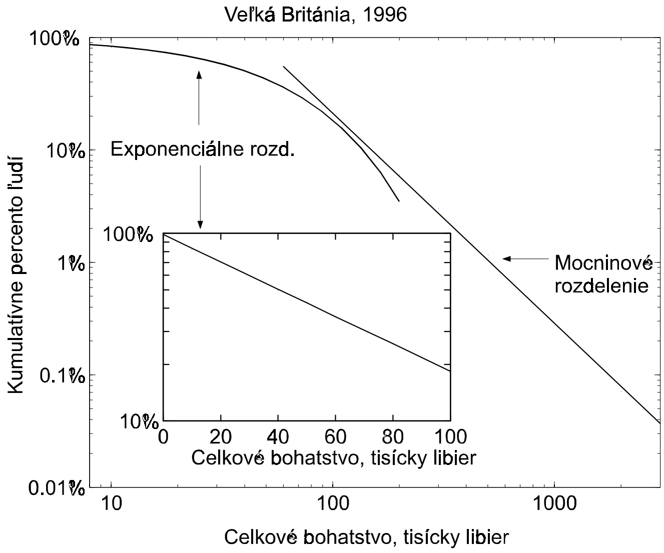
Keďže informácie o bohatstve nie sú tak dobre prístupné ako údaje o príjmoch, v [5] boli použité čísla získané zo štatistík o zomrelých vo Veľkej Británii. Tie sú pomerne dôveryhodné, keďže kvôli dedičskému konaniu ich musí reportovať rodina každého zosnulého. Výsledný majetok je súčtom aktív ako hotovosť, cenné papiere, nehnuteľnosti a hnuteľné predmety, očistený o pasíva (hypotéky a ostatné dlhy). Pre zosnulých s majetkom nad 100 000 libier je kumulatívne rozdelenie dobre popísané mocninovým v tvare 1.5 s koeficientom $\alpha = 1.9$. Pre chudobnejších je majetok veľmi dobre aproximovateľný exponenciálnym rozdelením v tvare 1.2 s $W = £59600$. Kvalitu aproximácie dokumentuje graf.

2.4 Analýza medziročnej zmeny príjmov

Bezpochyby najzaujímavejšou a najprínosnejšou je analýza, ktorú v lete 2002 predstavil tím piatich Japoncov [7]. Pokrok oproti dovtedajším výskumom urobili tak, že neskúmali rozdelenie príjmov skupiny obyvateľstva v jednom roku, ale porovnali zmenu príjmov v dvoch nasledujúcich rokoch. Tento prístup samozrejme vyžaduje párované údaje z oboch rokov. Autori získali od daňových úradov zoznam obyvateľov, ktorí mali dane z príjmu väčšie ako 10 miliónov jenov a to za roky 1997 a 1998. Oba zoznamy obsahovali tak mená a kompletné adresy ako aj výšku zaplatenej dane. Porovnaním autori získali 52902 ľudí, ktorí sa nachádzali v oboch zoznamoch. Je treba poznamenať, že údaje reprezentujú najbohatšiu časť populácie, teda skupinu ktorá v mnohých výskumoch preukázala mocninové rozdelenie príjmov.

Prvým dôležitým výsledkom je časová symetria daní a teda aj príjmov*. Združené rozdelenie $P_{12}(X_1, X_2)$ sa totiž ukázalo invariantným vzhľadom na výmenu X_1 a X_2. Inými slovami: pravdepodobnosť že náhodný človek má v prvom roku príjem

*daňovníci s najvyššími príjmami sú zvyčajne v rovnakom (najvyššom) daňovom pásme - daň potom u všetkých tvorí rovnaký podiel z príjmu, konkrétne v Japonsku platí $daň = 0,3.príjem$



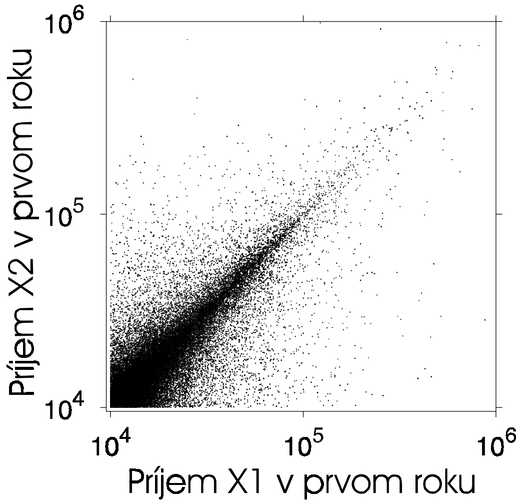
Obrázok 3 **Kumulatívne rozdelenie bohatstva zomrelých vo Veľkej Británii.** Log-log zobrazenie na veľkom grafe, log-linárne vo výseku. Bohatstvo nad 100 000 libier je aproximované mocninovým rozdelením, zvyšok popisuje exponenciálne rozdelenie. Zdroj [5]

X_1 a v druhom X_2 je rovnaká, ako pravdepodobnosť, že má v prvom roku príjem X_2 a v druhom X_1. Toto zistenie je dôležité pre simulovanie, ktorému sa venujeme v ďalších častiach tohto textu. Pre názornosť uvádzame grafické zobrazenie výsledkov:

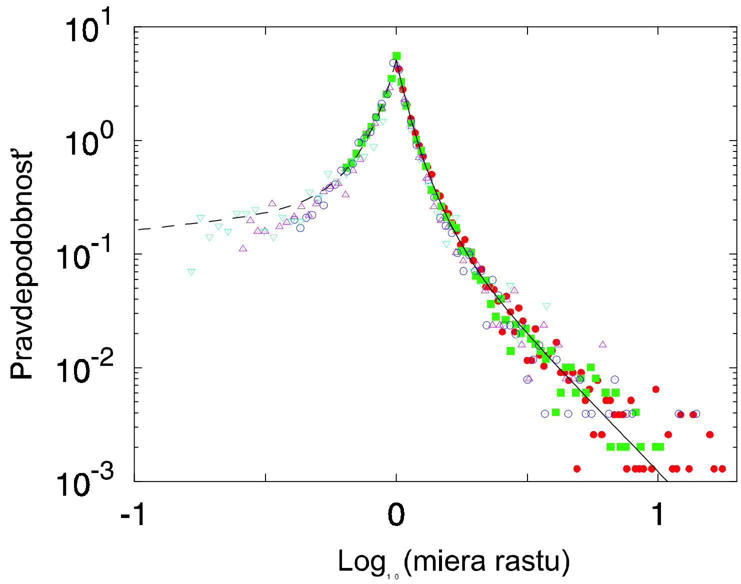
Ďalším nemenej dôležitým výstupom práce bolo sledovanie ročnej zmeny príjmu $R = X_2/X_1$, pričom $r = \log_{10} R$. Na základe dát bolo ukázané, že rozdelenie zmeny r je nezávislé od počiatočnej hodnoty X_1. Teda

$$P_{1R}(X_1, R) = P_1(X_1)P_R(R)$$

kde P_{1R} je združené rozdelenie X_1 a R, P_1 a P_R sú rozdelenia pre X_1 a R. Naviac, rozdelenie P_R má modus v bode $R = 1$.



Obrázok 4 Združené rozdelenie $P_{12}(X_1, X_2)$. Zdroj: [7]



Obrázok 5 Rozdelenie medizročnej zmeny príjmu $r = \log_{10} X_2/X_1$. Zdroj: [7]

Kapitola 3
ROZDELENIE PRÍJMU V SLOVENSKÝCH PODMIENKACH

Pre skúmanie rozdelenia príjmu či bohatstva sú kľúčové čo najpodrobnejšie dáta. Pokiaľ je nám známe, na Slovensku existujú dva zdroje, ktoré dátami o príjmoch disponujú: Štatistický úrad Slovenskej republiky (ŠÚSR) a Daňové riaditeľstvo Slovenskej republiky (DRSR).

Štatistický úrad získaval tieto údaje v rámci programu Mikrocenzus v štvorročných intervaloch* v rokoch 1980-1996. Bohužiaľ, aj napriek prísľubom, nebol Mikrocenzus od roku 1996 uskutočnený; s najväčšou pravdepodobnosťou sa tak stane v priebehu apríla 2003. Pre potreby tejto práce majú štatistiky ŠÚSR ešte jeden nedostatok - nesledujú príjmy jednotlivcov, ale príjmy domácností prepočítané na jednu osobu. Napriek tomu sa týmto dátam venujeme nielen v tejto kapitole, ale aj v časti venovenej meraniu nerovnomernosti príjmov.

Údaje ďaňového riaditeľstva, naopak, sledujú základ dane jednotlivcov. Sú k dispozícii na ročnej báze, avšak ich nedostatok spočíva v príliš hrubom rozdelení do intervalov. Všetky príjmy sú podelené do siedmych pásem, čo je pre štatistické skúmanie pomerne nedostatočné.

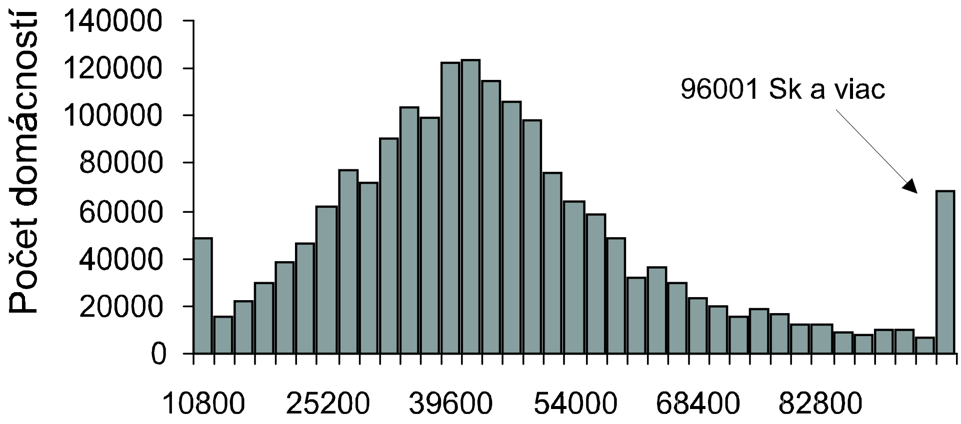
3.1 Príjmy domácností

Ako vidno na údajoch ŠÚSR (sú súčasťou prílohy), vplyvom zvyšovania príjmov a súčasného fixovania šírky intervalu na 2400 Sk sa delenie postupom času vlastne zjemňovalo. Z dvanástich použitých intervalov v roku 1980 sa ich počet do roku 1996 viac ako strojnásobil na 37. Pre skúmanie rozdelenia príjmov sme si preto vybrali práve sadu z roku 1996.

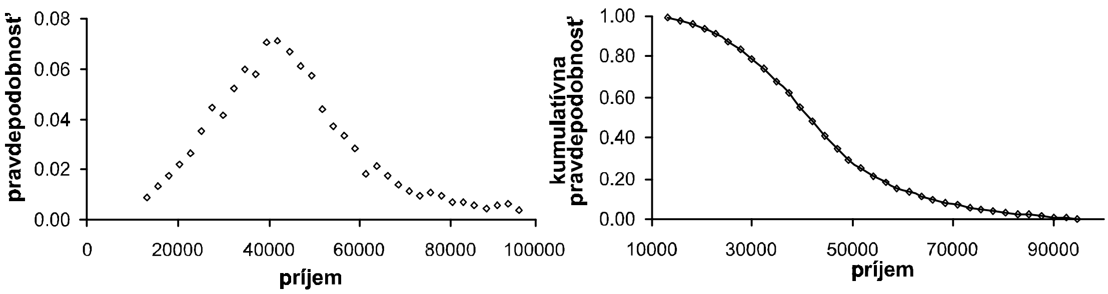
Pre každý príjmový interval je v tabuľke uvedený počet domácností, ktorých čistý peňažný príjem na osobu sa v čase zisťovania nachádzal v danom pásme. Pre ďalšie výpočty sme z dát odstránili najnižší a najvyšší príjmový interval. V prípade "bohatého" konca na to existovali dva dôvody - absencia horného ohraničenia ako aj neúmerný nárast domácností v tomto pásme. Oproti 6908 subjektom v (predposlednom) pásme 93601-96000 Sk sa totiž v intervale 96001 Sk a viac nachádzalo 67908 domácností. Pre naše potreby je tento hrubo agregovaný interval nepoužiteľný.

Na strane najchudobnejších je prvý interval v porovnaní s ďalšími takisto nepomerne väčší. Efekt je spôsobený umelo najmä legislatívnymi predpismi ktoré regulujú minimálnu mzdu a životné minimum. Do tejto skupiny zapadá aj veľká časť nezamestnaných, ktorých príjmy sú určované rozhodnutím štátu. Preto sme aj túto

*Až na jednu výnimku; namiesto roku 1984 bol Mikrocenzus uskutočnený o rok neskôr



Obrázok 1 **Počty domácností v jednotlivých príjmových intervaloch:** prvý a posledný interval sme pri ďalšom skúmaní ignorovali

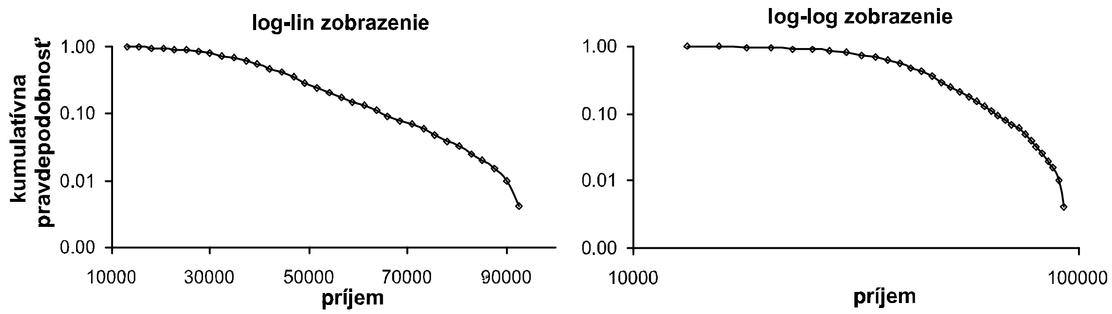


Obrázok 2 **Rozdelenie pravdepodobnosti** (vľavo) **a kumulatívnej pravdepodobnosti** (vpravo) **pre príjmy domácností SR v roku 1996.** Stupnice na oboch grafoch sú lineárne.

skupinu zo skúmania vylúčili.

Pre zostávajúcich 35 intervalov sme vytvorili dvojice údajov - priemerný **príjem** a **pravdepodobnosť** zaradenia náhodnej rodiny do tohoto príjmového intervalu. Priemerný príjem ako priemer hornej a dolnej hranice pásma pre naše potreby dobre charakterizuje reprezentatívnu domácnosť zo skupiny. Úplne korektné by to bolo samozrejme len pri (nie úplne reálnom) predpoklade rovnomerného rozdelenia príjmov domácností v rámci jednotlivých intervalov. Premennú pravdepodobnosť sme položili rovnú relatívnej početnosti; pre každé pásmo sme teda vypočítali podiel počtu domácností spadajúcich do intervalu k celkovému počtu domácností. Takéto dvojice [*príjem, pravdepodobnosť*] sme použili ako vstup pre ďalšie skúmanie.

Sledovali sme rozdelenie pravdepodobnosti a rozdelenie kumulatívnej pravdepodobnosti príjmov domácností. Obe rozdelenia sú znázornené na grafoch v lineárno-lineárnom zobrazení, kumulatívna pravdepodobnosť aj log-lineárnom a log-log zobrazení. Upozorňujeme, že nami používané rozdelenie pravdepodobnosti nemá všetky



Obrázok 3 **Rozdelenie kumulatívnej pravdepodobnosti v log-lin** (vľavo) **a log-log** (vpravo) **znázornení.**

vlastnosti empirickej hustoty rozdelenia; v klasických textoch pravdepodobnosti a matematickej štatistiky (napr. [10]) je pre našu funkciu používaný pojem frekvenčná krivka.

Keďže najbohatšie domácnosti sme zo štatistiky vyradili kvôli hrubej agregovanosti†, mocninové rozdelenie na bohatom konci ani hľadať nemôžeme. Ako však vyzerá rozdelenie kumulatívnej pravdepodobnosti na zvyšku dát? Obrázok 3 napovedá, že veľká časť domácností by mohla kopírovať exponenciálne rozdelenie. Naozaj, domácnosti s príjmami na osobu v rozmedzí 43200-93600 Sk, ktoré tvoria 51% všetkých sledovaných domácností, spĺňajú toto kritérium veľmi dobre. Metódou najmenších štvorcov pre nelineárne rovnice‡ sme pre exponenciálne rozdelenie v tvare

$$N(x) = k.e^{-\frac{x}{W}}$$

získali koeficienty $k = 8,14; W = 1,47.10^5$s $R^2 = 0.9992$. Skutočnosť, exponenciálny fit ako aj graf reziduálov je na obrázku 4.

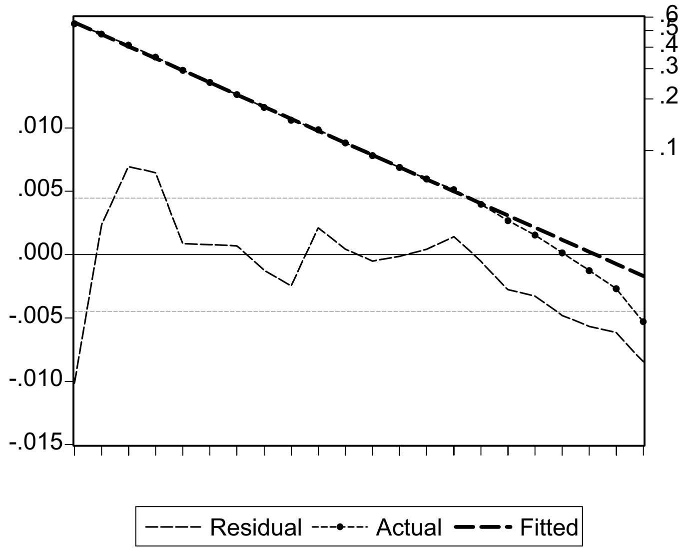
3.2 Príjmy jednotlivcov

Daňové riaditeľstvo SR rozdeľuje jednotlivcov, ktorí podali daňové priznanie do siedmych pásem podľa výšky ročného základu dane. Okrem toho sú daňovníci rozdelení do štyroch skupín (A, B1, B2, D) podľa typu daňového priznania. Analyzovali sme údaje za rok 2000, ktoré spolu pokrývajú 510 088 osôb. V tabuľke je uvedený sumár zo všetkých štyroch skupín. Keďže údaje DRSR obsahujú pre každé pásmo aj kumulatívny základ dane, dopočítali sme priemerný základ dane na jedného daňovníka.

Zaujímalo nás však rozloženie príjmov obyvateľstva, nie rozloženie základu dane. Ten sa od hrubého príjmu odlišuje o výšku odvodov ale najmä o odpočítateľné

†Ak by v rozdelení príjmov domácností na Slovensku aj existoval mocninový koniec pozorovaný u najbohatšej časti populácie v zahraničí, v dátach by sme ho pravdepodobne nenašli. Celý by bol ukrytý v poslednom príjmovom pásme, ktoré obsahuje 67908 domácností (3,6% sledovaných domácností).

‡V celej práci sme využívali iteratívne metódy najmenších štvorcov pre nelineárne rovnice implementované v programe Ewievs. Podrobný popis a vlastnosti sa dajú nájsť v dokumentácii k tomuto programu.



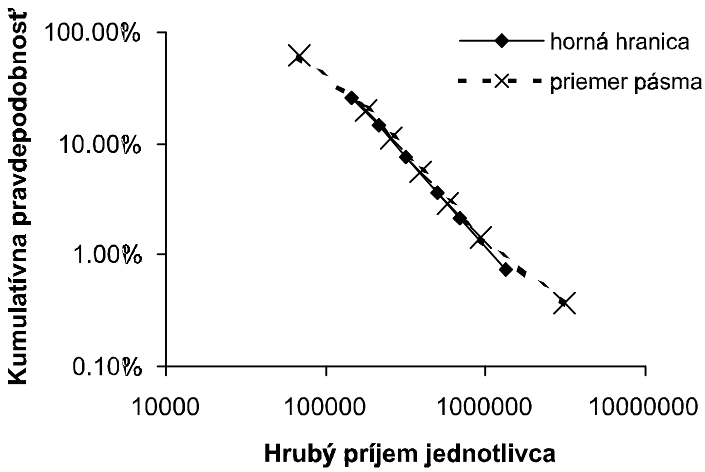
Obrázok 4 **Pre domácnosti s čistým príjmom viac ako 46000 je kumulatívne rozdelenie príjmu veľmi dobre popísané exponenciálnym rozdelením.** Hrubá prerušovaná čiara znázorňuje nájdenú exponenciálnu funkciu, prerušovaná čiara spájajúca body predstavuje skutočné dáta.

položky. Pritom odpočítateľnú položku vo výške 38 760 Sk platí každý daňovník, takže sme hranice pásem aj priemer daňového základu o túto sumu zvýšili.Odpočítateľné položky na deti nemôžeme pripočítať plošne, preto sme ich neuvažovali. Ešte pred odpočítateľnou položkou sa však základ dane znižuje o odvody, ktoré tvoria 12,8% hrubého príjmu. Spätne sme teda už upravené čísla zvýšili ešte o 14,75%. Takto získané údaje pomerne dobre odrážajú hrubý príjem jednotlivcov zo štatistiky (až na spomínanú odpočítateľnú položku za dieťa).

Základ dane	Počet osôb	Kum. ZD	Priemer
1 Sk - 90 k. Sk	380 190	8 326 664 986	21901
90 k. Sk - 150 k. Sk	56 158	6 502 323 133	115786
150 k. Sk - 240 k. Sk	34 595	6 507 761 405	188112
240 k. Sk - 396 k. Sk	20 679	6 287 499 232	304052
396 k. Sk - 564 k. Sk	7 770	3 638 372 675	468259
564 k. Sk - 1 128 k. Sk	6 964	5 380 137 984	772564
nad 1 128 k. Sk	3 732	9 879 247 599	2647172
Spolu	510 088	46 522 007 014	91204

Otázny je výber reprezentatívneho obyvateľa z každého pásma. Keďže chceme zostaviť údaje o kumulatívnej pravdepodobnosti príjmu a máme k dispozícii aj priemerný príjem v pásme, existujú v zásade dve možnosti:

- Reprezentatívny agent má príjem vo výške hornej hranice pásma. Počet ľudí, ktorí majú príjem väčší ako on, je potom súčet počtov ľudí nachádzajúcich sa vo vyšších pásmach.



Obrázok 5 **Porovnanie dvoch prístupov:** Reprezentatívni agenti s príjmom z hornej hranice pásma sú označení štvorčekom, agenti s priemerným príjmom krížikom.

- Príjem reprezentatívneho agenta je priemerný príjem v pásme. Predpokladáme, že v danom pásme je rovnako veľa ľudí s príjmom nižším aj vyšším ako priemerný príjem. Potom, ako počet ľudí, ktorí majú príjem vyšší než reprezentant berieme polovicu počtu ľudí z daného pásma plus všetkých ľudí z vyšších pásem.

Na obrázku (log-log zobrazenie) sú znázornené oba prístupy. Ako vidno, sú navzájom pomerne konzistentné.

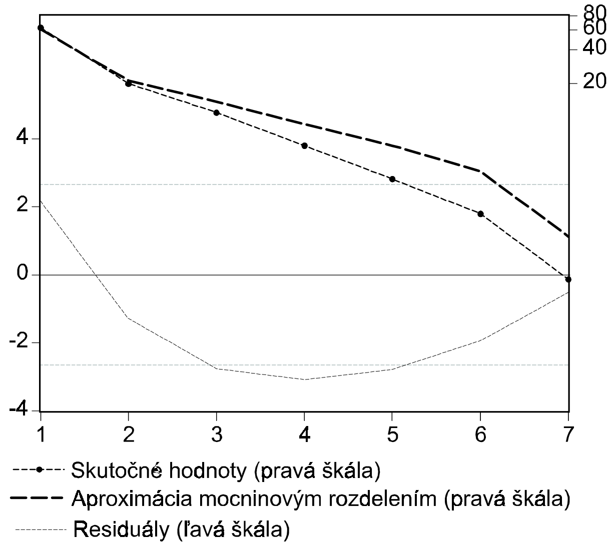
Keďže reprezentantov s príjmom rovným priemernému príjmu v pásme je o jedného viac, uvažovali sme ďalej čísla získané druhým spôsobom. Nečakane, mocninové rozdelenie aproximuje príjmy jednotlivcov veľmi dobre na celom intervale. To čo naznačuje obrázok 5 (body na log-log grafe ležia približne na priamke), potvrdzujú aj výsledky. Pre mocninové rozdelenie v tvare

$$N(x) = k.x^{-\alpha}$$

sme získali koeficienty $k = 14,4.10^6$, $\alpha = 1,11$ s $R^2 = 0.99$. Na obrázku 6 sú skutočné hodnoty, aproximácia mocninovým rozdelením ako aj graf reziduálov.

V porovnaní so skúmaniami v iných krajinách, ktoré rekapitulujeme v 2. kapitole je tento výsledok naozaj prekvapujúci. Kým v USA, Veľkej Británii a Japonsku sa mocninový chvost objavuje pre najbohatších 1-5% populácie, slovenské dáta naznačujú mocninové rozdelenie pre vyše pol milióna daňovníkov, teda približne štvrtinu pracujúcich.

Jedným z dôvodov je pravdepodobne výber jednotlivcov. Daňové priznania totiž nemusia podávať zamestnanci, ktorí počas roka pracovali len u jedného zamestnávateľa. Je možné sa domnievať, že práve títo ľudia tvoria časť populácie s nižšími príjmami. Na druhej strane, všetci, ktorí majú viac zamestnávateľov, pracujú u zamestnávateľa so sídlom v zahraničí, alebo majú príjmy iné ako mzdu, sú povinní



Obrázok 6 **Príjmy jednotlivcov, ktorí podali daňové priznanie na Slovensku dobre aproximuje mocninové rozdelenie.** Hrubá prerušovaná čiara znázorňuje nájdenú mocninovú funkciu, prerušovaná čiara spájajúca body predstavuje skutočné dáta.

daňové priznanie podať. To naznačuje, že v skúmanej vzorke sú ľudia s vyššími príjmami zastúpení viac ako ľudia zo strednej vrstvy a chudobnejší.

Čo sa týka exponentu, hodnota $\alpha = 1,11$ vypovedá o pomerne nerovnomernom rozdelení bohatého konca.V USA je táto hodnota rovná $\alpha = 1,7$, vo Veľkej Británii dosahuje až $\alpha = 2,1$. Pritom platí, že nižší exponent implikuje väčšiu nerovnomernosť.

Kapitola 4
MODELY SIMULUJÚCE DISTRIBÚCIU BOHATSTVA MEDZI AGENTMI

Ciest po ktorých sa výskum snaží nájsť dôvod výskytu mocninového rozdelenia v rôznych dátach je mnoho. Do jednej skupiny patria prístupy, ktoré vychádzajúc zo širokého spektra uplatnenia mocninových rozdelení hľadajú všeobecné mechanizmy pre vznik tohto fenoménu. Druhá skupina skúma konkrétne prípady a snaží sa identifikovať tie črty konkrétneho prostredia, ktoré by mohli byť rozhodujúce pre vznik sledovaného rozdelenia. V prospech druhého prístupu hovorí v mnohých prípadoch práve rôznorodosť prostredí a chýbajúce "spojivká", vysvetľujúce vznik rovnakého efektu.

Pre cestu analýzy rozdelenia bohatstva z mikroskopického pohľadu (alebo z pohľadu agentov) sme sa rozhodli aj v tejto práci. Snažili sme sa z reálneho sveta vybrať a popísať tie mechanizmy, ktoré by mohli byť kľúčové pre výskyt mocninového rozdelenia v dátach. Rozhodujúce sú zrejme dva faktory - zmena bohatstva jednotlivca spôsobená obchodovaním s inými jednotlivcami a zmena vyplývajúca z vytvorenia/spotreby hodnoty samotným agentom (výraz agent budeme používať ako označenie jednotlivca operujúceho v modelovanom ekonomickom systéme).

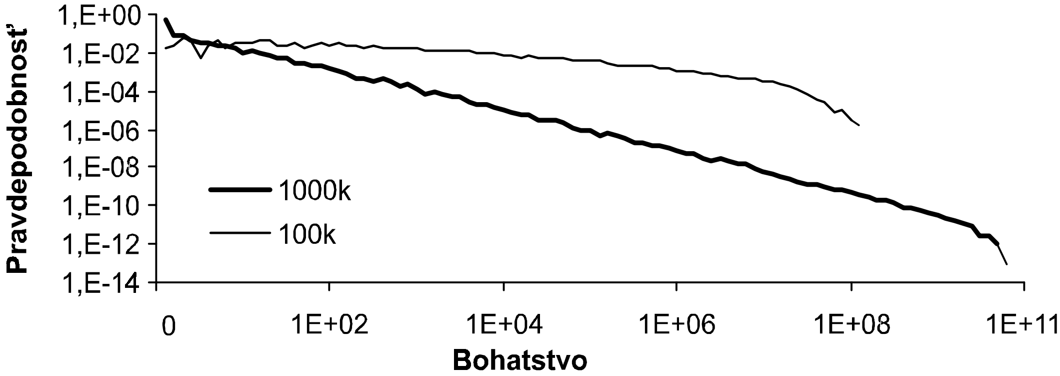
Pre priblíženie sa k realite sme jednotlivé črty postupne pridávali a kalibrovali. Akýmsi vzorom, ku ktorému sme sa chceli priblížiť, nám bolo rozdelenie odsledované na veľkej skupine dát v USA, Veľkej Británii a v Japonsku, bližšie popísané v druhej kapitole. V nasledujúcom texte postupne približujeme vytvorené modely od najjednoduchších až po komplexnejšie.

4.1 Prípad prvý: Obchodovanie pri spravodlivej cene

V každom z prezentovaných modelov existuje 5000 agentov, z ktorých každý má na začiatku rovnaký majetok vo výške 1000 jednotiek.

V prvom z modelov predpokladáme, že agent sám bez obchodovania s okolím nemôže zmeniť výšku svojho majetku. Inými slovami - nevyrába žiadnu hodnotu, ale ani nekonzumuje, naviac sa jeho majetok neopotrebúva. Jedinou cestou, ako môže svoje bohatstvo zmeniť, je obchod s inými agentmi. Keďže majetok zaznamenávame len v jednotkách, výsledkom každého obchodu medzi agentmi A a B je jeden z nasledujúcich prípadov:

- obchod prebehol pri spravodlivej cene, teda majetok žiadneho z nich sa nezmenil
- cena bola vyššia ako spravodlivá, teda ak A bol predávajúci, zaznamená zvý-



Obrázok 1 **Model so symetrickými cenami po 100k a 1000k transakciách:** Všetci agenti ačínali s 1000 jednotkami. V priebehu času sa rozdiel medzi bohatými a chudobnými zväčšuje**.**

šenie svojho majetku o rozdiel medzi spravodlivou a realizovanou cenou; na druhej strane majetok B poklesol o rovnakú čiastku

- cena tovaru bola nižšia ako spravodlivá a tak profituje kupujúci

Čo sa deje, ak je cena pri všetkých obchodoch spravodlivá? Zrejme sa majetok u agentov nebude meniť a navždy ostane konštantný. Pre získanie dynamiky je teda potrebné uvažovať cenu, ktorá nie je nutne spravodlivá.

4.2 Náhodná cena symetricky rozdelená okolo spravodlivej

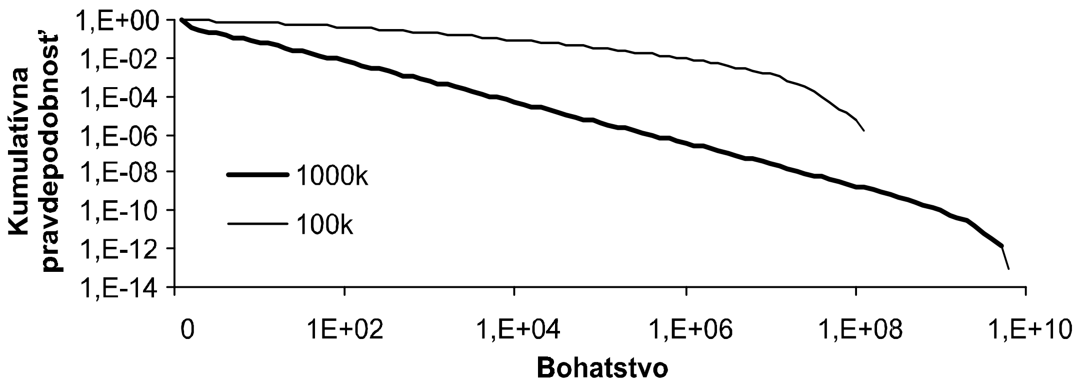
Tentoraz predpokladáme, že cena tovaru je náhodná, symetricky rozdelená okolo spravodlivej ceny. Keďže

rozhodujúci je rozdiel oproti spravodlivej cene, generovali sme priamo toto číslo. Rozdiel je náhodná premenná z rovnomerného rozdelenia so strednou hodnotou v nule - to znamená, že obaja agenti majú rovnakú šancu na obchode získať alebo stratiť.

Rozdiel však nemôže byť ľubovoľne veľký. V realite si je ťažko predstaviť obchod, pri ktorom agent môže stratiť viac ako vlastní. Preto sme maximálnu hodnotu rozdielu ohraničili číslom w_p/f, kde w_p je výška majetku chudobnejšieho z agentov; f je koeficient určujúci, akú maximálnu časť svojho majetku môže agent získať alebo stratiť. Keď X je náhodná premenná z rovnomerného rozdelenia z intervalu $< -1, 1 >$, pre rozdiel r potom platí

$$r = X\frac{w_p}{f}$$

Simuláciu sme spustili pre parameter $f = 2$. Na obrázku 1 je empirická hustota rozdelenia bohatstva v modelovanej ekonomike po 100 000 a 1 000 000 (ďalej 100k a 1000k) uskutočnených obchodoch.



Obrázok 2 **Model so symetrickými cenami, kumulatívne zobrazenie:** rozdelenie kumulatívnej pravdepodobnosti $N(w) = P(x \leq w)$, teda pravdepodobnosti, že náhodný človek má bohatstvo väčšie ako w.

Rozdelenie bohatstva s rastúcim počtom obchodov nekonverguje - naopak, agenti s najväčším majetkom sa stávajú ešte bohatší, bohatstvo chudobných klesá. Ako sa však dá tušiť aj z grafu, rozdelenie sa dá veľmi dobre popísať práve mocninovým rozdelením. Použitím metódy najmenších štvorcov sme pre dáta získané po 1000k iteráciach a rovnicu

$$N(w) = kw^{-\alpha}$$

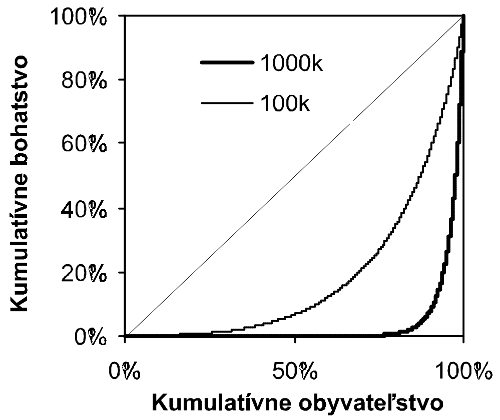
dostali koeficienty $k = 3,34$, $\alpha = 6,79$, pri sume štvorcov reziduí $R_2 = 0,97$. Oba koeficienty boli na hladine 99% významné.Výsledok teda môžeme naozaj jednoznačne označiť za mocninové rozdelenie.

Z hľadiska približovania sa k realite je však model neuspokojujúci. Ako uvádzame v druhej kapitole, mocninové rozdelenie v skutočnosti popisuje len niekoľko percent najbohatšej populácie. Model ho pritom vykazuje vo všetkých príjmových skupinách. Každopádne však tento výsledok ponúka priestor pre lepšie chápanie ekonomických vzťahov práve u najbohatšej skupiny obyvateľstva. Pre porovnanie s realitou aj nasledujúcimi modelmi uvádzame aj grafy kumulatívnej pravdepodobnosti a Lorentzovej krivky. Tá sa v praxi často používa na zobrazenie nerovnomernosti príjmu, resp. bohatstva. Súradnice y bodov krivky sú určené celkovým bohatstvom držaným x% najchudobnejších ľudí v spoločnosti. Pri dokonale rovnomernom rozdelení (všetci agenti majú rovnaký objem) je výsledkom zobrazenia uhlopriečka. Čím je rozdelenie nerovnomernejšie, tým viac sa krivka od uhlopriečky vzďaľuje.

4.3 Asymetrická cena: Zvýhodnenie chudobnejšieho

Obchodovanie pri cene symetricky rozloženej okolo spravodlivej ceny sa ukázalo ako nevhodné pre popísanie reálneho sveta. Keďže však práve obchodovanie na rôznych trhoch* je podľa nás kľúčové pre rozdeľovanie bohatstva, rozhodli sme sa hľadať

*Medzi trhy samozrejme neradíme len trhy tovarov a služieb. Vo väčšine prípadov o príjme človeka rozhoduje jeho mzda, teda cena na trhu práce.



Obrázok 3 **Lorentzova krivka pre model so symetrickými cenami:** Nerovnomernosť rozdelenia bohatstva v spoločnosti so symetrickými cenami s časom narastá.

spôsob, ako simulácie priblížiť realite.

Pri symetrickej cene vzniklo široké mocninové rozdelenie, ktoré sa postupom času ďalej rozširovalo. Takmer celé bohatstvo sa tak sústreďovalo v rukách zlomku populácie. Pri simuláciach po 100k transakciách držalo 10% najbohatších agentov 43% celkového bohatstva. Po 1000k transakciách narástol majetok najbohatšej desatiny na 92% celkového bohatstva. Na to, aby rozdelenie ostalo stacionárne, alebo aby sme jeho rozširovanie spomalili, musíme v transakciách najakým spôsobom zvýhodniť chudobnejších. V tomto modeli teda nemajú obaja agenti rovnakú šancu na výhru. Pravdepodobnosť, že vyhrá chudobnejší sme stanovili ako

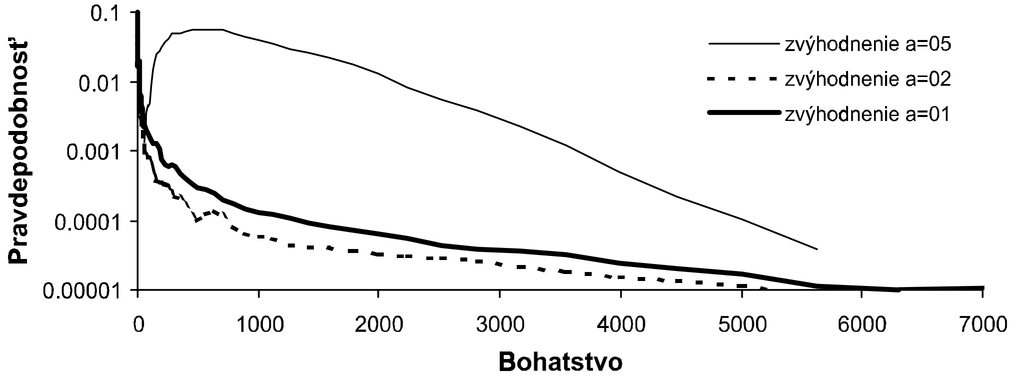
$$p_p = 0.5 + a\frac{w_r - w_p}{w_r + w_p} \tag{4.1}$$

kde w_r je výška majetku bohatšieho agenta, w_p je výška majetku chudobnejšieho agenta, a je koeficient zvýhodnenia (rozumné hodnoty pre a sú zrejme z intervalu $< 0, \frac{1}{2} >$). Výška majetku vloženého do obchodu ostáva stále zhora ohraničená hodnotou w_p/f, tak ako v predchádzajúcom modeli.

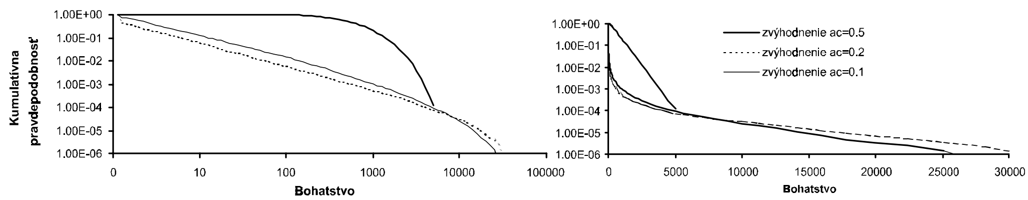
Štartovacie podmienky ostali rovnaké ako v predchádzajúcom prípade: 5000 agentov začína s rovnakým bohatstvom vo výške 1000 jednotiek. Tentoraz sme sledovali, aký vplyv na rozdelenie má koeficient zvýhodnenia a, pre ktorý sme nastavovali postupne hodnoty $a = \{0.1, 0.2, 0.5\}$ pri koeficiente $f = 2$.

Na obrázkoch 4 a 5 sú znázornené rozdelenia bohatstva po 1000k transakciách pre všetky tri hodnoty koeficientu zvýhodnenia. Ako vidno na obrázku 4, pri extrémnom zvýhodnení $a = 0.5$ vzniká tzv. stredná vrstva. Presnejšie, už neplatí pravidlo "čím chudobnejší, tým početnejší", ale modus existuje a nachádza sa v okolí príjmu vo výške 450 jednotiek. Toto je dôležitá črta skutočných rozdelení, ktorá v predchádzajúcich modeloch chýba.

Ďalšiu dôležitú vlastnosť, ktorá v predchádzajúcich modeloch chýbala, ale v reálnych údajoch je identifikovaná je vidno na log-lineárnom zobrazení kumulatívnej pravdepdobnosti. Pri zvýhodnení $a = 0.5$ totiž vzniká v celom rozsahu príjmov



Obrázok 4 **Rozdelenie pravdepodobnosti príjmu agentov v modeli s asymetrickou cenou; log-lineárne zobrazenie.** Pri zvýhodnení $a = 0.5$ vzniká stredná vrstva s modusom v okolí $x = 450$ a charakteristické exponeciálne rozdelenie.



Obrázok 5 **Kumulatívne zobrazenie výsledkov modelu s asymetrickou cenou.** Vľavo log-log, vpravo log-lin zobrazenie.

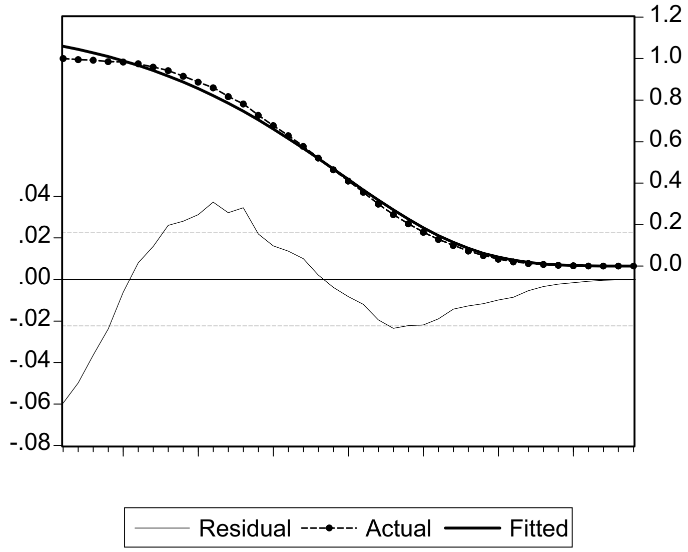
exponenciálne rozdelenie. Ako sme uviedli v časti 1.1 a neskôr aj pri skúmaniach skutočných rozdelení bohatstva v kapitolách 2 a 3, exponenciálne rozdelenie kumulatívnej pravdepodobnosti je charakteristické pre väčšinu populácie (na Slovenských dátach o rozdelení príjmov je to 51%, na amerických a japonských dokonca 97%-99%. Zvyšné percentá predstavujú pri zahraničných údajoch mocninový chvost, teda mocninové rozdelenie u najbohatšej časti populácie. Tento sa v tomto modeli neobjavil, avšak napriek tomu je výsledok veľmi podobný realite (porovnaj napr. s obrázkom 1 v kapitole 2).

Testovanie rozdelenia predpoklady potvrdilo. Pre celý rozsah príjmov sme pre rovnicu

$$N(x) = k.e^{-\frac{x}{W}}$$

získali koeficienty $k = 1,19; W = 6,02.10^3$s $R^2 = 0,9968$. Oba koeficienty boli prijaté na hladine 0,01%. Skutočnosť, exponenciálny fit ako aj graf reziduálov je na obrázku.

Napriek výbornej zhode s reálnymi dátami má tento model svoje nedostatky. Spôsob akým znevýhodňujeme bohatých voči chudobným je predsalen pomerne ťažko interpretovateľný a trochu umelý. Každopádne však implikuje dôležitý výsledok -



Obrázok 6 **Aproximácia exponenciálnym rozdelením.** Bodky predstavujú vygenerované dáta, hrubá čiara aproximáciu exponenciálnou funkciou. Tenká čiara zobrazuje reziduály.

pre udržanie rozdelenia spoločnosti ako ho poznáme je zvýhodnenie chudobnejších nevyhnutné. V realite naozaj môžme nájsť príklady takéhoto zvýhodňovania.

Na trhu tovarov a služieb má chudobný motiváciu (a/alebo čas) hľadať tovar za čo možno najnižšiu cenu, ktorá sa v takom prípade blíži spravodlivej. U človeka disponujúceho väčším bohatstvom je táto motivácia slabšia - je ochotný nakupovať aj drahšie, keďže vzhľadom k jeho majetku nie je vzniknutý cenový rozdiel tak významný ako u chudobnejšieho. Ak uvažujeme optimalizáciu aj vzhľadom na cenu strateného času, dostaneme rovnaký záver. U človeka s vyšším príjmom je totiž cena hodiny, ktorú strávi hľadaním nižšej ceny tovaru vyššia ako u človeka s nízkym príjmom.

Na trhu práce možno za mechanizmus zvýhodňujúci chudobnejších považovať systém odborov. Tie majú v mnohých krajinách silnú moc pri vyjednávaní ceny práce (mzdy), ktorá takto môže byť vyššia ako skutočná produktivita.

4.4 Zavedenie daní

Inšpirovaní práve prebiehajúcou diskusiou o daňovej reforme na Slovensku sme sa rozhodli testovať model s iným, prirodzenejším spôsobom zvýhodňovania chudobnejších. Dane sú totiž realitou každej vyspelej ekonomiky. Pritom, okrem tzv. dane na hlavu, kedy každý občan platí rovnakú sumu, každá daň z príjmu (rovná, progresívna) zvýhodňuje chudobnejších. Z filozofického hľadiska je toto tvrdenie zrejme diskutabilné. Predpokladáme však, že všetci občania dostávajú za svoje dane od štátu rovnakú službu. Potom každý systém, v ktorom nižší príjem implikuje nižšiu sumu dane automaticky zvýhodňuje práve chudobnejších.

Z hľadiska **percentuálnej výšky** dane sme skúmali tri systémy:

- rovná daň; každý platí rovnaké percento zo základu dane
- progresívna daň; percentuálna sadzba sa s rastúcim základom zvyšuje
- obmedzene progresívna daň; sadzba sa zvyšuje len do určitej výšky základu dane - pre vyšší základ ostáva sadzba konštantná

Z hľadiska **základu** dane sme skúmali dva prístupy:

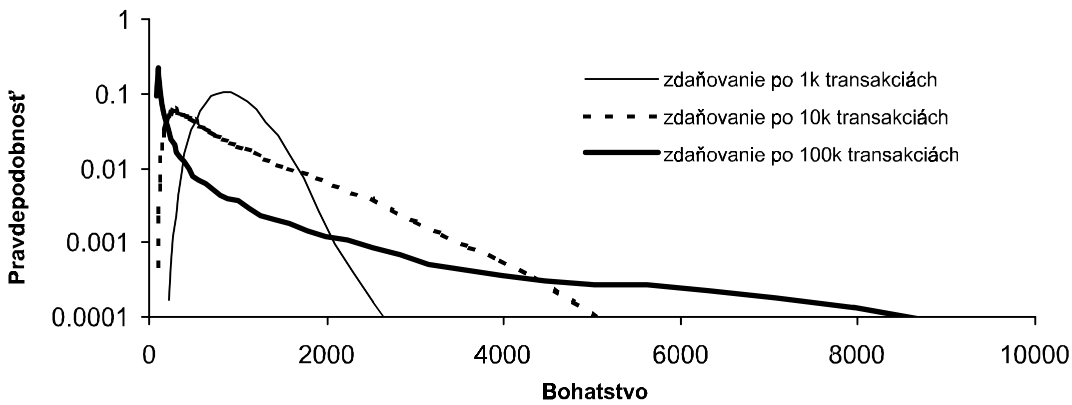
- daň z majetku
- daň z príjmu

4.4.1 Daň z majetku

Prvým systémom, ktorý sme skúmali pri dani z majetku bola rovná daň. Keďže daň z majetku je možné vyrubovať len po istých časových intervaloch, okrem výšky dane je zaujímavé nastavovať aj periódu zdaňovania. Zopakujme, že odhliadnuc od zdaňovania sa majetok agentov v modeli mení len vzájomným obchodovaním pri cene symetricky rozdelenej okolo spravodlivej ceny. Zdaňovať majetok tak môžme po rôznom počte transakcií.

Zmena daňovej sadzby sa pritom nedá rovnocenne nahradiť zmenou periódy zdaňovania. Pri príliš veľkých intervaloch sa totiž stihne vytvoriť mocninové rozdelenie pozorované pri tomto type obchodovania. V takom prípade už ani zdaňovanie pri veľmi vysokej sadzbe nezmení tvar rozdelenia a zvyšovanie rozdielov v čase sa nedá zastaviť.

Pri systéme zdaňovania vyvstáva dôležitá otázka: čo s vybratou daňou? Keďže v modelovanej ekonomike existuje len jeden druh majetku, je treba daň prerozdeliť späť medzi agentov. Rozumným predpokladom, vychádzajúcim z demokratických princípov, je systém, keď výberca daní (štát) poskytne každému agentovi rovnakú službu. Tá je v realite reprezentovaná napríklad zabezpečovaním bezpečnosti, financovaním súdnej moci alebo školstva. V modeli sa takto celková vyzbieraná daň rozdelí rovnomerne medzi všetkých agentov. Alternatívou by mohlo byť zaniknutie bohatstva ktoré sa v dani vyzbiera. Napriek tomu, že možno práve takto je zdaňovanie chápané nemalou časťou populácie, nepoužili sme ho. Dôvodom je najmä fakt, že v doteraz skúmaných modeloch sa celkové bohatstvo zachovávalo. Takto by postupom času konvergovalo k nule.



Obrázok 7 **Rozdelenia bohatstva v modeli so zdaňovaním majetku v rôznych periódach:** Objavujú sa črty charakteristické pre skutočné rozdelenia - vznik strednej vrstvy a exponenciálne rozdelenie bohatstva pre väčšinu populácie. Porovnaj napr. s obrázkom 1 v 2. kapitole.

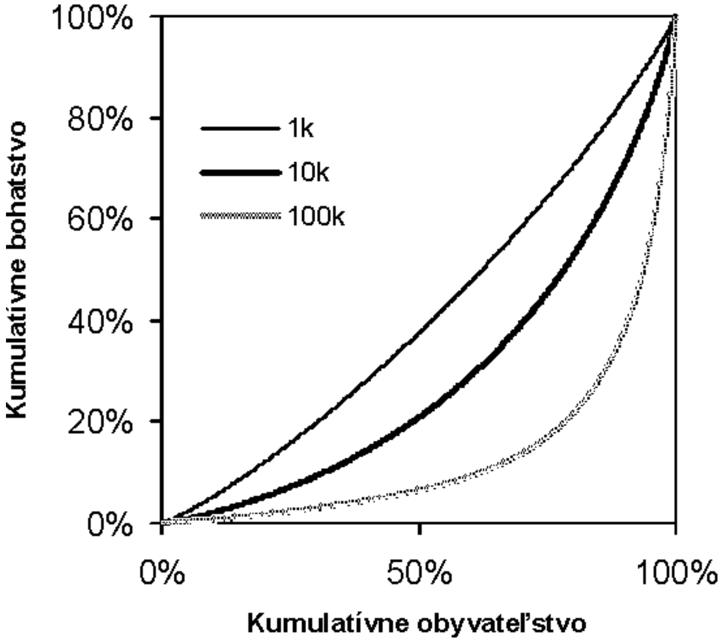
Simulovali sme tri scenáre. Daň z majetku sa síce vyberala vždy vo výške 10% z celkového bohatstva agenta, avšak v rôznych periódach: po 1000, 10 000 a 100 000 transakciách. Kvalitatívny výsledok je vidno na obrázku 7. Pri perióde 100 000 transakcií zostávajú najchudobnejší najpočetnejšou vrstvou a rozdelenie bohatstva je na takmer celej šírke príjmov mocninové. Pri perióde 1000 transakcií vzniká síce silná stredná vrstva, avšak rozdelenie je v porovnaní s realitou až príliš rovnomerné. Pre porovnanie rovnomernosti uvádzame Lorentzove krivky pre všetky tri periódy.

Pri progresívnej dani sme pri každom zdaňovaní zistili výšku majetku najchudobnejšieho a najbohatšieho agenta. Najchudobnejší agent bol zdaňovaný nulovou sadzbou. Vstupným parametrom simulácie bola aj maximálna daňová sadzba t_{max}, teda sadzba, ktorou sa zdaňuje najbohatší agent. Sadzba pre ľubovoľného agenta potom rástla lineárne s výškou majetku. Agent s majetkom vo výške w_A potom zaplatil daň t_A:

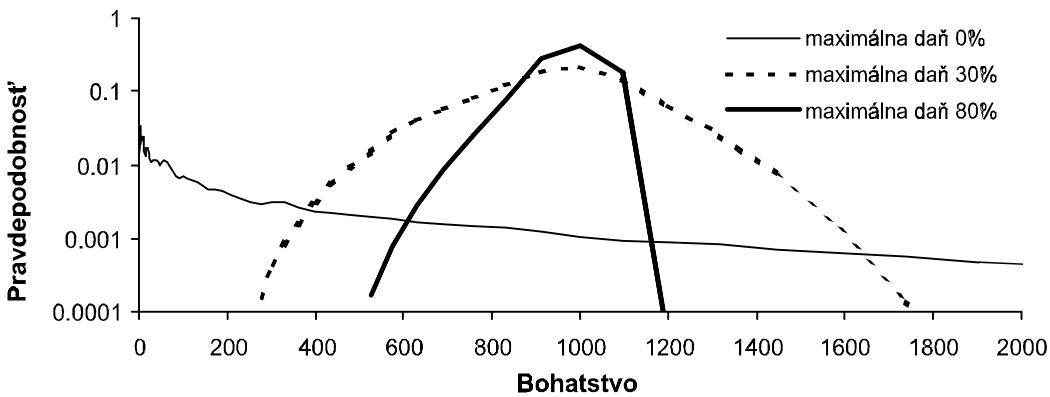
$$t_A = w_A . t_{\max} \frac{w_A - w_P}{w_R - w_P}$$

kde w_P a w_R sú výšky majetkov najchudobnejšieho a najbohatšieho agenta. S periódou zdaňovania po každých tisíc transakciách sme simuláciu spustili pre maximálnu daň vo výške 0%, 30% a 80%. Na obrázku 9 vidno rozdelenie po 100 000 prebehnutých transakciách. V súlade s očakávaniami sa nerovnomernosť rozdelenia zvyšuje s klesajúcou daňou.

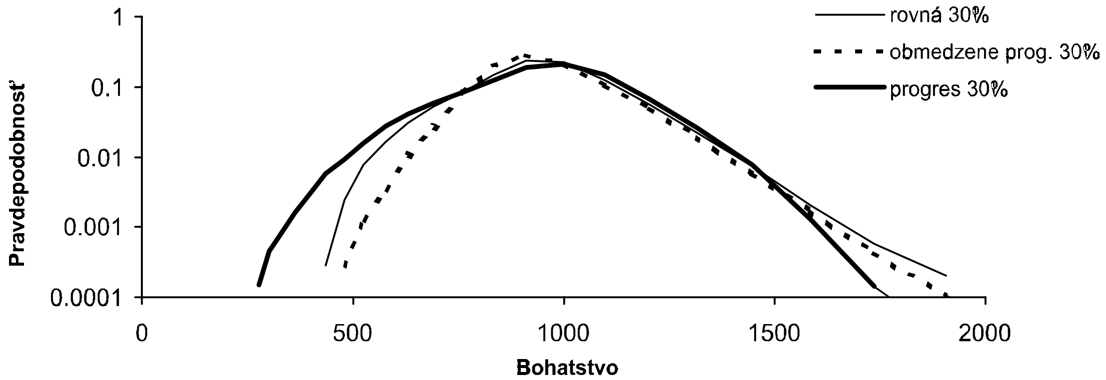
Pre porovnanie výsledkov sme simulovali aj progresívnu daň, ktorá je bližšie reálnemu svetu. Na rozdiel od predchádzajúceho prípadu totiž daňová sadzba v skutočnosti nemôže rásť rovnomerne s výškou daňového základu (iba ak by bolo pre tento základ stanovené najvyššie povolené maximum). Zdaňovacia sadzba



Obrázok 8 **Lorentzove krivky pre model s daňou z majetku:** čím častejšie sa majetok zdaňuje, tým je rozdelenie rovnomernejšie.



Obrázok 9 **Rozdelenie bohatstva agentov pri progresívnom zdaňovaní majetku** po každých 1000 transakciách pri rôznych sadzbách.



Obrázok 10 **Porovnanie vplyvu rovnej, progresívnej a obmedzene progresívnej dane z majetku** na rozdelenie bohatstva.

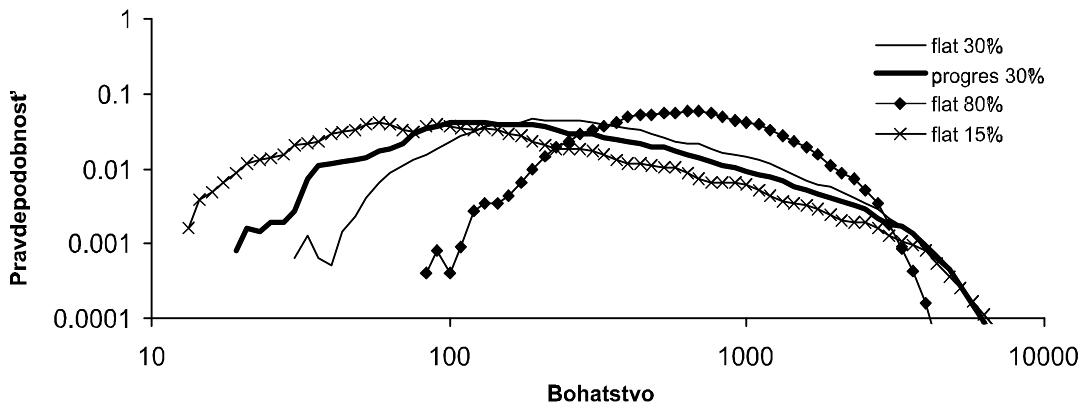
$$\min[t_{\max}, \frac{w_A - w_P}{w_R - w_P}]$$

v nasledujúcom modeli tak rastie akoby od 0% pre najchudobnejšieho agenta po 100% pre najbohatšieho, avšak každý, na koho by sa mala vzťahovať sadzba vyššia ako hranica t_{max}, zaplatí daň s touto hraničnou sadzbou. Takéto zdaňovanie je bližšie systému, v ktorom sadzba s príjmom síce rastie, ale len po napr. 38% (stav v SR k marcu 2003). Aký vplyv na výsledné rozdelenie má takáto zmena je vidno na obrázku 10.

4.4.2 Daň z príjmu

Zdaňovanie sa logicky ukázalo ako efektívna cesta k zvýhodneniu chudobnejších. Navyše, výsledky ktoré sme dostali simuláciou pri progresívnej dani dobre korešpondujú s reálnymi dátami. Zdaňovanie majetku však v mnohých krajinách predstavuje menšiu časť daňovej záťaže a daňový systém sa orientuje predovšetkým na daň z príjmov a spotrebné dane. Daň z príjmov pritom vieme do modelu implementovať. Rozdiel v prístupe je pritom podstatný - agent už nie je penalizovaný za majetok, ale len za príjem v poslednej zdaňovacej perióde. Nemôže sa tak stať situácia, že agent v jednom období stratí na obchodovaní časť svojho majetku a na konci obdobia príde o ďalšiu prostredníctvom dane.

Na konci každého obdobia sme si v simulácii zapamätali majetok každého agenta. Pred zdaňovaním v ďalšom období sme majetok agenta porovnali s predchádzajúcim a získali tak prírastok resp. úbytok. V prípade úbytku sme agenta nezdaňovali. Pre agentov, ktorí skončili v pluse sme však ako základ dane zobrali prírastok, teda bohatstvo, ktoré zarobil počas posledného obdobia. Na tento základ sme aplikovali raz rovnú daň vo výške 15%, 30% alebo 80%, v ďalšej simulácii progresívnu daň s maximálnou sadzbou 30%. Rozdelenie, ktoré vzniklo po 100 000 transakciách sa od rozdelenia pri zdaňovaní majetku výrazne líši. Na obrázku je vidno, že nerovnomernosť je vyššia, pričom stúpa s klesajúcou daňou. Zaujímavé je porovnanie 15%



Obrázok 11 **Rozdelenia majetku pri rôznych parametroch rovnej a progresívnej dane.**

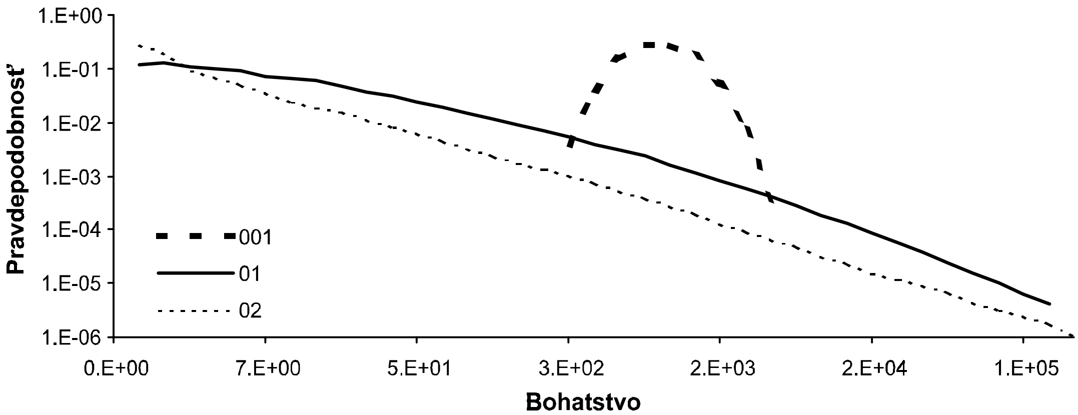
rovnej a 30% progresívnej dane, najmä ak si uvedomíme závislosť sadzby dane od príjmu.

Napriek tomu, že daň tvaruje rozdelenie do podoby blízkej realite, pri porovnávaní modelu so skutočnosťou je na mieste istá opatrnosť. Daň v modeli, na rozdiel od reality, nemá možnosť meniť motiváciu človeka pracovať. Okrem toho, je diskutabilné, či by sa v prípade paušálnej dane (všetci ľudia platia rovnakú sumu) zmenilo v skutočnosti rozdelenie bohatstva na mocninové v celom rozsahu. V predstavenom modeli by tomu tak bolo (daň by nemala žiadny účinok, keďže každý by dostal späť toľko, koľko do daňového sytému vložil). Preto v skutočnosti daň zrejme nie je jediným prvkom zvýhodňujúcim chudobných.

4.5 Produkcia a spotreba

Vo všetkých doterajších modeloch sme predpokladali konštantnosť celkového bohatstva. Ak jeden agent prišiel o jednotku bohatstva, pribudla presne jednotka inému agentovi (v systéme s daňou sa mohla rozdeliť medzi viacerých). Otázka znie, či sa celkové bohatstvo v skutočnosti zachováva, alebo nie. Odpoveď sa presúva do filozofickej roviny a nie je úplne jednoznačná. Ak predpokladáme, že zachovanie neexistuje, nemožno napríklad proces rozdeľovania bohatstva prirovnávať k fyzikálnym procesom prebiehajúcim v plyne (kde rozdelenie energie častíc sleduje mocninové rozdelenie). Myslíme si, že takýto zákon zachovania pri bohatstve neplatí. Ak by sme predpokladali opak, znamenalo by to, že celkové bohatstvo na Zemi bolo pred miliónmi rokov rovnaké ako dnes. Podobne by sme tvrdili, že spracovanie materiálu nemení jeho hodnotu, čo je zrejme v rozpore s bežným chápaním *hodnoty.*

Bohatstvo sa však nielen vytvára, ale aj konzumuje. Okrem toho bohatstvo s časom klesá aj samo, bez spotreby (chátranie stavieb a pod.). Vytvorili sme jednoduchý model, v ktorom sa zmena bohatstva u agenta nemení vzájomnými obchodmi, ale vyvíja sa nezávisle od ostatných. To samozrejme neodráža skutočnosť, ale pre implementovanie tejto črty do konečného modelu je dobré poznať vývoj rozdelenia v



Obrázok 12 **Rozdelenie bohatstva v modeli v ktorom sa majetok každého agenta vyvýja samostatne.** V každej iterácii majetok buď c-krát vzrastie, alebo c-krát poklesne, pričom $c \approx N(1, \sigma^2)$.

takomto jednoduchom modeli.

Je dôležité určiť, ako sa zmení bohatstvo agenta v každom kroku. Rozumným predpokladom je, že veľkosť zmeny je u každého závislá od výšky majetku. Okrem toho predpokladáme, že pravdepodobnosť zväčšenia majetku je rovnaká ako pravdepodobnosť poklesu.

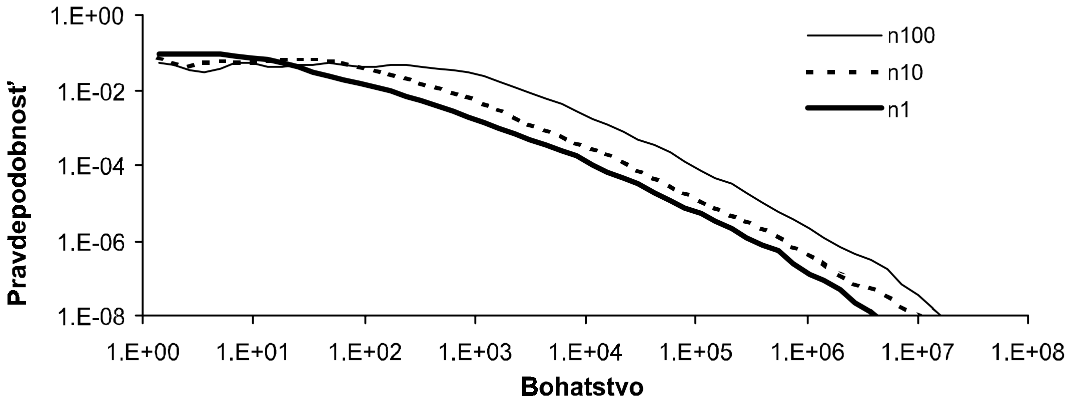
5000 agentov začínalo znova s rovnakou sumou 1000 jednotiek. V každej iterácii sme vygenerovali číslo c z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou $\mu = 1$ a voľiteľnou disperziou σ^2. Bohatstvo sa potom v každej iterácii s rovnakou pravdepodobnosťou buď c-krát zvýšilo alebo c-krát pokleslo. Na obrázku sú výsledné rozdelenia po tisíc iteráciach (pre každého agenta) pre σ rovné postupne 0.01, 0.1, 0.2.

Okrem jednoduchého multiplikatívneho procesu sme do rozšíreného modelu pridali aj aditívny šum. V každej iterácii sme k majetku agenta pripočítali náhodné číslo z rozdelenia $N(0, \sigma_n^2)$, kde argument $\sigma_n$určoval mieru šumu. V prípade, že výsledný majetok by mal byť menší ako nula, iterácia skončí bez zmeny. Šum tak zvýhodňuje chudobnejších, keďže stredná hodnota takejto náhodnej aditívnej zmeny pre agenta s majetkom blízko nuly je nenulová kladná.

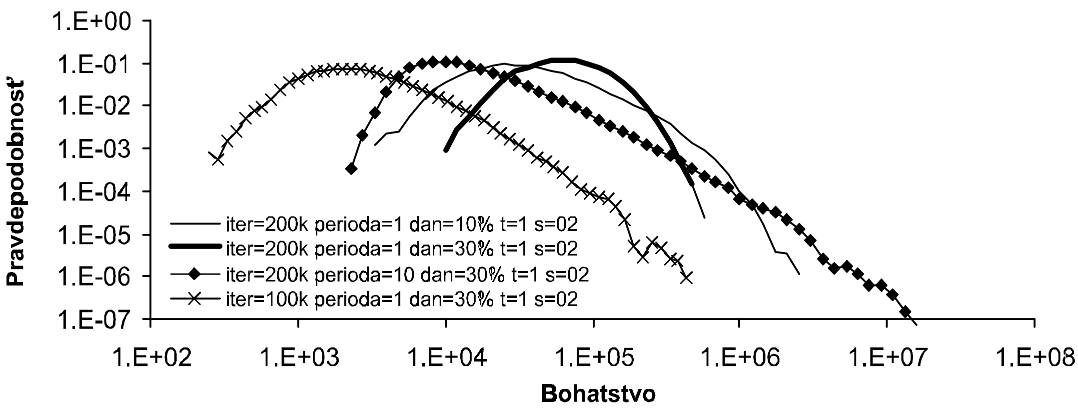
4.6 Kombinácia vplyvov

Na záver sme skĺbili obchodovanie s produkciou a spotrebou, pričom sme na agentov uvalili daň z príjmu. Spustili sme takéto simulácie s rôznymi kombináciami parametrov a sledovali ich vplyv. Na grafoch sú výsledné rozdelenia po 100 000 a 200 000 iteráciach.

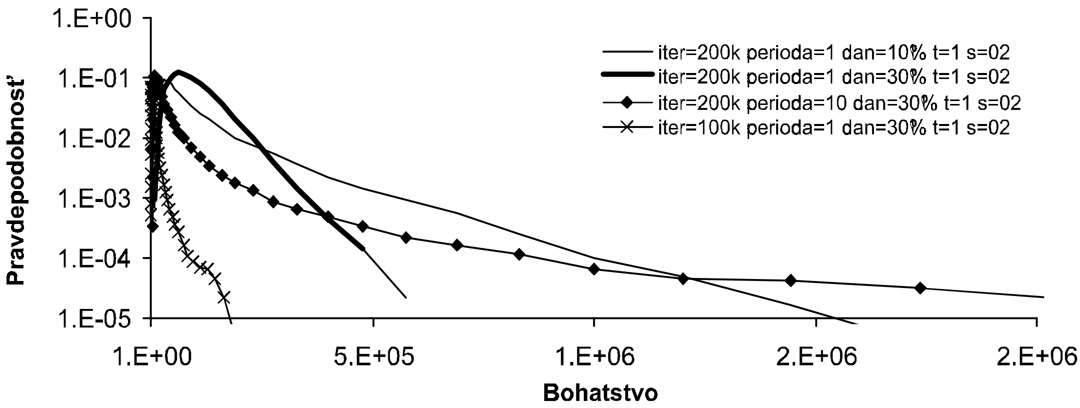
Vplyv periódy zdaňovania sa ukázal ako významný faktor, napriek tomu, že ide o daň z príjmu. Pri menej častom zdaňovaní totiž rozdiely rastú rýchlejšie a vzniká mocninové rozdelenie. Pri častejšom zdanení (aj keď v primerane menších objemoch) sa rozdiely vyrovnávajú skôr, čo zvýhodňuje chudobnejších na úkor bo-



Obrázok 13 **Multiplikatívny model s aditívnym šumom.** Šum zvýhodňuje agentov s majetkom blízko 0.



Obrázok 14 **Kombinované modely s daňou z príjmu pre rôzne sadzby a periódy zdaňovania.** Log-log zobrazenie rozdelenia pravdepodobnosti príjmov.



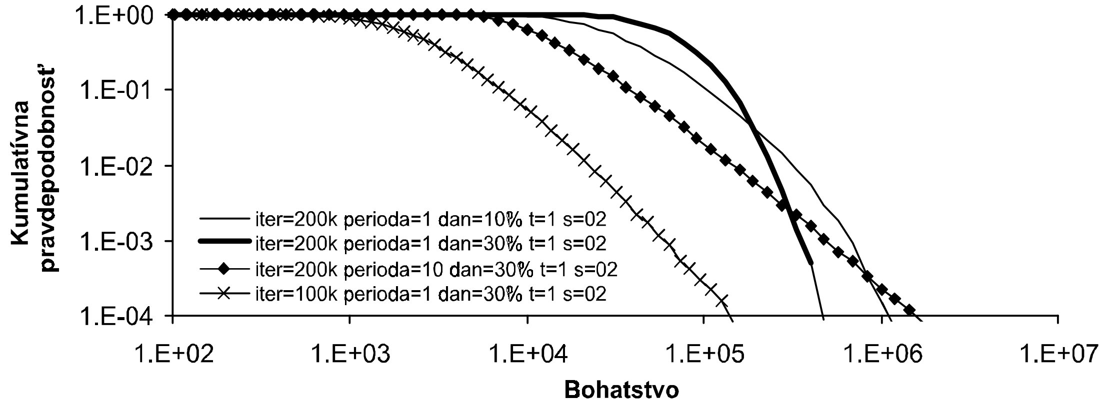
Obrázok 15 **Kombinované modely s daňou z príjmu pre rôzne sadzby a periódy zdaňovania.** Log-lin zobrazenie rozdelenia pravdepodobnosti príjmov.

hatších. Náhodné multiplikatívne zmeny simulujúce produkciu a spotrebu tento efekt ešte zväčšujú. Pritom zvýšenie rozptylu týchto zmien prudko zvyšuje rýchlosť rastu bohatstva u všetkých - pri $\sigma = 0.5$ sa najnižší majetok vyšplhal po 200 000 transakciách na 31 ciferné číslo (na rozdiel od obrázka, kde sú všetky štyri rozdelenia pri $\sigma = 0.2$). To je spôsobené kombináciou zdaňovania a náhodných multiplikatívnych zmien. Pre pochopenie stačí jednoduché cvičenie: Majme dvoch agentov, každý s majetkom 1000 jednotiek. V prvej iterácii majetok jedného z nich klesne 1.1-krát, majetok druhého 1.1-krát stúpne. Zisk druhého zdaníme 10% sadzbou a rozdelíme medzi oboch. V ďalšej iterácii si 1.1-násobný pokles a zisk vymenia. Po zdanení a rozdelení dane budú mať po 1000.025 a 1000.93 jednotiek, teda obaja budú bohatší ako na začiatku.

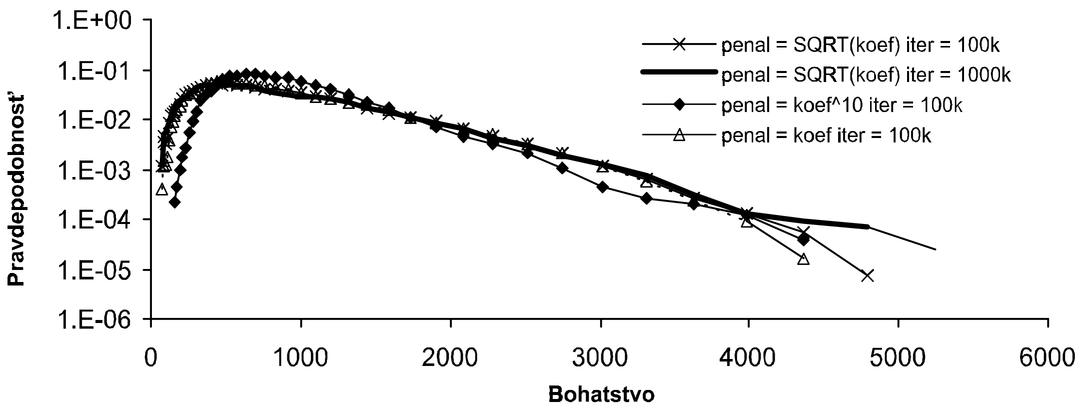
Všetky štyri zobrazené kombinácie vytvárajú strednú triedu, inými slovami, najvyššiu pravdepodobnosť má príjem väčší ako nula. Pri zdaňovaní s periódou 10 000 transakcií sme pre časť s mocninovým rozdelením (takmer 3000 agentov s najvyšším príjmom; na grafe štvorčekované údaje) namerali exponent $\alpha = 1.49$, teda takmer identický s hodnotou 1.5 o ktorej Pareto pred vyše sto rokmi tvrdil, že je univerzálna pre všetky krajiny a doby.

Vráťme sa ešte naposledy k poznatkom o skutočných rozdeleniach príjmu a bohatstva v Japonsku a USA. Pre 95-99% obyvateľstva distribúcia sleduje exponenciálne rozdelenie, pričom u zvyšnej skupiny najbohatších obyvateľov sa toto mení na mocninové. Ak predpokladáme, že obchodovanie má na toto rozdelenie najväčší vplyv, potom v celej populácii okrem bohatého konca nejakým spôsobom funguje zvýhodňovanie chudobnejších. V najbohatšej vrstve sa toto zvýhodňovanie chudobnejšieho oproti bohatšiemu zrejme stráca a transakcie prebiehajú pri spravodlivej cene. Aby sme v simulácii dostali takýto výsledok (teda exponenciálne rozdelenie s mocninovým chvostom), musíme túto skutočnosť implementovať do modelu. Obchodovanie s asymetrickou cenou sme tak rozšírili o penalizačnú funkciu

$$penal(w_p, w_r, w_{MAX}, w_{MIN}) = \frac{w_{MAX} - w_p}{w_{MAX} - w_{MIN}}$$



Obrázok 16 **Kombinované modely s daňou z príjmu pre rôzne sadzby a periódy zdaňovania.** Log-log zobrazenie rozdelenia kumulatívnej pravdepodobnosti príjmov.



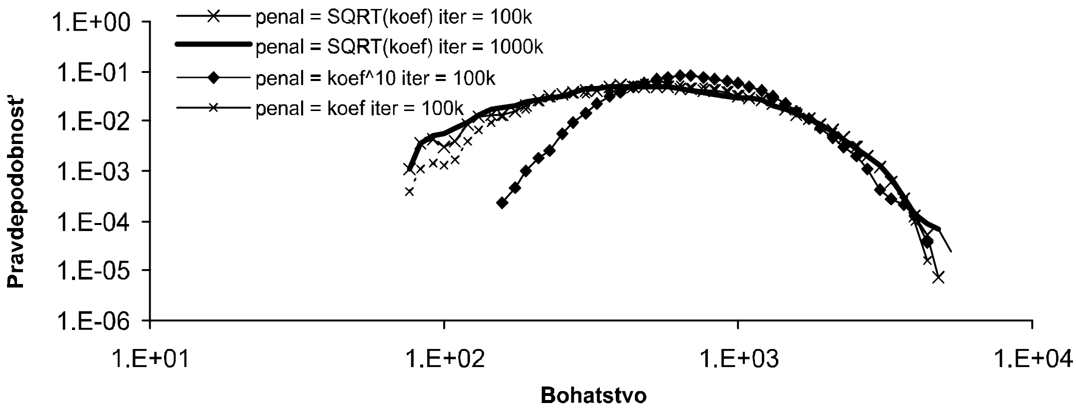
Obrázok 17 **Model s penalizačnou funkciou generujúci exponenciálne rozdelenie s mocninovým chvostom.** Log-lin zobrazenie rozdelenia pravdepodobnosti.

a pravdepodobnosť, že v transakcii vyhrá chudobnejší sme tentoraz stanovili ako:

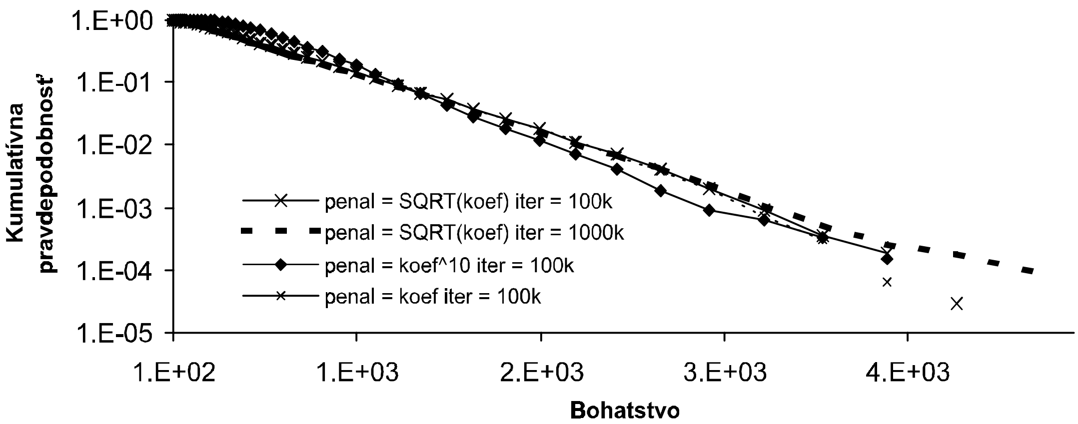
$$p_p = 0.5 + a\frac{w_r - w_p}{w_r + w_p}.(penal(w_p, w_r, w_{MAX}, w_{MIN}))^k$$

kde w_p,w_r sú majetky chudobnejšieho a bohatšieho z dvojice agentov, ktorí sa zúčastňujú transakcie, w_{MAX},w_{MIN} sú majetky najbohatšieho a najchudobnejšieho agenta v celej simulovanej populácii. Simuláciu sme spustili pre parametre $k = \{\frac{1}{2}, 1, 10\}$ a 10^5 transakcií, pričom pre $k = \frac{1}{2}$ uvádzame aj rozdelenie po 10^6 transakciách.

Pri porovnaní je vidno, že postupom času zostáva exponenciálne rozdelenie stabilné, pričom mocninový chvost sa rozširuje. Od koeficientu k závisí, pri akej hodnote majetku sa exponenciálne rozdelenie začína lámať na mocninové. Pre $k = \frac{1}{2}$ sa to deje tesne pred hranicou 4000 jednotiek a mocninové rozdelenie pokrýva 11, respektíve 18 agentov, teda 0,22% a 0,36% populácie. Pre $k = 10$ je bod zlomu už okolo 3000



Obrázok 18 **Model s penalizačnou funkciou generujúci exponenciálne rozdelenie s mocninovým chvostom.** Log-log zobrazenie rozdelenia pravdepodobnosti.



Obrázok 19 **Model s penalizačnou funkciou generujúci exponenciálne rozdelenie s mocninovým chvostom.** Log-lin zobrazenie rozdelenia kumulatívnej pravdepodobnosti.

jednotiek, pričom mocninové rozdelenie aproximuje príjmy 55 agentov (1,1%). Takto modelované rozdelenie teda postihuje všetky sledované znaky skutočných rozdelení.

Záver

Prínos predkladanej práce je dvojaký - analyzuje slovenské dáta z hľadiska typu rozdelenia a modelovaním vysvetľuje niektoré aspekty distribúcie bohatstva. Pri čistých príjmoch domácností na osobu sme pre viac ako polovicu domácností identifikovali jednoznačné exponenciálne rozdelenie. Distribúcia príjmov jednotlivcov, ktorí podali v roku 2000 daňové priznanie je zasa v celom rozsahu výborne aproximovaná mocninovým rozdelením s exponentom $\alpha = 1.11$. Keďže pravdepodobne práve táto skupina tvorí najbohatšiu časť nášho obyvateľstva, výsledok je v súlade so skúsenosťou veľkých trhových ekonomík. Prekvapil jedine rozsahom - keď v zahraničných dátach je mocninové rozdelenie charakteristické pre menej ako 5% populácie, na Slovensku títo ľudia tvoria pätinu populácie v aktívnom veku a približne štvrtinu pracujúcich.

Modelovanie prinieslo ešte zaujímavejšie výsledky. Ak predpokladáme, že rozdeľovanie bohatstva sa deje na základe rôznych výsledkov transakcií na trhoch (pritom ide o trhy v širokom slova zmysle), potom obchodovanie pri cenách, ktoré sa náhodne symetricky pohybujú okolo spravodlivej ceny vedie k mocninovému rozdeleniu. Aby sme dostali exponenciálne rozdelenie, musíme v transakciách zvýhodňovať chudobnejších účastníkov. Zvýhodňovanie sme uskutočňovali buď zvýšením pravdepodobnosti výhry chudobnejšieho agenta, alebo prirodzenejšie - zdaňovaním. Progresívna daň sa podľa očakávania ukázala byť účinnejšou formou zvýhodňovania ako rovná daň. K mocninovému rozdeleniu viedol aj model uvažujúci nie obchodovanie, ale zmenu majetku vplyvom produkcie a spotreby. Na záver sme navrhli mechanizmus, ktorý eliminuje zvýhodňovanie v najbohatšej časti populácie a umožňuje tak vznik exponenciálneho rozdelenia s mocninovým chvostom - teda rozdelenia, ktoré je v reálnych dátach pozorované najčastejšie.

Literatúra

1. Wataru Souma, *Physics of Personal Income*, 2002, arXiv: cond-mat/0202388
2. Jean-Philippe Bouchaud, *Power-laws in economy and finance: some ideas from physics*, 2000, arXiv: cond-mat/0008103
3. Adrian Dragulescu, Victor M. Yakovenko, *Evidence for the exponencial distribution of income in the USA*, 2000, arXiv: cond-mat/0008305
4. Nicola Scafetta, Sergio Picozzi, Bruce J. West, *Pareto's law: a model of human sharing and creativity*, 2002, arXiv: cond-mat/0209373
5. Adrian Dragulescu, Victor M. Yakovenko, *Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and United States*, 2001, arXiv: cond-mat/0103544
6. Adrian Dragulescu, Victor M. Yakovenko, *Statistical Mechanics of Money, Income and Wealth: A Short Survey*, 2002, arXiv: cond-mat/0211175
7. Yoshi Fujiwara, Wataru Souma, Hideaki Aoyama, Taisei Kaizoji, Masanao Aoki, *Growth and Fluctuations of Personal Income*, 2002, arXiv: cond-mat/0208398
8. Hideaki Aoyama, Yuichi Nagahara, Mitsuhiro P. Okazaki, Wataru Souma, Hideki Takayasu, Misako Takayasu, *Pareto's Law for Income of Individuals and Debt of Bankrupt Companies*, 2000, arXiv: cond-mat/0006038
9. *Štatistická ročenka Slovenskej republiky za rok 1999,* ŠÚSR, 2000
10. Rastislav Potocký a kolektív, *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky,* Alfa, 1991
11. P. Ormerod, C.Mountfield, *Power Law Distribution of the Duration and Magnitude of Recesions in capitalist Economies: Breakdown of Scaling*, 2000, Physica A, 293, 573-582
12. P. Ormerod, The US Business Cycle: *Power Law Scaling for Interacting Units with Complex Internal Structure*, 2001
13. Matthieu Wyart, Jean-Philippe Bouchaud, *Statistical models for company growth*, 2002, arXiv: cond-mat/0210479
14. Hari M. Gupta, José R. Campanha, *Firms Growth Dynamics, Competetion and Power Law Scaling*, 2002, arXiv: cond-mat/0201219
15. Vasiliki Plerou, Parameswaran Gopikrishnan, Luis A. Nunes Amaral, Martin Meyer, H.Eugene Stanley, *Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies*, 1999, arXiv: cond-mat/9907161
16. Branko Milanovic, *True world income distribution, 1988 nad 1993: First calculation based on household surveys alone*, World Bank

Prílohy

Zoznam príloh

1. Príjmy domácností na osobu podľa údajov ŠÚSR, Mikrocenzus 1996
2. Zdrojové kódy simulácii pre software Mathematica

Príloha 1:

Čisté príjmy domácností SR na osobu v roku 1996
(Mikrocenzus, ŠÚ SR)

Príjmový interval od		do	Počet domácností
0	-	9600	0
9601	-	12000	47972
12001	-	14400	15235
14401	-	16800	22290
16801	-	19200	30000
19201	-	21600	38152
21601	-	24000	46087
24001	-	26400	61374
26401	-	28800	77655
28801	-	31200	72053
31201	-	33600	90123
33601	-	36000	103614
36001	-	38400	99731
38401	-	40800	122267
40801	-	43200	123019
43201	-	45600	114985
45601	-	48000	105298
48001	-	50400	98508
50401	-	52800	75655
52801	-	55200	64368
55201	-	57600	57908
57601	-	60000	48531
60001	-	62400	31528
62401	-	64800	36432
64801	-	67200	30133
67201	-	69600	23585
69601	-	72000	19652
72001	-	74400	15808
74401	-	76800	18214
76801	-	79200	16524
79201	-	81600	11675
81601	-	84000	11764
84001	-	86400	9264
86401	-	88800	7459
88801	-	91200	9589
91201	-	93600	10399
93601	-	96000	6908
96001	-	viac	67908
Spolu			**1841667**

Príloha 2:
Zdrojové kódy simulácií pre software Mathematica

Cena symetricky rozdelená okolo spravodlivej:

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
<< Statistics`DataManipulation`

OnlyTrade[agentsnumber_, iter_, frac_] :=
  Module[
        {i, j, k, agt},
        agt = Table[1000, {i, agentsnumber}];
        For[k = 0, k < iter,
        For[tous = 0, tous < 1000,
               {
                i = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
                j = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
                If[i == j, {},
                 {
                            Poor = Min[agt[[i]], agt[[j]]];
                            Rich = Max[agt[[i]], agt[[j]]];
                            Trade = (Random[]/frac)*Poor;
                            XProb = Random[];
                            If [(XProb < 0.5),
                            {agt[[i]] = agt[[i]] + Trade; agt[[j]] = agt[[j]] -
Trade},
                            {agt[[i]] = agt[[i]] - Trade; agt[[j]] = agt[[j]] +
Trade}];
                 }]}, tous++];}k++];
  agt]
```

Cena asymetricky rozdelená okolo spravodlivej:

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
<< Statistics`DataManipulation`

OnlyTradeAsym[agentsnumber_, iter_, frac_, ac_] :=
  Module[
        {i, j, k, agt},
        agt = Table[1000, {i, agentsnumber}];
       AdvantCoef = ac;
       For[k = 0, k < iter,
       {
          For[tous = 0, tous < 1000,
               {
               i = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
       j = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
               If[i == j, {},
                    {
                     Poor = Min[agt[[i]], agt[[j]]];
                     Rich = Max[agt[[i]], agt[[j]]];
                     Amount = (Random[]/frac)*Poor;
                     AdvantProb = 0.5 + AdvantCoef*((Rich - Poor)/(Rich + Poor));
                     XProb = Random[];
       If [(XProb < AdvantProb), Trade = Amount, Trade = -Amount];
       If [(agt[[i]] <= agt[[j]]),
{agt[[i]] = agt[[i]] + Trade; agt[[j]] = agt[[j]] - Trade}, {agt[[i]] = agt[[i]] -
Trade; agt[[j]] = agt[[j]] + Trade}];
                     }]}, tous++];}k++];
  agt]
```

Zdaňovanie majetku, rovná daň:

```
SymTax02flat[agentsnumber_, iter_, frac_, taxtime_, maxtax_] :=
        Module[
        {i, j, k, l, agt, tax, taxcount, taxfromthisone},
         agt = Table[1000, {i, agentsnumber}];
        taxcount = 0;

       For[k = 0, k < iter,
         {
         For[tous = 0, tous < 1000,
         {
```

```
            taxcount++;
            If[(taxtime*1000 == taxcount),
        {
        tax = 0;
        For[l = 0, l < agentsnumber,
        {
        taxfromthisone = maxtax*agt[[l]];
        tax = tax + taxfromthisone;
        agt[[l]] = agt[[l]] - taxfromthisone;
        }, l++];
        taxfrac = tax/agentsnumber;
        For[l = 0, l < agentsnumber, {agt[[l]] = agt[[l]]+taxfrac; }, l++];
        taxcount = 0;
        }, {}];
     i = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
            j = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
     If[i == j, {}, {
            Poor = Min[agt[[i]], agt[[j]]];
            Rich = Max[agt[[i]], agt[[j]]];
            Trade = (Random[]/frac)*Poor;
     XProb = Random[];
            If [(XProb < 0.5),
{agt[[i]] = agt[[i]] + Trade; agt[[j]] = agt[[j]] - Trade}, {agt[[i]] = agt[[i]] -
Trade; agt[[j]] = agt[[j]] + Trade}];
        }]}, tous++];}k++];
  agt]
```

Zdaňovanie majetku, progresívna daň:

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
<< Statistics`DataManipulation`

SymTax02[agentsnumber_, iter_, frac_, taxtime_, maxtax_] :=
         Module[
         {i, j, k, l, agt, tax, taxcount, taxfromthisone},
         agt = Table[1000, {i, agentsnumber}];
        AdvantCoef = ac;
        taxcount = 0;
        For[k = 0, k < iter,
        {
         For[tous = 0, tous < 1000,
           {
         taxcount++;
         If[(taxtime*1000 == taxcount),
        {
        tax = 0;
        wrich = Max[agt];
        wpoor = Min[agt];
        If [(wrich != wpoor),
        For[l = 0, l < agentsnumber,
         {
 taxfromthisone =
        agt[[l]]*maxtax*(agt[[l]] - wpoor)/(wrich -wpoor);
         tax = tax + taxfromthisone;
         agt[[l]] = agt[[l]] - taxfromthisone;
         }, l++], {}];
         taxfrac = tax/agentsnumber;
         For[l = 0, l < agentsnumber, {agt[[l]] = agt[[l]]+taxfrac;}, l++];
         taxcount = 0;
        }, {}];
        i = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
        j = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
        If[i == j, {},
        {
                     Poor = Min[agt[[i]], agt[[j]]];
                            Rich = Max[agt[[i]], agt[[j]]];
                            Trade = (Random[]/frac)*Poor;
        XProb = Random[];
                            If [(XProb < 0.5),
 {agt[[i]] = agt[[i]] + Trade; agt[[j]] = agt[[j]] - Trade},
 {agt[[i]] = agt[[i]] - Trade; agt[[j]] = agt[[j]] + Trade}];
                     }]}, tous++];}k++];
  agt]
```

Zdaňovanie majetku, obmedzene progresívna daň:

```
SymTax02cut[agentsnumber_, iter_, frac_, taxtime_, maxtax_] :=
        Module[
        {i, j, k, l, agt, tax, taxcount, taxfromthisone},
        agt = Table[1000, {i, agentsnumber}];
      taxcount = 0;
      For[k = 0, k < iter,
       {
       For[tous = 0, tous < 1000,
        {
        taxcount++;
  If[(taxtime*1000 == taxcount),
      {
      tax = 0;
      wrich = Max[agt];
      wpoor = Min[agt];
      If [(wrich != wpoor), For[l = 0, l < agentsnumber,
       {
       taxfromthisone = agt[[l]]*(Min[(agt[[l]] - wpoor)/(wrich - wpoor),
       maxtax]);
       tax = tax + taxfromthisone;
       agt[[l]] = agt[[l]] - taxfromthisone;
       }, l++], {}];
      taxfrac = tax/agentsnumber;
      For[l = 0,l < agentsnumber, {agt[[l]] = agt[[l]] + taxfrac;}, l++];
      taxcount = 0;
      }, {}];
          i = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
        j = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
        If[i == j, {}, {
        Poor = Min[agt[[i]], agt[[j]]];
        Rich = Max[agt[[i]], agt[[j]]];
  Trade = (Random[]/frac)*Poor;
        XProb = Random[];
          If [(XProb < 0.5),
          {agt[[i]] = agt[[i]] + Trade;agt[[j]] = agt[[j]] - Trade},
        {agt[[i]] = agt[[i]] - Trade;agt[[j]] = agt[[j]] + Trade}];
         }]}, tous++];}k++];
 agt]
```

Zdaňovanie príjmu, progresívna daň:
(rovná a obmedzene progresívna daň sa implementujú podobne ako pri dani z majetku)

```
SymTax02inc[agentsnumber_, iter_, frac_, taxtime_, maxtax_] :=
        Module[
        {i, j, k, l, agt, agtold, tax, taxcount, taxfromthisone},
        agt = Table[1000, {i, agentsnumber}];
      v0 = Table[0, {i, agentsnumber}];
      agtold = agt;
      taxcount = 0;
      For[k = 0, k < iter,
       {
       For[tous = 0, tous < 1000,
       {
        taxcount++;
        If[(taxtime*1000 == taxcount),
      {
      tax = 0;
      income = agt - agtold;
      wrich = Max[income];
      wpoor = Min[income];
      If [(wrich != wpoor),
       For[l = 0, l < agentsnumber,
       {
       taxfromthisone =
       Max[0, income[[l]]]*maxtax*(income[[l]] - wpoor)/(wrich - wpoor);
       tax = tax + taxfromthisone;
       agt[[l]] = agt[[l]] - taxfromthisone;
      }, l++], {}];
      taxfrac = tax/agentsnumber;
      For[l = 0,l < agentsnumber, {agt[[l]] = agt[[l]]+taxfrac; }, l++];
      taxcount = 0;
```

```
        agtold = agt;
          }, {}];

          i = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
          j = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
          If[i == j, {}, {
          Poor = Min[agt[[i]], agt[[j]]];
          Rich = Max[agt[[i]], agt[[j]]];
          Trade = (Random[]/frac)*Poor;
          XProb = Random[];
          If [(XProb < 0.5),
          {agt[[i]] = agt[[i]] + Trade; agt[[j]] = agt[[j]] - Trade},
          {agt[[i]] = agt[[i]] - Trade; agt[[j]] = agt[[j]] + Trade}];
        }]}, tous++];}k++];
  agt]
```

Multiplikatívny model s aditívnym šumom:

```
MSPwithNoise[agentsnumber_, iter_, sigma_, noise_] :=
  Module[
         {i, agt, id, id2, koef},
         agt = Table[1000, {i, agentsnumber}];
         For[i = 1, i < iter,
         {
                For[j = 0, j < agentsnumber, {
                       koef = Random[NormalDistribution[1, sigma]];
        id = Random[] - 0.5;
        id2 = id/Abs[id];
new = agt[[j]]*(koef^id2) Random[NormalDistribution[0, noise]];
        If [new > 0 , agt[[j]] = new;, {}]
                }, j++];
         }, i++];
        agt]
```

Cena asymetricky rozdelená okolo spravodlivej, riadená penalizačnou funkciou:

```
OnlyTradeAsymPenal[agentsnumber_, iter_, frac_, ac_, penal_] :=
        Module[
        {i, j, k, agt},
        agt = Table[1000, {i, agentsnumber}];
        AdvantCoef = ac;
        wmax = 1000;
        wmin = 1000;
        For[k = 0, k < iter,
        {
         For[tous = 0, tous < 1000,
         {
          i = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
          j = Random[Integer, {1, agentsnumber}];
          If[i == j, {}, {
         Poor = Min[agt[[i]], agt[[j]]];
         Rich = Max[agt[[i]], agt[[j]]];
         Amount = (Random[]/frac)*Poor;
        If[(wmax != wmin), koef2 = (wmax - Poor)/(wmax - wmin), koef2 = 1];
        AdvantProb = 0.5 +
        AdvantCoef*((Rich - Poor)/(Rich + Poor))*(koef2^penal);
        XProb = Random[];
        If [(XProb < AdvantProb), Trade = Amount,
        Trade = -Amount];
        If [(agt[[i]] <= agt[[j]]),
{agt[[i]] = agt[[i]] + Trade; agt[[j]] = agt[[j]] - Trade}, {agt[[i]] = agt[[i]] -
Trade; agt[[j]] = agt[[j]] + Trade}];
        If[(agt[[i]] > wmax), wmax = agt[[i]], {}];
        If[(agt[[j]] > wmax), wmax = agt[[j]], {}];
        If[(agt[[i]] < wmin), wmin = agt[[i]], {}];
        If[(agt[[j]] > wmin), wmin = agt[[j]], {}];
        }]}, tous++];}k++];
        agt]
```