FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2004 MARTIN KEČKÉŠ

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

EKONOMICKÁ A FINANČNÁ MATEMATIKA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

OPTIMALIZÁCIA PORTFÓLIA DLHOPISOV VO VIACERÝCH MENÁCH

DIPLOMANT: MARTIN KEČKÉŠ

VEDÚCI DIPLOMOVEJ PRÁCE: MGR. IGOR MELICHERČÍK, PHD.

BRATISLAVA 2004

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

ČESTNE PREHLASUJEM, ŽE SOM TÚTO DIPLOMOVÚ PRÁCU VYPRACOVAL SAMOSTATNE S VYUŽITÍM UVEDENEJ LITERATÚRY

....

POĎAKOVANIE

ĎAKUJEM VEDÚCEMU DIPLOMOVEJ PRÁCE MGR. IGOROVI MELICHERČÍKOVI ZA VŠETOK ČAS, KTORÝ MI VENOVAL, A TAKTIEŽ ZA UŽITOČNÉ RADY A PODNETY, KTORÉ MI POMOHLI PRI PÍSANÍ TEJTO PRÁCE. ÚPRIMNE ĎAKUJEM AJ SVOJIM RODIČOM ZA VŠESTRANNÚ PODPORU POČAS CELÉHO ŠTÚDIA.

Obsah

1 Úvod

Každý investor sa snaží zhodnocovať svoj majetok. Jedným z možných spôsobov investovania voľných finančných prostriedkov je investovanie do dlhopisov. Cieľom tejto práce je poskytnúť návod, ako postupovať pri vhodnom zostavovaní portfólia. Prácu možno rozčleniť na viacero častí. V úvode sa pokúsime odpovedať, či existujú nejaké dôvody, pre ktoré by sa investor mal rozhodnúť investovať do dlhopisov v rôznych krajinách, oproti možnosti investovať svoje prostriedky do dlhopisov len vo svojej domácej krajine. Lebo ak sa investor rozhodne investovať do dlhopisov v rôznych krajinách, musí pritom zobrať do úvahy, že celkový výnos portfólia bude pozostávať z dvoch komponentov. Prvou zložkou bude výnos z úrokovej miery pre dané dlhopisy a druhou zložkou bude výnos spôsobený zmenami vo výmenných kurzoch. Prvá časť práce sa bude zaoberať vytvorením vhodného modelu, ktorý popisuje túto situáciu, pričom uvedieme viacero vhodných modelov. Druhá časť práce sa bližšie venuje modelom výnosnosti, ako aj spôsobu vyhodnocovania dosiahnutých výsledkov. Riešením tohto modelu bude vektor určujúci optimálnu skladbu nášho portfólia. Na záver je ešte uvedený príklad, ktorý je numerickým vysledkom takéhoto postupu.

2 Motivácia pre medzinárodnú diverzifikáciu portfólia

Pýtame sa, či sa vôbec oplatí diverzifikovať portfólio do viacerých mien? Treba si pritom dávať pozor, aby sme nespravili unáhlený záver. Potrebujeme totiž zobrať do úvahy aj fakt, že volatilita na dlhopisových trhoch je typicky rádovo nižšia než volatilita výmenných kurzov a teda zmeny v pohyboch výmenných kurzov môžu eliminovať výhody plynúce zo samotnej diverzifikácie. Avšak odpoveďou je, že áno, oplatí sa portfólio diverzifikovať, ak sú trhy dostatočne nekorelované a tým sa nám podarí znížiť rizikovosť nášho portfólia. Toto tvrdenie vychádza z teórie portfólia, ktorú sformuloval *Harry Markowitz*. Definoval portfólio ako množinu aktív, pričom sa zaujímal hlavne o dva parametre portfólia o relatívny výnos r_p a varianciu portfólia σ_p^2. Ak si výnosnosť i-tej zložky portfólia označíme ako r_i, a budeme poznať strednú hodnotu tejto výnosnosti $\overline{r_i}$, potom možno určiť charakteristiky celého portfólia takto:

$$\overline{r_p} = \sum_i w_i \overline{r_i}$$

$$\sigma_p^2 = E((r_p - \overline{r_p})^2) = E((\sum_i w_i r_i - \sum_i w_i \overline{r_i})^2) =$$

$$= E((\sum_i (w_i r_i - w_i \overline{r_i}))^2) = E((\sum_i \sum_j w_i w_j (r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j})) =$$

$$= \sum_i \sum_j w_i w_j E((r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j})) = \sum_i \sum_j w_i w_j \mathrm{Cov}(r_i , r_j)$$

Na jednoduchom príklade s dvoma aktívami sa dá ukázať vhodnosť diverzifikácie portfólia, ak tieto dve aktíva sú dostatočne nekorelované. Diverzifikáciou dosiahneme, že výsledné portfólio bude mať nižšiu volitilitu ako jednotlivé zložky tohto portfólia.

$\overline{r_1} = 0{,}12$ $\quad \overline{r_2} = 0{,}15$

$\sigma_1 = 0{,}20$ $\quad \sigma_2 = 0{,}18$ $\quad \sigma_{12} = 0{,}01$

$\underline{w_1 = 0{,}25 \quad w_2 = 0{,}75}$

$$\overline{r_p} = \sum_i w_i \overline{r_i} = 0{,}1425$$

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j w_i w_j \mathrm{Cov}(r_i , r_j) = 0{,}0245 \quad \rightarrow \sigma_p = 0{,}1564$$

Vidíme, že naozaj platí: $\sigma_p < \sigma_1$ a aj $\sigma_p < \sigma_2$.

Intuitívne by sme mohli očakávať, že korelácia medzi jednotlivými medzinárodnými trhmi s dlhopismi postupne narastá. Lebo aj vplyvom globalizácie na svetových finančných trhoch sa iba zhoršuje situácia, ktorej čelia portfólioví manažéri. Na jednej strane totiž dochádza k rozšíreniu technických a výpočtových možností umožňujúcich lepšie sledovanie a predpovedanie vývoja trhových trendov, čo vedie k explozívnemu rastu obchodovania na medzinárodných dlhopisových trhoch. Na druhej strane, tento istý vývoj spôsobuje aj nárast synchronizácie medzi jednotlivými trhmi.

Nasledujúca tabuľka porovnáva korelačné koeficienty medzi výnosmi v USA a na zahraničných dlhopisových trhoch. Prvé dva stĺpce zobrazujú korelácie medzi výnosmi v domácich menách týchto krajín v dvoch rôznych časových obdobiach. Ako je vidno vo všetkých prípadoch okrem Kanady, stupeň korelácie vzrástol, alebo sa nezmenil, pričom platí, že rastúca miera korelácie znižuje výhody plynúce z medzinárodnej diverzifikácie. Tretí stĺpec započítava aj volatilitu výmenného kurzu a počíta koreláciu vo výnosoch prepočítaných do dolárov, tentoraz ale možno pozorovať, že korelácia sa nezmenila, alebo dokonca poklesla. Z tohto vyplýva, že predsa existujú výhody medzinárodnej diverzifikácie, ale vďačíme za to hlavne volatilite výmenných kurzov (tabuľka [[1]]).

Trh	**Výnosy v domácej mene**		**Výnosy v USD**
	1978 – 1995	1990 – 1995	1990 – 1995
Austrália	0,32	0,68	0,42
Kanada	0,71	0,51	0,49
Francúzsko	0,34	0,49	0,38
Nemecko	0,50	0,51	0,33
Japonsko	0,38	0,43	0,26
Holandsko	0,52	0,53	0,35
Švajčiarsko	0,36	0,46	0,26
Veľká Británia	0,39	0,49	0,39

2.1 Manažér portfólia by mal urobiť tieto rozhodnutia

Vo všeobecnosti sa problém investovania do viacerých mien rozkladá na dve etapy. V prvom kroku sa určia podiely investované do jednotlivých krajín (*global asset allocation problem*), a to je problém, ktorému sa chcem v tejto práci venovať, a až v druhom kroku sa určí portfólio špecifické pre každú krajinu (*bond picking problem*). Takéto rozdelenie možno interpretovať pomocou dvojúrovňového systému riešenia úlohy optimalizácie portfólia dlhopisov vo viacerých menách tak, že jeden centrálny manažér určí podiely investované do jednotlivých krajín a potom zadá úlohu pre miestnych manažérov, aby z prideleného podielu finančných prostriedkov optimalizovali zloženie portfólia v danej krajine. Teda rozhodnutie o voľbe konkrétneho dlhopisu, ktorý sa má pridať do portfólia, ponecháva centrálny manažér na miestnych manažérov. Tomuto druhému kroku – voľbe konkrétnych dlhopisov – sa nebudem venovať. Treba poznamenať, že tieto rozhodnutia možno urobiť aj spolu, ale veľkou nevýhodou takéhoto postupu je veľká numerická náročnosť riešenia.

Keď už máme určené portfólio, ešte zostáva rozhodnúť o miere prerovnávania portfólia. Ponúkajú sa nám dve hraničné situácie a to stratégia *Buy & Hold*, kde portfólio neprerovnávam, to znamená, že na začiatku investičného horizontu urobím rozhodnutie a potom už len čakám do konca, ako sa situácia vyvinie. Druhou možnosťou je pravidelné prerovnávanie portfólia, teda pravidelne vždy v stanovenom intervale sa pozriem, ako sa vyvíjajú úrokové miery a výmenný kurz a následne môžem upraviť svoju investičnú stratégiu. Nedá sa jednoznačne rozhodnúť, ktorá stratégia z týchto dvoch je lepšia, často to závisí na konkrétnych okolnostiach.

Na uľahčenie riešenia *global asset allocation problem* sa používajú dlhopisové indexy a teda budem vlastne porovnávať vývoj dlhopisových indexov rôznych krajín. Dlhopisové indexy nám umožňujú rýchlejšie a prehľadnejšie rozhodovanie o alokácii určitého podielu investície do konkrétnej krajiny a to tým, že namiesto sledovania obrovského množstva rôznych dlhopisov, ktoré sa líšia dobou do splatnosti (*maturity*), kupónovými splátkami a podobne, budeme sledovať iba jeden vývoj a to akoby reprezentatívneho dlhopisu.

Konštrukcia dlhopisového indexu spočíva v určení reprezentatívnej vzorky, v ktorej má každý dlhopis zvolenú svoju konkrétnu váhu podľa jeho podielu na celkovej kapitalizácií dlhopisového trhu danej krajiny (*value weighted*) Je to podobné ako pri akciových indexoch, kde medzi najznámejšie patria napr. indexy S&P 500, Dow Jones, Nasdaq. Dlhopisové indexy nie sú až tak známe, ale uvediem aspoň jeden príklad Solomon Brothers Global Index, ktorý sleduje dlhopisové indexy v najviac rozvinutých krajinách. O niečo podrobnejšie je konštrukcia dlhopisového indexu opísaná v časti integrovaný model optimalizácie.

3 *Buy & Hold*

Základný model, ktorému sa venujem, je model *Buy & Hold*. Jedná sa o situáciu, kde investor už na začiatku určí podiely, ktoré investuje do jednotlivých indexov a potom už len čaká, ako sa situácia vyvinie.

3.1 Ohraničenia modelu *Buy & Hold*

Ohraničenia možno rozdeliť do troch typov. Prvým typom je ohraničenie na nezápornosť, teda nie je povolené dlhovať indexy (nie sú dovolené tzv. *short positions*). Druhým typom ohraničenia je rovnica *inventory balance*, ktorá vyjadruje rovnováhu medzi počiatočným počtom kusov indexu plus počet kusov nakúpených mínus počet kusov predaných, musí sa rovnať počtu aktuálne vlastnených kusov jednotlivých indexov. Táto rovnováha musí platiť pre každú spomedzi m-krajín. Tretím typom ohraničenia je rovnica *cash-flow accounting*, teda princíp vyjadrujúci rovnováhu medzi príjmami za predaj indexov plus počiatočný stav hotovosti, musí sa rovnať nákladom na kúpu indexov.

nezápornosť: $\forall\ X_j, Y_j, Z_j \geq 0$

inventory balance: $b_j + X_j - Y_j = Z_j \qquad \forall j = 1,...,m$

cash-flow accounting: $m_0 + \sum_{j=1}^{m} \xi_j Y_j = \sum_{j=1}^{m} \chi_j X_j$

Popis premenných použitých v ohraničeniach modelu:

X_j: množstvo indexu j nakúpeného v čase t = 0

Y_j: množstvo indexu j predaného v čase t = 0

Z_j: množstvo indexu j vlastneného v čase t = 0

m_0: počiatočné množstvo peňazí určených na investovanie

b_j: zloženie počiatočného portfólia

c_j: výmenný kurz medzi základnou menou a j-tou menou

d_j: hodnota j-teho indexu vyjadrená v j-tej mene

ξ_j: cena v základnej mene, za ktorú možno predať j-ty index: $\xi_j = c_j\, d_j\, (1-\delta)$

χ_j: cena v základnej mene, za ktorú možno kúpiť j-ty index: $\chi_j = c_j\, d_j\, (1+\delta)$

δ: faktor transakčných nákladov

Doplnkové ohraničenia:

Do modelu možno na požiadanie investora pridať aj ďalšie ohraničenia. Typickým príkladom je obmedzenie, že do žiadnej meny nesmie byť investovaných viac prostriedkov ako vopred stanovených p percent. Môže to byť aj opačne, teda môže byť požiadavka, aby aspoň p percent bolo investovaných do niektorej meny, čo je napríklad presne stanovené pre dôchodkové správcovské spoločnosti spravujúce fondy v druhom kapitalizačnom pilieri dôchodkového poistenia. Tieto majú zo zákona povinne určené investovať aspoň paťdesiat percent všetkých prostriedkov na Slovensku. Matematicky možno toto ohraničenie naformulovať nasledovne:

$$\frac{\chi_j\, X_j}{m_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j\, \xi_j} \le p$$

Aby aj toto ohraničenie bolo naformulované ako lineárne, stačí ho len prepísať a dostaneme:

$$\chi_j\, X_j - p\,(m_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j\, \xi_j) \le 0$$

Podobne investor môže zadať ohraničenie obmedzujúce predaj počiatočného portfólia len do určitej výšky. Aby sa totiž investorovi nestalo, že jedenkrát mu bude odporúčané všetko predať a následne investovať do niektorej meny, a v nasledujúcom období mu bude dané odporúčanie opäť všetko predať a nakúpiť inú menu. Lebo ak by takto pokračoval aj naďalej, postupne by všetko prerobil len na transakčných nákladoch, preto môže zadať určitú mieru zotrvačnosti, aby jeho pôvodné portfólio nebolo priveľmi menené. Konkrétne sa teda zadá maximálna prípustná hodnota v percentách β, pokiaľ ešte investor akceptuje predaj svojho pôvodného portfólia. Matematická formulácia je veľmi podobná:

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} \xi_j Y_j}{m_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j \xi_j} \le \beta$$

Aby aj toto ohraničenie bolo naformulované ako lineárne, stačí ho len prepísať a dostaneme:

$$\sum_{j=1}^{m} \xi_j Y_j - \beta \left(m_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j \xi_j\right) \le 0$$

3.2 Účelová funkcia v modeli *Buy & Hold*

Účelová funkcia maximalizuje strednú hodnotu užitočnosti koncového stavu (*wealth terminal*). Koncový stav určuje predajnú hodnotu zhodnoteného portfólia.

$$WT = \sum_{j=1}^{m} \xi_j (1+r_j) Z_j = \sum_{j=1}^{m} c_j d_j (1-\delta) (1+r_j) Z_j$$

maximize $\rightarrow$ E(U(WT))

Novou premennou je vektor r_j, ktorý určuje výnosnosť j-tého indexu. Bolo by potrebné poznamenať, že pre model je podstatná práve voľba vektora r, teda vektora totálnej výnosnosti. Totálna výnosnosť zahŕňa aj výnosnosť počítanú v domácej mene, ale zohľadňuje aj vplyv zmeny kurzu, teda je to výnosnosť prepočítaná do základnej meny.

Ostáva ešte určiť konkrétny tvar funkcie užitočnosti, od ktorej sa vždy vyžadujú dve vlastnosti a to rastúcosť a konkávnosť. V literatúre sa uvádza viacero rôznych použiteľných typov funkcií užitočnosti. Jednou z možných tried sú jednoparametrické funkcie užitočnosti. K nim patria aj funkcie z množiny *iso-elastických úžitkových funkcii*.

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(r^{1-\alpha} - 1) & pre\ \alpha \neq 1 \\ \log(r) & pre\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Kde parameter $\alpha \ge 0$ vyjadruje averziu k riziku. Vyššie hodnoty parametra α znamenajú aj vyššiu averziu voči riziku zo strany investora. Zaujímavé hodnoty sú

$\alpha = 0$, kde dostávame lineárnu funkciu užitočnosti: $U(r) = r - 1$, čo zodpovedá riziko-neutrálnemu investorovi a druhou zaujímavou hodnotou je $\alpha = 1$, kedy dostávame logaritmickú funkciu užitočnosti.

Druhým zástupcom v triede jednoparametrických funkcii užitočnosti je kvadratická funkcia užitočnosti v nasledovnom tvare:

$$U(x) = x - \tfrac{1}{2}\,\alpha\, x^2$$

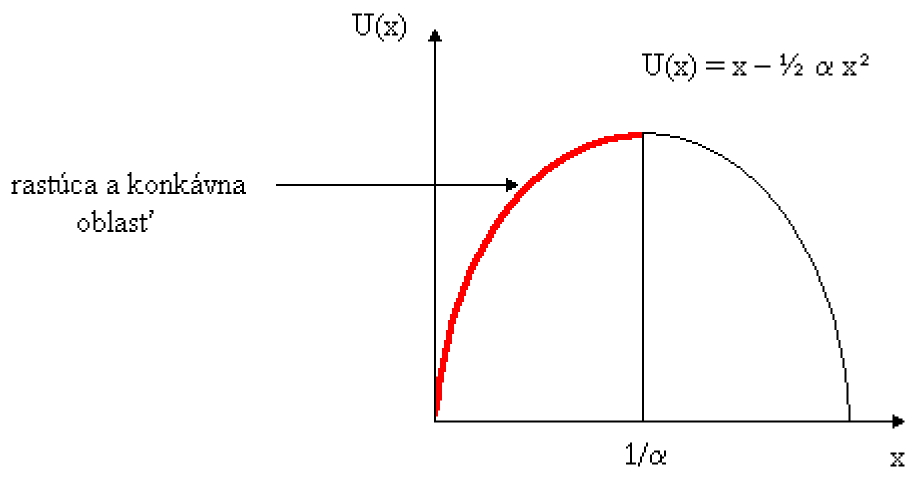
Parameter $\alpha > 0$ opäť vyjadruje averziu k riziku a je to naviac konštanta, ktorou zabezpečíme splnenie podmienok rastúcosti a konkávnosti, lebo kvadratická funkcia vo všeobecnosti nie je ani rastúca ani konkávna. Aby som zabezpečil, že fukcia užitočnosti bude tieto vlastnosti spĺňať, musím sa pozrieť, kde nadobúda svoje maximum. Preto si potrebujem vyjadriť prvú deriváciu funkcie.

$$U'(x) = 1 - \alpha\, x$$

Nutnou podmienkou extrému je, aby sa prvá derivácia rovnala nule, z toho potom dostanem:

$$1 - \alpha\, x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{\alpha}$$

Aby sme zaručili obive vlastnosti, musí tento bod maxima ležať napravo od prípustných hodnôt. Na obrázku to vyzerá nasledovne:



Rozhodli sme sa v tejto práci použiť práve túto funkciu užitočnosti. Ak si uvedomíme, že všetky ohraničenia sú lineárne plus kvadratická účelová funkcia, potom výhodou použitia kvadratickej funkcie užitočnosti je, že môžeme na hľadanie optimálneho riešenia použiť algoritmy z kvadratického programovania. Naviac pre kvadratickú funkciu užitočnosti možno dokázať nasledovné užitočné tvrdenie.

$$E(U(WT)) = U(E(WT)) - \tfrac{1}{2}\,\alpha\,Var(WT)$$

Dôkaz: využíva rozklad funkcie užitočnosti do Taylorovho polynómu.

$$U(x) = U(x^*) + U'(x^*)(x - x^*) + \tfrac{1}{2}\,U''(x^*)(x - x^*)^2$$

$\rightarrow$ na celú rovnicu možno aplikovať strednú hodnotu

$$E(U(x)) = U(x^*) + U'(x^*) \times 0 + \tfrac{1}{2}\,U''(x^*)\,Var(x)$$

$\rightarrow$ keď si uvedomíme, že pre kvadratickú funkciu užitočnosti sa výraz $U''(x^*)$ redukuje iba na tvar $(-\alpha)$, dostaneme požadovaný tvar ak za x dosadíme WT a za člen x* dosadíme E(WT)

$$E(U(WT)) = U(E(WT)) - \tfrac{1}{2}\,\alpha\,Var(WT) \qquad \checkmark$$

4 Model s prerovnávaním portfólia

Model je možné rozšíriť naraz dvoma smermi. Prvým smerom rozšírenia je čas, kde namiesto jedného uvažovaného časového intervalu je možnosť rozšírenia na optimalizáciu cez dlhší časový horizont, teda na viacerých intervaloch. Druhým smerom rozšírenia je možnosť pripustiť kupónové platby, pretože jednotlivé dlhopisy, z ktorých je skonštruovaný dlhopisový index, môžu vyplácať kupón. Pre toto druhé rozšírenie je treba mať vhodnú štruktúru vstupných dát. Ja nemám tieto údaje, a preto som s týmto modelom ďalej nepracoval, len som ho sformuloval.

Nech sledované časové obdobie rozdelíme na rovnaké časti. Budeme začínať v čase t = 0, čo je prítomnosť. Postupne bude plynúť čas až do konca sledovaného obdobia, čo možno označiť ako čas t = n. Spolu potom máme množinu diskrétnych časových okamžikov T = {0, 1, 2 ..., n}.

V predchádzajúcom modeli *Buy & Hold* sa investičné rozhodnutie robilo iba na začiatku a toto rozhodnutie sa neskôr nemenilo. Tento model možno ďalej rozšíriť a to práve o možnosť prerovnávania portfólia, teda o možnosť meniť investičnú stratégiu aj počas sledovaného obdobia. Zmeny možno robiť predajom niektorého indexu alebo jeho prikúpením podľa toho, ako sa vyvíja situácia. Teda je jasné, že jednotlivé premenné X_j, Y_j, Z_j, ktoré vyjadrujú koľko ktorého indexu mám nakúpiť, predať a aktuálne vlastniť, už nebudú konštantné od začiatku obdobia až do jeho konca, ale budú sa môcť priebežne meniť v závislosti od vývoja, teda budú závislé od scenára vývoja. Ale aj v rámci jedného scenára sa môžem rozhodnúť pre zmenu portfólia, pretože môžem prerovnávať portfólio v každom čase. Môže byť pre mňa výhodné mať spočiatku investované prostriedky vo výnosnejšom, ale volatilnejšom indexe a neskôr, ako sa približuje koniec investičného obdobia, postupne presúvať prostriedky smerom k menej volatilnému bezpečnejšiemu indexu. To znamená, že máme závislosť nielen od scenára, ale aj od časového okamihu t. Budú teda závislé od konkrétneho scenára, ktorý predpokladám v čase t, označenie scenára bude s_t. Množina S_t označuje všetky uvažované scenáre v čase t. Ako priebežne plynie čas, niektoré premenné sa stávajú známymi, teda označením cesty l_t, budeme rozumieť tú časť, ktorá sa do času t už stala. Cesta je $l_t = (s_0, s_1, ..., s_{t-1})$, teda všetky informácie do času t sú už známe, lebo s_{t-1} bol scenár od času t–1 do času t. Naproti tomu s_t je predpokladaný scenár vývoja v čase t.

Premenná $X_t^j(l_t)$, bude označovať počet indexov j-tej meny, ktoré nakúpim v čase t, za podmienky, že vývoj premenných sledoval cestu l_t. V čase t = 0 sú ešte všetky premenné špecifikované a preto nepotrebujem závislosť od l_t. K zmene oproti predchádzajúcej situácii dochádza len pri ohraničeniach, ktoré sa líšia podľa toho, pre ktorý čas sú sfomulované. Účelová funkcia sa nemení, teda stále maximalizujem očakávanú užitočnosť koncového stavu, zmení sa ale výraz koncového stavu WT.

Teraz uvediem premenné, ktoré sú závislé od realizovanej cesty: $\xi_t^j(l_t)$ – predajné ceny indexov, $\chi_t^j(l_t)$ – nákupné ceny indexov, $F_t^j(l_t)$ – kupónové platby indexov, $\rho_t(l_t)$ – krátkodobý úrok v banke, $v_t(l_t)$ – množstvo voľných finančných prostriedkov, $X_t^j(l_t)$, $Y_t^j(l_t)$, $Z_t^j(l_t)$ – počty kusov indexov, ktoré nakúpim, predám a aktuálne budem vlastniť. V rovniciach už ale argument l_t nebudem uvádzať kvôli kratšiemu a prehľadnejšiemu zápisu.

nezápornosť: $\forall X_t^j, Y_t^j, Z_t^j \geq 0$

$\forall v_t \geq 0 \quad \forall t \quad \forall l_t$

inventory balance: $b_j + X_0^j - Y_0^j = Z_0^j \quad \forall j = 1,...,m \quad t = 0$

$Z_{t-1}^j + X_t^j - Y_t^j = Z_t^j \quad \forall j = 1,...,m \quad t = 1, 2, ..., n \quad \forall l_t$

cash-flow accounting: $m_0 + \sum_{j=1}^{m} \xi_0^j Y_0^j - \sum_{j=1}^{m} \chi_0^j X_0^j = v_0 \quad t = 0 \quad \forall l_t$

$$(1+\rho_{t-1})\, v_{t-1} + \sum_{j=1}^{m} F_{t-1}^j Z_{t-1}^j + \sum_{j=1}^{m} \xi_t^j Y_t^j - \sum_{j=1}^{m} \chi_t^j X_t^j + L_t = v_t \quad t = 1, 2, ..., n \quad \forall l_t$$

wealth terminal: $WT = \sum_{j=1}^{m} \xi_n^j Z_n^j + v_n$

Popis nových premenných a rovníc použitých v rozšírení modelu:

Na rozdiel od predchádzajúcej situácie je možné neinvestovať všetky finančné prostriedky v čase t. Tieto voľné neinvestované finančné prostriedky označujeme v_t. Tieto prostriedky je možné dať do banky, aby sa neznehodnocovali. Od banky dostaneme úrok na základnú menu platný pre obdobie od času t do času t+1, ktorý budeme označovať ako ρ_t. Ako plynie čas, dostávame kupónový výnos, ktorý označíme

F_t^j. Pre prípad, že investor predpokladá počas uvažovaného obdobia nejaké priebežné výdavky, je ich možné zahrnúť do modelu pomocou doplnkovej premennej L_t, ak v prípade L_t ide o výdavok, potom nadobúda zápornú hodnotu.

V prípade rovníc typu *inventory balance* je rozdielny tvar rovnice v závislosti od toho, aký je aktuálny čas. Prvá verzia je platná pre čas t = 0, rovnica potom znamená, že počiatočné zloženie portfólia plus počet indexov, ktoré prikúpim, mínus tie, ktoré predám, musí sa rovnať počtu, ktoré budem vlastniť. Neskôr v čase t = 1, 2, ..., n, už ale platí, že výbava, ktorú si prinesiem z predchádzajúceho obdobia, vstupuje do rovnice namiesto členu b_j, ale štruktúra rovnice sa nezmení.

Rovnica *cash-flow accounting* pre časy t = 1, 2, ..., n znamená, že zúročené finančné prostriedky z minulého obdobia navýšené o nové kupónové splátky príslušné pre obdobie od času t–1 do času t plus príjmy za predaj indexov, znížené o náklady na nákup nových indexov a aj o priebežný výdavok, musia sa rovnať novej hodnote finančných prostriedkov. Tieto naakumulované finančné prostriedky treba ešte pridať do výrazu koncového stavu a to jednoduchým pripočítaním k pôvodnému tvaru, čo bola predajná hodnota jednotlivých indexov.

Doplnkovým ohraničením môže byť stanovenie $v_n = 0$, aby som na konci nevlastnil voľné finančné prostriedky. V tomto rozšírenom modeli, ak by som totiž priebežne inkasované kupónové výnosy nepoužíval na nákup ďalších indexov, postupne by sa kupónové výnosy len akumulovali a tieto by sa zhodnocovali vďaka krátkodobému úroku, niečo na spôsob *roll-over strategy*. Ale touto doplnkovou rovnosťou zaručím, že príjmy, ktoré dostanem z kupónových splátok, budem priebežne používať na dokupovanie nových indexov. Je to rozumné, pretože aj tak možno predpokladať, že krátkodobý úrok, ktorý poskytuje banka, je pre mňa menej výhodný ako očakávaný výnos z dlhopisového indexu. Lebo ak by to neplatilo, potom by vôbec nemalo zmysel hovoriť o investovaní do akýchkoľvek dlhopisov.

4.1 Integrovaný model optimalizácie

Vo všeobecnosti sa problém investovania do viacerých mien rozkladá na dve etapy. V prvom kroku sa určia podiely investované do jednotlivých krajín (*global asset allocation problem*) a až potom sa určí portfólio špecifické pre každú krajinu (*bond picking problem*). Skúsiť spolu tieto dva kroky urobiť naraz, je numericky náročnejší spôsob riešenia.

Preto potrebujem presnejšie určiť, ako sa konštruujú dlhopisové indexy jednotlivých krajín. Nech v každej krajine j = 1, 2, ..., m je daná reprezentatívna vzorka Φ_j o veľkosti N_j prvkov. Pre každý dlhopis z tejto vzorky i = 1, 2, ..., N_j, index bude určovať jeho relatívnu váhu ϕ_j^i, ktorá odráža jeho podiel na celkovej kapitalizácii vzorky Φ_j.

Doteraz Z_j označovalo, koľko kusov indexov j-tej krajiny aktuálne vlastním. Jednalo sa teda o agregovanú premennú za celú j-tu krajinu. Teraz mi toto označenie nestačí, pretože chcem v jednom kroku vyriešiť obidva tieto problémy. Preto definujem novú premennú $Z_D^j = (Z_j^i)_{i=1}^{\mathrm{Nj}}$, čo bude vektor, ktorý určuje koľko ktorého konkrétneho dlhopisu j-tej krajiny mám nakúpiť. Písmeno D v dolnom indexe označuje, že sa jedná o dezagregovanú premennú. Pôvodnú premennú Z_j som teda pre každú krajinu j, rozložil na jednotlivé zložky i, ale aj nová rozložená premenná je závislá aj od času t. Spolu dostávam premennú $Z_t^{i,j}$, ktorá bude označovať počet aktuálne vlastnených dlhopisov typu i z j-tej krajiny v čase t, argument závislosti premennej na realizovanej ceste l_t opäť nebudem písať, z dôvodu čitateľnosti rovníc. Integrovaný model možno potom definovať nasledovnými rovnicami:

nezápornosť: $\forall\, X_t^{i,j}, Y_t^{i,j}, Z_t^{i,j} \geq 0$

$\forall\, v_t \geq 0 \qquad \forall t \qquad \forall l_t$

inventory balance: $b_j^i + X_0^{i,j} - Y_0^{i,j} = Z_0^{i,j} \qquad \forall j = 1,...,m \qquad t = 0$

$Z_{t-1}^{i,j} + X_t^{i,j} - Y_t^{i,j} = Z_t^{i,j} \qquad \forall j = 1,...,m \qquad t = 1, 2, ..., n \quad \forall l_t$

cash-flow accounting: $m_0 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{Nj} \xi_0^{i,j}\, Y_0^{i,j} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{Nj} \chi_0^{i,j}\, X_0^{i,j} = v_0 \qquad t = 0 \quad \forall l_t$

$$(1+\rho_{t-1})\, v_{t-1} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{Nj} F_{t-1}^{i,j}\, Z_{t-1}^{i,j} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{Nj} \xi_{t}^{i,j}\, Y_{t}^{i,j} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{Nj} \chi_{t}^{i,j}\, X_{t}^{i,j} + L_t =$$

$$= (1+\rho_{t-1})\, v_{t-1} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{Nj} \left(F_{t-1}^{i,j}\, Z_{t-1}^{i,j} + \xi_{t}^{i,j}\, Y_{t}^{i,j} - \chi_{t}^{i,j}\, X_{t}^{i,j} \right) + L_t = v_t \qquad t = 1,\dots, n\ \forall l_t$$

$$\text{wealth terminal:} \quad WT = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{Nj} \xi_{n}^{i,j}\, Z_{n}^{i,j} + v_n$$

Ako vidno z rovníc, štruktúrou sa veľmi podobajú na predchádzajúcu situáciu, ale rozsah modelu je rádovo väčší. Ak by sme z každej krajiny vybrali do reprezentatívnej vzorky Φ_j len sto rôznych dlhopisov, dostali by sme stokrát počet krajín viacej rovníc typu *inventory balance*. Počet rovníc typu *cash-flow accounting* by sa síce nezmenil, ale namiesto jednoitých súm, by sme všade dostali dvojité sumy. Avšak najdôležitejšie je, že hľadaný vektor optimálnej investičnej politiky by tiež narástol z hodnoty trikrát počet mien, ako to bolo doteraz a vzrástol by na hodnotu trikrát suma veľkostí jednotlivých reprezentatívnych vzoriek Φ_j (veľkosť vektora optimálnej investičnej politiky = $3 \times \sum_{j=1}^{m} N_j$). Práve z týchto dôvodov je to skôr akademický model, ako model určený pre praktické použitie.

5 Modely totálneho výnosu a stress-testová matica

Aby sme odstránili prílišnú závislosť riešenia základného modelu *Buy & Hold* od zvoleného vektora totálnej výnosnosti r, je vhodné spočítať riešenie pre viacero líšiacich sa modelov. Totálna výnosnosť zahŕňa aj výnosnosť počítanú v domácej mene, ale zohľadňuje aj vplyv zmeny kurzu, teda je to výnosnosť prepočítaná do základnej meny. Konkrétne, nech riešenie spočítame pre n modelov s rôznym vektorom očakávanej totálnej výnosnosti r. Potom pre každý model M_i dostaneme zodpovedajúce riešenie, investičnú politiku $P_i = (X_i, Y_i, Z_i)$, kde X_i znamená koľko indexu i treba nakúpiť, Y_i znamená koľko indexu i treba predať a Z_i znamená koľko indexov i budem v skutočnosti vlastniť. Potom zostrojíme maticu A – stress-testovú maticu, kde a_{ij} = E(U(WT)) bude stredná hodnota užitočnosti ak použijeme politiku P_j a nastane model M_i. Ak stress-testovú maticu počítam pre n rôznych modelov totálnej výnosnosti r, výsledná stress-testová maticu bude typu n × n.

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{array} \\ \begin{array}{ccc} P_1 & \cdots & P_n \end{array} & \end{array}$$

Jednoducho povedané: hľadám politiku j (stĺpec matice A), ktorá bude dávať dobrý výsledok, aj keď nenastane model, pre ktorý bola politika j optimálna. Teda hľadám politiku, ktorá je najlepšia pre všetky uvažované modely. Pritom konkrétny spôsob vyhodnotenia stress-testovej matice možno zvoliť rôzne. Ja som sa rozhodol pre vyhodnocovanie pomocou váženého priemeru, ktorý popíšem neskôr.

5.1 Modely totálneho výnosu

V mojom konkrétnom príklade som vychádzal z mesačných dát hodnôt dlhopisových indexov štyroch rôznych mien a to švajčiarský frank, ktorý bol zvolený ako základná mena (*base currency*), ďalej to boli americký dolár, nemecká marka a britská libra a z príslušných výmenných kurzov voči švajčiarskemu franku. Môj model obsahoval štyri rôzne meny, otázkou teda bolo, koľko a akých modelov výnosnosti použiť. Modelov by totiž nemalo byť ani málo ani veľa, je ťažko povedať, koľko by mal byť optimálny počet. Moje modely som rozdelil do troch rôznych kategórii, podľa spôsobu ako boli vytvorené.

- modely zohľadňujúce priemer
- štatistické modely
- extrémne modely

5.1.1 Modely zohľadňujúce priemer

Ako som už spomenul, mal som mesačné dáta pre štyri meny. Keďže jeden mesiac je príliš krátke obdobie, aby mohlo byť použité ako investičný horizont, za investičný horizont som zvolil obdobie jedného roka, teda dvanásť mesiacov. Pre moje údaje to znamená, že som vždy porovnával stav rovnakých mesiacov, teda január jedného roku oproti januáru nasledujúceho roku, podobne február jedného roku s februárom nasledujúceho roku atď. Vzorec pre výpočet totálnej výnosnosti, teda výnosnosti prepočítanej do základnej meny (*base currency*) je:

$$r^{B}_{j+1} = \frac{\text{konečná hodnota prepočítaná do základnej meny – počiatočná hodnota}}{\text{počiatočná hodnota}}$$

$$r^{B}_{j+1} = \frac{d_j(1+r^{D}_{j+1})c_{j+1}-d_jc_j}{d_jc_j} = \frac{(1+r^{D}_{j+1})c_{j+1}-c_j}{c_j} = (1+r^{D}_{j+1})\frac{c_{j+1}}{c_j} - 1 = r^{D}_{j+1}\frac{c_{j+1}}{c_j} + \frac{c_{j+1}-c_j}{c_j}$$

$$r^{D}_{j+1} = \frac{d_{j+1}-d_j}{d_j}$$

kde r^{D}_{j+1} je výnosnosť v domácej mene (*domestic currency*), teda hodnota r^{D}_{j+1} vyjadruje relatívny prírastok hodnoty indexu v nasledujúcom období (o rok) oproti počiatočnému stavu a výraz r^{B}_{j+1} zohľadňuje aj zmenu výmenného kurzu počas roka.

Prvý model zo skupiny modelov zohľadňujúcich priemer je model dlhodobého historického priemeru, alebo možno ho nazvať model strednej hodnoty. Moje údaje mali rozsah od 31. 8. 1989 až po 29. 1. 1999, pretože ale beriem do úvahy ročný investičný horizont, posledný porovnávaný údaj bola výnosnosť medzi obdobím 30. 1. 1998 – 29. 1. 1999, spolu to tvorí od 31. 8. 1989 až do 30. 1. 1998 stodva ročných výnosností, z ktorých som urobil dlhodobý historický priemer.

Druhý model zo skupiny modelov zohľadňujúcich priemer je model exponenciálnej regresie. Nakoľko dlhopisy majú exponenciálnu výnosnosť, ktorá je teraz síce narušená vplyvom kurzových zmien, ale možno pripustiť, že kurz len osciluje okolo svojej dlhodobej rovnováhy. Regresiu som spustil na mesačných dátach časového radu $c_i d_i$, teda vždy na hodnotu indexu d_i prepočítanú do základnej meny krát c_i. Exponenciálny model:

$X_i = c\, b^i$

kde ma zaujímal výsledný parameter b – čo je mesačná výnosnosť, ktorú treba ešte prepočítať na ročný odhad ako $r = b^{12}–1$.

Tretí model zo skupiny modelov zohľadňujúcich priemer je model vnútornej miery výnosnosti (*internal rate of return*). Určuje konštantnú mieru výnosnosti, ktorú by som pozoroval, ak by som si kúpil daný index úplne na začiatku teda 31. 8. 1989 a vlastnil ho až do konca sledovaného obdobia 21. 1. 1999 a zaujímal by ma skutočný ročný výnos počas tohto obdobia. Preto si vypočítam celkovú výnosnosť za týchto 114 mesiacov, čo je 113 mesačných období. Ročný odhad výnosnosti potom dostanem odmocnením 113/12-tou odmocninou tejto celkovej výnosnosti.

Štvrtý model zo skupiny modelov zohľadňujúcich priemer je model krátkodobého historického priemeru. Je podobný svojou konštrukciou na dlhodobý historický priemer, ale do úvahy berie len posledných dvanásť pozorovaní a z nich robí priemer.

Výsledné výnosnosti možno zhrnúť do nasledovnej tabuľky:

model ╲ mena	CHF	USD	DEM	GBP
dlhodobý hist. priemer	7.71%	8.79%	8.58%	11.83%
exponenciálna regresia	7.66%	7.28%	8.14%	9.41%
internal rate of return	7.20%	6.42%	8.20%	9.72%
krátkodobý hist. priemer	6.51%	9.61%	9.21%	11.39%

Z výslednej tabuľky je vidieť, že investora, ktorý preferuje modely zohľadňujúce priemer, bude najviac zaujímať investovanie do britskej libry, ktorá sa historicky javí ako najvýkonnejšia. Čo sa týka porovnania týchto modelov navzájom, priveľmi sa od seba nelíšia, čo aj zodpovedá skutočnosti, že sledujú tú istu vlastnosť len iným pohľadom.

5.1.2 Štatistické modely

Modely zohľadňujúce priemer ale nezachytávajú všetky možnosti, ktorými smermi sa výnosnosti môžu pohnúť. Nemusia totiž všetky štyri meny naraz rásť, ale môže sa stať, že dve vzrastú a dve poklesnú voči svojmu priemeru, alebo všetky poklesnú ale rôznou mierou a podobne. Vnútorná bohatosť rôznych vzájomných pohybov je omnoho vačšia, než aby ju mohli zachytiť modely z predchádzajúcej triedy. Všetky tieto vzájomné pohyby sú ale zachytené v korelačnej matici. Preto táto druhá skupina modelov sa snaží zachytiť rôznorodosť vzájomných pohybov výnosnosti odzrkadlených v korelačnej matici. Myšlienka je v tom, že spomedzi mesačných údajov ročných výnosnosti, čo je spolu stodva pozorovaní, keby som chcel použiť všetky pozorovania, zachytil by som rôznorodosť vzájomných pohybov, ale mal by som veľmi veľa modelov. Preto chcem spomedzi všetkých vybrať reprezentatívnu vzorku n – pozorovaní, ktoré ako n-tica bude mať približne rovnaké štatistické vlastnosti ako celá vzorka.

Prvotnou myšlienkou bolo nájsť n-ticu pozorovaní, ktorá by kopírovala len korelačnú maticu. Ale výsledná n-tica, by sa od reality mohla výrazne odlišovať a preto som použil dve kritériá na nájdenie takejto n-tice. Prvým kritériom bolo, aby sa vektor totálnej výnosnosti vybranej vzorky r_{vzorky} odlišoval od vektora $r_{všetkých\ pozorovaní}$ najviac o nejakú vopred stanovenú hodnotu. A druhé kritérium minimalizovalo odchýlku od korelačnej matice spomedzi n-tíc vyhovujúcich prvému kritériu.

r_{vzorky} - pre skrátený zápis budem označovať ako r_n, je to štvorzložkový vektor, kde i-ta zložka je priemerná hodnota výnosnosti i-tej meny ako priemer cez vybraných n pozorovaní

$r_n = (r_n(CHF) , r_n(USD) , r_n(DEM) , r_n(GBP))$

$r_{všetkých\ pozorovaní}$ – pre skrátený zápis budem označovať ako r_{102}

$r_{102} = (r_{102}(CHF) , r_{102}(USD) , r_{102}(DEM) , r_{102}(GBP))$

potom prvé kritérium možno napísať ako:

$$\sum_{i=CHF,USD,DEM,GBP} | r_n(i) - r_{102}(i) | \leq \varepsilon$$

druhé kritérium je minimalizovať odchýlku od korelačnej matice:

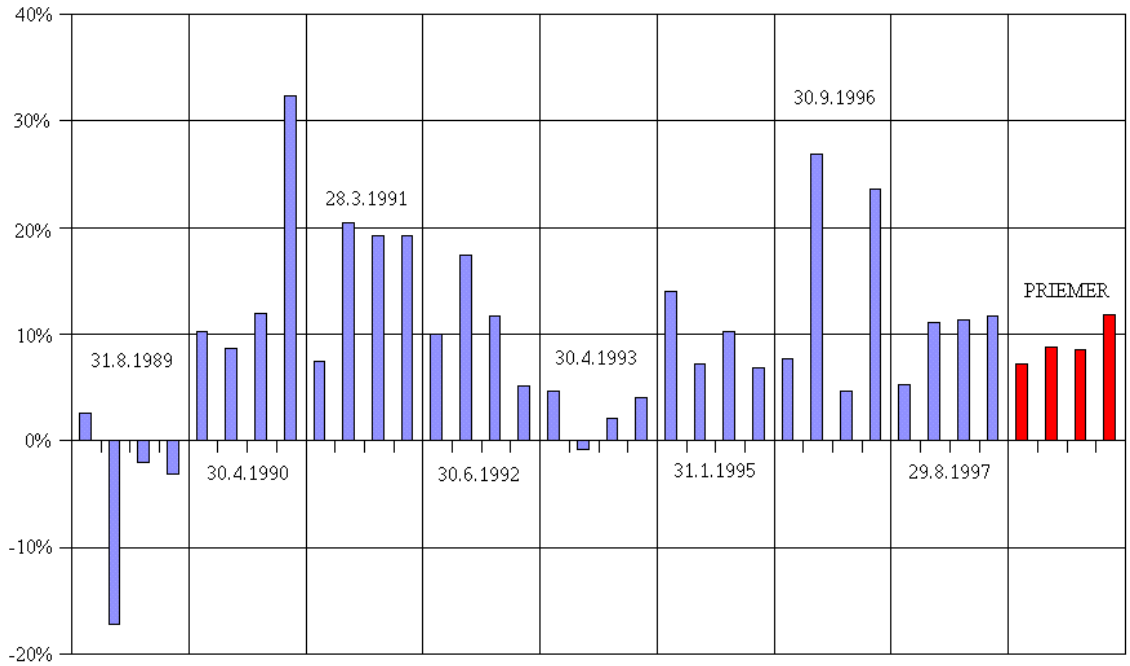
$$\sum_{i,j=CHF,USD,DEM.GBP} | correl_n(i,j) - correl_{102}(i,j) | \rightarrow \quad \text{min cez všetky n-tice}$$

V kritériách sa ponúkajú dve možnosti, a to použitie absolútnych odchýliek, alebo odchýliek štvorcov. Pretože nepotrebujem diferencovateľnosť kritérií, rozhodol som sa pre použitie absolútnej hodnoty.

Nevedel som, akú hodnotu by malo mať n, nemalo by to byť málo, aby som nemal veľkú odchýlku v druhom kritériu, ale ani veľmi veľa. Preto som sa rozhodol, že pre moje štyri meny ako aj štyri modely v triede modelov zohľadňujúcich priemer, by primeraná hodnota n mohla byť okolo osem. Ale problémom je výpočtová zložitosť, keď zo stodva pozorovaní chcem vybrať najlepšiu osmicu. Je to veľmi veľa možností a je to teda nespočítateľné. Preto som musel pristúpiť na kompromis z výpočtových dôvodov a najprv vybrať najlepšiu štvoricu v prvom kroku a potom v druhom kroku povedať, že tieto štyri vybrané sú fixné a k nim vybrať novú štvoricu tak, že spolu budem mať osem pozorovaní, ktoré dohromady budú dávať dobré štatistické vlastnosti.

Týmto postupom som spomedzi stadva pozorovaní, čo časovo znamená obdobie od 31. 8. 1989 až do 30. 1. 1998, vybral osem nasledovných pozorovaní. Možno to zhrnúť do tabuľky a následného obrázka:

číslo pozorovania	dátum pozorovania	výnosnosť CHF	výnosnosť USD	výnosnosť DEM	výnosnosť GBP
1	31. 8. 1989	2,59%	–17,25%	–2,03%	–3,17%
9	30. 4. 1990	10,29%	8,68%	11,91%	32,39%
20	28. 3. 1991	7,48%	20,44%	19,26%	19,21%
35	30. 6. 1992	10,05%	17,40%	11,67%	5,09%
45	30. 4. 1993	4,65%	–0,75%	2,09%	4,04%
66	31. 1. 1995	14,06%	7,25%	10,20%	6,84%
86	30. 9. 1996	7,66%	26,90%	4,69%	23,58%
97	29. 8. 1997	5,31%	11,15%	11,30%	11,68%



Komentár k obrázku:

Každá štvorica príslušná k uvedenému dátumu zobrazuje postupne vždy totálnu výnosnosť najprv základnej meny švajčiarskeho franku, potom vždy nasleduje americký dolár, nemecká marka a britská libra. Takto je to uvedené postupne pre všetkých osem vybraných pozorovaní. Na záver pre porovnanie je uvedený červenou farbou dlhodobý priemer. Ako vidno dosiahla sa požadovaná rôznorodosť a žiadne dve vybraté pozorovania nie sú totožné.

Porovnanie štatistických vlastností celej vzorky s vybranou osmicou:

$r_8 = (7.76\% , 9.23\% , 8.63\% , 12.46\%)$

$r_{102} = (7.71\% , 8.79\% , 8.58\% , 11.83\%)$

$$\text{correl}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0,46 & 0,53 & 0,36 \\ 0,46 & 1 & 0,66 & 0,63 \\ 0,53 & 0,66 & 1 & 0,51 \\ 0,36 & 0,63 & 0,51 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{correl}_{102} = \begin{pmatrix} 1 & 0,47 & 0,51 & 0,35 \\ 0,47 & 1 & 0,64 & 0,69 \\ 0,51 & 0,64 & 1 & 0,50 \\ 0,35 & 0,69 & 0,50 & 1 \end{pmatrix}$$

Zhrnutie:

Ako vidno z porovnania, vybraná vzorka ôsmych pozorovaní má približne rovnaké vlastnosti, teda strednú hodnotu aj korelačnú maticu ako všetky pozorovania spolu, čo sme vlastne požadovali. Druhou, síce neplánovanou, ale vítanou vlastnosťou je, že vybrané pozorovania sú približne rovnomerne rozdelené počas celého sledovaného časového obdobia.

5.1.3 Extrémne modely

Tretia trieda modelov sú modely, ktorých nastatia sa investor obáva, lebo preňho znamenajú relatívne veľkú stratu. Investor sa takýmto spôsobom zabezpečuje, aby výsledná optimálna politika prihliadala aj na prípadné nepriaznivé udalosti.

Prvým modelom z triedy extrémnych modelov je model, ktorý možno nazvať pád libry. Totiž ako bolo vidno z modelov zohľadňujúcich priemer, libra vychádzala ako relatívne najlepšia investícia spomedzi týchto štyroch mien. Preto sa investor môže obávať, že dôjde k poklesu libry, pričom výnosnosť ostatných mien bude kladná. Ako realizáciu tohto modelu som prezrel dané historické dáta a našiel vhodný model, teda napríklad výnosnosť z 30. 4. 1992.

Druhý model z triedy extrémnych modelov je model, ktorý možno nazvať miera nadhodnotenia. Model vychádza z myšlienky, že ak za rovnovážny model považujem model daný exponenciálnou regresiou, ktorý bol uvedený v prvej triede modelov, potom ak porovnám skutočný koncový stav s predikciou určenou regresiou, môžem sa obávať, že dôjde ku korekcii a trh upraví mieru výnosnosti tak, aby došlo k odstráneniu danej nerovnováhy.

Tretí model z triedy extrémnych modelov je model, ktorý možno nazvať najhoršie ročné výsledky. Každá mena zaznamenala svoj najhorší výsledok v inom období, preto namiesto pridania štyroch extrémnych modelov, spravím priemer cez tieto štyri modely a to bude hľadaný extrémny model. Navyše sa dá očakávať, keďže miera korelácie je až do úrovne 0.69, že ak niektorá mena zaznamenala najhorší výsledok, tie ostatné mali tiež zlý alebo aspoň podpriemerný výsledok. A teda tento model možno interpretovať ako zle sa zachová daná mena, ak niekde došlo k veľmi zlej udalosti.

Výsledné výnosnosti možno zhrnúť do nasledovnej tabuľky:

model \ mena	CHF	USD	DEM	GBP
pád libry	9.99%	10.68%	11.86%	–3.40%
miera nadhodnotenia	0.95%	–3.00%	–1.19%	–8.86%
najhoršie ročné	3.77%	–14.74%	–1.14%	–4.27%

Z výslednej tabuľky je vidieť, že ako nadhodnotená podľa exponenciálnej regresie sa najviac javí libra a to až o vyše osem percent. Najhorší čo sa týka správania je dolár, ktorý keď niektorá mena zaznamenala svoj najhorší výsledok, v priemere reagoval tiež veľmi zle a to stratou až skoro pätnásť percent.

5.2 Rozdelenie investorov a vážený súčet

Každý investor sa líši svojím vzťahom k riziku. Pretože používam kvadratickú účelovú funkciu s jediným parametrom α, práve tento parameter vyjadruje vzťah daného investora k riziku.

funkcia užitočnosti: $U(x) = x - \frac{1}{2} \alpha x^2$

Prečo potrebujem zaviesť váhy do modelu? Tradične sa po vytvorení množiny modelov zostaví stress-testová matica, kde $a_{ij} = E(U(WT))$ bude stredná hodnota užitočnosti koncového stavu, ak použijeme politiku P_j a nastal model M_i.

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{array} \\ \begin{array}{ccc} P_1 & \cdots & P_n \end{array} & \end{array}$$

Základný spôsob vyhodnotenia stress-testovej matice je nájsť stĺpec s maximálnou očakávanou výnosnosťou, preto spravím súčty po stĺpcoch a vydelím to počtom modelov a nájdem stĺpec s maximálnou hodnotou. Tento nájdený stĺpec bude patriť optimálnej investičnej politike, teda vlastne maximalizujem aritmetický priemer stĺpcov, ktorý prikladá všetkým modelom rovnakú váhu 1/n. V predchádzajúcej časti som, ale opísal spôsob, ako som vytvoril množinu modelov. Bola vytvorená rôznorodo a je rozčlenená do troch rôznych tried. Idea, ktorá stojí za myšlienkou vytvorenia váh je, že ja poznám investorov vzťah k riziku, lebo poznám jeho parameter α a preto by som mal skúsiť využiť túto dodatočnú informáciu pri vyhodnocovaní stress-testovej matice. Ako najrozumnejší spôsob na začlenenie tejto informácie do vyhodnocovania je určiť každému investorovi jemu vlastný vektor váh podľa toho, ako preferuje, prihliada na jednotlivú triedu modelov.

Existujú dva hraničné prípady investorov. Prvý hraničný prípad je investor, ktorý má parameter $\alpha = 0$, v tomto prípade investor má funkciu užitočnosti v jednoduchom lineárnom tvare: $U(x) = x$. Takýto investor bude preferovať modely zohľadňujúce priemer a zvyšným dvom triedam modelov bude prikladať nulovú váhu, čo bude zodpovedať investorovej snahe o maximalizáciu strednej hodnoty výnosnosti bez ohľadu na prípadnú rizikovosť investície.

Druhý hraničný prípad je investor, ktorý berie do úvahy všetky možné scenáre, teda aj extrémne modely, aj modely zohľadňujúce priemer ako aj štatistické modely. Medzi nimi nepreferuje žiadnu triedu viac ako ostatné. Teda tento investor bude prikladať všetkým modelom rovnakú váhu. Prvý hraničný prípad má presne zvolený parameter $\alpha = 0$, v tomto druhom prípade je to náročnejšie zvoliť. Hodnota α závisí od zadaného zloženia počiatočného portfólia b_j ako aj od pridelených voľných finančných prostriedkov m_0. Možno definovať novú pomocnú premennú, počiatočný majetok PM, teda súčet hodnoty počiatočného portfólia a voľných finančných prostriedkov.

$$PM = m_0 + \sum_{i=CHF,USD,DEM,GBP} b_i \times c_i \times d_i$$

Hodnotu α, resp. lepšie povedané hodnotu $1/\alpha$, čo je bod maxima kvadratickej účelovej funkcie som v tomto druhom hraničnom prípade zvolil ako 107% z počiatočného majetku. Zvoliť menej ako 107% nemá zmysel, pretože musím zaručiť rastúcosť a konkávnosť funkcie užitočnosti, a preto musí byť bod obratu účelovej funkcie napravo od uvažovaných hodnôt koncového stavu WT (*wealth terminal*), lebo keď to nie je splnené, hodnoty WT sa môžu dostať až za bod obratu, kde je kvadratická funkcia užitočnosti klesajúca, a to je neprípustné.

Zo zjednodušujúcich dôvodov som pre prvý hraničný prípad investora, ktorý má parameter $\alpha = 0$ a teda bod obratu kvadratickej účelovej funkcie v plus nekonečne, prijal za dostatočnú aproximáciu zvolenie bodu obratu na úrovni 250% z počiatočného majetku, čo dáva $\alpha \cong 0$.

Situácia teraz vyzerá takto:

váha(1) = c = konšt. $\rightarrow$ váha pre prvú triedu modelov je vždy rovnaká pre všetky možné hodnoty α

váha(2) = 0 keď $\alpha \cong 0$, teda keď bod obratu je maximálny $1/\alpha = 2{,}5*PM$

váha(2) = c keď α je veľká, teda bod obratu je minimálny $1/\alpha = 1{,}07*PM$

Poznám investorov parameter α, teda aj hodnotu $1/\alpha$, ktorá leží niekde medzi týmito dvomi hraničnými prípadmi, preto môžem použiť lineárnu interpoláciu pre vypočet váhy druhej triedy modelov.

<u>váha(2) = k * 1/α + q</u>

0 = k * 2,5*PM + q

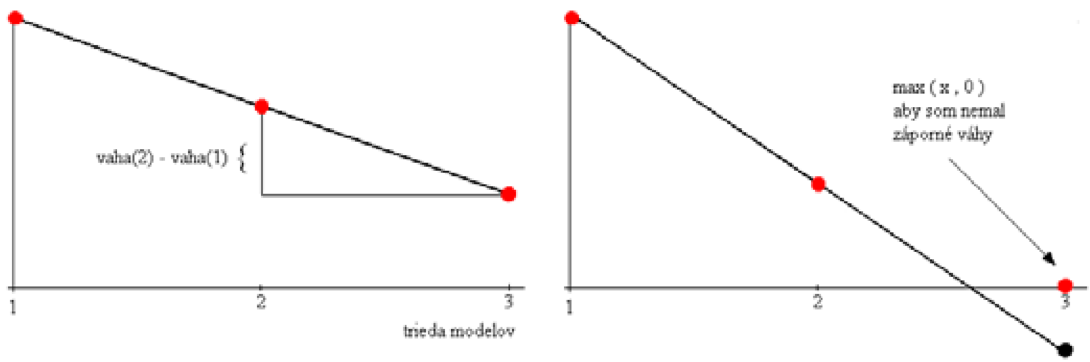
c = k * 1,07*PM + q

Vypočítam parametre sústavy dvoch rovníc k, q. A potom váhu pre môj konkrétny príklad vypočítam presne podľa všeobecného vzorca: váha(2) = k * 1/α + q.

Keď už budem poznať váhy pre prvú aj pre druhú triedu modelov, váhy pre tretiu triedu vypočítam priamo z hodnôt: váha(1), váha(2) nasledovne:

váha(3) = max(váha(2) + (váha(2) – váha(1)) , 0)

Vzorec je len lineárnym predĺžením váh pre prvé dve triedy modelov s pridaním podmienky, že žiadna váha nesmie byť záporná.



Ilustrácia uvedeného postupu na príklade:

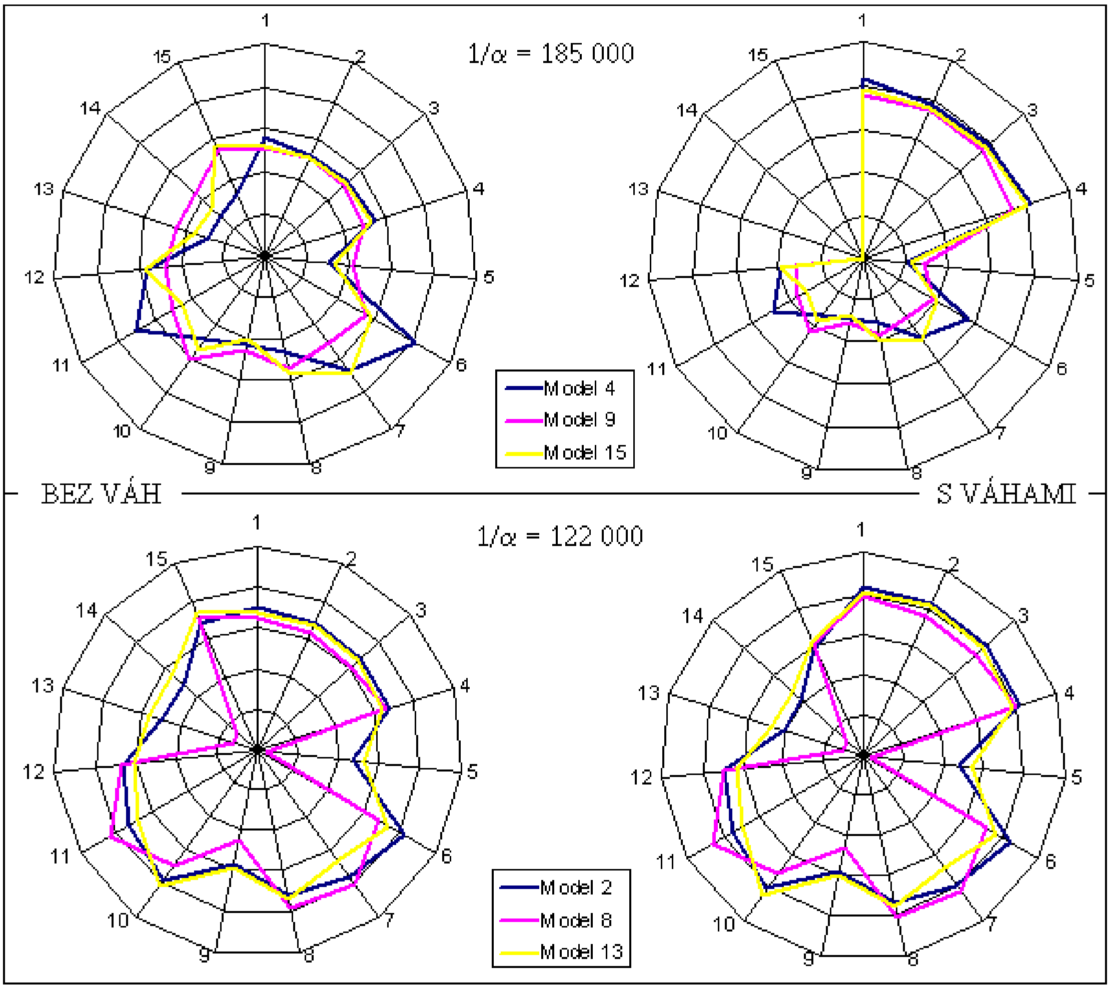
Predpokladajme, že počiatočný majetok bol 100 000 peňažných jednotiek, potom by váhy pre jednotlivé triedy modelov a rôzne hodnoty α, resp. $1/\alpha$ vyzerali tak, ako ukazuje tabuľka. Za konštantu c bolo zvolené číslo 15. V prvom stĺpci, ktorý je nazvaný bod obratu, sú hodnoty $1/\alpha$ postupne rastúce s narastajúcim prírastkom, čo je vhodné urobiť aj z dôvodu, že je lepšie mať hustejšiu sieť bodov v kritickej oblasti, kde sa očakáva veľa investorov, ktorých je potrebné vhodne zadeliť a postupne menej hustú sieť smerom k extrémnejším prípadom. Z tabuľky je vidno ako postupne začínajú klesať váhy pre extrémne modely a zároveň narastá relatívna váha modelov zohľadňujúcich priemer.

bod obratu	váha prvej triedy	váha druhej triedy	váha tretej triedy
1 / alfa = 107000	15,00	15,00	15,00
1 / alfa = 108000	15,00	14,90	14,79
1 / alfa = 111000	15,00	14,69	14,37
1 / alfa = 113000	15,00	14,37	13,74
1 / alfa = 117000	15,00	13,95	12,90
1 / alfa = 122000	15,00	13,43	11,85
1 / alfa = 128000	15,00	12,80	10,59
1 / alfa = 135000	15,00	12,06	9,13
1 / alfa = 143000	15,00	11,22	7,45
1 / alfa = 152000	15,00	10,28	5,56
1 / alfa = 162000	15,00	9,23	3,46
1 / alfa = 173000	15,00	8,08	1,15
1 / alfa = 185000	15,00	6,82	0,00
1 / alfa = 198000	15,00	5,45	0,00
1 / alfa = 212000	15,00	3,99	0,00
1 / alfa = 227000	15,00	2,41	0,00
1 / alfa = 243000	15,00	0,73	0,00
alfa = 0 lin. model	15,00	0,00	0,00

5.3 Stress-testová matica

Stress-testová matica A je matica typu n × n, kde n je počet použítých modelov výnosnosti. Prvok matice a_{ij} = E(U(WT)) je stredná hodnota užitočnosti koncového stavu, ak použijeme politiku P_j a nastal model M_i.

Pri väčšom počte modelov už ale nemá zmysel vypísať do tabuľky celú stress-testovú maticu, pretože by to bolo neprehľadné. Lepší spôsob zobrazenia stress-testovej matice je pomocou grafu.



Komentár ku grafu:

Ani do grafu nemožno zakresliť všetky modely, lebo by sme pre našich pätnásť modelov dostali pätnásť pretínajúcich sa kriviek. Z dôvodu názornosti zobrazenia som sa rozhodol vždy vybrať jeden model z každej triedy modelov a porovnávať len tieto vybrané tri modely. Pre každú úroveň investorovho vzťahu k riziku α, resp. 1/α, dostanem vždy rôzne hodnoty v stress-testovej matici. Pretože opäť nemožno zobraziť všetky možnosti, vybral som dve rôzne hladiny 1/α a to úroveň 122 000 a úroveň 185 000. Graf, ktorý je v ľavej časti obrázka je bez zohľadnenia váh, teda pôvodná stress-testová matica A, naproti tomu v pravej časti sú zohľadnené aj váhy w_i, ktoré investor prikladá jednotlivým triedam modelov. Vážená stress-testová matica je matica Aw:

$$Aw = \begin{pmatrix} a_{11} * w_1 & \cdots & a_{1n} * w_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} * w_n & \cdots & a_{nn} * w_n \end{pmatrix}$$

Graf v situácií 1/α = 185 000:

Optimálna politika, ktorá bude vybraná investorom, je politika, ktorá je optimálna pre model číslo štyri. A preto model číslo štyri vyberiem ako zástupcu triedy modelov zohľadňujúcich priemer. K tomuto modelu ešte vyberiem po jednom zástupcovi z ostatných dvoch tried modelov. V situácii bez zohľadnenia váh, keď porovnávam optimálny model s dvoma modelmi z iných tried je vidno, že žiadne riešenie nie je optimálne pre všetky situácie. Je vidno, že optimálne riešenie, na obrázku modrou, dopadlo relatívne najhoršie pri extrémnych modeloch (modely 13, 14 a 15), kedy ostatné modely dosahli lepší výsledok. Ale investor neprikladá extrémnym modelom žiadnu váhu a druhej triede štatistických modelov prikladá nižšiu váhu, a preto po zohľadnení vektora váh dostaneme, že investor aj tak nezohľadňuje tie modely, v ktorých optimálny model prepadol. Ani po zohľadnení váh ale nie je optimálna investičná politika najlepšia v každej situácii, ale je najlepšia v priemere, keď porovnávam všetky možné investičné politiky.

Graf v situácií 1/α = 122 000:

Optimálna politika, ktorú investor vyberie, je politika, ktorá je optimálna pre model číslo dva. A preto model číslo dva vyberiem ako zástupcu triedy modelov zohľadňujúcich priemer. K tomuto modelu opäť ešte vyberiem po jednom zástupcovi z ostatných dvoch tried modelov. Na rozdiel od predchádzajúcej situácie je vidno, že váhy, ktoré investor prikladá jednotlivým triedam modelov sú približne rovnaké a preto nie je vidieť veľký rozdiel medzi grafom, ktorý zohľadňuje vektor váh a grafom, ktorý ho nezohľadňuje. Avšak je vidieť aj druhú vlastnosť, že je menší rozdiel medzi optimálnym modelom a modelom číslo 13, porovnanie modrej a žltej krivky.

6 Analýza na príklade

	CHF			USD			DEM			GBP		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1 / alfa = 110000	454,04	0,00	504,04	0,00	10,00	0,00	0,00	25,00	0,00	0,00	20,00	0,00
1 / alfa = 113000	454,04	0,00	504,04	0,00	10,00	0,00	0,00	25,00	0,00	0,00	20,00	0,00
1 / alfa = 117000	356,91	0,00	406,91	0,00	10,00	0,00	0,00	0,00	25,00	0,00	8,66	11,34
1 / alfa = 122000	321,27	0,00	371,27	0,00	10,00	0,00	0,00	0,00	25,00	0,00	0,00	20,00
1 / alfa = 128000	295,90	0,00	345,90	0,00	10,00	0,00	11,84	0,00	36,84	0,31	0,00	20,31
1 / alfa = 135000	234,16	0,00	284,16	0,00	10,00	0,00	25,64	0,00	50,64	8,46	0,00	28,46
1 / alfa = 143000	163,61	0,00	213,61	0,00	10,00	0,00	41,40	0,00	66,40	17,76	0,00	37,76
1 / alfa = 152000	84,24	0,00	134,24	0,00	10,00	0,00	59,14	0,00	84,14	28,24	0,00	48,24
1 / alfa = 162000	0,00	0,00	50,00	0,00	10,00	0,00	52,08	0,00	77,08	52,06	0,00	72,06
1 / alfa = 173000	0,00	50,00	0,00	0,00	10,00	0,00	0,00	0,00	25,00	89,66	0,00	109,66
1 / alfa = 185000	0,00	50,00	0,00	0,00	10,00	0,00	0,00	0,00	25,00	89,66	0,00	109,66
1 / alfa = 198000	0,00	50,00	0,00	0,00	10,00	0,00	0,00	25,00	0,00	101,87	0,00	121,87
1 / alfa = 212000	0,00	50,00	0,00	0,00	10,00	0,00	0,00	25,00	0,00	101,87	0,00	121,87

Pretože už poznám množinu modelov, ako aj spôsob vyhodnotenia stress-testovej matice, môžem prikročiť ku záverečnému vypočítaniu optimálnej investičnej politiky. V tomto príklade som pracoval s týmito vstupmi: výška transakčných nákladov δ, bola stanovená na úrovni troch tisícin (δ = 0,3%). Zloženie počiatočného portfólia bolo zvolené nasledovne: 50 kusov švajčiarskeho indexu, 10 kusov amerického, 25 kusov nemeckého a 20 kusov britského indexu, v tomto prípade nie je dôležité, aká je presná hodnota počtu kusov indexov, ktorú máme ako počiatočné zloženie portfólia, ale dôležité je, že všetky hodnoty sú nenulové a preto môžeme indexy aj predávať. Ak by som mal zadaný nulový vektor počiatočného zloženia portfólia, nemám čo predávať a premenná Y, a vlastne aj Z, je zbytočná a vystačím si len s premennou X, koľko ktorého indexu mám nakúpiť (vektorový zápis počiatočného zloženia portfólia potom bude b = (50, 10, 25, 20)).

Na záver boli ešte zvolené voľné finančné prostriedky na úrovni 49 717 CHF. Investorov počiatočný majetok potom bol presne na úrovni 100 000 CHF. Výstupom analýzy je vždy pre zadanú úroveň α, resp. $1/\alpha$, vektor investičnej politiky, ktorý pre štyri krajiny má dvanásť zložiek. Pre každú krajinu presne určuje množstvo X koľko indexu treba nakúpiť, množstvo Y koľko indexu treba predať a aj Z koľko indexu budem v skutočnosti vlastniť.

Komentár k tabuľke:

Prvá zrejmá skutočnosť je, že do amerického dolára sa vôbec neoplatí investovať a najlepšie, čo je možné urobiť, je hneď predať všetky dolárové indexy. Pre ostatné tri meny nemožno urobiť takéto jednoduché tvrdenie. Ale platí, že čím je investor opatrnejší, o to viac spočiatku preferuje švajčiarsky frank, teda domácu menu, ktorá poskytuje najmenšiu úroveň rizika ako jediná mena s nulovou volatilitou výmenných kurzov. Od úrovne 117 000 sa mi už neoplatí hneď predávať všetky zahraničné indexy a získané peniaze obratom investovať do franku, lebo nesmiem zabudnúť, že model predpokladá transakčné náklady. Vďaka nim je pre mňa výhodnejšie si ešte marku a aj časť libry ponechať. Keď opäť pôjdeme nižšie v tabuľke, tak od úrovne 128 000 začínam svoje portfólio diverzifikovať a začínam postupne prikupovať aj niekoľko markových indexov a aj zlomok librového indexu. Napriek tomu však ešte stále väčšina investovaných prostriedkov smeruje do domáceho franku.

Tento trend sa postupne prehlbuje a vrchol dosiahne na úrovni 152 000, pri tejto úrovni ešte poslednýkrát nakupujem švajčiarsky frank a svoj vrchol dosahuje investovanie do nemeckej marky. Veľký zlom nastáva pri nasledujúcej úrovni 162 000. Vtedy sa mi už neoplatí investovať do švajčiarskeho franku, lebo jeho výnosnosť je síce relatívne stabilná, ale je na nižšej úrovni ako u ostatných mien a začína prevládať snaha maximalizovať výnosnosť, resp. strednú hodnotu výnosnosti. Pri ďalšej úrovni 173 000 už všetky voľné prostriedky investujem iba do britskej libry, ale vďaka už spomínaným transakčným nákladom sa mi ešte neoplatí predávať markový index. Poslednou hranicou je úroveň 198 000, teraz je optimálnou stratégiou všetko popredávať a nakúpiť už len libru, od tejto úrovne ďalej potom už nedochádza k žiadnej zmene a preto dostatočne aproximuje hraničný prípad investora s parametrom $\alpha = 0$, ktorý má redukovanú funkciu užitočnosti na tvar: $U(x) = x$. V tomto prípade, keď $\alpha = 0$ sa dalo očakávať, že sa investor rozhodne iba pre britskú libru, lebo sa ukazovala ako najvýkonnejšia, čo sa týka strednej hodnoty výnosnosti.

Ako je aj z tejto krátkej analýzy vidno, podstatným prvkom nie je ani tak vedieť správne vypočítať optimálnu investičnú stratégiu, ale vedieť správne určiť investorov vzťah k riziku. Bez toho nebude žiadna analýza korektne ukončená.

Záver

Predložená práca sa pokúsila zdôvodniť, prečo je pre portfóliového investora výhodné investovať do dlhopisov viacerých mien a rozpracovala modely popisujúce problém optimalizácie portfólia dlhopisov vo viacerých menách.

Dôraz sa kládol hlavne na základný model *Buy & Hold*. Pre tento model bol spracovaný postup vytvárania rôznych modelov totálnej výnosnosti, ktoré sme rozdelili do troch rôznych tried podľa spôsobu, ako boli vytvorené. Následne sme definovali aj spôsob vyhodnotenia, pričom snahou bolo zapojiť investorov vzťah k riziku, teda parameter α, do vyhodnocovania stress-testovej matice. Výsledkom uvedeného postupu bol vektor optimálnej investičnej politiky, ktorá je závislá práve na parametri α.

Rovnako aj ostatné modely, ktoré rozširovali použitie základného modelu, sa javia byť prínosné a neskôr by si vyžadovali ďalšiu samostatnú prácu, hlavne posledný integrovaný model optimalizácie.

Literatúra

[1] A. Belratti, A. Consiglio, S. A. Zenios. Scenario Modeling for the Management of International Bond Portfolios, The Wharton School, workingpaper 98-20

[2] F. J. Fabozzi. editor. The Handbook of Fixed Income Securites, McGraw-Hill, 1997

[3] M. Baxter, A.Rennie. Financial Calculus, Cambridge University Press, 1996

[4] E. Kaplanis, S. M. Schaefer. Exchange risk and international diversification in bond and equity markets, Jounal of Economics and Business 42:287-307, 1991

[5] B. J. Ziobrowski, A. J. Ziobrowski. Exchange rate risk and internationally diversified portfolios, Journal of International Money and Finance 14:65-81, 1995

[6] I. Luknár. Optimalizácia portfólia dlhopisov pri stochastickom vývoji úrokových mier, dilpomová práca na FMFI UK, 2002