

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE



DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2004

Beáta Stehlíková

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave  
Ekonomická a finančná matematika

# Analýza dvojfaktorového modelu vývoja úrokovej miery so stochastickou volatilitou

Diplomová práca

Diplomant: Beáta Stehlíková

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2004

Úprimne ďakujem vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za odborné vedenie, rady a čas, ktorý mi venoval pri písaní tejto diplomovej práce.

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Základné pojmy</b>	<b>3</b>
<b>2 Modelovanie vývoja úrokových mier</b>	<b>6</b>
2.1 Jednofaktorové modely . . . . .	6
2.2 Dvojfaktorové modely . . . . .	8
<b>3 Cena dlhopisu v jednofaktorovom modeli</b>	<b>10</b>
3.1 Rovnica pre cenu dlhopisu . . . . .	10
3.2 Okrajové podmienky . . . . .	11
3.3 Numerické riešenie . . . . .	13
<b>4 Cena dlhopisu v modeli so stochastickou volatilitou</b>	<b>16</b>
4.1 Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom modeli . . . . .	17
4.2 Model so stochastickou volatilitou . . . . .	18
4.3 Numerické riešenie . . . . .	20
4.4 Spriemernenie ceny dlhopisu vzhľadom na proces riadiaci volatilitu	24
4.4.1 Hustota rozdelenia $y$ . . . . .	24
4.4.2 Spriemernenie cien dlhopisov a výnosových kriviek . . . . .	32
<b>Záver</b>	<b>38</b>
<b>Literatúra</b>	<b>39</b>
<b>Príloha</b>	<b>41</b>

# Úvod

Dôležitou súčasťou finančných trhov sú deriváty úrokovej miery. Sú to deriváty, ktoré závisia od hodnoty úrokovej miery v určitom čase, resp. od hodnôt počas určitého časového intervalu. Na oceňovanie takýchto derivátov je potrebné modelovať vývoj úrokových mier.

Cieľom tejto diplomovej práce je ukázať, ako sa dá modelovať okamžitá úroková miera pomocou jednofaktorových a dvojfaktorových modelov a aké ceny dlhopisov tieto modely implikujú. Medzi najznámejšie jednofaktorové modely patrí Vašíčkov model [17] a CIR model [6]. Kvôli väčším možnostiam pri zachytení možného priebehu výnosovej krivky sa do modelu pridáva druhá rovnica, ktorá predstavuje druhý zdroj náhodnosti. Dostávame sa tak k dvojfaktorovým modelom. V rámci nich sa budeme zaoberať modelom so stochastickou volatilitou. Stochastická volatilita bola potvrdená aj empiricky [3]. Je viacero spôsobov, ako ju do modelu zahrnúť, ako príklad možno uviesť modely Andersona a Lunda [2] alebo model Fonga a Vašíčka [7]. Druhým faktorom je tu proces riadiaci volatilitu. Nie je možné priamo ho pozorovať, preto budeme skúmať možnosť spriemernenia cien dlhopisov podľa rozdelenia tohto skrytého parametra.

Diplomová práca pozostáva zo štyroch kapitol. V prvej kapitole definujeme základné pojmy, týkajúce sa dlhopisov a úrokových mier. Druhá kapitola obsahuje prehľad jednofaktorových a dvojfaktorových modelov vývoja okamžitej úrokovej miery a niektoré otázky, ktoré sa v nich riešia. V tretej kapitole sa zaoberáme jednofaktorovými modelmi. Odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorej riešením sú ceny dlhopisov. Pre jednu triedu modelov analyzujeme okrajové podmienky a rovnicu numericky riešime. Hlavná časť práce je obsiahnutá v štvrtej kapitole, ktorej obsahom sú dvojfaktorové modely. Po odvodení parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu sa zaoberáme okrajovými podmienkami a numerickým riešením tejto rovnice pre konkrétny model so stochastickou volatilitou. Potom skúmame rozdelenie skrytého parametra ovplyvňujúceho volatilitu, aby sme mohli vypočítať pravdepodobnosti cien dlhopisov a výnosových kriviek. To nám umožňuje ich spriemernovanie ako aj určenie hraníc, medzi ktorými sa pravdepodobne budú nachádzať.

# Kapitola 1

## Základné pojmy

Základný kontrakt, z ktorého sú odvodené úrokové miery, je **bezkupónový dlhopis**. Je to záväzok vyplatiť v stanovenom čase  $T$  dohodnutú sumu. Pre prípad jednotkovej sumy označíme  $P(t, T)$  jeho hodnotu v čase  $t$  uzavretia kontraktu.

Úrokové miery sú potom určené cenami dlhopisov. **Úroková miera** v čase  $t$  so splatnosťou v čase  $T$ , ktorú označujeme  $R(t, T)$ , je daná vzťahom

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}.$$

Závislosť úrokových mier v danom čase  $t$  od doby splatnosti  $T$  nám dáva časovú štruktúru úrokových mier, ktorá sa nazýva aj výnosovou krivkou.

Ak sa čas splatnosti blíži k  $t$ , v limite dostávame  $r(t)$  - **okamžitú úrokovú mieru** v čase  $t$ . Teda

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t).$$

Je to vlastne začiatok výnosovej krivky.

Iným typom úrokových mier sú forwardové úrokové miery. Odvodené sú z forwardového obchodu, ktorý spočíva v dohode (uskutočnenej v čase  $t$ ) o predaji dlhopisu so splatnosťou v  $T_2$  v čase  $T_1$  za cenu  $k$  ( $t < T_1 < T_2$ ). Z podmienky, že nemôže nastať arbitrážna príležitosť, sa dá odvodiť, že jedinou možnou cenou  $k$  je  $\frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}$ . Vzťah

$$k = e^{-f(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)}$$

teda určuje hodnotu  $f(t, T_1, T_2)$ , ktorú nazývame **forwardovou úrokovou mierou** v čase  $t$  na obdobie  $(T_1, T_2)$ . Pre  $T_2 \rightarrow T_1$  dostávame **okamžitú forwardovú úrokovú mieru**  $f(t, T_1)$ :

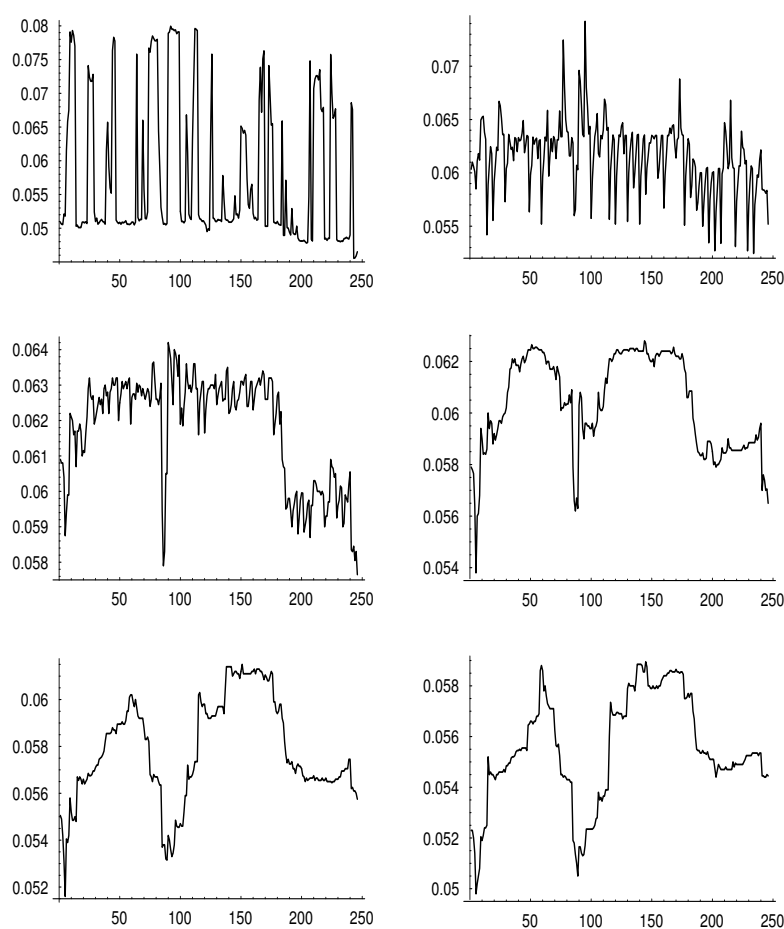
$$f(t, T_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t, T_1, T_1 + \Delta t).$$

Na ukážku uvedieme príklady týchto úrokových mier z reálnych dát. Pôjde o úrokové sadzby BRIBORu.

BRIBOR (Bratislava Interbank Offered Rates) je fixing úrokových sadzieb na trhu medzibankových depozít, ktorý sa vypočítava z kotácií referenčných bánk pre predaj depozít. Vypočítava sa z kotácií referenčných bánk predstavujúcich aktuálne kótované sadzby k 11. hodine bežného dňa. V súčasnosti je sedem referenčných bánk. Stanovuje sa za obdobia 1 deň, 7 dní, 2 týždne, 1, 2, 3, 6, 9 a 12 mesiacov v prípade, že danú lehotu kótujú aspoň tri banky. Počíta sa ako aritmetický priemer po vynechaní najmenej a najväčšej hodnoty. Nakoniec sa zaokrúhli na dve desatinné miesta. [15]

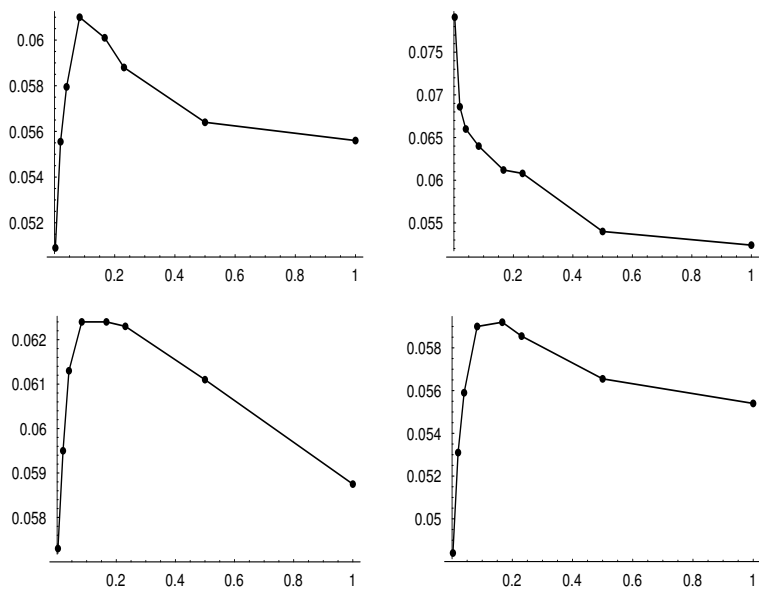
V nasledujúcich ukázkach použijeme priemer medzi bid a ask hodnotou, ktorý z percent prevedieme na desatinné číslo.

Nasledujúci obrázok znázorňuje vývoj úrokových mier na vybrané doby počas roku 2003.



Obrázok 1.1: Úrokové sadzby BRIBORu v roku 2003 na 1 deň, 1 týždeň, 1 mesiac, 3 mesiace, 6 mesiacov a 1 rok (po riadkoch)

Ďalší obrázok ukazuje príklady výnosových kriviek. Body predstavujú známe hodnoty úrokových mier, pre lepšiu predstavu o ich priebehu sú pospájané.



Obrázok 1.2: Časová štruktúra úrokových mier z 29. januára 2003, 15. mája 2003, 13. augusta 2003 a 19. novembra 2003 (po riadkoch)



## Kapitola 2

# Modelovanie vývoja úrokových mier

Na obrázkoch reálnych dát v predchádzajúcej kapitole bolo vidieť, že vývoj úrokových mier má stochastický charakter. Preto sa na jeho modelovanie používajú stochastické diferenciálne rovnice. Náhodnosť je v nich prítomná prostredníctvom Wienerovho procesu  $w$ . Model pozostáva z jednej alebo viacerých rovníc, ktoré popisujú vývoj niektorej z úrokových mier - okamžitej úrokovej miery  $r$  alebo forwardovej miery  $f$ . Pretože sa ďalej budeme zaoberať prístupom modelujúcim  $r$ , aj v tomto prehľade uvedieme modely tohto typu.

### 2.1 Jednofaktorové modely

Všeobecný tvar jednofaktorového modelu je

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw.$$

Časť  $\mu dt$  predstavuje deterministickú zložku a  $\sigma dw$  náhodné fluktuácie. Často sa za  $\mu$  berie funkcia  $\kappa(\theta - r)$ . Vtedy má proces vlastnosť priťahovania úrokovej miery  $r$  k dlhodobej rovnovážnej hodnote  $\theta$ , pričom sila tohto priťahovania je určená koeficientom  $\kappa > 0$ .

Takýto tvar má aj **Vašíčkov model** [17], jeden z prvých modelov, ktorý sa pokúsil vysvetliť vývoj úrokovej miery. Rovnicu pre  $r$  formuluje v tvare

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw.$$

Pri takejto rovnici je možné dosiahnuť aj záporné hodnoty úroku, čo nezodpovedá realite. Dôležitým nedostatkom sa ukázala byť aj konštantnosť volatility.

Tieto problémy sa snaží vyriešiť **CIR<sup>1</sup> model** [6], ktorého rovnica je

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw.$$

Má tú vlastnosť, že zo začiatočnej kladnej hodnoty úroku sa nemôže dostať k zápornej (pozri [13]). Pridanie člena  $\sqrt{r}$  znamená, že predpokladáme väčšiu

---

<sup>1</sup>Cox, Ingersoll, Ross

volatilitu pri vyšších úrokových mierach, konkrétne, že je úmerná odmocnine z úroku.

Existuje viacero ďalších podobných modelov (Tab. 1), ktoré sa líšia najmä predpokladom o závislosti volatility od výšky úroku. Dajú sa zapísať v tvare

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^\gamma dw. \quad (2.1)$$

Deterministická časť Vašíčkovho a CIR modelu zodpovedá voľbe parametrov

$$\alpha = \kappa\theta, \beta = -\kappa.$$

Modely, v ktorých sú tieto koeficienty nulové, predpokladajú, že zmeny vo vývoji úrokovej miery nemajú žiadny trend, ale sú to iba náhodné fluktuácie. Poznamenajme ešte, že existujú jednofaktorové modely, ktoré sa nedajú zapísať v tomto tvare.

model	tvar
Vašíček	$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma dw$
CIR	$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^{\frac{1}{2}} dw$
Brennan-Schwartz	$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r dw$
Merton	$dr = \beta r dt + \sigma dw$
GMB <sup>2</sup>	$dr = \beta r dt + \sigma r dw$
CEV <sup>3</sup>	$dr = \beta r dt + \sigma r^\gamma dw$
Dothan	$dr = \sigma r dw$
CIR(2) <sup>4</sup>	$dr = \sigma r^{\frac{3}{2}} dw$

Tabuľka 2.1: Jednofaktorové modely

Modelmi uvedenými v tabuľke 1 a všeobecným modelom (2.1) sa zaoberali autori článku [11]. Ich cieľom bolo z reálnych dát odhadnúť koeficienty rovnice (2.1) a zistiť, či sú splnené ohraničenia na parametre dané niektorým z modelov. Aby sa to dalo spraviť, treba zvoliť štatistickú metódu, ktorou budeme parametre odhadovať a dáta, ktoré použijeme. Okamžitá úroková miera totiž nie je veličina, ktorá na trhu priamo existuje, preto musíme zobrať nejakú inú za jej aproximáciu. Dobrou aproximáciou je stotožniť ju s jednodňovou medzibankovou mierou (ku ktorej má časovo najbližšie), ale táto sa často považuje za príliš ovplyvnenú rôznymi faktormi a použije sa niečo iné, napríklad výnos z dlhopisov, eurodolárová úroková miera a podobne. V tejto súvislosti je zaujímavý článok [12], ktorý sa zaoberá otázkou, ako môže výber dát ovplyvniť odhady.

V článku [11] boli uvažované výnosy mesačných Treasury Bills od júna 1964 do decembra 1989. Diskretizovaný model bol odhadnutý zovšeobecnenou metódou momentov. Zistilo sa, že v modeloch je dôležitá najmä ich stochastická časť, a že koeficient  $\gamma$  určujúci závislosť volatility od výšky úroku je väčší, ako ho predpokladá väčšina známych modelov. Približne sa rovná  $\frac{3}{2}$ .

Podobné otázky sa skúmali vo viacerých článkoch, pri použití rozličných metód, ale ich závery nie sú vždy rovnaké, preto sa nedá jednoznačne povedať,

<sup>2</sup>geometrický Brownov pohyb

<sup>3</sup>constant elasticity of variance

<sup>4</sup>ďalší model navrhnutý Coxom, Ingersollom a Rossom

ktorý z týchto modelov najlepšie zodpovedá realite.

Spomeňme ešte jeden typ jednofaktorových modelov, tzv. bezarbitrážne modely. Ako odvodíme v nasledujúcej kapitole, proces pre úrokovú mieru  $r$  pri zadaní ešte jednej funkcie (nazývanej trhovú cenu rizika) nám určuje celú výnosovú krivku. Preto môžeme chcieť formulovať model tak, aby sa počiatočná výnosová krivka, ktorú model generuje, zhodovala s tou, ktorú reálne pozorujeme. To znamená, že počiatočnú výnosovú krivku berieme ako vstup do modelu. Príkladom takéhoto modelu je napríklad model, ktorý navrhli **Ho a Lee** [9]:

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dw.$$

Iný príklad je model **Hulla a Whita** [10]:

$$dr = (\theta(t) - \alpha(t)r)dt + \sigma(t)r^\gamma dw.$$

Koeficienty sú tu závislé od času, čo umožňuje určiť ich tak, aby sme dosiahli zhodu so súčasnou časovou štruktúrou úrokových mier.

## 2.2 Dvojfaktorové modely

Dôvodom zavedenia ďalších faktorov je získanie väčších možností pre zachytenie vývoja modelovanej úrokovej miery, ako aj výnosových kriviek, ktoré model implikuje. Všeobecný tvar dvojfaktorového modelu je

$$dr = \alpha_r(r, y, t)dt + \sigma_r(r, y, t)dw_1$$

$$dy = \alpha_y(r, y, t)dt + \sigma_y(r, y, t)dw_2.$$

Sú tu dva Wienerove procesy  $w_1$  a  $w_2$ , medzi ktorými je konštantná korelácia  $\rho$ .

Pri výbere druhého faktora máme niekoľko možností. Prvou z nich je voľba premennej, ktorá súvisí s modelovanou úrokovou mierou a očakávame, že sa navzájom ovplyvňujú. Takýto je napríklad model **Brennana a Schwartza** [4], ktorí ako druhú rovnicu zobrali proces pre dlhodobú úrokovú mieru  $\ell$ .

Inou možnosťou je zobrať niektorý parameter z jednofaktorového modelu a namiesto jeho konštantnosti predpokladať, že sa tiež riadi nejakým stochastickým procesom. Môže to byť napríklad rovnovážna úroková miera  $\theta$  alebo volatilita  $\sigma$ .

Modely, ktoré patria do druhej skupiny, sa nazývajú modely so stochastickou volatilitou. Patrí sem napríklad model **Fonga a Vašíčka** [7]:

$$dr = \alpha_1(\bar{r} - r)dt + \sqrt{v}dw_1$$

$$dv = \alpha_2(\bar{v} - v)dt + \xi\sqrt{v}dw_2,$$

ako aj model **Andersona a Lunda** [2]:

$$dr = \kappa_1(\bar{r} - r)dt + \sigma r^\gamma dw_1$$

$$d(\ln \sigma) = \kappa_2(\alpha - \ln \sigma)dt + \xi dw_2.$$

Na overenie hypotézy o stochastickom charaktere volatility a na získanie odhadov parametrov modelu sa používajú rôzne metódy. Ako príklad možno uviesť článok [3], ktorý vo všetkých analyzovaných dátach potvrdzuje stochastickú volatilitu.

Zaujímavé otázky vznikajú pri výpočte cien dlhopisov, ktoré sú určené takýmito modelmi. Volatilitu, resp. premennú danú nejakou jej transformáciou nie sme schopní priamo merať. Napríklad v [5] sa preto skúma možnosť aproximácie ceny dlhopisu v takejto situácii. V tomto článku autori zaoberajú aj problémom rôznych časových škál, v ktorých sa pohybuje proces určujúci volatilitu a samotná úroková miera. Predpokladá sa, že volatilita sa mení rýchlejšie a študuje sa asymptotika.

## Kapitola 3

# Cena dlhopisu v jednofaktorovom modeli

Pri modelovaní nás zaujíma nielen okamžitá úroková miera, ale aj celá výnosová krivka. Otázkou teda je, čo potrebujeme k rovnici pre  $r(t)$  pridať, aby tým bola výnosová krivka určená, a ako ju potom získať. Tento problém vedie k parciálnej diferenciálnej rovnici, ktorej riešením sú ceny dlhopisov. Tým je potom určená aj celá výnosová krivka. K parametrom z rovnice pre  $r$  pribudne ešte jeden parameter navyše, tzv. trhovú cenu rizika.

### 3.1 Rovnica pre cenu dlhopisu

Postupom z [13] odvodíme rovnicu pre všeobecný jednofaktorový model pre  $r$ :

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw.$$

Cena dlhopisu so splatnosťou v čase  $T$  je funkciou času a okamžitej úrokovej miery  $r$ , teda  $P = P(t, r)$ . Aplikovaním Itôovej lemy [16] dostaneme stochastickú diferenciálnu rovnicu pre funkciu  $P$ :

$$dP = \mu_P(r, t)dt + \sigma_P(r, t)dw,$$

kde

$$\mu_P = \frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}, \quad \sigma_P = \sigma \frac{\partial P}{\partial r}.$$

Vo viacerých modeloch je volatilita definovaná len pre nezáporné hodnoty úroku. Pre tie spomedzi týchto modelov, ktoré zaručujú, že úroková miera zostane kladná, môžeme Itôovu lemu použiť pre  $r \in (0, \infty)$ .

Zostavíme portfólio pozostávajúce z jedného dlhopisu s dobou splatnosti  $T_1$  a  $\Delta$  dlhopisov s dobou splatnosti  $T_2$ .  $\Delta$  budeme v každom okamihu voliť tak, aby bolo portfólio bezrizikové. V rovnici pre zmenu hodnoty portfólia

$$d\Pi = (\mu_P(T_1) + \Delta\mu_P(T_2))dt + (\sigma_P(T_1) + \Delta\sigma_P(T_2))dw$$

sa stochastická časť zruší v prípade, že  $\Delta = -\frac{\sigma_P(T_1)}{\sigma_P(T_2)}$ . Deterministické portfólio musí mať v každej chvíli výnos rovný okamžitej úrokovej miere, z čoho dostaneme

$$\mu_P(T_1) + \Delta\mu_P(T_2) = rP(T_1) + \Delta rP(T_2).$$

Dosadíme hodnotu  $\Delta$  a upravíme:

$$\begin{aligned}\mu_P(T_1) - \frac{\sigma_P(T_1)}{\sigma_P(T_2)}\mu_P(T_2) &= rP(T_1) - \frac{\sigma_P(T_1)}{\sigma_P(T_2)}rP(T_2) \\ \frac{\mu_P(T_1) - rP(T_1)}{\sigma_P(T_1)} &= \frac{\mu_P(T_2) - rP(T_2)}{\sigma_P(T_2)}.\end{aligned}$$

Doby splatnosti  $T_1$  a  $T_2$  boli ľubovoľné, preto výraz  $\frac{\mu_P(T) - rP(T)}{\sigma_P(T)}$  nezávisí od  $T$ . Existuje teda funkcia  $\lambda$  premenných  $t$  a  $r$  taká, že

$$\lambda(t, r) = \frac{\mu_P(T, t, r) - rP(T, t, r)}{\sigma_P(T, t, r)}, \quad T \geq t, \quad (3.1)$$

nazýva sa trhová cena rizika. V modeli treba túto funkciu zadať. Vo Vašíčkovom modeli sa berie konštantná, v CIR modeli je násobkom  $\sqrt{r}$ .

Dosadením  $\mu_P$  a  $\sigma_P$  do rovnosti (3.1) dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu  $P = P(t, r)$  s časom splatnosti  $T$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0. \quad (3.2)$$

V čase splatnosti dlhopisu je jeho hodnota rovná jednej, čo dáva koncovú podmienku

$$P(r, T) = 1.$$

## 3.2 Okrajové podmienky

V rovnici pre vývoj ceny dlhopisu berieme  $r \in (0, \infty)$ . Preto musíme pridať okrajové podmienky pre  $r \rightarrow 0$  a  $r \rightarrow \infty$ . Pre  $r \rightarrow \infty$  je prirodzené čakať, že cena pôjde k nule, čo predstavuje podmienku

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(t, r) = 0.$$

Odvodíme ešte podmienku pre  $r \rightarrow 0$ , v prípade, že volatilita  $\sigma(t, r)$  má tvar

$$\sigma(t, r) = \sigma r^\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Ak v nejakom čase  $t$  je úrok nulový, tak volatilita v tomto čase  $\sigma(t, r)$  je tiež nulová, čo znamená, že nasledujúci vývoj na nekonečne malom časovom intervale dĺžky  $dt$  je deterministický:

$$dr = \kappa\theta dt,$$

takže

$$r(t + dt) = \kappa\theta dt.$$

V prípade deterministického vývoja okamžitej úrokovej miery  $r(t)$  sa ostatné úrokové miery dajú určiť zo vzťahu

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(s) ds.$$

V našom prípade teda vieme, aká je úroková miera  $R(t, t+dt)$ , rovná sa

$$R(t, t+dt) = \frac{1}{2} \kappa \theta dt.$$

Toto nám už určuje cenu dlhopisu so splatnosťou v čase  $t+dt$ :

$$P(0, t, t+dt) = e^{-R(t, t+dt)dt} = e^{-\frac{1}{2} \kappa \theta (dt)^2}. \quad (3.3)$$

Teraz použijeme princíp vylúčenia arbitráže. Predstavme si, že máme v čase  $t$  jednu korunu a uvažujme nasledujúce dve stratégie jej investovania:

- Kúpime  $\frac{1}{P(0, t, T)}$  dlhopisov so splatnosťou v čase  $T$ . Potom vieme, že v čase  $T$  budeme mať  $\frac{1}{P(0, t, T)}$  korún.
- Kúpime  $\frac{1}{P(0, t, t+dt)}$  dlhopisov so splatnosťou v čase  $dt$ . Pretože vývoj do tohto času je nenáhodný, v cenách dlhopisov v čase  $t+dt$  nie je žiadna náhodnosť. Môžeme sa preto rozhodnúť, že v čase  $t+dt$  kúpime za  $\frac{1}{P(0, t, t+dt)}$  korún, ktoré vtedy budeme mať, dlhopisy so splatnosťou v čase  $T$ . Bude ich  $\frac{1}{P(0, t, t+dt)P(\kappa\theta dt, t+dt, T)}$  a bilancia v čase  $T$  bude  $\frac{1}{P(0, t, t+dt)P(\kappa\theta dt, t+dt, T)}$  korún.

Z toho vyplýva, že musí byť splnená rovnosť

$$\frac{1}{P(0, t, T)} = \frac{1}{P(0, t, t+dt)P(\kappa\theta dt, t+dt, T)},$$

čiže

$$P(0, t, T) = P(0, t, t+dt)P(\kappa\theta dt, t+dt, T). \quad (3.4)$$

Rozvojom rovnosti (3.3) do prvého rádu dostaneme

$$P(0, t, t+dt) = 1 + o(dt),$$

čo dosadíme do (3.4) a upravíme:

$$P(0, t, T) = P(\kappa\theta dt, t+dt, T)(1 + o(dt))$$

$$o(dt) = P(\kappa\theta dt, t+dt, T) - P(0, t, T)$$

$$o(dt) = (P(0, t+dt, T) - P(0, t, T)) + (P(\kappa\theta dt, t+dt, T) - P(0, t+dt, T)).$$

Na výraz v druhej zátvorke použijeme vetu o strednej hodnote, čím dostaneme

$$o(dt) = (P(0, t+dt, T) - P(0, t, T)) + \left( \frac{\partial P}{\partial r}(\tilde{r}, t+dt, T) \kappa \theta dt \right)$$

pre nejaké  $\tilde{r} \in (0, \kappa\theta dt)$ . Rovnosť vydělíme  $dt$ :

$$\frac{o(dt)}{dt} = \frac{P(0, t+dt, T) - P(0, t, T)}{dt} + \frac{\partial P}{\partial r}(\tilde{r}, t+dt, T) \kappa \theta.$$

Pre  $dt \rightarrow 0$  máme aj  $\tilde{r} \rightarrow 0$ , a teda

$$0 = \frac{\partial P}{\partial t}(0, t, T) + \kappa\theta \frac{\partial P}{\partial r}(0, t, T).$$

Všimnime si, že táto podmienka vyjadruje platnosť rovnice (3.2) až do hranice  $r = 0$ .

### 3.3 Numerické riešenie

Budeme riešiť rovnicu zodpovedajúcu jednofaktorovému modelu

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw, \quad \gamma \neq 0. \quad (3.5)$$

Príslušná rovnica pre cenu dlhopisu je

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma r^\gamma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r^{2\gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$$

pre  $t \in (0, T)$ ,  $r \in (0, \infty)$ , s koncovou podmienkou

$$P(T, r) = 1$$

a okrajovými podmienkami

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(t, r) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(0, t, T) + \kappa\theta \frac{\partial P}{\partial r}(0, t, T) = 0.$$

Ešte treba určiť trhovú cenu rizika  $\lambda$ , čo spravíme o chvíľu.

Pre CIR model, zodpovedajúci  $\gamma = \frac{1}{2}$ , je známe explicitné riešenie tejto rovnice, ak predpokladáme, že trhovú cenu rizika je násobkom  $\sqrt{r}$ , t.j.  $\lambda(t, r) = \lambda\sqrt{r}$ , kde  $\lambda$  je konštanta (pozri [13]). V ostatných prípadoch takéto riešenie známe nie je, a to je dôvodom nutnosti použiť numerické metódy riešenia partiálnych diferenciálnych rovníc. Pri tomto numerickom riešení pre ľubovoľnú hodnotu  $\gamma$  budeme o trhovej cene rizika predpokladať, že je násobkom  $r^\gamma$ , t.j.  $\lambda(t, r) = \lambda r^\gamma$  pre nejakú konštantu  $\lambda$ .

Najskôr spravíme transformáciu

$$\tau = T - t,$$

teda  $\tau$  označuje čas do splatnosti dlhopisu. Potom

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial t}$$

a koncová podmienka  $P(T, r) = 1$  sa zmení na začiatočnú  $P(0, r) = 1$ .

Takto transformovanú rovnicu budeme numericky riešiť pre hodnoty úroku z intervalu  $[0, r_{max}]$  a  $\tau$  z intervalu  $[0, T]$ . Interval  $[0, r_{max}]$  rovnomerne rozdelíme na  $n - 1$  intervalov s dĺžkou  $h = \frac{r_{max}}{n-1}$ , krajné body týchto intervalov označíme



$r_1, r_2, \dots, r_n$ . Podobne časový interval  $[0, T]$  rovnomerne rozdelíme na  $m - 1$  intervalov s dĺžkou  $h = \frac{T}{m-1}$ , krajné body označíme  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ . Označíme  $\lambda_i$  trhovú cenu rizika pre  $r = r_i$  a  $P_i^s$  aproximáciu riešenia  $P$  v bode  $(\tau_s, r_i)$ .

Hodnoty na prvej časovej vrstve sú dané začiatočnou podmienkou

$$P_i^1 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Derivácie aproximujeme diferenciami:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau}(\tau_s, r_i) &\approx \frac{P_i^s - P_i^{s-1}}{k} \\ \frac{\partial P}{\partial r}(\tau_s, r_i) &\approx \frac{P_{i+1}^s - P_{i-1}^s}{2h} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(\tau_s, r_i) &\approx \frac{P_{i+1}^s - 2P_i^s + P_{i-1}^s}{h^2} \end{aligned}$$

Ak do rovnice dosadíme za derivácie tieto aproximácie, dostaneme pre  $i = 2, 3, \dots, n-1$ ,  $s = 2, 3, \dots, m$

$$\begin{aligned} -\frac{P_i^s - P_i^{s-1}}{k} + (\kappa(\theta - r_i) - \lambda_i \sigma r_i^\gamma) \frac{P_{i+1}^s - P_{i-1}^s}{2h} + \\ + \frac{1}{2} \sigma^2 r_i^{2\gamma} \frac{P_{i+1}^s - 2P_i^s + P_{i-1}^s}{h^2} - r_i P_i^s = 0, \end{aligned}$$

čo môžeme upraviť do tvaru

$$a_i P_{i-1}^s + b_i P_i^s + c_i P_{i+1}^s = P_i^{s-1}, \quad (3.6)$$

kde

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{k}{2h} (\kappa(\theta - r_i) - \lambda_i \sigma r_i^\gamma) - \frac{k}{2h^2} \sigma^2 r_i^{2\gamma} \\ b_i &= 1 + \frac{k}{h^2} \sigma^2 r_i^{2\gamma} + k r_i \\ c_i &= -\frac{k}{2h} (\kappa(\theta - r_i) - \lambda_i \sigma r_i^\gamma) - \frac{k}{2h^2} \sigma^2 r_i^{2\gamma}. \end{aligned}$$

Pri diskretizácii okrajovej podmienky pre  $r = 0$  použijeme aproximáciu

$$\frac{\partial P}{\partial r}(\tau_s, r_1) \approx \frac{P_2^s - P_1^s}{h}$$

pre  $s = 2, 3, \dots, m$ , aproximácia časovej derivácie zostane rovnaká. Tak dostaneme

$$-\frac{P_1^s - P_1^{s-1}}{k} + \kappa \theta \frac{P_2^s - P_1^s}{h} = 0. \quad (3.7)$$

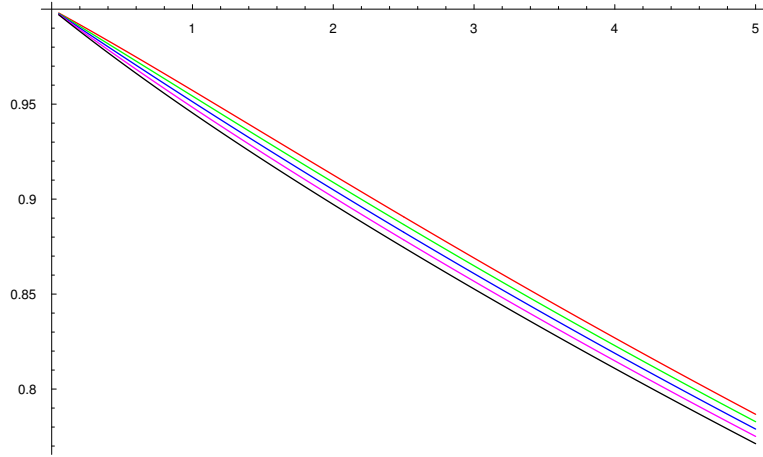
Na základe okrajovej podmienky  $P \rightarrow 0$  pre  $r \rightarrow \infty$  bude

$$P_n^s = 0$$

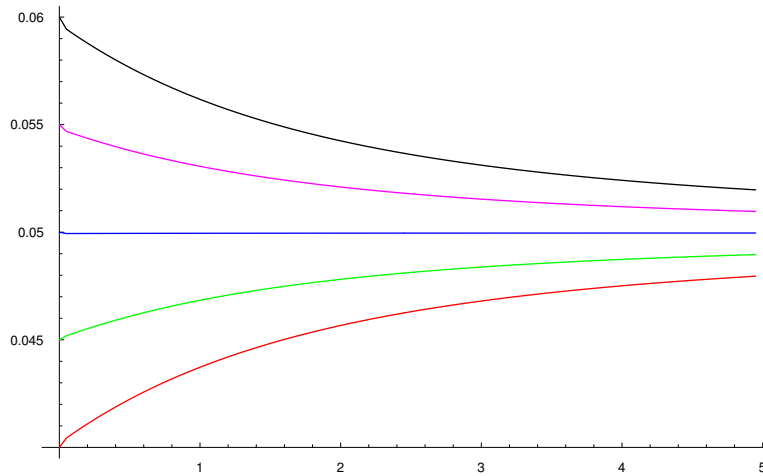
pre  $s = 2, 3, \dots, m$ .

To znamená, že na výpočet hodnôt  $P_1^s, P_2^s, \dots, P_{n-1}^s$  na  $s$ -tej časovej vrstve máme rovnicu (3.7) a  $n - 2$  rovníc (3.6), pričom v poslednej z týchto rovníc bude  $P_n^s = 0$ . Riešime teda sústavu  $n - 1$  rovníc s  $n - 1$  neznámymi.

Na nasledujúcich obrázkoch sú ukážky cien dlhopisov a výnosových kriviek, ktoré takto dostaneme po zvolení nasledovných hodnôt parametrov:  $\kappa = 1$ ,  $\theta = 0,05$ ,  $\sigma = 0,05$ ,  $\lambda = -0,1$ ,  $\gamma = 0,8$ .



Obrázok 3.1: Ceny dlhopisov pre niekoľko hodnôt  $r$ : 0,40 (červený graf), 0,45 (zelený), 0,50 (modrý), 0,55 (fialový), 0,60 (čierny)



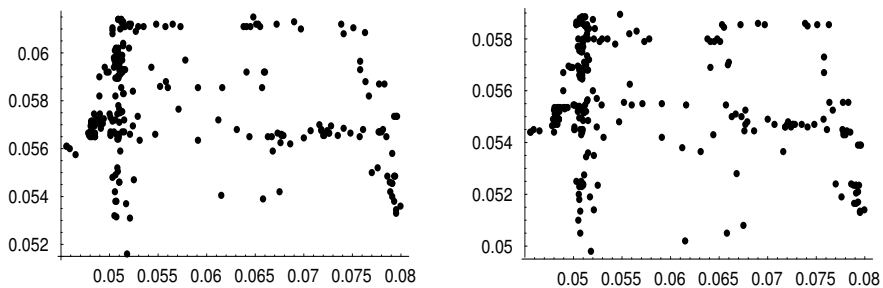
Obrázok 3.2: Časová štruktúra úrokových mier zodpovedajúca cenám dlhopisov z predchádzajúceho obrázku

## Kapitola 4

# Cena dlhopisu v modeli so stochastickou volatilitou

V jednofaktorovom modeli je cena dlhopisu s danou dobou splatnosti funkciou okamžitej úrokovej miery. To znamená, že jej určitej hodnote zodpovedá jediná možná výnosová krivka. Viacfaktorové modely umožňujú rôzne výnosové krivky pri rovnakej úrokovej miere, v závislosti od hodnôt ostatných faktorov.

Na dátach BRIBORu sa môžeme presvedčiť, že takáto vlastnosť má zmysel pri modelovaní reálnych dát. Na nasledujúcich obrázkoch sú body, ktorých  $x$ -ová súradnica zodpovedá jednodňovej úrokovej miere (ktorou teraz budeme aproximovať okamžitú úrokovú mieru) a  $y$ -ová súradnica úrokovej miere na určitú dobu v tom istom dni. Jednofaktorový model priradí každej hodnote okamžitej úrokovej miery jedinú úrokovú mieru na túto dobu. Vidíme však, že pri rovnakej okamžitej úrokovej miere sú hodnoty druhého zobrazovaného úroku z väčšieho intervalu.



Obrázok 4.1: Jednodňová úroková miera a úroková miera na 6 mesiacov (vľavo) a na 1 rok (vpravo)

## 4.1 Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom modeli

Všeobecný tvar dvojfaktorového modelu pre okamžitú úrokovú mieru  $r(t)$  je

$$\begin{aligned} dr &= \mu_r(t, r, y)dt + \sigma_r(t, r, y)dw_1 \\ dy &= \mu_y(t, r, y)dt + \sigma_y(t, r, y)dw_2, \end{aligned}$$

kde  $y$  je zatiaľ nešpecifikovaná premenná. Medzi Wienerovými procesmi  $w_1$  a  $w_2$  je korelácia  $\rho$ . Uvažujeme koreláciu  $\rho \in [0, 1]$ .

Cena dlhopisu  $P$  s dobou splatnosti  $T$  je teraz funkciou času a ďalších dvoch premenných  $r$  a  $y$ . Podľa [13] odvodíme rovnicu, ktorú  $P$  spĺňa. Použitím viacrozmernej Itôovej lemy aplikovanej na funkciu  $P(t, r, y)$  dostaneme stochastickú diferenciálnu rovnicu pre  $P$ :

$$dP = \mu(T)dt + \sigma_1(T)dw_1 + \sigma_2(T)dw_2,$$

kde

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \sigma_r \sigma_y \rho \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y}, \\ \sigma_1(T) &= \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r}, \quad \sigma_2(T) = \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned}$$

pričom argument  $T$  označuje, že ide o dlhopis s dobou splatnosti  $T$ . V modeloch, v ktorých volatilita nie je definovaná pre záporné hodnoty úroku, budeme predpokladať, že  $r$  je zostáva v otvorenom intervale  $(0, \infty)$ , aby sme na ňom mohli použiť Itôovu lemu. Interval, na ktorom budeme uvažovať premennú  $y$ , bude závisieť od toho, čo bude táto premenná označovať.

Zostavíme portfólio z dlhopisov so splatnosťami v časoch  $T_1$ ,  $T_2$  a  $T_3$  v počtoch  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ . Jeho hodnota bude

$$\Pi = \Delta_1 P(T_1) + \Delta_2 P(T_2) + \Delta_3 P(T_3).$$

Z toho dostaneme, že

$$d\Pi = \Delta_1 dP(T_1) + \Delta_2 dP(T_2) + \Delta_3 dP(T_3),$$

čo po dosadení  $dP(T_i)$  dáva

$$\begin{aligned} d\Pi &= (\Delta_1 \mu(T_1) + \Delta_2 \mu(T_2) + \Delta_3 \mu(T_3)) dt + \\ &+ (\Delta_1 \sigma_1(T_1) + \Delta_2 \sigma_1(T_2) + \Delta_3 \sigma_1(T_3)) dw_1 + \\ &+ (\Delta_1 \sigma_2(T_1) + \Delta_2 \sigma_2(T_2) + \Delta_3 \sigma_2(T_3)) dw_2. \end{aligned}$$

Ak zvolíme  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  tak, že

$$\begin{aligned} \Delta_1 \sigma_1(T_1) + \Delta_2 \sigma_1(T_2) + \Delta_3 \sigma_1(T_3) &= 0 \\ \Delta_1 \sigma_2(T_1) + \Delta_2 \sigma_2(T_2) + \Delta_3 \sigma_2(T_3) &= 0, \end{aligned}$$

stochastické členy sa eliminujú a zostane

$$d\Pi = (\Delta_1\mu(T_1) + \Delta_2\mu(T_2) + \Delta_3\mu(T_3)) dt.$$

Deterministické portfólio musí mať výnos v každom čase rovný okamžitej úrokovej miere, čiže

$$\Delta_1\mu(T_1) + \Delta_2\mu(T_2) + \Delta_3\mu(T_3) = r\Pi.$$

Dosadením hodnoty portfólia dostaneme

$$\Delta_1\mu(T_1) + \Delta_2\mu(T_2) + \Delta_3\mu(T_3) = r(\Delta_1P(T_1) + \Delta_2P(T_2) + \Delta_3P(T_3)).$$

Na určenie hodnôt  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  máme teda sústavu rovníc

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(T_1) & \sigma_1(T_2) & \sigma_1(T_3) \\ \sigma_2(T_1) & \sigma_2(T_2) & \sigma_2(T_3) \\ \mu(T_1) - rP(T_1) & \mu(T_2) - rP(T_2) & \mu(T_3) - rP(T_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ak sa pre ľubovoľné  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  dá posledný riadok napísať ako lineárna kombinácia prvých dvoch, matica sústavy je singulárna a sústava rovníc má nenulové riešenie  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  pre počet dlhopisov jednotlivých typov v portfóliu. Táto podmienka znamená, že existujú funkcie  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , nezávislé od  $T$  tak, že

$$\mu(T) - rP(T) = \lambda_1\sigma_1(T) + \lambda_2\sigma_2(T).$$

Ak do tejto rovnice dosadíme  $\mu$ ,  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ , dostaneme výslednú rovnicu

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r - \lambda_1\sigma_r) \frac{\partial P}{\partial r} + (\mu_y - \lambda_2\sigma_y) \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \sigma_r\sigma_y\rho \frac{\partial^2 P}{\partial r\partial y} - rP = 0. \quad (4.1)$$

Aby sme mohli túto rovnicu pre konkrétny model riešiť, treba zadať funkcie  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ . Nazývajú sa trhovými cenami rizika premenných  $r$  a  $y$ .

Rovnica (4.1) platí pre  $t \in (0, T)$ ,  $r \in (0, \infty)$ , interval pre  $y$  závisí od toho, čo tento faktor predstavuje. Treba teda pridať okrajové podmienky pre  $r \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$  a v závislosti od voľby  $y$  aj pre túto premennú.

Pre  $r \rightarrow \infty$  spravíme rovnaký záver ako v jednofaktorovom modeli, že cena dlhopisu pôjde k nule, pre ľubovoľnú hodnotu premennej  $y$ .

V prípade  $r \rightarrow 0$  však už úvahu z jednofaktorového modelu nemôžeme zopakovať. Ak by aj volatilita mala taký tvar, že pri nulovej hodnote úroku v čase  $t$  by bola nulová, druhý faktor  $y$  sa vo všeobecnosti môže vyvíjať ďalej náhodne. To znamená, že hoci hodnota  $r$  v čase  $t + dt$  je nenáhodná, hodnota  $y$  v tomto čase zostáva náhodná, a teda nevieme, aká bude cena dlhopisu. Budeme však predpokladať, že aj v tomto prípade je príslušná rovnica splnená až do hranice  $r = 0$ .

Okrajové podmienky treba určiť aj pre premennú  $y$ . Tie budú závisieť od toho, aký faktor bude táto premenná predstavovať.

## 4.2 Model so stochastickou volatilitou

Rovnica pre vývoj úrokovej miery bude podobná ako v jednofaktorových modeloch, ktorými sme sa doteraz zaoberali, t.j.

$$dr = \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sigma r^\gamma dw_1,$$

ale s tým rozdielom, že  $\sigma$  nebude konštanta, ale stochastická premenná. Parameter  $y$  z predchádzajúcej časti bude predstavovať druhú mocninu volatility  $\sigma$ . Teda  $\sigma$  v rovnici pre  $r$  bude  $\sqrt{y}$ . O rovnici, ktorou sa bude riadiť  $y$ , budeme opäť predpokladať, že má tvar mean-reversion procesu, t.j.:

$$dy = \kappa_2(\theta_2 - y)dt + vy^\delta dw_2.$$

Budeme predpokladať, že  $\gamma, \delta > 0$ .

Rovnica pre cenu dlhopisu teda je

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1\sqrt{y}r^\gamma)\frac{\partial P}{\partial r} + (\kappa_2(\theta_2 - y) - \lambda_2vy^\delta)\frac{\partial P}{\partial y} + \\ \frac{1}{2}(\sqrt{y}r^\gamma)^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}(vy^\delta)^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + (\sqrt{y}r^\gamma)(vy^\delta)\rho\frac{\partial^2 P}{\partial r\partial y} - rP = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

pre  $t \in (0, T)$ ,  $r \in (0, \infty)$ ,  $y \in (0, \infty)$ .

Okrajové podmienky pre  $r \rightarrow 0$  a  $r \rightarrow \infty$  budú také, ako sme ich uviedli vo všeobecnom prípade, teda

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(r, y, t) = 0$$

a platnosť rovnice na hranici  $r = 0$ , čo teraz znamená

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t}(0, y, t) + (\kappa_1\theta_1)\frac{\partial P}{\partial r}(0, y, t) + (\kappa_2(\theta_2 - y) - \lambda_2vy^\delta)\frac{\partial P}{\partial y}(0, y, t) + \\ + \frac{1}{2}(vy^\delta)^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0, y, t) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

V tomto prípade nastáva situácia, ktorú sme spomínali, že z nulovej hodnoty úroku nevyplýva nulová hodnota volatility oboch premenných. Platnosť rovnice do hranice  $r = 0$  je teda len predpokladom.

Ak  $y = 0$ , tak je volatilita oboch procesov nulová. V tomto prípade rovnakým postupom ako predtým v jednorozmernom prípade odvodíme podmienku, ktorá predstavuje rovnicu pre  $y = 0$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t}(r, 0, t) + (\kappa_1(\theta_1 - r))\frac{\partial P}{\partial r}(r, 0, t) + (\kappa_2\theta_2)\frac{\partial P}{\partial y}(r, 0, t) - rP(r, 0, t) = 0. \quad (4.4)$$

To znamená, že platnosť rovnice na hranici  $y = 0$  sa dá zdôvodniť analýzou vývoja ceny dlhopisu v situácii, že  $y$  má nulovú hodnotu.

Pre  $y \rightarrow \infty$  budeme predpokladať, že

$$\lim_{y \rightarrow \infty} P(r, y, t) = 0.$$

Veľké hodnoty premennej  $y$  znamenajú veľkú volatilitu, čo znižuje ceny dlhopisov. Predpokladáme, že v limite pre  $y \rightarrow \infty$  klesnú až k nule.

O trhovách cenách rizika úroku  $r$  a premennej  $y$  budeme predpokladať, že sú  $\lambda_1$  násobkom  $r^\gamma$ , resp.  $\lambda_2$  násobkom  $y^\delta$ , kde  $\lambda_1, \lambda_2$  sú konštanty.

### 4.3 Numerické riešenie

Tak ako v jednofaktorovom modeli, najskôr spravíme transformáciu

$$\tau = T - t.$$

Rovnicu budeme riešiť pre  $\tau \in [0, T]$ ,  $r \in [0, r_{max}]$ ,  $y \in [0, y_{max}]$ . Vytvoríme sieť, v ktorej uzloch budeme počítať riešenie:

- čas:  $\tau_s = k(s - 1)$ , kde  $k = \frac{T}{m-1}$  pre  $s = 1, 2, \dots, m$ ,
- úrok:  $r_i = h_1(i - 1)$ , kde  $h_1 = \frac{r_{max}}{n_1-1}$  pre  $i = 1, 2, \dots, n_1$ ,
- $y$ :  $y_j = h_2(j - 1)$ , kde  $h_2 = \frac{y_{max}}{n_2-1}$  pre  $j = 1, 2, \dots, n_2$ .

Aproximáciu riešenia  $P(\tau_s, r_i, y_j)$  označíme  $P_{i,j}^s$ . Kvôli jednoduchšiemu zápisu zavedieme ešte označenie

$$\lambda_{i,j}^{(1)} = \lambda_1(r_i, y_j), \quad \lambda_{i,j}^{(2)} = \lambda_2(r_i, y_j).$$

Z okrajových podmienok pre  $r \rightarrow \infty$  a  $y \rightarrow \infty$  dostaneme

$$P_{i,n_2}^s = 0, P_{n_1,j} = 0$$

pre všetky  $i, j$  a pre  $s = 2, 3, \dots, m$ .

Vo vnútorných bodoch siete použijeme aproximácie

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau}(\tau_s, r_i, y_j) &\approx \frac{P_{i,j}^s - P_{i,j}^{s-1}}{k}, \\ \frac{\partial P}{\partial r}(\tau_s, r_i, y_j) &\approx \frac{P_{i+1,j}^s - P_{i-1,j}^s}{2h_1}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(\tau_s, r_i, y_j) \approx \frac{P_{i,j+1}^s - P_{i,j-1}^s}{2h_2}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(\tau_s, r_i, y_j) &\approx \frac{P_{i+1,j}^s - 2P_{i,j}^s + P_{i-1,j}^s}{h_1^2}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(\tau_s, r_i, y_j) \approx \frac{P_{i,j+1}^s - 2P_{i,j}^s + P_{i,j-1}^s}{h_2^2}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} &\approx \frac{\frac{\partial P}{\partial y}(\tau_s, r_{i+1}, y_j) - \frac{\partial P}{\partial y}(\tau_s, r_{i-1}, y_j)}{2h_1} \approx \frac{P_{i+1,j+1}^s - P_{i+1,j-1}^s - P_{i-1,j+1}^s + P_{i-1,j-1}^s}{4h_1h_2}. \end{aligned}$$

Dosadením týchto aproximácií do (4.2) dostaneme pre  $i = 2, 3, \dots, n_1 - 1$ ,  $j = 2, 3, \dots, n_2 - 1$  rovnice:

$$\begin{aligned} A P_{i-1,j-1}^s + B P_{i-1,j}^s + C P_{i-1,j+1}^s + D P_{i,j-1}^s + E P_{i,j}^s + F P_{i,j+1}^s + \\ + G P_{i+1,j-1}^s + H P_{i+1,j}^s + I P_{i+1,j+1}^s = P_{i,j}^{s-1}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

ktorých koeficienty sú

$$\begin{aligned} A = I &= -\frac{k}{4h_1h_2} \rho(\sqrt{y_j} r_i^\gamma) (v y_j^\delta) \\ C = G &= \frac{k}{4h_1h_2} \rho(\sqrt{y_j} r_i^\gamma) (v y_j^\delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{k}{2h_1}(\kappa_1(\theta_1 - r_i) - \lambda_{i,j}^{(1)}\sqrt{y_j}r_i^\gamma) - \frac{k}{2h_1^2}(\sqrt{y_j}r_i^\gamma)^2 \\
D &= \frac{k}{2h_2}(\kappa_2(\theta_2 - y_j) - \lambda_{i,j}^{(2)}vy_j^\delta) - \frac{k}{2h_2^2}(vy_j^\delta)^2 \\
E &= 1 + \frac{k}{h_1^2}(\sqrt{y_j}r_i^\gamma)^2 + \frac{k}{h_2^2}(vy_j^\delta)^2 + kr_i \\
F &= -\frac{k}{2h_2}(\kappa_2(\theta_2 - y_j) - \lambda_{i,j}^{(2)}vy_j^\delta) - \frac{k}{2h_2^2}(vy_j^\delta)^2 \\
H &= -\frac{k}{2h_1}(\kappa_1(\theta_1 - r_i) - \lambda_{i,j}^{(1)}\sqrt{y_j}r_i^\gamma) - \frac{k}{2h_1^2}(\sqrt{y_j}r_i^\gamma)^2.
\end{aligned}$$

Pri diskretizácii okrajovej podmienky pre  $r = 0$  (4.3) nemôžeme použiť na aproximáciu derivácie  $\frac{\partial P}{\partial r}$  centrálnu diferenciu. Namiesto nej zoberieme

$$\frac{\partial P}{\partial r}(\tau_s, r_1, y_j) \approx \frac{P_{2,j}^s - P_{1,j}^s}{h_1}.$$

Aproximácie

$$\frac{\partial P}{\partial y}(\tau_s, r_1, y_j) \approx \frac{P_{1,j+1}^s - P_{1,j-1}^s}{2h_2}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(\tau_s, r_1, y_j) \approx \frac{P_{1,j+1}^s - 2P_{1,j}^s + P_{1,j-1}^s}{h_2^2}$$

môžeme použiť pre  $j = 2, 3, \dots, n_2 - 1$ . Okrajovú podmienku pre bod  $(\tau_s, r_1, y_1)$  preto zostavíme zvlášť. Pre  $j = 2, 3, \dots, n_2 - 1$  dostaneme dosadením týchto diferencií do (4.3) rovnice

$$A_1 P_{1,j}^s + B_1 P_{2,j}^s + C_1 P_{1,j+1}^s + D_1 P_{1,j-1}^s = P_{1,j}^{s-1} \quad (4.6)$$

s koeficientmi

$$\begin{aligned}
A_1 &= 1 + \frac{k}{h_1}\kappa_1\theta_1 + \frac{k}{h_2^2}(vy_j^\delta)^2 \\
B_1 &= -\frac{k}{h_1}\kappa_1\theta_1 \\
C_1 &= -\frac{k}{2h_2}(\kappa_2(\theta_2 - y_j) - \lambda_{1,j}^{(2)}vy_j^\delta) - \frac{k}{2h_2^2}(vy_j^\delta)^2 \\
D_1 &= \frac{k}{2h_2}(\kappa_2(\theta_2 - y_j) - \lambda_{1,j}^{(2)}vy_j^\delta) - \frac{k}{2h_2^2}(vy_j^\delta)^2.
\end{aligned}$$

Podobne pri aproximácii podmienky pre  $y = 0$  (4.4) nemôžeme použiť na aproximáciu  $\frac{\partial P}{\partial y}$  centrálnu diferenciu, namiesto nej použijeme

$$\frac{\partial P}{\partial y}(\tau_s, r_i, y_1) \approx \frac{P_{i,2}^s - P_{i,1}^s}{h_2}.$$

Pre  $i = 2, 3, \dots, n_1 - 1$  tak z (4.4) dostaneme rovnice

$$A_2 P_{i,1}^s + B_2 P_{i+1,1}^s + C_2 P_{i-1,1}^s + D_2 P_{i,2}^s = P_{i,1}^{s-1} \quad (4.7)$$



s koeficientmi

$$A_2 = 1 + \frac{k}{h_2} \kappa_2 \theta_2 + k r_i$$

$$B_2 = -\frac{k}{h_2} \kappa_2 \theta_2$$

$$C_2 = -\frac{k}{2h_1} (\kappa_1 (\theta_1 - r_i))$$

$$D_2 = \frac{k}{2h_1} (\kappa_1 (\theta_1 - r_i)).$$

Zostáva vyjadriť pomocou diferencií okrajovú podmienku v bode  $(r_1, y_1)$ . Jej spojitá verzia má tvar

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa_1 \theta_1) \frac{\partial P}{\partial r} + (\kappa_2 \theta_2) \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Teraz musíme v oboch deriváciách  $\frac{\partial P}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  použiť jednostranné aproximácie

$$\frac{\partial P}{\partial r}(\tau_s, r_1, y_1) \approx \frac{P_{2,1}^s - P_{1,1}^s}{h_1}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(\tau_s, r_1, y_1) \approx \frac{P_{1,2}^s - P_{1,1}^s}{h_2}.$$

Ich dosadením dostaneme rovnicu

$$A_3 P_{1,1}^s + B_3 P_{1,2}^s + C_3 P_{2,1}^s = P_{1,1}^{s-1}, \quad (4.8)$$

ktorej koeficienty sú

$$A_3 = 1 + \frac{k}{h_1} \kappa_1 \theta_1 + \frac{k}{h_2} \kappa_2 \theta_2$$

$$B_3 = -\frac{k}{h_2} \kappa_2 \theta_2$$

$$C_3 = -\frac{k}{h_1} \kappa_1 \theta_1.$$

Máme teda  $(n_1 - 2)(n_2 - 2)$  rovníc tvaru (4.5) pre vnútorné body siete,  $n_1 - 2$  rovníc tvaru (4.6),  $n_2 - 2$  rovníc tvaru (4.7) a rovnicu (4.8) pre hraničné body. To je spolu  $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$  rovníc pre  $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$  neznámých  $P_{i,j}^s$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_2 - 1$ . Po zadaní začiatkovej podmienky

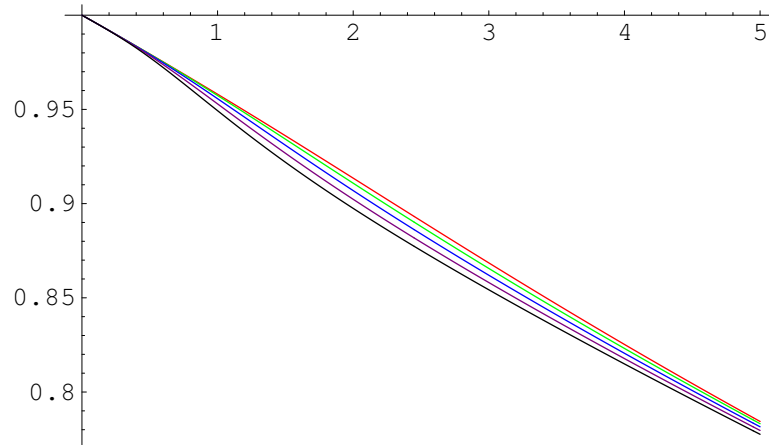
$$P_{i,j}^1 = 1,$$

ktorá platí pre všetky  $i, j$ , riešením sústav lineárnych rovníc dostaneme riešenie na ďalších časových vrstvách.

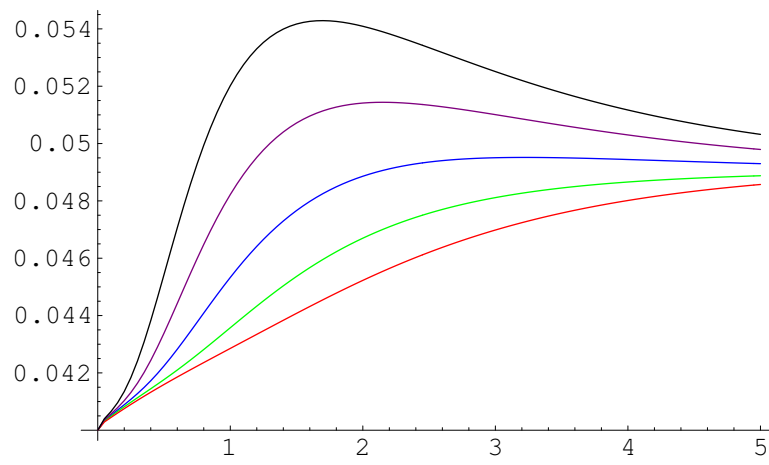
Ako príklad uvidíme riešenie pre nasledovné hodnoty parametrov:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0,5, \theta_1 = 0,05, \gamma = 0,5, \\ \kappa_2 &= 0,5, \theta_2 = 0,1, v = 0,1, \delta = 0,5, \\ \rho &= 0,5, \lambda_1 = -0,2, \lambda_2 = -0,2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Vykreslíme ceny dlhopisov a výnosové krivky napríklad pre  $r = 0,04$  pre niekoľko hodnôt  $y$ . Vidíme, že pre rovnakú hodnotu  $r$  môže mať výnosová krivka rôzny priebeh, v závislosti od hodnoty premennej  $y$ .



Obrázok 4.2: Ceny dlhopisov pre  $r = 0,04$  a rôzne hodnoty  $y$ : 0,05 (červený graf), 0,10 (zelený), 0,15 (modrý), 0,20 (fialový), 0,25 (čierny)



Obrázok 4.3: Výnosové krivky pre  $r = 0,04$  a rôzne hodnoty  $y$ : 0,05 (červený graf), 0,10 (zelený), 0,15 (modrý), 0,20 (fialový), 0,25 (čierny)

## 4.4 Spriemernenie ceny dlhopisu vzhľadom na proces riadiaci volatilitu

Pri výpočte ceny dlhopisu v dvojfaktorovom modeli sme doteraz predpokladali, že sme schopní dosadzovať do riešenia ako hodnotu úroku, tak aj volatility. Volatilita však nie je priamo pozorovateľná premenná, preto má zmysel zaoberať sa problémom spriemernenia ceny  $P(t, T, r, y)$  vzhľadom na premennú  $y$ , ktorá určuje volatilitu. To znamená, že chceme nájsť

$$\langle P(t, T, r, y) \rangle = \int_0^\infty f(t, y) P(t, T, r, y) dy,$$

kde  $f$  je hustota  $y(t)$  ako náhodnej premennej. Najskôr však potrebujeme určiť hustotu  $f$ .

Pre špeciálny tvar procesu  $y$  je táto hustota známa. Na jej výpočet však potrebujeme poznať hodnotu procesu v nejakom čase. Toto nie je náš prípad. Ukážeme však, že existuje limitná hustota, ku ktorej hustoty konvergujú, ak čas ide do nekonečna. V prípade, že proces plynie dostatočne dlho, môžeme za jeho rozdelenie zobrať túto limitnú hustotu. Potom budeme hľadať takúto limitnú hustotu pre všeobecný tvar procesu  $y$ .

### 4.4.1 Hustota rozdelenia $y$

Nech proces  $y$  rieši stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dy = \kappa(\theta - y)dt + \nu y^\delta dw, \quad (4.10)$$

pričom  $\delta > 0$ .

Je známe (pozri [13]), že pre  $\delta = \frac{1}{2}$  sa dá explicitne vyjadriť hustota  $y(t)$  pre  $t > t_0$ , ak je dané  $y(t_0) = y_0$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \leq 0, \\ ce^{-a-b} \left(\frac{b}{a}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{ab}) & \text{ak } x > 0, \end{cases}$$

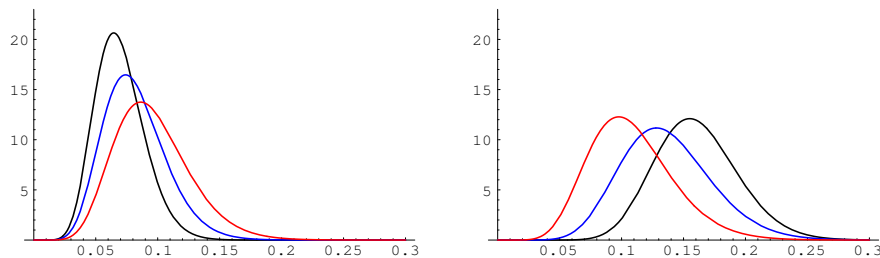
kde

$$c = \frac{2\kappa}{\nu^2 (1 - e^{-\kappa(t-t_0)})}, \quad a = cy_0 e^{-\kappa(t-t_0)}, \quad b = cy, \quad q = \frac{2\kappa\theta}{\nu^2} - 1 \quad (4.11)$$

a  $I_q$  je modifikovaná Besselova funkcia prvého druhu rádu  $q$ .

Takýto tvar má aj proces pre premennú  $y$  v modeli, ktorý sme riešili v predchádzajúcej kapitole. Pre tento proces vykreslíme hustoty  $y(t)$  pre niekoľko časov  $t$  a začiatočných hodnôt  $y(t_0)$ .

Vidíme, že pri dlhšom čase sú hustoty procesov vychádzajúcich z rôznych bodov podobné. Ukážeme teraz, že existuje limita týchto hustôt pre  $t \rightarrow \infty$ . Táto limita bude funkciou hustoty, jej rozdelenie bude limitné rozdelenie procesu  $y$ .



Obrázok 4.4: Hustota rozdelenia  $y(t)$  pre  $t = 1$  (čierna),  $t = 2$  (modrá),  $t = 5$  (červená), ak  $y(0) = 0,05$  (vľavo) a  $y(0) = 0,20$  (vpravo)

Modifikovaná Besselova funkcia prvého druhu rádu  $q$  sa dá vyjadriť nekonečným radom (pozri [19])

$$I_q(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!\Gamma(k+1+q)},$$

z čoho vyplýva, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{I_q(x)}{x^q} = \frac{1}{2^q \Gamma(q+1)}.$$

To znamená, že pri označení (4.11) máme re každé  $y > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_q(2\sqrt{ab})}{(2\sqrt{ab})^q} = \frac{1}{2^q \Gamma(q+1)},$$

a teda

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} ce^{-a-b} \left(\frac{b}{a}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{ab}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} ce^{-a-b} b^q \frac{I_q(2\sqrt{ab})}{(2\sqrt{ab})^q} 2^q = \\ \frac{2\kappa}{v^2} e^{-\frac{2\kappa}{v^2}y} \left(\frac{2\kappa}{v^2}y\right)^q &\frac{1}{2^q \Gamma(q+1)} 2^q = \frac{1}{\Gamma(q+1)} \left(\frac{2\kappa}{v^2}\right)^{q+1} e^{-\frac{2\kappa}{v^2}y} y^q. \end{aligned}$$

Takže

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, y|y(t_0) = y_0) = \begin{cases} 0 & \text{ak } y \leq 0, \\ \frac{1}{\Gamma(q+1)} \left(\frac{2\kappa}{v^2}\right)^{q+1} e^{-\frac{2\kappa}{v^2}y} y^q & \text{ak } y > 0. \end{cases}$$

Táto limita závisí iba od parametrov procesu, nezávisí od začiatočnej hodnoty  $y_0$ .

Funkcia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \alpha^\lambda x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} & \text{ak } x > 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

je hustota náhodnej premennej s gama rozdelením s parametrami  $(\alpha, \lambda)$ , kde  $\alpha$  a  $\lambda$  sú kladné konštanty (pozri [18]). Hustoty  $f(t, y|y(t_0) = y_0)$  teda konvergujú

k hustote náhodnej premennej s rozdelením  $\Gamma(\frac{2\kappa}{v^2}, q + 1)$ , t.j.  $\Gamma(\frac{2\kappa}{v^2}, \frac{2\kappa}{v^2}\theta)$ .

Budeme sa teraz zaoberať problémom určenia takejto limitnej hustoty vo všeobecnom prípade procesu (4.10). Budeme hľadať priamo túto limitnú hustotu, bez toho, aby sme najskôr našli hustotu pri danej začiatočnej hodnote procesu.

Stochastické a parciálne diferenciálne rovnice dáva do súvislosti Feynmanov - Katzov vzorec, z ktorého vyplýva (pozri [8]), že ak proces  $X$  vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dw, \quad (4.13)$$

tak hustota  $f(s, y|X(t) = x)$  náhodnej premennej  $X(s)$  pri podmienke  $X(t) = x$  spĺňa Fokker - Planckovu parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial(af)}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{b^2 f}{2} \right) = 0, \quad s > t \quad (4.14)$$

$$f(t, y|y(t) = x) = \delta(x - y),$$

kde  $\delta$  je Diracova funkcia.

Tým, že nás zaujíma iba limitné rozdelenie procesu (4.10), sa problém zjednoduší. Ak existuje limitná hustota

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s, y) =: g(y),$$

tak z (4.14) dostaneme, že táto limitná hustota  $g$  spĺňa stacionárnu rovnicu

$$-\frac{\partial(ag)}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{b^2 g}{2} \right) = 0, \quad y > 0 \quad (4.15)$$

a normováciu podmienku

$$\int_0^\infty g(y)dy = 1. \quad (4.16)$$

Táto podmienka je nutná k tomu, aby riešenie rovnice (4.15) bolo funkciou hustoty.

Integrovaním rovnice (4.15) od 0 do  $y$  dostaneme

$$-ag + \frac{d}{dy} \left( \frac{b^2 g}{2} \right) - \left[ \lim_{y \rightarrow 0} (-ag) + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{d}{dy} \left( \frac{b^2 g}{2} \right) \right] = 0. \quad (4.17)$$

Ak o hustote  $g$  budeme predpokladať, že  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  a derivácia  $g'(y)$  je ohraničená v okolí bodu  $y = 0$ , tak pre  $y \rightarrow 0$  máme

$$-a(y)g(y) = \kappa(\theta - y)g(y) \rightarrow 0$$

a tiež

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{b^2(y)g(y)}{2} \right) = b(y) \frac{db(y)}{dy} g(y) + \frac{b^2(y)}{2} \frac{dg(y)}{dy} =$$

$$= (vy^\delta)(\delta vy^{\delta-1})g(y) + \frac{v^2 y^{2\delta}}{2} g'(y) \rightarrow 0.$$

Rovnica (4.17) preto je

$$-ag + \frac{d}{dy} \left( \frac{b^2 g}{2} \right) = 0.$$

Ak v nej spravíme substitúciu

$$h(y) = \frac{b^2(y)g(y)}{2}, \quad (4.18)$$

pre funkciu  $h(y)$  definovanú na intervale  $(0, \infty)$  dostaneme rovnicu

$$\frac{dh}{dy} = \frac{2a}{b^2} h. \quad (4.19)$$

To je lineárna rovnica, ktorej všeobecným riešením je

$$h(y) = c_1 \exp \left( \int_{y_0}^y \frac{2a(s)}{b^2(s)} ds \right), \quad y > 0, \quad (4.20)$$

kde  $y_0$  je ľubovoľné číslo z intervalu  $(0, \infty)$  a  $c_1$  je konštanta. Hodnotu  $y_0$  nebudeme presne určovať, výrazy, ktoré ju obsahujú, sa budú dať zahrnúť do konštanty, ktorá sa nakoniec určí tak, aby bola splnená podmienka (4.16).

Z výpočtu integrálu vystupujúceho vo všeobecnom riešení

$$\int \frac{2a(s)}{b^2(s)} ds = \int \frac{2\kappa(\theta - s)}{v^2 s^{2\delta}} ds = \frac{2\kappa}{v^2} \int \theta s^{-2\delta} - s^{1-2\delta} ds \quad (4.21)$$

vidieť, že musíme rozlíšiť prípady  $\delta = \frac{1}{2}$ ,  $\delta = 1$  a ostatné hodnoty  $\delta$ . Pre  $\delta = \frac{1}{2}$  už vieme, že výsledkom je gama rozdelenie. Budeme sa však zaoberať aj týmto prípadom a ukážeme, ako sa dá tento výsledok odvodiť priamo, bez znalosti rozdelenia  $y(T)$  pri známej hodnote v nejakom čase  $t < T$ .

PRÍPAD 1:  $\delta = \frac{1}{2}$

V tomto prípade sa integrál (4.21) rovná

$$\frac{2\kappa}{v^2} \int \left( \frac{\theta}{s} - 1 \right) ds,$$

a teda

$$\int_{y_0}^y \frac{2a(s)}{b^2(s)} ds = \frac{2\kappa}{v^2} \int_{y_0}^y \left( \frac{\theta}{s} - 1 \right) ds = \frac{2\kappa}{v^2} (\theta \ln y - y - \theta \ln y_0 + y_0),$$

z čoho dosadením do (4.20) dostaneme

$$h(y) = c_1 e^{\frac{2\kappa}{v^2}(-\theta \ln y_0 + y_0)} e^{\frac{2\kappa}{v^2}(\theta \ln y - y)} = c_2 y^{\frac{2\kappa\theta}{v^2}} e^{-\frac{2\kappa}{v^2}y},$$

kde  $c_2$  je nová konštanta. Spätnou transformáciou z (4.18) získame hľadanú funkciu  $g$ :

$$g(y) = \frac{2}{v^2 y} c_2 y^{\frac{2\kappa\theta}{v^2}} e^{-\frac{2\kappa}{v^2}y} = c y^{\frac{2\kappa\theta}{v^2}-1} e^{-\frac{2\kappa}{v^2}y} \quad (4.22)$$

pre vhodnú konštantu  $c$ . Porovnaním tejto funkcie s hustotou gama rozdelenia (4.12) dostaneme, že pre konštantu  $c$  musí platiť

$$c = \left(\frac{2\kappa}{v^2}\right)^{\frac{2\kappa\theta}{v^2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)}$$

a výsledné rozdelenie je potom gama rozdelenie  $\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2}, \frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)$ .

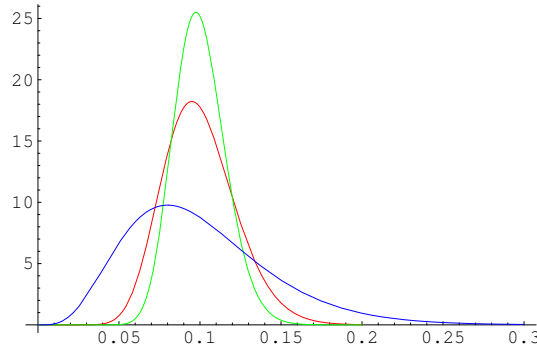
Stredná hodnota a variancia náhodnej premennej  $X$  s gama rozdelením  $\Gamma(\alpha, \lambda)$  je daná vzťahmi [18]

$$E(X) = \frac{\lambda}{\alpha}, \quad Var(X) = \frac{\lambda}{\alpha^2},$$

čiže naše limitné rozdelenie má strednú hodnotu  $\theta$  a varianciu  $\frac{v^2}{2\kappa}\theta$ .

To znamená, že stredná hodnota je práve parameter  $\theta$ , predstavujúci rovnovážnu hodnotu procesu  $y$ . Variancia je rastúcou funkciou volatility procesu  $v$  a klesajúcou funkciou parametra  $\kappa$ , ktorý predstavuje silu, ktorou je proces k hodnote  $\theta$  priťahovaný. Ďalej je rastúcou funkciou parametra  $\theta$ , čo sa dalo čakať kvôli tomu, že volatilita  $y$  je väčšia pri väčších hodnotách  $y$  a  $\theta$  je limitnou strednou hodnotou.

Na obrázku 4.5 môžeme vidieť, ako táto hustota môže vyzeráť pre niektoré hodnoty parametrov.



Obrázok 4.5: Limitná hustota rozdelenia procesu  $y$  pre rôzne voľby parametrov v prípade  $\delta = \frac{1}{2}$  (gama rozdelenie)

PRÍPAD 2:  $\delta = 1$

Integrál (4.21) rovná

$$\frac{2\kappa}{v^2} \int \left(\frac{\theta}{s^2} - \frac{1}{s}\right) ds,$$

z čoho postupne vypočítame

$$\int_{y_0}^y \frac{2a(s)}{b^2(s)} ds = \frac{2\kappa}{v^2} \int_{y_0}^y \left(\frac{\theta}{s^2} - \frac{1}{s}\right) ds = \frac{2\kappa}{v^2} \left[-\frac{\theta}{s} - \ln s\right]_{y_0}^y$$

$$h(y) = c_2 e^{\frac{2\kappa}{v^2}(-\frac{\theta}{y} - \ln y)} = c_2 e^{-\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}}$$

$$g(y) = \frac{1}{y^2} c e^{-\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}}. \quad (4.23)$$

Potrebujeeme ešte určiť konštantu  $c$  tak, aby sme dostali funkciu hustoty. Odvodíme, ako vyzerá hustota náhodnej premennej  $Y = \frac{1}{X}$ , kde  $X$  má rozdelenie  $\Gamma(\alpha, \lambda)$ . Uvidíme, že má tvar ako funkcia  $h$  vo vzťahu (4.23), čo nám umožní určiť konštantu  $c$  a pomôže aj pri výpočte strednej hodnoty a variancie tohto limitného rozdelenia.

Označme  $f_1$  hustotu a  $F_1$  distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ ,  $f_2$  hustotu a  $F_2$  distribučnú funkciu náhodnej premennej  $Y = \frac{1}{X}$ .

Pre  $x \leq 0$  je  $f_2(x) = 0$ , pre  $x > 0$  platí

$$F_2(x) = P(Y < x) = P\left(\frac{1}{X} < x\right) = P\left(X > \frac{1}{x}\right) = 1 - F_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$f_2(x) = \frac{dF_2}{dx}(x) = -\frac{dF_1}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} f_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Hustota  $f_1$  je daná vzorcom (4.12), takže pre kladné hodnoty  $x$  je

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda-1} e^{-\alpha \frac{1}{x}}. \quad (4.24)$$

Ak teraz v (4.24) zoberieme

$$\alpha = \frac{2\kappa\theta}{v^2}, \quad \lambda = \frac{2\kappa}{v^2} + 1$$

a porovnáme s (4.23), vidíme, že  $h$  bude hustotou pre

$$c = \left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}+1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} + 1\right)}$$

a bude to hustota prevrátenej hodnoty náhodnej premennej s gama rozdelením  $\Gamma\left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}, \frac{2\kappa}{v^2} + 1\right)$ .

Ukážeme, že táto náhodná premenná má opäť strednú hodnotu  $\theta$ . Potrebujeme vypočítať integrál

$$\int_0^\infty y \frac{1}{y^2} \left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}+1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} + 1\right)} e^{-\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}} dy.$$

Ten sa dá upraviť na tvar

$$\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} + 1\right)} \int_0^\infty \frac{1}{y^2} \left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}} e^{-\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}-1} dy =$$



$$= \frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} + 1\right)} \int_0^\infty \frac{1}{y^2} \left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2}\right)} e^{-\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}-1} dy.$$

Z (4.24) vidíme, že posledný integrál je integrálom z hustoty náhodnej premennej  $\frac{1}{X}$ , kde  $X \sim \Gamma\left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}, \frac{2\kappa}{v^2}\right)$ , takže sa rovná 1. Stredná hodnota teda je

$$\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} + 1\right)} = \frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2}\right)}{\frac{2\kappa}{v^2} \Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2}\right)} = \theta.$$

Nech  $\frac{2\kappa}{v^2} > 1$ . To znamená, že pri veľkej volatilitate procesu (veľká hodnota  $v^2$ ) nemôže byť sila, ktorou je proces priťahovaný k rovnovážnej hodnote  $\theta$ , príliš malá (malá hodnota  $\kappa$ ). Ukážeme, že za tohto predpokladu existuje variancia limitného rozdelenia a rovná sa

$$\theta^2 \frac{1}{\frac{2\kappa}{v^2} - 1}.$$

Aj v tomto prípade, podobne ako pre  $\delta = \frac{1}{2}$ , závislosť variancie od parametrov zodpovedá našim očakávaniam - je rastúcou funkciou  $\theta$  a  $v^2$ , a klesajúcou funkciou  $\kappa$ .

Aby sme dokázali toto tvrdenie o variancii, najskôr vypočítame

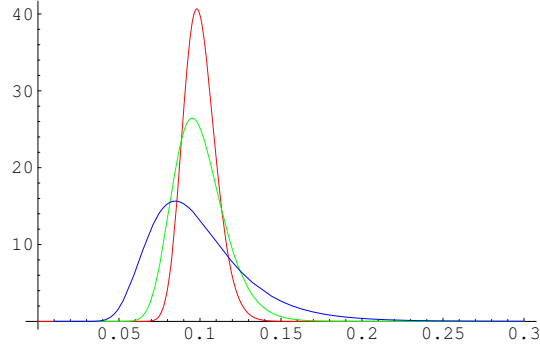
$$\begin{aligned} & \int_0^\infty y^2 \frac{1}{y^2} \left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}+1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} + 1\right)} e^{-\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}} dy = \\ & = \left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} + 1\right)} \int_0^\infty \frac{1}{y^2} \left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}-1} e^{-\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}-2} dy = \\ & = \left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} + 1\right)} \int_0^\infty \frac{1}{y^2} \left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} - 1\right)} e^{-\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{2\kappa}{v^2}-2} dy. \end{aligned}$$

Znovu z (4.24) vidieť, že tento integrál je integrálom z hustoty náhodnej premennej  $\frac{1}{X}$ , kde  $X \sim \Gamma\left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}, \frac{2\kappa}{v^2} - 1\right)$  (tu využívame predpoklad  $\frac{2\kappa}{v^2} > 1$ , lebo parametre gama rozdelenia musia byť kladné), a preto sa rovná 1. To znamená, že máme

$$\left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} + 1\right)} = \left(\frac{2\kappa\theta}{v^2}\right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} - 1\right)}{\left(\frac{2\kappa}{v^2}\right) \left(\frac{2\kappa}{v^2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{2\kappa}{v^2} - 1\right)} = \frac{2\kappa\theta^2}{2\kappa - v^2}$$

Keďže už vieme, že stredná hodnota je  $\theta$ , variancia sa rovná

$$\frac{2\kappa\theta^2}{2\kappa - v^2} - \theta^2 = \theta^2 \frac{v^2}{2\kappa - v^2} = \theta^2 \frac{1}{\frac{2\kappa}{v^2} - 1}.$$



Obrázok 4.6: Limitná hustota rozdelenia procesu  $y$  pre rôzne voľby parametrov v prípade  $\delta = 1$  (prevrátená hodnota gama rozdelenia)

Na obrázku 4.6 vidíme, aký tvar môže mať limitná hustota procesu pre  $\delta = 1$ .

PRÍPAD 3:  $\delta \neq \frac{1}{2}$ ,  $\delta \neq 1$

Integrál (4.21) sa v tomto prípade rovná

$$\frac{2\kappa}{v^2} \int (\theta s^{-2\delta} - s^{1-2\delta}) ds,$$

z čoho dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y \frac{2a(s)}{b^2(s)} ds &= \frac{2\kappa}{v^2} \int_{y_0}^y (\theta s^{-2\delta} - s^{1-2\delta}) ds = \frac{2\kappa}{v^2} \left[ \frac{\theta}{1-2\delta} s^{1-2\delta} - \frac{1}{2-2\delta} s^{2-2\delta} \right]_{y_0}^y \\ h(y) &= c_2 e^{\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{1-2\delta} y^{1-2\delta}} e^{-\frac{2\kappa}{v^2} \frac{1}{2-2\delta} y^{2-2\delta}} \\ g(y) &= c \frac{1}{y^{2\delta}} e^{\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{1-2\delta} y^{1-2\delta}} e^{-\frac{2\kappa}{v^2} \frac{1}{2-2\delta} y^{2-2\delta}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

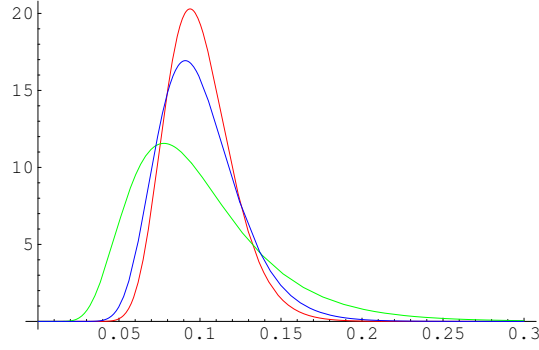
Konštanta  $c$  musí byť určená tak, aby bola splnená podmienka (4.16).

Tu sa nám  $c$  nepodarilo explicitne vyjadriť. Pre konkrétne hodnoty parametrov ju však môžeme nájsť numericky výpočtom integrálu

$$\int_0^\infty \frac{1}{s^{2\delta}} e^{\frac{2\kappa\theta}{v^2} \frac{1}{1-2\delta} s^{1-2\delta}} e^{-\frac{2\kappa}{v^2} \frac{1}{2-2\delta} s^{2-2\delta}} ds,$$

ktorý sa rovná jej prevrátenej hodnote.

Pre  $\delta = 0,75$  sú príklady hustôt na obrázku 4.7.



Obrázok 4.7: Limitná hustota rozdelenia procesu  $y$  pre rôzne voľby parametrov v prípade  $\delta = 0,75$

#### 4.4.2 Spriemernenie cien dlhopisov a výnosových kriviek

Uvažujme model so stochastickou volatilitou

$$dr = \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sqrt{y}r^\gamma dw_1$$

$$dy = \kappa_2(\theta_2 - y)dt + vy^\delta dw_2,$$

kde  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$ , pričom korelácia medzi Wienerovými procesmi  $w_1$  a  $w_2$  je  $\rho$ . Po zadaní trhových cien rizika úrokovej miery a volatility vieme numericky riešiť parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorej riešením sú ceny dlhopisov s danými dobami splatnosti pri daných hodnotách úrokovej miery a premennej  $y$ .

Na začiatku tejto podkapitoly sme uviedli cieľ spriemerniť takto vypočítané ceny dlhopisov  $P(t, T, r, y)$  vzhľadom na premennú  $y$ , t.j. vypočítať

$$\langle P(t, T, r, y) \rangle = \int_0^\infty f(t, y)P(t, T, r, y)dy,$$

kde  $f$  je hustota  $y(t)$ . Ako sme uviedli pri motivácii výpočtov v prechádzajúcej časti, rozdelenie premennej  $y(t)$  budeme aproximovať limitným rozdelením. To znamená, že budeme počítat

$$\langle P(t, T, r, y) \rangle = \int_0^\infty g(y)P(t, T, r, y)dy,$$

kde  $g$  je limitná hustota.

Výsledkom numerického riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice pre ceny dlhopisov sú ceny pre konečný počet hodnôt  $y$ , preto potrebujeme týmto hodnotám priradiť pravdepodobnosti na základe hustoty  $g$  spojitého limitného rozdelenia. Cenu dlhopisu potom aproximujeme diskretnou náhodnou premennou, ktorá nadobúda hodnoty  $P(t, T, r, y_i)$  s pravdepodobnosťami  $p_i$ . Hľadané spriemernenie potom vypočítame ako strednú hodnotu tejto diskretnej náhodnej premennej. Výpočet môžeme spraviť pre tie hodnoty  $r$  a  $T$ , ktoré patria medzi uzly siete, v ktorých sme numericky počítali ceny dlhopisov.

Pri označení z kapitoly 4.3 máme body  $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ , ktoré sú volené tak, že

$$y_1 = 0, \quad y_{j+1} = y_j + h_2 \quad (j = 1, 2, \dots, n_2 - 1),$$

kde  $h_2$  je zvolený krok v premennej  $y$ . Tento krok a počet bodov zvolíme tak, aby sme pravdepodobnosť, že  $y$  nadobudne hodnotu väčšiu alebo rovnú  $n_2$  mohli zanedbať. Potom pre  $j = 1, \dots, n_2 - 1$  priradíme hodnotám  $y_j$  pravdepodobnosti  $p_j$  takto:

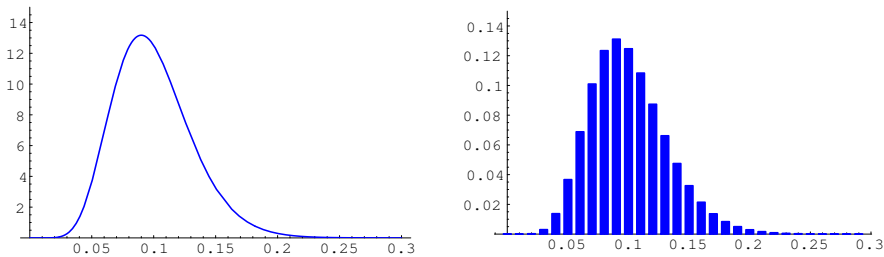
$$p_1 = \int_0^{\frac{h_2}{2}} g(x) dx$$

$$p_j = \int_{y_j - \frac{h_2}{2}}^{y_j + \frac{h_2}{2}} g(x) dx \quad (i = 2, 3, \dots, n_2 - 1), \quad (4.26)$$

kde  $g$  je limitná hustota rozdelenia procesu  $y$ .

Ako príklad uvedieme model, pre ktorý sme numericky počítali ceny dlhopisov a výnosové krivky v kapitole 4.3.

Z predchádzajúcej kapitoly vieme, že v tomto prípade ( $\delta = \frac{1}{2}$ ) je limitné rozdelenie procesu  $y$  gama rozdelenie  $\Gamma(\frac{2\kappa_2}{\sigma^2}, \frac{2\kappa_2\theta_2}{\sigma^2})$ , z čoho po dosadení našich hodnôt parametrov (4.9) dostaneme  $\Gamma(100, 10)$ . Pri numerickom riešení parciálnej diferenciálnej rovnice sme pre premennú  $y$  použili krok  $h_2 = 0,01$ . Podľa (4.26) priradíme hodnotám  $y_j$  pravdepodobnosti. Na obrázku 4.8 je znázornený graf hustoty  $y$  a pravdepodobnosti hodnôt  $y_j$ .



Obrázok 4.8: Hustota rozdelenia  $y$  a pravdepodobnosti hodnôt  $y_j$

Každý z hodnôt  $y_j$  zodpovedá pri danej úrokovej miere  $r$  a dobe splatnosti dlhopisu jeho cena  $P_j$ . Cenu dlhopisu aproximujeme náhodnou premennou, ktorej možné hodnoty  $P_j$  nastávajú s pravdepodobnosťami  $p_j$ . Na obrázku 4.9 sú znázornené ceny dlhopisov s rôznymi dobami splatnosti a ich pravdepodobnosti, ak úroková miera je 0,04. Interval na  $x$ -ovej osi má vždy rovnakú dĺžku, aby sa dal pozorovať rôzny rozsah cien.

To isté môžeme spraviť s úrokovými mierami, ktoré vyplývajú z cien dlhopisov. Zvolíme hodnotu okamžitej úrokovej miery a čas splatnosti. Pre jednotlivé hodnoty  $y_j$  máme úrokové miery  $R_j$ , ktoré majú pravdepodobnosti  $p_j$ . Pre okamžitú úrokovú mieru  $r = 0,04$  a pre niekoľko časov splatnosti sú hodnoty

úrokových mier a pravdepodobnosti, s ktorými sa nadobúdajú, na obrázku 4.10.

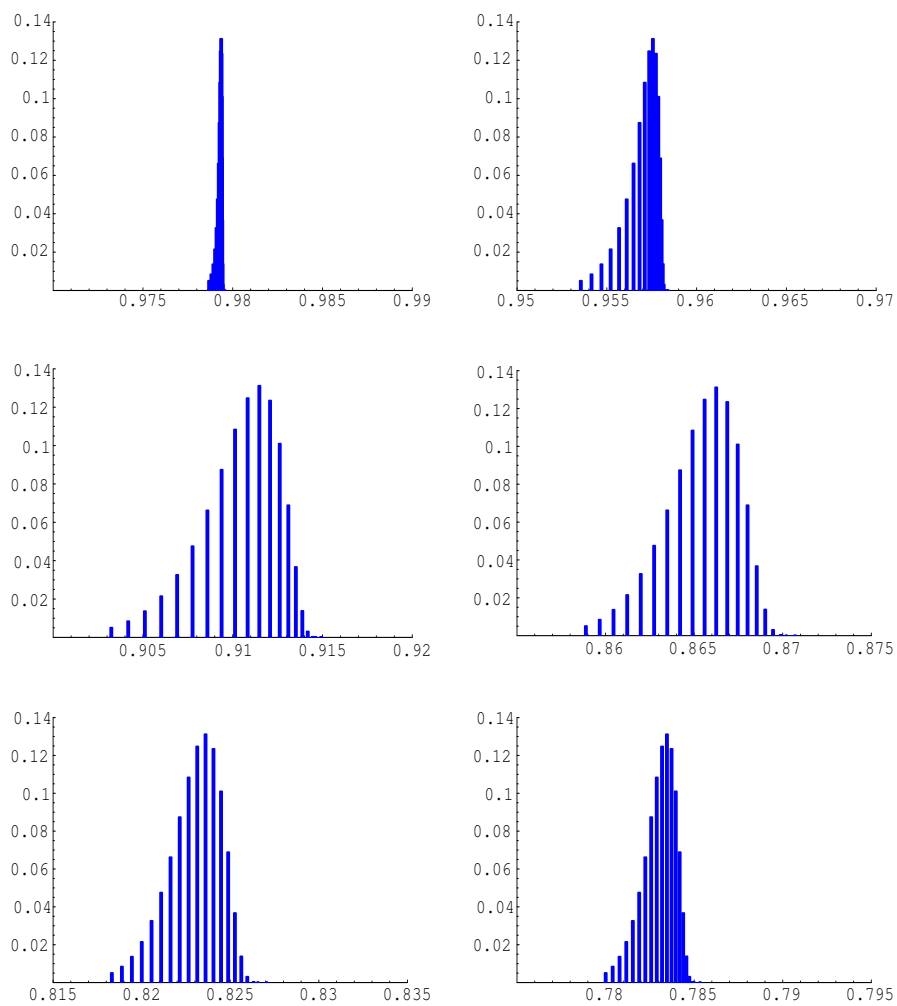
Ceny dlhopisov aj úrokové miery sme teda aproximovali diskretnými náhodnými premennými. Ich stredné hodnoty pre danú hodnotu okamžitej úrokovej miery a dobu splatnosti sú

$$\langle P \rangle = \sum_{i=1}^{n_2-1} p_i P_i, \quad \langle R \rangle = \sum_{i=1}^{n_2-1} p_i R_i.$$

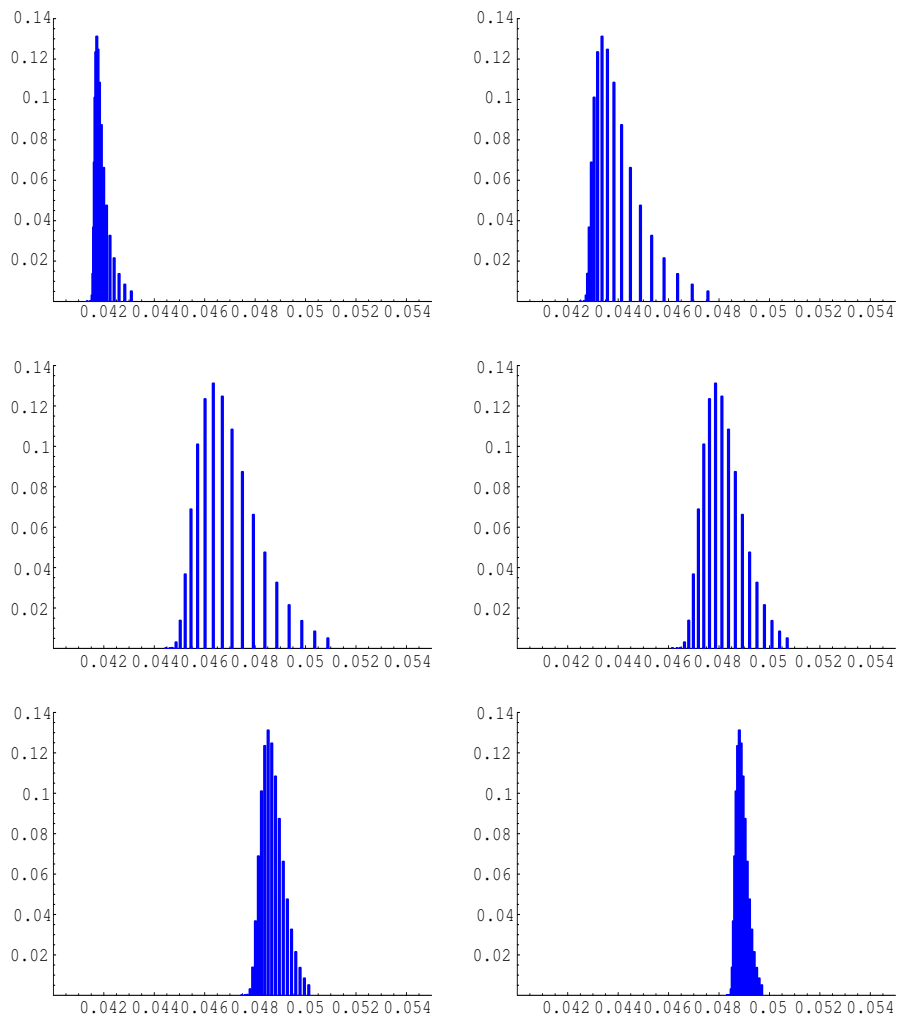
Výpočtom týchto stredných hodnôt pre rôzne doby splatnosti dostaneme priemerné ceny dlhopisov a priemernú výnosovú krivku, ktoré zodpovedajú zadanej okamžitej úrokovej miere.

Okrem týchto priemerní nás môže zaujímať pásmo, v ktorom sa s určitou dostatočne veľkou pravdepodobnosťou budú ceny dlhopisov, resp. výnosová krivka nachádzať. Pre parametre, s ktorými tu počítame, platí, že s pravdepodobnosťou 96,29% nastane pre  $y$  niektorá z možností  $y_5, y_6, \dots, y_{17}$ . Prítom grafy cien dlhopisov a výnosových kriviek pre  $y_6, \dots, y_{16}$  ležia medzi zodpovedajúcimi grafmi pre  $y_5$  a  $y_{17}$ . Preto ceny a výnosy pre  $y_5$  a  $y_{17}$  môžeme považovať za určité hranice vymedzujúce ich pravdepodobný tvar (obrázky 4.11 a 4.12).

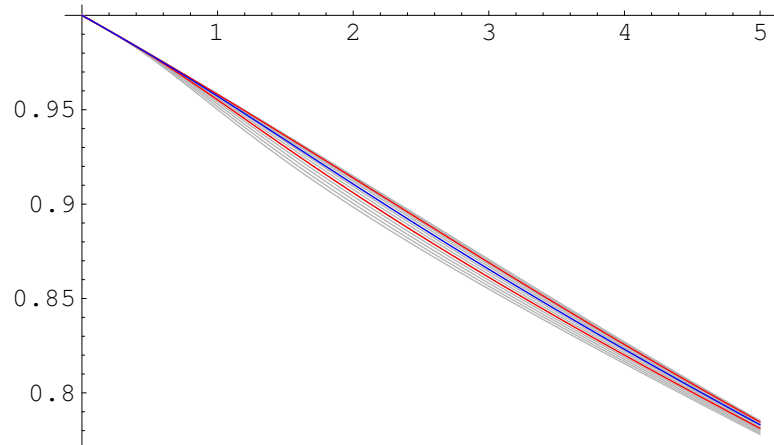
Z týchto obrázkov sa zdá, že variancia cien dlhopisov a výnosových kriviek, ktoré zodpovedajú rovnakej okamžitej úrokovej miere pri rôznych hodnotách  $y$ , sa zväčšuje len po určitú dobu splatnosti a potom klesá. Toto je hypotéza, ktorú by bolo zaujímavé skúmať analyticky.



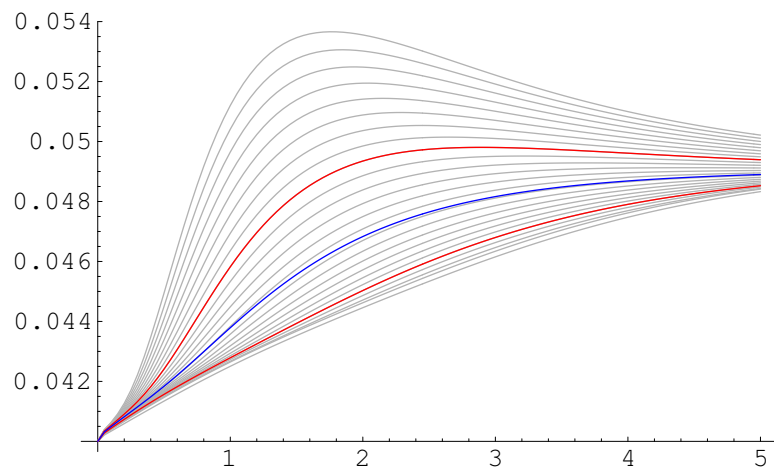
Obrázok 4.9: Histogramy cien dlhopisov so splatnosťami 0,5 roka, 1 rok, 2 roky, 3 roky, 4 roky, 5 rokov (po riadkoch)



Obrázok 4.10: Histogramy úrokových mier so splatnosťami 0,5 roka, 1 rok, 2 roky, 3 roky, 4 roky, 5 rokov (po riadkoch)



Obrázok 4.11: Ceny dlhopisov pri rôznych hodnotách  $y$  (sivé), priemerná cena dlhopisu (modrá), hranice 96% pásma pre ceny dlhopisov (červené)



Obrázok 4.12: Výnosové krivky pri rôznych hodnotách  $y$  (sivé), priemerná výnosová krivka (modrá), hranice 96% pásma pre výnosovú krivku (červené)



# Záver

V práci sme sa zaoberali modelovaním okamžitej úrokovej miery, výpočtom cien dlhopisov implikovaných týmito modelmi a v prípade modelu so skrytým druhým faktorom aj spriemerneniu cien vzhľadom na tento faktor.

Výpočítali sme limitné pravdepodobnostné rozdelenie skrytého parametra. Toto rozdelenie sme aproximovali diskretným rozdelením nadobúdajúcim hodnoty, v ktorých máme numericky vypočítanú cenu dlhopisu. Použili sme ho na výpočet spriemernených cien a výnosových kriviek. Tieto predstavujú stredné hodnoty, okolo ktorých budú skutočné hodnoty viac alebo menej kolísať. Mieru tohto kolísania môžeme vidieť z hraníc, ktoré vymedzujú stanovený podiel možných výsledkov.

Ďalšie otázky súvisiace s touto prácou, ktoré môže byť v budúcnosti zaujímavé riešiť, sa týkajú analytického skúmania vlastností spriemernenia cien dlhopisov vzhľadom na limitné rozdelenie skrytého procesu. V predchádzajúcej kapitole sme napríklad vyslovili hypotézu o vývoji variancie spriemernených cien dlhopisov a výnosových kriviek. Založená bola na grafickom znázornení numerických výsledkov, preto by bolo užitočné zaoberať sa ňou aj analyticky.

# Literatúra

- [1] Alexová, L.: Dvojfaktorové modely derivátov úrokových mier so stochastickou volatilitou. Diplomová práca. FMFI UK Bratislava, 2002.
- [2] Anderson, T. G., Lund, J.: The Short Rate Diffusion Revisited: A Tour Guided by the Efficient Method of Moments. Working paper, J. L. Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, 1996.
- [3] Ball, C. A., Torous, W. N.: The Stochastic Volatility of Short-Term Interest Rates: Some International Evidence. *The Journal of Finance*, Volume 54, 1999, 2339-2359.
- [4] Brennan, M.J., Schwartz, E. S.: An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Volume 17, 1982, 301-329.
- [5] Cotton, P., Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., Sircar, R.: Stochastic Volatility Corrections for Interest Rate Derivatives. Preprint, 2001.
- [6] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. A.: A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, Volume 53, 1985, 385-408.
- [7] Fong, H. G., Vasicek, O. A.: Fixed-Income Volatility Management. *Journal of Portfolio Management*, Summer 1991, 41-42.
- [8] Goodman, J., Moon, K. - S., Szepessy, A., Tempone, R., Zouraris, Z.: Stochastic and Partial Differential Equations with Adapted Numerics. <http://www.math.kth.se/szepessy/sdepde.pdf>
- [9] Ho, T. S. Y., Lee, S. B.: Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. *The Journal of Finance*, Volume 41, 1986, 1011-1026.
- [10] Hul, J., White, A.: Pricing Interest Rate Derivative Securities. *Review of Financial Studies*, Volume 3, 1990, 573-592.
- [11] Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A., Sanders, A. B.: An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate. *The Journal of Finance*, Volume 47, 1992, 1209-1227.
- [12] Chapman, D. A., Long, J. B. Jr., Pearson, N. D.: Using Proxies for the Short Rate: When Are Three Months Like an Instant? *The Review of Financial Studies*, Volume 12, 1999, 763-806.

- [13] Kwok, Y.K.: Mathematical Models of Financial Derivatives. Springer - Verlag, 1998.
- [14] Lucová, M.: Numerické oceňovanie derivátov úrokovej miery. Diplomová práca. FMFI UK Bratislava, 2002.
- [15] Národná banka Slovenska. <http://www.nbs.sk>
- [16] Oksendal, B.: Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Springer - Verlag, 1998.
- [17] Vasicek, O. A.: An Equilibrium Characterization of the Term Structure. Journal of Financial Economics, Volume 5, 1977, 177-188.
- [18] Weisstein, E. W.: Gamma Distribution. MathWorld - A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/GammaDistribution.html>
- [19] Weisstein, E. W.: Modified Bessel Function of the First Kind. MathWorld - A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselFunctionoftheFirstKind.html>

# Príloha

Program na výpočet ceny dlhopisu v dvojfaktorovom modeli so stochastickou volatilitou podľa numerickej schémy z kapitoly 4.3.

```
kapa1=0.5; theta1=0.05; gama=0.5;
kapa2=0.5; theta2=0.1; v=0.1; delta=0.5;
ro=0.5;
sigma[r_,y_]:=Sqrt[y]*(r^gama);
l1=-0.2; l2=-0.2;
lambda1[r_,y_]:=l1*(r^gama);
lambda2[r_,y_]:=l2*(y^delta);

m=101; n1=51; n2=51;
T=5; rMax=0.5; yMax=0.5;
k=T/(m-1);
h1=rMax/(n1-1);
h2=yMax/(n2-1);

r[i_]:= (i-1)*h1;
y[j_]:= (j-1)*h2;

a1[i_,j_]:= -(k/(4*h1*h2))*sigma[r[i],y[j]]*v*(y[j]^delta)*ro;
a2[i_,j_]:= (k/(2*h1))*(kapa1*theta1-kapa1*r[i]-lambda1[r[i],y[j]])*
sigma[r[i],y[j]])-(k/(2*h1^2))*sigma[r[i],y[j]]^2;
a3[i_,j_]:= (k/(4*h1*h2))*sigma[r[i],y[j]]*v*(y[j]^delta)*ro;
a4[i_,j_]:= (k/(2*h2))*(kapa2*theta2-kapa2*y[j]-lambda2[r[i],y[j]])*
v*(y[j]^delta)-(k/(2*h2^2))*(v^2)*(y[j]^(2*delta));
a5[i_,j_]:= 1+(k/(h1^2))*sigma[r[i],y[j]]^2+(k/(h2^2))*(v^2)*
(y[j]^(2*delta))+k*r[i];
a6[i_,j_]:= -(k/(2*h2))*(kapa2*theta2-kapa2*y[j]-lambda2[r[i],y[j]])*
v*(y[j]^delta)-(k/(2*h2^2))*(v^2)*(y[j]^(2*delta));
a7[i_,j_]:= (k/(4*h1*h2))*sigma[r[i],y[j]]*v*(y[j]^delta)*ro;
a8[i_,j_]:= -(k/(2*h1))*(kapa1*theta1-kapa1*r[i]-lambda1[r[i],y[j]])*
sigma[r[i],y[j]])-(k/(2*h1^2))*sigma[r[i],y[j]]^2;
a9[i_,j_]:= -(k/(4*h1*h2))*sigma[r[i],y[j]]*v*(y[j]^delta)*ro;

b1[j_]:= 1+(k/h1)*kapa1*theta1+(k/h2^2)*(v*(y[j]^delta))^2;
b2[j_]:= -(k/h1)*kapa1*theta1;
b3[j_]:= -(k/(2*h2))*(kapa2*theta2-kapa2*y[j]-lambda2[r[1],y[j]])*
v*(y[j]^delta)-(k/(2*h2^2))*(v*(y[j]^delta))^2;
```

```

b4[j_] := (k/(2*h2))*(kapa2*theta2-kapa2*y[j]-lambda2[r[1],y[j]]*
          v*(y[j]^delta))-(k/(2*h2^2))*(v*(y[j]^delta))^2;

c1=1+(k/h1)*kapa1*theta1+(k/h2)*kapa2*theta2;
c2=- (k/h2)*kapa2*theta2;
c3=- (k/h1)*kapa1*theta1;

d1[i_] := 1+(k/h2)*kapa2*theta2+ k*r[i];
d2[i_] := -(k/h2)*kapa2*theta2;
d3[i_] := -(k/(2*h1))*(kapa1*theta1-kapa1*r[i]);
d4[i_] := (k/(2*h1))*(kapa1*theta1-kapa1*r[i]);

M=Table[0,{i,1,(n1-1)*(n2-1)},{j,1,(n1-1)*(n2-1)}];

For[i=1,i<=n1-1,i++,
  For[j=1,j<=n2-1,j++,

    If[(i!=1)&&(i!=n1-1)&&(j!=1)&&(j!=n2-1),
      M[[{(n2-1)*(i-1)+j,(n2-1)*(i-2)+j-1}]] = a1[i,j];
      M[[{(n2-1)*(i-1)+j,(n2-1)*(i-2)+j}]] = a2[i,j];
      M[[{(n2-1)*(i-1)+j,(n2-1)*(i-2)+j+1}]] = a3[i,j];
      M[[{(n2-1)*(i-1)+j,(n2-1)*(i-1)+j-1}]] = a4[i,j];
      M[[{(n2-1)*(i-1)+j,(n2-1)*(i-1)+j}]] = a5[i,j];
      M[[{(n2-1)*(i-1)+j,(n2-1)*(i-1)+j+1}]] = a6[i,j];
      M[[{(n2-1)*(i-1)+j,(n2-1)*(i)+j-1}]] = a7[i,j];
      M[[{(n2-1)*(i-1)+j,(n2-1)*(i)+j}]] = a8[i,j];
      M[[{(n2-1)*(i-1)+j,(n2-1)*(i)+j+1}]] = a9[i,j];
    ];

    If[(i==n1-1)&&(j!=1)&&(j!=n2-1),
      M[[{(n2-1)*(n1-2)+j,(n2-1)*(n1-3)+j-1}]] = a1[i,j];
      M[[{(n2-1)*(n1-2)+j,(n2-1)*(n1-3)+j}]] = a2[i,j];
      M[[{(n2-1)*(n1-2)+j,(n2-1)*(n1-3)+j+1}]] = a3[i,j];
      M[[{(n2-1)*(n1-2)+j,(n2-1)*(n1-2)+j-1}]] = a4[i,j];
      M[[{(n2-1)*(n1-2)+j,(n2-1)*(n1-2)+j}]] = a5[i,j];
      M[[{(n2-1)*(n1-2)+j,(n2-1)*(n1-2)+j+1}]] = a6[i,j];
    ];

    If[(i==n1-1)&&(j==n2-1),
      M[[{(n2-1)*(n1-1),(n2-1)*(n1-2)-1}]] = a1[i,j];
      M[[{(n2-1)*(n1-1),(n2-1)*(n1-2)}]] = a2[i,j];
      M[[{(n2-1)*(n1-1),(n2-1)*(n1-1)-1}]] = a4[i,j];
      M[[{(n2-1)*(n1-1),(n2-1)*(n1-1)}]] = a5[i,j];
    ];

    If[(i!=1)&&(i!=n1-1)&&(j==n2-1),
      M[[{(n2-1)*i,(n2-1)*(i-1)-1}]] = a1[i,j];
      M[[{(n2-1)*i,(n2-1)*(i-1)}]] = a2[i,j];
      M[[{(n2-1)*i,(n2-1)*(i)-1}]] = a4[i,j];
      M[[{(n2-1)*i,(n2-1)*(i)}]] = a5[i,j];
    ];
  ];

```

```

M[[ (n2-1)*i, (n2-1)*(i+1)-1]] = a7[i, j];
M[[ (n2-1)*i, (n2-1)*(i+1)]] = a8[i, j];
];

If[(i==1)&&(j!=1)&&(j!=n2-1),
M[[j, j-1]] = b4[j];
M[[j, j]] = b1[j];
M[[j, j+1]] = b3[j];
M[[j, (n2-1)+j]] = b2[j];
];

If[(i==1)&&(j==n2-1),
M[[n2-1, n2-2]] = b4[j];
M[[n2-1, n2-1]] = b1[j];
M[[n2-1, 2*(n2-1)]] = b2[j];
];

If[(i==1)&&(j==1),
M[[1, 1]] = c1;
M[[1, 2]] = c2;
M[[1, n2]] = c3;
];

If[(i!=1)&&(i!=n1-1)&&(j==1),
M[[ (n2-1)*(i-1)+1, (n2-1)*(i-2)+1]] = d4[i];
M[[ (n2-1)*(i-1)+1, (n2-1)*(i-1)+1]] = d1[i];
M[[ (n2-1)*(i-1)+1, (n2-1)*(i-1)+2]] = d2[i];
M[[ (n2-1)*(i-1)+1, (n2-1)*(i)+1]] = d3[i];
];

If[(i==n1-1)&&(j==1),
M[[ (n2-1)*(n1-2)+1, (n2-1)*(n1-3)+1]] = d4[i];
M[[ (n2-1)*(n1-2)+1, (n2-1)*(n1-2)+1]] = d1[i];
M[[ (n2-1)*(n1-2)+1, (n2-1)*(n1-2)+2]] = d2[i];
];
]];

ries=Table[1, {tau, 1, m}, {x, 1, (n1-1)*(n2-1)}];
For[tau=2, tau<=m, tau++,
ps=Table[ries[[tau-1, x]], {x, 1, (n1-1)*(n2-1)}];
rs=LinearSolve[M, ps];
For[x=1, x<=(n1-1)*(n2-1), x++, ries[[tau, x]] = rs[[x]]];
];

```