FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2005 LADISLAV ÁCS

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika

Vyhodnocovanie efektívnosti pedagogickej práce na FMFI UK

Diplomant: Ladislav Ács

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Vladimír Toma, CSc.

BRATISLAVA 2005

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu
vypracoval samostatne len na základe vedomostí
získaných štúdiom a uvádzam všetky
literárne pramene, ktoré som použil.

Ladislav Ács

Ďakujem vedúcemu svojej diplomovej práce,
doc. RNDr. Vladimírovi Tomovi, CSc.
za odborné vedenie, cenné rady, praktické
pripomienky, trpezlivosť a poskytnutú literatúru.

Obsah

1 Úvod ... 7

2 Úvod do DEA modelov ... 9

2.1 Data Envelopment Analysis (DEA) ... 9

2.2 Pojem efektivity ... 10

3 CCR-model ... 11

3.1 Grafická interpretácia efektivity ... 17

3.1.1 Prípad jedného vstupu a jedného výstupu ... 17

3.1.2 Prípad dvoch vstupov a jedného výstupu ... 20

3.2 Duálna úloha k úlohe (LP) ... 22

3.3 Sklzy ... 23

3.4 Projekcia na efektívnu hranicu ... 25

3.5 Výstupne orientovaný model ... 25

3.6 Kontrolovateľné a nekontrolovateľné premenné ... 27

4 Ďalšie modely ... 28

4.1 BCC-model ... 28

4.1.1 Formulácia BCC-modelu ... 30

4.1.2 Grafické znázornenie a vlastnosti BCC-efektivity ... 30

4.2 Aditívny model ... 33

4.2.1 Formulácia aditívneho modelu ... 33

4.2.2 Grafická interpretácia ... 34

4.2.3 Zovšeobecnenie modelu ... 34

4.3 Model založený na sklzoch (SBM) ... 36

4.3.1 Formulácia SBM ... 36

4.3.2 Riešenie SBM ... 37

4.4 Kontrolovateľné a nekontrolovateľné premenné ... 38

4.5 Zhrnutie modelov ... 38

5 Výber modelu ... 40

5.1 Počet premenných ... 40

5.2 Charakteristika dát ... 42

5.3 Výnosy z rozsahu ... 45

5.4 Typ modelu 45
5.5 Kontrolovateľné a nekontrolovateľné premenné 46
6 Výsledky 48
6.1 Výsledky analýzy pomocou SBM 48
6.2 Výsledky aditívneho modelu 50
6.3 Analýza na základe kvalitatívnych a kvantitatívnych výstupov 51
6.4 Analýza pedagogickej práce 54
7 Záver 56
Použitá literatúra 57
Príloha 58

1 Úvod

Cieľom tejto práce je vyhodnotiť efektivitu pedagogickej práce na katedrách Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Dôvodom potreby takejto analýzy je nové členenie katedier platné od aktuálneho školského roku. Je veľmi dôležité vedieť porovnať efektívnosť vzniknutých katedier. Tieto pracoviská potrebujú spĺňať určité požiadavky z hľadiska množstva aj kvality vykonanej práce. Tieto vlastnosti sú na jednej strane ťažko merateľné a tiež je ťažké oceniť rôzne výsledky práce na katedrách, či už z čisto pedagogického alebo vedeckého hľadiska. Navyše každá katedra má k dispozícii iný počet vyučujúcich a vedeckých pracovníkov. Práve preto je vhodné namiesto absolútneho množstva vykonanej práce počítať efektivitu práce.

Metóda DEA má veľmi dobré uplatnenie pri výpočte efektivity práve v takých oblastiach, kde ceny výstupov alebo vstupov nejakej činnosti nemôžeme presne ohodnotiť. Využitie našla hlavne vo verejnom sektore, kde napríklad rôzne služby nemajú trhovú cenu. V analýze je dôležité, aby sme zohľadnili viaceré kritéria. Je totiž veľmi ťažké alebo úplne nemožné nájsť jediné kritérium, ktoré by dobre charakterizovalo prácu všetkých katedier, či iných rozhodovacích jednotiek. Navyše, ak používame viaceré kritéria, umožníme každej skúmanej jednotke aj to, že v niektorých oblastiach vykazuje dobré výsledky, kým v iných oblastiach zaostáva za inými. Môžeme považovať za úplne samozrejmé, že niektorá katedra vyniká v školení doktorandov, kým iná dosahuje lepšie výsledky v množstve odprednášaných hodín.

Práca sa delí na teoretickú a praktickú časť. V nasledujúcej kapitole priblížime čitateľovi metódu DEA a načrtneme pojem efektivity. V tretej kapitole uvedieme historicky prvý a najjednoduchší DEA model, nazývaný ako CCR-model, podľa autorov Charnesa, Coopera a Rhodesa. Ďalšiu kapitolu tvoria ďalšie významné modely používané v DEA. V piatej kapitole diskutujeme výber vhodného modelu pre našu analýzu a v šiestej kapitole uvedieme a interpretujeme výsledky našej analýzy.

2 Úvod do DEA modelov

2.1 Data Envelopment Analysis (DEA)

DEA je pomerne nový prístup na porovnávanie výkonnosti jednotiek, ktoré svojou činnosťou premieňajú vstupy na výstupy. Tieto jednotky môžu byť veľmi odlišného charakteru. V posledných rokoch bola využitá na analýzu rôznych činností v rôznych oblastiach života v rôznych krajinách. Bolo skúmaných mnoho typov jednotiek, ako napr. nemocnice, jednotky armády, univerzity, mestá, súdy, firmy, pobočky firiem a iné.

Nakoľko DEA vyžaduje len málo predpokladov, dá sa využívať aj v prípadoch, kde by iné metódy zlyhali. Často sa nedajú odhaliť komplexné súvislosti medzi jednotlivými vstupmi a výstupmi, DEA nám ponúka riešenie aj v takýchto prípadoch.

Vo svojom prvom článku na túto tému Charnes, Cooper a Rhodes (1978) opísali DEA ako „model matematického programovania aplikovaný na pozorované dáta, ktorý prináša nový pohľad na empirické odhadovanie súvislostí – ako napríklad produkčné funkcie a/alebo efektívne hladiny produkčných možností – ktoré sú míľnikmi modernej ekonómie".

DEA je skratkou anglického názvu *Data Envelopment Analysis*, ktorý by sme mohli preložiť ako *Analýza obálky dát*. Pôvod tohto pomenovania môžeme najlepšie pochopiť pri neskoršej grafickej interpretácii modelov. Formálne povedané, DEA používa hranice namiesto toho, aby hľadal nejakú centrálnu tendenciu ako sa napríklad hľadá regresná krivka cez stred dát v štatistickej regresii.

2.2 Pojem efektivity

Cieľom DEA je porovnávať jednotlivé rozhodovacie jednotky (v literatúre sa zvyčajne píše DMU, je to skratka anglického výrazu *Decision Making Unit*). Každá rozhodovacia jednotka používa na svoju činnosť nejaké vstupy a výsledok jej činnosti sú nejaké výstupy.

Efektivitu DMU by sme mohli definovať ako podiel jeho výstupov a vstupov, teda

$$efektivita = \frac{výstupy}{vstupy}.$$

Totiž, čím viac vstupov využíva, tým je jeho efektivita nižšia a opačne, čím väčší výstup dosahuje, tým je na tom lepšie.

Ak rozhodovacie jednotky pri svojej práci používajú jediný vstup a produkujú len jediný výstup, potom ich efektivita sa dá jednoducho vypočítať vydelením množstva produkovaných výstupov s množstvom použitých vstupov.

Zvyčajne však skúmané rozhodovacie jednotky (napr. školy, nemocnice, firmy, pobočky) používajú viac vstupov (napr. pracovníci, stroje alebo materiál) a/alebo produkujú viac výstupov (napr. rôzne druhy výrobkov, služieb). Ako by sme mali postupovať v takomto prípade?

Riešením je počítanie vážených priemerov jednotlivých výstupov a vstupov a následné vydelenie. Z hľadiska výpočtu by bolo najjednoduchšie stanoviť nejaké pevné váhy pre jednotlivé vstupy a výstupy. Toto však môže byť nespravodlivé voči niektorým rozhodovacím jednotkám, lebo každá z nich môže preferovať iné vstupy alebo výstupy. Takto sa dostaneme k problému voľby váh. Podstatou DEA je, že každé DMU sa v rámci nejakých ohraničení rozhoduje, aké váhy si zvolí. V nasledujúcej časti ukážeme, ako môžeme vypočítať optimálne váhy riešením úlohy lineárneho programovania.

3 CCR-model

CCR-model je historicky prvý DEA model. Publikovali ho Charnes, Cooper a Rhodes v roku 1978.

Predpoklady modelu sú nasledovné:

- Máme n rozhodovacích jednotiek (DMU), ktoré maximalizujú svoju efektivitu, teda pre každé DMU$_j$ $(j = 1,...,n)$ riešime úlohu matematického programovania. Optimalizovanú jednotku budeme vždy označovať DMU$_o$ a jeho premenné budú mať index o.
- Pre každé DMU máme k dispozícii dáta. Máme m vstupov označené ako x_i $(i = 1,...,m)$ a s výstupov označené y_r $(r = 1,...,s)$. Dáta sú nezáporné, pričom vyžadujeme, aby pre každé DMU aspoň jeden vstup bol nenulový.

Našou úlohou je nájsť také nezáporné váhy pre jednotlivé vstupy a výstupy, aby efektivita jednotky bola maximálna. Váhy pre vstupy sú označené μ_i $(i = 1,...,m)$ a pre výstupy v_r $(r = 1,...,s)$. Teda efektivitu DMU$_j$ môžeme písať ako

$$\frac{\mu_1 y_{1j} + \mu_2 y_{2j} + \ldots + \mu_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \ldots + v_m x_{mj}},$$

pričom μ_i a v_r sú zatiaľ neznáme váhové premenné.

Úloha matematického programovania na určenie váh a na výpočet efektivity vyzerá nasledovne:

$$\max_{\mu,v} \theta_o = \frac{\mu_1 y_{1o} + \mu_2 y_{2o} + \ldots + \mu_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \ldots + v_m x_{mo}}$$

pri podmienkach:

(MP)
$$\frac{\mu_1 y_{1j} + \mu_2 y_{2j} + \ldots + \mu_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \ldots + v_m x_{mj}} \le 1 \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$v_1, v_2, \ldots, v_m \ge 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s \ge 0$$

Maximalizujeme efektivitu jednotky s indexom o, pričom vyžadujeme, aby efektivita všetkých jednotiek s týmito váhami bola nanajvýš 1 (teda 100%). Ďalej platia podmienky nezápornosti pre váhové premenné – žiadnej jednotke nedovolíme, aby k nejakému vstupu či výstupu priradila zápornú váhu. Takto dosiahneme, že hodnota efektivity je číslo z intervalu [0,1].

Úlohy matematického programovania sa riešia ťažšie ako úlohy lineárneho programovania. Preto je vhodné predchádzajúcu úlohu previesť na úlohu lineárneho programovania.

Zavedieme nasledujúcu úlohu:

$$\max_{u,v} \theta_o = u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \ldots + u_s y_{so}$$

pri podmienkach:

$$v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \ldots + v_m x_{mo} = 1$$

(LP)
$$u_1 y_{1j} + \ldots + u_s y_{sj} \le v_1 x_{1j} + \ldots + v_m x_{mj} \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$v_1, v_2, \ldots, v_m \ge 0$$

$$u_1, u_2, \ldots, u_s \ge 0$$

Tieto úlohy môžeme napísať aj vo vektorovom, resp. maticovom tvare:

$$\max_{u,v} \ \theta_o = \frac{\mu y_o}{v x_o}$$

(MP)
$$\frac{\mu y_j}{v x_j} \le 1 \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$v, \mu \ge 0$$

$$\text{(LP)}\quad \begin{aligned} &\max_{u,v} \theta_o = uy_o \\ &vx_o = 1 \\ &uy_j - vx_j \le 0 \qquad j = 1,\dots,n \\ &v,u \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} &\max_{u,v} \theta_o = uy_o \\ &vx_o = 1 \\ &uY - vX \le 0 \\ &v,u \ge 0 \end{aligned}$$

kde x_j, resp. y_j sú vektory vstupov, resp. výstupov j-tej jednotky, u, v, μ a ν sú riadkové vektory váh a X, resp. Y sú matice vstupov, resp. výstupov všetkých jednotiek, X má m riadkov a n stĺpcov, Y má s riadkov a n stĺpcov.

Úloha (MP) má množinu prípustných riešení

$$M := \{(\nu, \mu) \mid \frac{\mu y_j}{\nu x_j} \le 1,\ j = 1,\dots, n;\ \ \nu \ge 0, \mu \ge 0\}$$

a množinu optimálnych riešení

$$\hat{M}_o := \{(\hat{\nu}, \hat{\mu}) \in M : \frac{\mu y_o}{\nu x_o} \le \frac{\hat{\mu} y_o}{\hat{\nu} x_o},\quad \forall (\nu, \mu) \in M\}\ .$$

Tvrdenie 3.1: Za predpokladu $x_j, y_j \ge 0$ úloha (MP) má nasledujúce vlastnosti:

1) $M \ne \emptyset \Leftrightarrow x_j \ge 0, x_j \ne 0,\ j = 1,\dots,n$;
2) $(\nu, \mu) \in M \Rightarrow \nu x_j > 0,\ j = 1,\dots,n$;
3) $M = \{(\nu, \mu) \in \Re_+^{s+m} \mid \nu x_j > 0,\ \mu y_j \le \nu x_j,\ j = 1,\dots, n;\ \nu \ge 0, \mu \ge 0\}$;
4) $\forall(\nu, \mu) \in M,\ \forall k > 0:\ (k\nu, k\mu) \in M$, teda M je kužeľ s vrcholom v 0, pričom dvojice (ν, μ), kde $\nu = 0$ do M nepatria.

Dôkaz:

1) $\Rightarrow$ Túto implikáciu dokážeme nepriamo. Negácia výroku $M \ne \emptyset$ je $M = \emptyset$ a negácia výroku $x_j \ge 0, x_j \ne 0,\ j = 1,\dots,n$ je v našom prípade $\exists j \in \{1,\dots,n\}:\ x_j = 0$, lebo sme predpokladali, že $x_j \ge 0$. Teda treba dokázať, že ak $\exists j \in \{1,\dots,n\}:\ x_j = 0$, tak $M = \emptyset$.

   Ak $x_j = 0$ (pre nejaké $j \in \{1,\dots,n\}$), tak zlomok $\dfrac{\mu y_j}{\nu x_j}$ nie je definovaný, preto je množina M prázdna.

$\Leftarrow$ Ak $x_j \geq 0, x_j \neq 0,\ j = 1,...,n$, tak zlomok $\dfrac{\mu y_j}{\nu x_j}$ je definovaný a dvojica (ν, μ), kde $\mu = 0$ a $\nu > 0$, spĺňa nerovnosti $\dfrac{\mu y_j}{\nu x_j} = 0 \leq 1,\ j = 1,...,n$ a patrí do množiny *M*. Teda množina *M* nie je prázdna.

2) Použijeme nepriamy dôkaz. Predpokladajme, že pre dvojicu (ν, μ) platí $\nu x_j = 0$ (pre nejaké $j \in \{1,...,n\}$). Zlomok $\dfrac{\mu y_j}{\nu x_j}$ nie je definovaný a preto táto dvojica (ν, μ) nepatrí do *M*.

3) V prípade $\nu x_j = 0$ (pre nejaké $j \in \{1,...,n\}$) je množina *M* prázdna. Aby dvojica (ν, μ) mohla patriť do *M*, je potrebné, aby $\nu x_j > 0$. Pri tejto podmienke môžeme nerovnosť $\dfrac{\mu y_j}{\nu x_j} \leq 1$ prepísať na tvar $\mu y_j \leq \nu x_j,\ j = 1,..., n$. Teda množinu *M* môžeme napísať aj v tvare

$$M = \{(\nu, \mu) \in \Re_+^{s+m} \mid \nu x_j > 0,\ \mu y_j \leq \nu x_j,\ j = 1,..., n;\ \nu \geq 0, \mu \geq 0\}.$$

4) Pre všetky $k > 0$ podmienky $\dfrac{\mu y_j}{\nu x_j} \leq 1$ a $\dfrac{k\mu y_j}{k\nu x_j} \leq 1$ sú ekvivalentné. Preto ak dvojica (ν, μ) patrí do $M := \{(\nu, \mu) \mid \dfrac{\mu y_j}{\nu x_j} \leq 1,\ j = 1,..., n;\ \nu \geq 0, \mu \geq 0\}$, tak aj dvojica $(k\nu, k\mu)$, $k > 0$ patrí do *M*. □

Úloha (LP) má množinu prípustných riešení

$$L := \{(\nu, u) \mid \nu x_o = 1,\ u y_j \leq \nu x_j,\ j = 1,..., n;\ \nu \geq 0, u \geq 0\}$$

a množinu optimálnych riešení

$$\hat{L}_o := \{(\hat{\nu}, \hat{u}) \in L : u y_o \leq \hat{u} y_o,\ \forall (\nu, u) \in L\}.$$

Tvrdenie 3.2: Pri predpoklade $x_j, y_j \geq 0$ úloha (LP) má nasledujúce vlastnosti:

5) $L \neq \emptyset \Leftrightarrow x_o \geq 0, x_o \neq 0$;

6) $(\nu, \mu) \in M \Rightarrow \left(\dfrac{\nu}{\nu x_o}, \dfrac{\mu}{\nu x_o} \right) \in L$;

7) $(v,u)\in L \wedge vx_j > 0,\ j=1,...,n \Rightarrow (v,u)\in M$;

8) ak $x_j > 0,\ j=1,...,n$, potom $L\subset M$;

9) $L\subset \overline{M}$, kde $\overline{M}$ je uzáver množiny *M*.

Dôkaz:

5) $\Rightarrow$ Dokážeme podobne ako v 1). Negácia výroku $L \neq \emptyset$ je $L = \emptyset$ a negácia výroku $x_o \geq 0, x_o \neq 0$ je v našom prípade $x_o = 0$. Teda treba dokázať, že $x_o = 0$ implikuje $L = \emptyset$.

Ak $x_o = 0$, nemôže byť splnená podmienka $vx_o = 1$, preto je množina *L* prázdna.

$\Leftarrow$ Ak $x_o \geq 0, x_o \neq 0$, tak existuje také *v*, že podmienka $vx_o = 1$ je splnená. Dvojica (*v*, *u*), kde $u = 0$, spĺňa nerovnosti $uy_j \leq vx_j,\ j=1,...,n$ a patrí do množiny *L*. Teda množina *L* nie je prázdna.

6) Ak $(v,\mu)\in M$, tak podľa vlastnosti 2) $vx_j > 0,\ j=1,...,n$. Podľa vlastnosti 4) $(v,\mu)\in M \Rightarrow \left(\frac{v}{vx_o},\frac{\mu}{vx_o}\right)\in M$. Ak $vx_j > 0,\ j=1,...,n$, tak nerovnosti $\frac{\mu y_j}{vx_j}\leq 1$ z podmienok vytvárajúce množinu *M* a $\mu y_j \leq vx_j$ z podmienok vytvárajúce množinu *L* sú ekvivalentné. Množina *L* navyše vyžaduje, aby jej prvok (*v*, *u*) spĺňal podmienku $vx_o = 1$. Jednoducho sa presvedčíme, že dvojica $\left(\frac{v}{vx_o},\frac{\mu}{vx_o}\right)$ spĺňa aj túto podmienku: $\frac{v}{vx_o}x_o = \frac{vx_o}{vx_o} = 1$. Teda $\left(\frac{v}{vx_o},\frac{\mu}{vx_o}\right)$ naozaj patrí do *L*.

7) Ako to už bolo uvedené, ak platí $vx_j > 0, j=1,...,n$, tak nerovnosti $\frac{\mu y_j}{vx_j}\leq 1$ z podmienok vytvárajúce množinu *M* a $\mu y_j \leq vx_j$ z podmienok vytvárajúce množinu *L* sú ekvivalentné. Množina *M* nevyžaduje splnenie ďalších podmienok, preto ľubovolná dvojica (*v*, *u*) z množiny *L* vyhovujúca podmienke $vx_j > 0,\ j=1,...,n$ patrí aj do množiny *M*.

8) Nech prvok (*v*, *u*) patrí do množiny *L*. Chceme dokázať, že za predpokladu $x_j > 0,\ j=1,...,n$ prvok (*v*, *u*) patrí aj do množiny *M*. Ak (*v*, *u*) patrí do *L*, tak *v* nemôže byť nulové kvôli podmienke $vx_o = 1$. Teda $vx_j > 0,\ j=1,...,n$. Podľa

vlastnosti 7) však $(v,u) \in L \wedge vx_j > 0,\ j = 1,...,n \Rightarrow (v,u) \in M$, preto za predpokladu $x_j > 0,\ j = 1,...,n$ je množina *L* podmnožinou množiny *M*.

9) Potrebujeme dokázať implikáciu $(v,u) \in L \Rightarrow (v,u) \in \overline{M}$. Najprv je však potrebné zistiť, čo je vlastne uzáver množiny *M*. Množinu *M* môžeme zapísať aj v nasledujúcom ekvivalentnom tvare:

$M = \{(v, \mu) \mid \mu y_j \le v x_j,\ v x_j > 0,\ j = 1,..., n;\ v \ge 0, \mu \ge 0\}$.

Uzáver tejto množiny dostaneme, ak všetky ostré nerovnosti $vx_j > 0,\ j = 1,...,n$ nahradíme podmienkou $vx_j \ge 0,\ j = 1,...,n$, teda pripustíme aj rovnosť. Potom

$\overline{M} = \{(v, \mu) \mid \mu y_j \le v x_j,\ v x_j \ge 0,\ j = 1,..., n;\ v \ge 0, \mu \ge 0\}$.

Podľa vlastnosti 7) sme mali $(v,u) \in L \wedge vx_j > 0,\ j = 1,...,n \Rightarrow (v,u) \in M \subset \overline{M}$.

Ostáva nám dokázať, že $(v,u) \in L \wedge vx_j = 0,\ j = 1,...,n \Rightarrow (v,u) \in \overline{M}$. Všetky prvky (*v*, *u*) množiny *L* spĺňajú podmienku $uy_j \le vx_j,\ j = 1,...,n$, navyše máme zaručené, že $vx_j = 0,\ j = 1,...,n$. Teda aj tieto prvky z *L* patria naozaj aj do $\overline{M}$.

Celkovo platí $(v,u) \in L \wedge vx_j \ge 0,\ j = 1,...,n \Rightarrow (v,u) \in \overline{M}$. Nakoľko $vx_j \ge 0,\ j = 1,...,n$ máme vždy zaručené, platí $L \subset \overline{M}$. □

Veta 3.1: Úlohy (MP) a (LP) sú ekvivalentné v tom zmysle, že optimálne hodnoty účelových funkcií sú rovnaké a z optimálneho riešenia jednej z týchto úloh vieme jednoducho určiť optimálne riešenie druhej úlohy.

Dôkaz: Účelová funkcia v úlohe (MP) je v tvare zlomku. Ak v zlomku vynásobíme čitateľa aj menovateľa tou istou nenulovou konštantou *k*, tak sa hodnota zlomku nezmení. Existuje také *k*, že $kvx_o = vx_o = 1$. Teda ak vynásobíme čitateľa aj menovateľa takýmto číslom *k*, tak dostaneme

$$\frac{k\mu y_o}{kvx_o} = \frac{uy_o}{vx_o} = uy_o .$$

Takto budeme maximalizovať uy_o, pričom pribudne nám ďalšia podmienka $vx_o = 1$. Aj pri ohraničení úlohy (MP) použijeme $kv = v$ a $k\mu = u$, a za predpokladu, že menovateľ nie je nulový, môžeme ním ohraničenie vynásobiť, a takto dostaneme ohraničenie úlohy (LP).

Teda úloha (LP) je len transformáciou úlohy (MP). Optimálna hodnota účelovej funkcie úloh je rovnaká. Ak poznáme optimálne riešenie (v^*, u^*) úlohy (LP), tak optimálnym riešením úlohy (MP) sú všetky dvojice $(v^*, \mu^*) = \left(\frac{v^*}{k}, \frac{\mu^*}{k}\right)$, kde $k > 0$. Množina optimálnych riešení je v úlohe (MP) väčšia, lebo nie sme viazaní podmienkou $kvx_o = vx_o = 1$.

Opačne, ak poznáme optimálne riešenie (v^*, μ^*) úlohy (MP), tak optimálne riešenie (v^*, u^*) úlohy (LP) dostaneme tak, že nájdeme také k, že $kvx_o = 1 (= vx_o)$, potom optimálnym riešením je $(v^*, u^*) = (kv^*, k\mu^*)$, ktoré spĺňa aj podmienku $vx_o = 1$. □

Definícia 3.1 (Definícia CCR-efektivity):
Hovoríme, že DMU_o je CCR-efektívne, ak optimálna hodnota $\theta_o^* = 1$ a existuje aspoň jedno riešenie (v^*, u^*) úlohy (LP) také, že $v^* > 0$, $u^* > 0$.
V opačnom prípade DMU_o je CCR-neefektívne.

3.1 Grafická interpretácia efektivity

Hodnota efektivity θ modelov DEA sa dá jednoducho interpretovať graficky. Nakoľko k interpretácii máme k dispozícii len dvojrozmerný priestor, t.j. tento papier, musíme sa obmedziť na úlohy s malým počtom vstupných a výstupných premenných.

3.1.1 Prípad jedného vstupu a jedného výstupu

Pozrime sa na nasledujúci jednoduchý príklad. Potrebujeme analyzovať 8 firiem, ktoré zamestnávajú pracovníkov a produkujú rovnaké výrobky. Počet pracovníkov a počet vyrobených výrobkov za deň sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

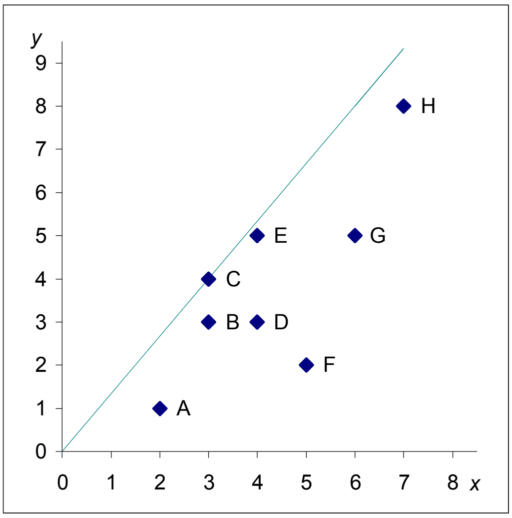
Tabuľka 3.1

DMU	počet pracovníkov *x*	počet výrobkov *y*	podiel výstupov a vstupov *x/y*
A	2	1	0,5
B	3	3	1
C	3	4	1,333
D	4	3	0,75
E	4	5	1,25
F	5	2	0,4
G	6	5	0,833
H	7	8	1,143

V poslednom stĺpci je uvedený podiel výstupov a vstupov pre jednotlivé firmy. Toto je vlastne efektivita danej jednotky. Čím vyššia je táto hodnota, tým je na tom firma lepšie. Musíme však poznamenať, že táto efektivita nie je zhodná s hodnotou efektivity θ z úlohy (LP). Tá je totiž ohraničená zhora číslom 1. Aj tieto hodnoty by sa dali zhora ohraničiť, buď vydelením všetkých efektivít najväčšou z nich, alebo používaním váhových premenných a riešením úlohy (LP). Toto však v prípade jedného vstupu a jedného výstupu zatiaľ nepotrebujeme.

V nasledujúcom grafe sú zobrazené všetky DMU, na osi x sú použité vstupy a na osi y produkované výstupy.

Graf 3.1



Tieto body sú *obalené* do množiny P s nasledujúcimi vlastnosťami:

(1) všetky analyzované jednotky opísané dvojicou (x_j, y_j) patria do P;

(2) ak (x, y) patrí do P, tak aj (tx, ty) patrí do P pre ľubovolný kladný skalár t;

(3) ak (x, y) patrí do P a $x' \geq x$ a $0 \leq y' \leq y$, tak do P patrí aj dvojica (x', y');

(4) ľubovolná polokladná lineárna kombinácia dvojíc z P patrí do P.

Táto množina sa nazýva množinou výrobných možností (v anglickej literatúre sa označuje ako *Production Possibility Set*). Všetky jednotky sú obalené do množiny výrobných možností. Odtiaľ pochádza pomenovanie *analýza obálky dát*.

Množinu výrobných možností vyhovujúcu podmienkam (1)–(4) môžeme napísať nasledovne:

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, \lambda \neq 0\}$$

Z grafu aj z dát vidíme, že najlepšia je firma C, ktorá má najväčšiu efektivitu a leží na polpriamke, ktorú nazývame efektívnou hranicou. Z grafu intuitívne môžeme usúdiť, že firma C je efektívna, pričom ostatné jednotky sa musia polepšiť, aby sa dostali na efektívnu hranicu.

To môžu dosiahnuť znížením počtu pracovníkov (teda vstupov) a takto dosiahnuť rovnaký výstup, alebo opačne, ponechaním počtu pracovníkov a zvýšením produkcie (teda vytvorením viac výstupov), prípadne nejakým kompromisom medzi týmito dvoma možnosťami.

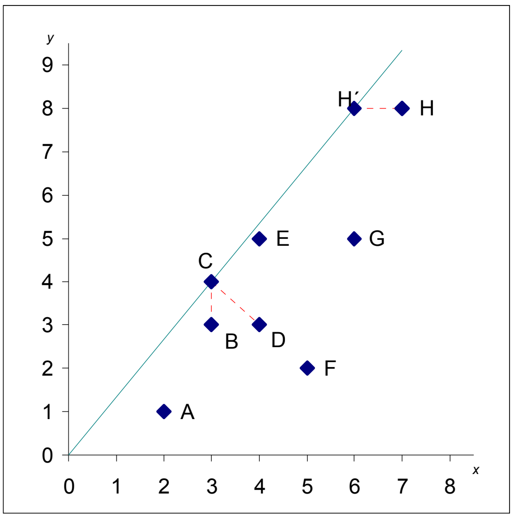
O koľko by sme mali znížiť vstupy pre neefektívnu firmu, aby sa dostala na efektívnu hranicu? Odpoveď nám dajú hodnoty efektivity. Potrebujeme pretransformovať podiely výstupov a vstupov z tabuľky 3.1 na skutočné hodnoty efektivity, teda aby efektívna firma mala efektivitu 1. Spravíme to tak, že najväčšiu položíme 1 a ostatné úmerne zmenšíme.

Tabuľka 3.2.

DMU	vstup *x*	výstup *y*	podiel vstupov a výstupov *x/y*	efektivita θ
A	2	1	0,5	0,375
B	3	3	1	0,75
C	3	4	1,333	1
D	4	3	0,75	0,563
E	4	5	1,25	0,938
F	5	2	0,4	0,3
G	6	5	0,833	0,625
H	7	8	1,143	0,857

Potom optimálny počet pracovníkov dostaneme vynásobením súčasného počtu pracovníkov hodnotou efektivity. Napr. firma H sa môže stať efektívnou, ak zníži počet svojich pracovníkov na 7 x 0,857 = 6. Toto môžeme pozorovať aj na grafe, ak premietneme túto jednotku na efektívnu hranicu. Takto dostaneme „efektívnu jednotku“ označenú H´.

Graf 3.2



Iné možnosti posunutia jednotky na efektívnu hranicu vidíme na grafe v prípadoch jednotiek B a D. Firmu B môžeme zefektívniť zvýšením jej výstupov z 3 na 4 pri nezmenených vstupoch. Takto by sa firma B dostala na miesto kde je firma C. Môžeme však zvoliť aj postup, v ktorom sa snažíme znížiť počet pracovníkov a pritom zvýšiť produkciu. Ak v prípade firmy D znížime vstupy o jednotku a výstupy zvýšime o jednotku, tak sa firma D dostane na efektívnu hranicu do bodu C.

Na výpočet miery zvýšenia výstupov sa používa výstupne orientovaný model, ktorý uvedieme neskôr.

3.1.2 Prípad dvoch vstupov a jedného výstupu

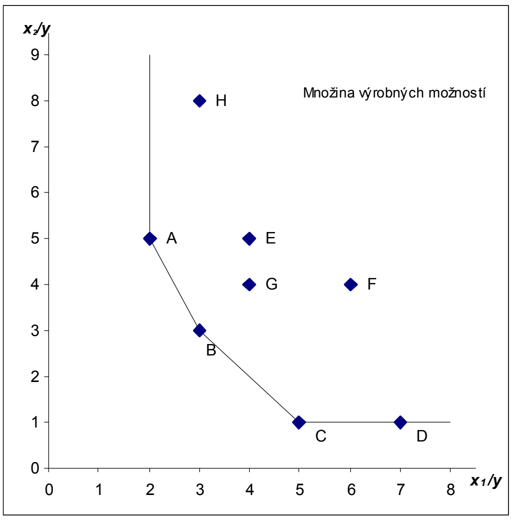
Ak máme dva vstupy a jeden výstup, teda tri premenné, aj tak nám stačia na grafickú interpretáciu dve osi. Potrebujeme však zaviesť určité obmedzenia. V nasledujúcom príklade všetky jednotky produkujú jednu jednotku výstupu, pričom používajú rôzne množstvá z dvoch rôznych vstupov. Údaje sú uvedené v tabuľke 3.3.

Tabuľka 3.3

DMU	Vstup 1	Vstup 2	Výstup
A	2	5	1
B	3	3	1
C	5	1	1
D	7	1	1
E	4	5	1
F	6	4	1
G	4	4	1
H	3	8	1

Nakoľko výstup všetkých jednotiek je 1, môžeme ich porovnávať pomocou ich vstupov. Z hore uvedených údajov môžeme vytvoriť graf, kde os x tvorí podiel prvého vstupu a výstupu (x_1/y) a os y tvorí podiel druhého vstupu a výstupu (x_2/y).

Graf 3.3



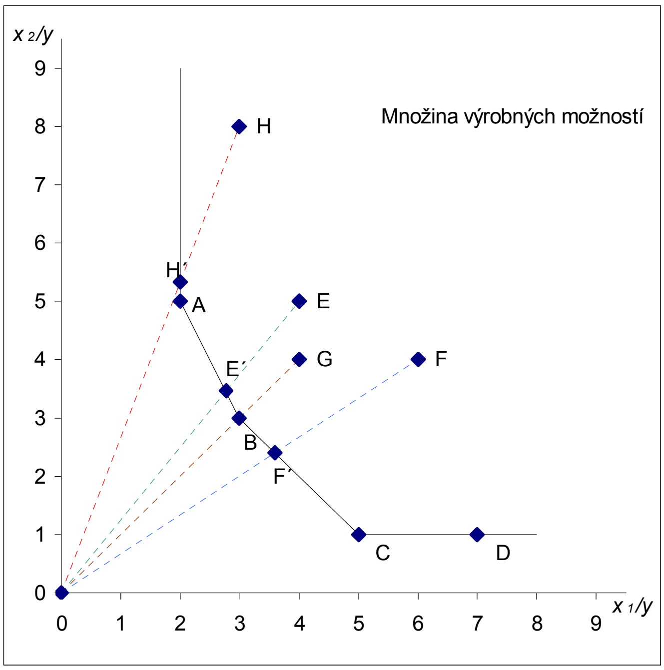
Efektívnu hranicu tvoria úsečky AB a BC. Vertikálna polpriamka z bodu A nahor a horizontálna polpriamka z bodu C doprava sa nazývajú kváziefektívne hranice. Tieto hranice ohraničujú zdola množinu výrobných možností. Cieľom rozhodovacích jednotiek je totiž používanie čo najmenej vstupov. Nemá však zmysel rozlišovať medzi tým, či jednotka používa viac zo vstupov č.1 a menej zo vstupov č.2 alebo opačne. Podstatou DEA je totiž, že jednotky si môžu sami zvoliť váhy pre jednotlivé premenné.

Jednotky A, B a C ležia na efektívnej hranici. Hodnota efektivity θ týchto jednotiek je 1, lebo táto hodnota nám udáva, ako máme znížiť vstupy, aby sa jednotka dostala na efektívnu alebo kváziefektívnu hranicu.

Jednotka D leží na kváziefektívnej hranici, preto aj θ_D = 1. Tu však vidíme, že jednotka C je lepšia ako jednotka D, lebo C používa menej zo vstupov č.1. Toto nadmerné použitie niektorého vstupu sa nazýva *sklz* (v literatúre sa používa aj anglický výraz *slack*). Ak by jednotka D znížila množstvo použitých vstupov č.1 o tento sklz, tak by sa dostala do bodu C a stala by sa efektívnou.

Jednotka E neleží na efektívnej, ani na kváziefektívnej hranici, preto potrebujeme, aby jej vstup č.1 aj č.2 bol znížený na θ-násobok súčasnej hodnoty. Ak zvolíme $\theta_E = \frac{OE'}{OE} = 0{,}69$, tak znížením vstupov na θ-násobok sa jednotka dostane na efektívnu hranicu medzi body A a B do bodu E´ (na grafe 3.4). To znamená, že jednotky A a B tvoria tzv. *referenčnú množinu* jednotky E.

Graf 3.4



Podobne potrebujeme znížiť vstupy aj pre jednotky F a G. Vstupy pre jednotku F potrebujeme znížiť na $\theta_F = \dfrac{OF'}{OF} = 0{,}6$-násobok pôvodnej hodnoty. Takto by sa F dostala do bodu F′, referenčnú množinu F tvoria jednotky B a C. V prípade G je $\theta_G = \dfrac{OG'}{OG} = 0{,}75$, pričom znížením vstupov sa G dostane do bodu B, preto referenčnú množinu G tvorí len jednotka B.

Jednotka H sa po znížení vstupov na $\theta_H = \dfrac{OH'}{OH} = 0{,}67$-násobok dostane na kváziefektívnu hranicu do bodu H′ so súradnicami (2, 5,33). Preto okrem tohto zníženia vstupov jednotka H potrebuje ešte navyše znížiť vstup č.2, lebo v tejto premennej má ešte sklz, teda nadmerné použitie o 0,33 jednotiek.

Na základe tejto interpretácie môžeme uviesť dve príčiny neefektívnosti:

1. v prípade $\theta < 1$ potrebujeme úmerne znížiť všetky vstupy – toto je tzv. *technická neefektívnosť* (*technical* alebo *radial inefficiency*);
2. v prípade, že máme sklzy, na ich odstránenie potrebujeme znížiť len niektoré vstupy – takto sa zmení pomer vyžitých vstupov, je to tzv. *zmiešaná neefektívnosť* (*mix-inefficiency*).

3.2 Duálna úloha k úlohe (LP)

Úlohu lineárneho programovania na výpočet efektivity

$$\text{(LP)}\qquad \begin{aligned} &\max_{u,v} \theta = u y_o \\ &v x_o = 1 \\ &uY - vX \le 0 \\ &v, u \ge 0 \end{aligned}$$

môžeme podľa teórie lineárneho programovania prepísať na duálnu úlohu:

$$\text{(D)}\qquad \begin{aligned} &\min_{\theta,\lambda} \ \theta \\ &\theta x_o - X\lambda \ge 0 \\ &Y\lambda - y_o \ge 0 \\ &\lambda \ge 0 \end{aligned}$$

Korešpondencia medzi primárnou a duálnou úlohou je uvedená v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 3.4

Ohraničenie v (LP)	Duálna premenná v (D)	Ohraničenie v (D)	Primárna premenná v (LP)
$vx_o = 1$	θ	$\theta x_o - X\lambda \geq 0$	$v \geq 0$
$uY - vX \leq 0$	$\lambda \geq 0$	$Y\lambda - y_o \geq 0$	$u \geq 0$

Duálnu úlohu môžeme interpretovať nasledovne: minimalizujeme hodnotu θ, teda vlastne aj redukované množstvo vstupov θx_o tak, aby jednotka opísaná dvojicou $(\theta x_o, y_o)$ patrila do množiny výrobných možností $P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, \lambda \neq 0\}$.

3.3 Sklzy

V predchádzajúcej duálnej úlohe môžeme zaviesť nasledujúce doplnkové premenné:

$$s^- = \theta x_o - X\lambda \text{ a } s^+ = Y\lambda - y_o,$$

pričom z ohraničení úlohy vyplýva, že $s^- \geq 0$ a $s^+ \geq 0$. Tieto premenné sú sklzy, ktoré boli zavedené v grafickej interpretácii CCR-modelu. Hodnoty s^- a s^+ udávajú, že ako ďaleko je jednotka $(\theta x_o, y_o)$ od efektívnej hranice $P' = \{(x, y) \mid x = X\lambda, y = Y\lambda, \lambda \geq 0, \lambda \neq 0\}$. Nadmernú spotrebu vstupov vyjadruje premenná s^- (v anglickej literatúre sa používa výraz *input excess* – prebytok vstupov), pričom nedostatok produkovaných výstupov vyjadruje s^+ (po anglicky *output shortfall* – nedostatok výstupov).

Na výpočet sklzov používame tzv. dvojfázovú úlohu. V prvej časti riešime úlohu (D) na výpočet hodnoty efektivity danej jednotky. Treba poznamenať, že podľa teórie lineárneho programovania optimálne hodnoty úloh (LP) a (D) sa rovnajú. Označme túto optimálnu hodnotu θ^*, ktorú využijeme v druhej fáze.

V druhej fáze riešime úlohu lineárneho programovania

$$\text{(S)} \qquad \begin{aligned} &\max_{\lambda, s^-, s^+} \omega = es^- + es^+ \\ &s^- = \theta^* x_o - X\lambda \\ &s^+ = Y\lambda - y_o \\ &s^- \geq 0 \quad s^+ \geq 0 \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned}$$

kde $e = (1,1,\ldots,1)$ je jednotkový vektor príslušného rozmeru, teda $es^- = \sum_{i=1}^{m} s_i^-$ a $es^+ = \sum_{i=1}^{s} s_i^+$.

V tejto úlohe maximalizujeme súčet všetkých sklzov, pričom využijeme hodnotu θ^* z prvej fázy výpočtu. Riešenie tejto úlohy sa nazýva *riešenie najväčšieho sklzu* (v anglickej literatúre *max-slack solution*).

V duálnom priblížení problému každá jednotka je porovnávaná s inými jednotkami alebo fiktívnymi jednotkami, ktoré sú kombináciami existujúcich jednotiek. Tieto kombinácie sú v modeli zahrnuté ako $X\lambda$ a $Y\lambda$. Teda komponenty vektora λ sú vlastne váhy pre jednotlivé jednotky. Skúmanú jednotku porovnávame s jednotkami, ktorým prislúcha nenulový komponent vektora λ. Pre neefektívnu jednotku tieto jednotky tvoria referenčnú množinu. Referenčná množina skúmanej jednotky, ktorú sme uviedli v grafickej interpretácii, je definovaná vektorom λ nasledovne:

Definícia 3.2 (Definícia referenčnej množiny):
Pre neefektívne DMU_o definujeme jeho referenčnú množinu E_o na základe riešenia najväčšieho sklzu nasledovne:

$$E_o = \{j \mid \lambda_j > 0,\ j = 1,\dots,n\}\ .$$

Efektivitu skúmanej jednotky môžeme definovať nielen pomocou hodnoty θ a váhových premenných v a u z úlohy (LP), ale aj pomocou riešenia dvojfázovej úlohy.

Definícia 3.3 (Definícia CCR-efektivity pomocou sklzov):
Hovoríme, že DMU je CCR-efektívne, ak optimálne riešenie (θ^*, λ^*, s^{-*}, s^{+*}) vyššie uvedenej dvojfázovej úlohy spĺňa $\theta^* = 1$ a navyše $s^{-*} = 0$, $s^{+*} = 0$, teda v žiadnej premennej nie sú sklzy. V opačnom prípade DMU je CCR-neefektívne.

Veta 3.2: Dve uvedené definície CCR-efektivity (Definícia 3.1 a Definícia 3.3) sú ekvivalentné.

Dôkaz: Rozlišujeme nasledujúce prípady:

(1) Ak $\theta^* < 1$, tak podľa prvej i druhej definície je jednotka CCR-neefektívna.

(2) Ak $\theta^* = 1$, tak potrebujeme ukázať ekvivalenciu $v^* > 0, u^* > 0 \Leftrightarrow s^{-*} = 0, s^{+*} = 0$.

Vektory v a u z úlohy (LP) sú duálne premenné pre ohraničenia $s^- = \theta x_o - X\lambda \geq 0$ a $s^+ = Y\lambda - y_o \geq 0$ z úlohy (D). Teda podľa vety o komplementarite duálnych premenných z teórie lineárneho programovania pre optimálne riešenia (v^*, u^*) a (λ^*, s^{-*}, s^{+*}) platí

$$v^* s^{-*} = 0 \text{ a } u^* s^{+*} = 0\ .$$

Silná veta o komplementarite duálnych premenných navyše hovorí, že obe premenné nemôžu byť súčasne nulové.

To znamená, že ak niektorý komponent vektorov v^* a u^* je kladný, tak príslušný komponent z vektorov s^{-*} a s^{+*} musí byť nulový a naopak, ak niektorý komponent vektorov s^{-*} a s^{+*} je kladný, tak príslušný komponent z vektorov v^* a u^* musí byť nulový, pričom vylučujeme možnosť, že obidva komponenty sú nulové. Teda ak všetky sklzy sú nulové, tak potom váhy pre všetky premenné sú nenulové a opačne, ak váhy pre všetky premenné sú nenulové, tak všetky sklzy sú nulové, a tým pádom jednotka je efektívna. Ak však niektorý komponent vektora sklzov je nenulový, tak váha príslušnej premennej je nulová, a tiež opačne, ak váha pre nejakú premennú je nulová, tak príslušný komponent vektora sklzov je nenulový, takto je jednotka neefektívna. □

3.4 Projekcia na efektívnu hranicu

Cieľom DEA je nájsť spôsob, ako zefektívniť neefektívne jednotky. Tieto jednotky môžeme premietnuť na efektívnu hranicu, ako to už bolo naznačené pri grafickej interpretácii. Na to použijeme výsledky dvojfázového modelu. Potrebujeme pri tom len úmerne znížiť vstupy a odstrániť sklzy. Takto dostaneme jednotku, ktorá je opísaná dvojicou

$$\hat{x}_o = \theta^* x_o - s^{-*},$$

$$\hat{y}_o = y_o + s^{+*},$$

pričom platí, že $\hat{x}_o \le x_o$ a $\hat{y}_o \ge y_o$.

Takto získaná „fiktívna" jednotka je CCR-efektívna, teda jej efektivita je 1 a všetky sklzy sú nulové. O tomto sa dá presvedčiť zapísaním tejto jednotky do modelu.

3.5 Výstupne orientovaný model

Doteraz sme sa zaoberali s problematikou, ako znížiť množstvo použitých vstupov, aby sa jednotka stala efektívnou. Ako sme však naznačili v grafickej interpretácii modelu, toto nie je jediné riešenie. Efektivitu jednotky môžeme zvýšiť aj zvyšovaním výstupov pri nezmenenom množstve použitých vstupov.

Môžeme formulovať nasledovnú úlohu lineárneho programovania:

$$\text{(D-O)}\qquad \begin{aligned} &\max_{\eta,\mu}\ \eta \\ &x_o - X\mu \geq 0 \\ &Y\mu - \eta y_o \geq 0 \\ &\mu \geq 0 \end{aligned}$$

Tento model nám dáva odpoveď na otázku, ako máme zvýšiť výstupy pri nezmenených vstupoch. Vidíme, že táto úloha sa veľmi podobá na úlohu (D) z formulácie vstupne orientovaného modelu. Líši sa od nej iba v tom, že namiesto toho, aby sme minimalizovali mieru θ pre zníženie vstupov, maximalizujeme hodnotu η, ktorá je miera o ktorú by sme mali zvýšiť výstupy. Navyše optimálne riešenie úlohy (D) sa dá jednoducho previesť na optimálne riešenie (D-O) nasledujúcou transformáciou:

$$\eta^* = \frac{1}{\theta^*} \text{ a } \mu^* = \frac{\lambda^*}{\theta^*}.$$

Dôvodom tejto vlastnosti je, že úlohu (D) môžeme transformáciou premenných

$$\theta = \frac{1}{\eta} \text{ a } \lambda = \frac{\mu}{\eta} = \mu\theta$$

prepísať na úlohu (D-O).

Aj pri výstupne orientovanom modeli môžeme definovať doplnkové premenné

$$t^- = x_o - X\mu \text{ a } t^+ = Y\mu - \eta y_o,$$

pričom aj tieto nadväzujú na sklzy zo vstupne orientovaného modelu:

$$t^{-*} = \frac{s^{-*}}{\theta^*},\ t^{+*} = \frac{s^{+*}}{\theta^*}.$$

Primárnu úlohu výstupne orientovaného modelu môžeme napísať v tvare

$$\text{(LP-O)}\qquad \begin{aligned} &\min_{p,q}\ \eta = px_o \\ &qy_o = 1 \\ &qY - pX \leq 0 \\ &p, q \geq 0 \end{aligned}$$

Podobne ako pri vstupne orientovanom, môžeme spraviť projekciu na efektívnu hranicu. V tomto prípade úmerne zvýšime všetky výstupy a odstránime sklzy:

$$\hat{x}_o = x_o - t^{-*}$$

$$\hat{y}_o = \eta y_o + t^{+*}$$

Táto jednotka bude takisto efektívna. Efektivitu dosiahneme aj vtedy, ak použijeme nejakú lineárnu kombináciu projekcie vstupne orientovaného modelu a projekcie výstupne orientovaného modelu.

3.6 Kontrolovateľné a nekontrolovateľné premenné

DEA nám dáva návod, ako zefektívniť neefektívne jednotky. V skutočnom živote sa stáva, že niektoré hodnoty nemôžeme ovplyvniť. V doteraz diskutovanom modeli sme však dostali len taký návod, ktorý od nás mohol vyžadovať zmenu hociktorej premennej. Ako postupovať v prípade, ak zmena niektorej premennej nie je v našich kompetenciách?

CCR-model môžeme jednoduchým spôsobom doplniť, aby zohľadňovala, ktorá premenná je kontrolovateľná a ktorá nie. V pôvodnom modeli rozdelíme ohraničenia podľa toho, či sa vzťahujú na kontrolovateľné premenné alebo na nekontrolovateľné. Z ohraničení pre nekontrolovateľné premenné odstránime premennú θ^* (resp. η^*), totiž nie je v našich možnostiach, aby sme pomocou θ^* znížili (resp. pomocou η^* zvýšili) aj hodnoty týchto premenných spolu s ostatnými. Takto náš vstupne orientovaný model bude mať nasledovný tvar:

$$
\text{(D-N)} \qquad
\begin{aligned}
\min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\
& \theta x_o = X_K \lambda + s^- \\
& x_o = X_N \lambda + s^- \\
& y_o = Y\lambda - s^+ \\
& \lambda \geq 0
\end{aligned}
$$

kde X_K je matica kontrolovateľných vstupov a X_N je matica nekontrolovateľných vstupov. Pre výstupne orientovaný model postupujeme analogicky. Tu odstránime η z ohraničení nekontrolovateľných výstupov a rozdelíme maticu Y na Y_K a Y_N.

V DEA je viacero prístupov na rozlišovanie kontrolovateľných a nekontrolovateľných premenných. Na konci nasledujúcej kapitoly uvedieme ďalší, ktorý je využiteľný v iných typoch modelov.

4 Ďalšie modely

V tejto kapitole uvedieme ďalšie modely používané v DEA. Prvým modelom uvedeným v tejto kapitole bude BCC, ktorý bol publikovaný Bankerom, Charnesom a Cooperom v roku 1984. Kým CCR-model predpokladal, že pri činnosti jednotiek platia konštantné výnosy z rozsahu, BCC-model používa variabilné výnosy z rozsahu.

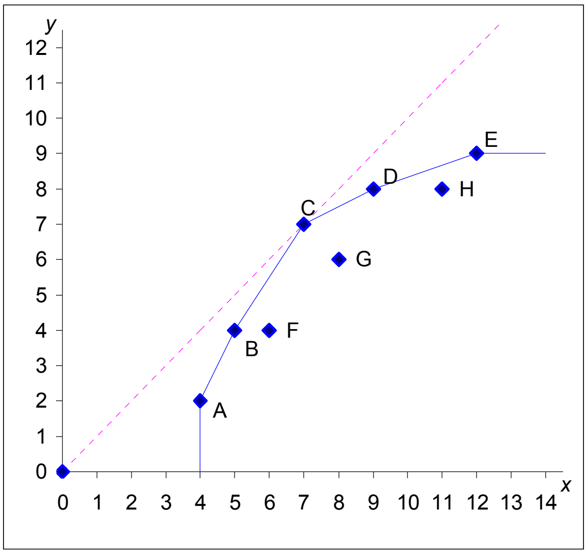
Ďalší model, ktorý uvedieme, je aditívny model, ktorý používa iba sklzy na vyjadrenie efektivity. Takto nie je potrebné rozlišovať medzi vstupne a výstupne orientovanými modelmi. Potom uvedieme model založený na sklzoch, ktorý je podobný aditívnemu modelu, ale v niektorých prípadoch je lepšie použiteľný.

4.1 BCC-model

BCC-model je podobný CCR-modelu. Rozdiel medzi týmito modelmi je v množine výrobných možností. Kým sme pri CCR-modeli predpokladali, že každá jednotka vstupu prináša rovnaké množstvo výstupov, teda *konštantné výnosy z rozsahu*, model BCC tento predpoklad nepoužíva, teda hovoríme o *variabilných výnosoch z rozsahu*. Pre konštantné výnosy z rozsahu sa používa skratka CRS na základe anglického výrazu *Constant Returns* *to Scale* a pre variabilné výnosy z rozsahu sa používa skratka VRS na základe anglického výrazu *Variable Returns to Scale*. Pri variabilných výnosoch z rozsahu rozlišujeme tri oblasti:

1. oblasť rastúcich výnosov z rozsahu,
2. oblasť klesajúcich výnosov z rozsahu,
3. oblasť konštantných výnosov z rozsahu – tvorí prechod medzi dvoma vyššie uvedenými.

Graf 4.1



Na grafe 4.1 je zobrazených niekoľko jednotiek, ktoré používajú jeden vstup a vytvárajú jeden výstup. Prerušovanou čiarou je označená hranica množiny výrobných možností pre CCR-model. Jediná CCR-efektívna jednotka je C. BCC-model pripúšťa, že jednotky, ktoré používajú iné množstvo vstupov, sú schopné vytvárať len menšie množstvo výstupov na jednotku vstupu. Preto BCC-model má inú množinu výrobných možností, ktorej hranica je na grafe 4.1 vyznačená súvislou lomenou čiarou. Takto podľa BCC-modelu sú efektívne aj jednotky A, B, D a E.

Úsečky AB a BC tvoria oblasť rastúcich výnosov z rozsahu efektívnej hranice a úsečky CD a DE tvoria oblasť klesajúcich výnosov z rozsahu efektívnej hranice. V bode C hovoríme o konštantných výnosoch z rozsahu.

Množina výrobných možností BCC-modelu je podmnožinou množiny výrobných možností CCR-modelu. V porovnaní s CCR nám len pribudne podmienka konvexnosti $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Množinu výrobných možností pre BCC môžeme zapísať nasledovne:

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda,\ y \leq Y\lambda,\ e\lambda = 1,\ \lambda \geq 0\}.$$

4.1.1 Formulácia BCC-modelu

Ako to už bolo uvedené, rozdielom medzi CCR a BCC je len množina výrobných možností, teda množina prípustných riešení v úlohe lineárneho programovania. K pôvodnej úlohe (LP) na riešenie CCR-modelu pribudne k ohraničeniam už spomenutá podmienka $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Úloha lineárneho programovania pre BCC-model vyzerá teda nasledovne:

$$
\text{(BCC)} \qquad
\begin{aligned}
\min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\
& \theta x_o - X\lambda \geq 0 \\
& Y\lambda - y_o \geq 0 \\
& e\lambda = 1 \\
& \lambda \geq 0
\end{aligned}
$$

Úloha BCC sa tiež rieši pomocou dvojfázového modelu, kde sa najprv rieši vyššie uvedená úloha (BCC), potom sa fixuje hodnota θ^* a určia sa sklzy.

Definícia 4.1 (Definícia BCC-efektivity):
Hovoríme, že DMU$_o$ je BCC-efektívne, ak riešenie dvojfázovej úlohy (θ^*, λ^*, s^{-*}, s^{+*}) spĺňa $\theta^* = 1$ a navyše $s^{-*} = 0$, $s^{+*} = 0$, teda všetky sklzy sú nulové.
V opačnom prípade DMU$_o$ je BCC-neefektívne.

Definícia 4.2 (Definícia referenčnej množiny):
Pre neefektívne DMU$_o$ definujeme jeho referenčnú množinu E_o na základe riešenia najväčšieho sklzu nasledovne:

$$E_o = \{ j \mid \lambda_j > 0, \; j = 1,\dots,n \}$$

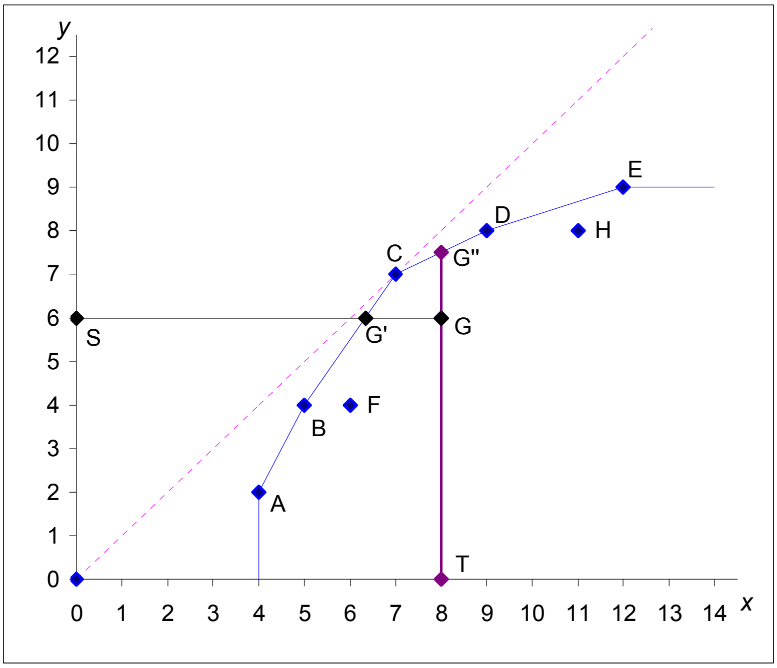
4.1.2 Grafické znázornenie a vlastnosti BCC-efektivity

Uvažujme o príklade, ktorý bol znázornený na grafe 4.1. Jednotky používajú jeden typ vstupu (x) a produkujú jeden typ výstupu (y), ktorých hodnoty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 4.1

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H
x	4	5	7	9	12	6	8	11
y	2	4	7	8	9	4	6	8

Graf 4.2



Skúmajme jednotku G. Pri vstupne orientovanom modeli premietneme ju na efektívnu hranicu znížením jej vstupov tak, aby jej výstup zostal nezmenený. Dostaneme bod G´, ktorý leží na efektívnej hranici. BCC-efektivita jednotky G je podiel $\frac{SG'}{SG} = 0{,}79$ a referenčnú množinu jednotky G tvoria jednotky B a C, pričom G má rastúce výnosy z rozsahu.

Podobne ako v CCR-modeli, aj v BCC-modeli môžeme použiť výstupne orientovaný model. Tu však nie je rovnaká hodnota efektivity vstupne orientovaného modelu a prevrátená hodnota výstupne orientovaného modelu. Môžeme sa o tom ľahko presvedčiť. Efektivita vo výstupne orientovanom modeli jednotky G je na grafe 4.2 reprezentovaná podielom $\frac{TG''}{TG} = 1{,}25$, čoho prevrátená hodnota je 0,8. Dôvodom toho je, že efektívna hranica pre BCC nie je polpriamka tvaru $y = k.x$, ako je to pri CCR-modeli.

Zaujímavé je aj nasledujúce tvrdenie:

Veta 4.1: Pre hodnotu efektivity BCC-modelu θ_B a hodnotu efektivity CCR-modelu θ_C platí:

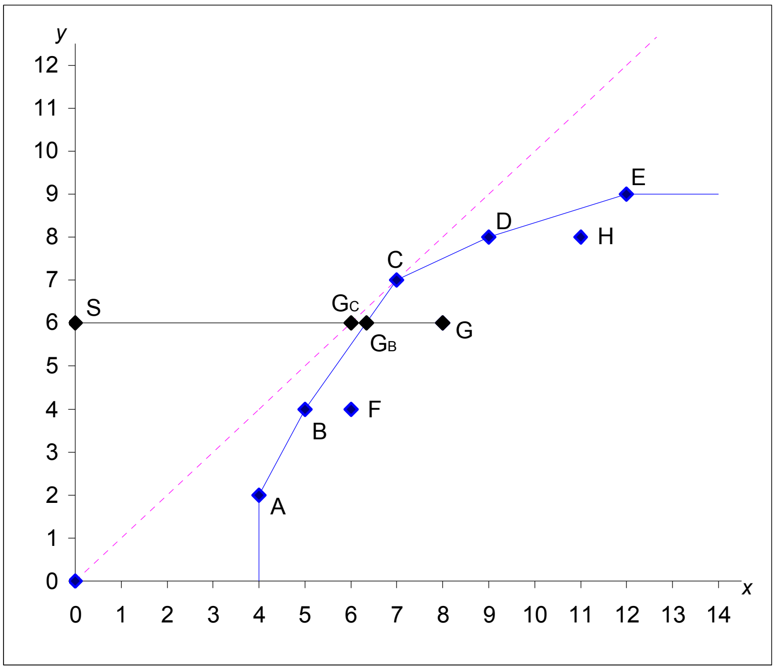
$$\theta_B \geq \theta_C .$$

Dôkaz: θ_C resp. θ_B sú optimálne hodnoty úloh (D) resp. (BCC). Tieto úlohy sú minimalizačné úlohy, ktoré majú rovnakú účelovú funkciu, a navyše množina prípustných riešení úlohy

(BCC) je podmnožinou množiny prípustných riešení úlohy (D). Preto hodnota účelovej funkcie úlohy (BCC) je väčšia alebo rovná sa hodnote účelovej funkcie úlohy (D).

Zaujímavý je aj grafický dôkaz tejto vety.

Graf 4.3: Porovnanie efektivity v CCR a BCC



Na grafe 4.3 sú znázornené jednotky z tabuľky 4.1. Prerušovaná čiara tvorí hranicu množiny výrobných možností pre CCR-model. Súvislá lomená čiara tvorí hranicu množiny výrobných možností pre BCC-model. Hodnota CCR-efektivity jednotky G je podiel $\frac{SG_C}{SG}$ a hodnota BCC-efektivity tej istej jednotky je podiel $\frac{SG_B}{SG}$. Platí, že $\frac{SG_C}{SG} \le \frac{SG_B}{SG}$, lebo $SG_C \le SG_B$. A to platí všeobecne pre všetky jednotky, lebo vzdialenosť efektívnej hranice pre CCR od osi *y* vždy menšia alebo sa rovná vzdialenosti efektívnej hranice pre BCC od osi *y*. □

Uvedené modely CCR a BCC sú invariantné vzhľadom na zmenu jednu jednotiek. To znamená, že hodnoty efektivity nezávisia od toho, či sú dáta uvedené v kilogramoch alebo tonách, v kilometroch alebo míľach, atď. Túto vlastnosť zaručujú váhové premenné, totiž ak použijeme 1000-krát väčšiu jednotku (napr. tony namiesto kilogramov), tak sa k príslušnej premennej jednoducho priradí 1000-krát väčšia váha.

Ďalšou zaujímavou vlastnosťou je invariantnosť vzhľadom na posun. V BCC-modeli sa efektívna hranica neurčuje pomocou priamky $y = k.x$, ale len pomocou samotných jednotiek. Preto hodnota efektivity vo vstupne orientovanom modeli nezávisí od vzdialenosti od osi x a takto je vstupne orientovaný model invariantný vzhľadom na posun výstupov. Podobne, vo výstupne orientovanom modeli hodnota efektivity nezávisí od vzdialenosti od osi y a takto výstupne orientovaný model je invariantný vzhľadom na posun vstupov. Túto vlastnosť môžeme využiť vtedy, ak sa medzi dátami vyskytujú aj záporné čísla.

4.2 Aditívny model

Aditívny model používa na určovanie efektivity len sklzy. Nepoužíva hodnotu efektivity ako bola θ pri predchádzajúcich modeloch, a preto nie je potrebné uvažovať o vstupnej či výstupnej orientácii modelu.

Existuje viac typov aditívnych modelov. Tieto majú podobnú množinu prípustných riešení, ako modely CCR a BCC, pričom líšia sa od nich iba účelovou funkciou a tým, že neobsahujú premennú θ.

4.2.1 Formulácia aditívneho modelu

Ako prvý uvedieme aditívny model, ktorý má množinu výrobných možností podobnú CCR-modelu, teda predpokladá konštantné výnosy z rozsahu:

$$\text{(AD-C)} \qquad \begin{aligned} \max_{s^-, s^+, \lambda} \quad & es^- + es^+ \\ & X\lambda + s^- = x_o \\ & Y\lambda - s^+ = y_o \\ & s^- \geq 0 \quad s^+ \geq 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

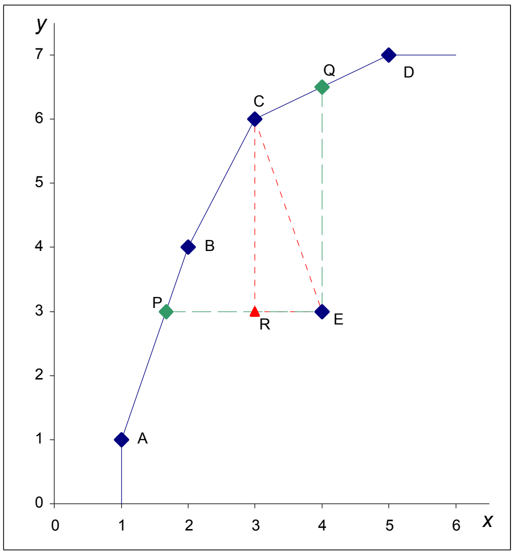
Rozdiel v ohraničeniach je, že v aditívnom modeli sa neznižujú vstupy úmerne pomocou skaláru θ (resp. nezvyšujú sa výstupy pomocou μ), ale pomocou sklzov, a tak sa táto premenná v modeli nevyskytuje. Aditívny model s variabilnými výnosmi z rozsahu obsahuje navyše podmienku konvexnosti, ako to už bolo uvedené pri BCC-modeli:

$$\text{(AD-V)} \qquad \begin{aligned} \max_{s^-, s^+, \lambda} \quad & es^- + es^+ \\ & X\lambda + s^- = x_o \\ & Y\lambda - s^+ = y_o \\ & e\lambda = 1 \\ & s^- \geq 0 \quad s^+ \geq 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

4.2.2 Grafická interpretácia

Použime model (AD-V) a skúmajme jednotku E, ktorá leží vo vnútri množiny výrobných možností.

Graf 4.4



Hľadáme riešenie maximálneho sklzu, pričom máme dva typy ohraničení. Ohraničenia $X\lambda + s^- = x_o$, $Y\lambda - s^+ = y_o$, $e\lambda = 1$ a $\lambda \geq 0$ tvoria množinu výrobných možností a ohraničenia na sklzy $s^+ \geq 0$ a $s^- \geq 0$ tvoria kvadrant, ktorý je vytvorený polpriamkami EP a EQ. Teda množinu prípustných riešení úlohy (AD-V) pre jednotku E tvorí päťuholník EPBCQ. Na tejto množine hľadáme najvzdialenejší bod od bodu E, pričom sa môžeme pohybovať iba „doľava" a „hore" (t.j. l_1 –metrikou alebo tzv. poštárskou metrikou).

4.2.3 Zovšeobecnenie modelu

V účelovej funkcii úloh (AD-C) a (AD-V) vystupujú všetky sklzy s rovnakou váhou. V praxi je však rozumné predpokladať, že vstupné a výstupné premenné majú rôznu váhu. Dôvodom je, že vstupy a výstupy môžu byť uvedené v rôznych jednotkách a ich hodnoty môžu byť rádovo veľmi odlišné. Preto sa namiesto účelovej funkcie $\max_{s^-,s^+,\lambda} es^- + es^+$ zvyčajne používa $\max_{s^-,s^+,\lambda} \omega^- s^- + \omega^+ s^+$, pričom vektory ω sa môžu určiť podľa nami preferovaných kritérií.

Často používaná je voľba váh prvýkrát použitá Pastorom a Lowellom v roku 1995, ktorí zvolili váhy ako prevrátené hodnoty štandardných odchýliek jednotlivých vstupných a výstupných premenných:

(PL) $$\omega_i^- = \frac{1}{\sigma_i^-} \text{ pre } i = 1,\dots,m \text{ a } \omega_r^+ = \frac{1}{\sigma_r^+} \text{ pre } r = 1,\dots,s\,.$$

Tiež vhodná je voľba váh autorov Coopera a Pastora, ktorí použili maximálne a minimálne hodnoty vstupných a výstupných premenných na určenie váh:

(CP)
$$\omega_i^- = \frac{1}{(m+s)(\max\limits_{j=1,\dots,n} x_{ij} - \min\limits_{j=1,\dots,n} x_{ij})}, i = 1,\dots,m$$
$$\omega_r^+ = \frac{1}{(m+s)(\max\limits_{j=1,\dots,n} y_{rj} - \min\limits_{j=1,\dots,n} y_{rj})}, r = 1,\dots,s$$

Na základe hociktorého z týchto modelov môžeme definovať efektivitu v aditívnom modeli nasledovne:

Definícia 4.3 (Definícia efektivity v aditívnom modeli):
Hovoríme, že DMU_o je efektívne podľa modelu (AD-C) resp. (AD-V) vtedy a len vtedy, ak všetky sklzy sú nulové, t.j. $s^{-*} = 0$ a $s^{+*} = 0$.

Aditívny model využíva absolútnu vzdialenosť pri výpočte. Preto jeho výhodou je, že na rozdiel od modelov CCR a BCC, je invariantný vzhľadom na posun v súradnicovom systéme, a to aj pri posune vstupov aj pri posune výstupov. Pri BCC-modeli sme potrebovali rozlíšiť vstupne a výstupne orientovaný model, pričom vstupne orientovaný model bol invariantný na posun výstupov a výstupne orientovaný model bol invariantný na posun vstupov. Aditívny model nie je orientovaný a zlučuje tieto dve vlastnosti.

Podrobnejšie sa problematike invariantnosti aditívnych modelov venovala vo svojej práci Némethová [4]. Podľa tejto práce aditívne modely s variabilnými výnosmi z rozsahu s použitím váh Pastora a Lowella alebo Coopera a Pastora sú invariantné aj na zmenu jednotiek, ale len v tom zmysle, že sa hodnoty účelových funkcií úloh rovnajú.

4.3 Model založený na sklzoch (SBM)

Model založený na sklzoch (v anglickej literatúre *Slack-Based Model* – ďalej len SBM) je špeciálna forma aditívneho modelu. Na meranie efektivity používa iba sklzy. Dôvodom vzniku tohto modelu bola potreba interpretovať výsledky aditívneho modelu jediným číslom z intervalu [0,1], podobne ako to bolo pri modeloch CCR a BCC.

4.3.1 Formulácia SBM

SBM používa model s nasledovnou účelovou funkciou:

$$\text{(SBM)} \qquad \min_{s^-, s^+, \lambda} \rho = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^-}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^+}{y_{ro}}}$$

Môžeme použiť konštantné alebo variabilné výnosy z rozsahu, teda môžeme si vybrať ohraničenia uvedené v predchádzajúcich častiach:

$$\begin{aligned} & X\lambda + s^- = x_o \\ & Y\lambda - s^+ = y_o \\ & (e\lambda = 1) \\ & s^- \geq 0 \qquad s^+ \geq 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

V tomto modeli predpokladáme, že vstupy sú nezáporné, pričom ak niektorý vstup je nulový, tak príslušnú zložku z účelovej funkcie vynecháme. V prípade, že niektorý výstup je nekladný, namiesto zlomku $\frac{s_r^+}{y_{ro}}$ zvolíme malé kladné číslo, ktoré môžeme interpretovať ako penalizácia.

Účelová funkcia úlohy (SBM) vyhovuje dôležitej požiadavke, že zvýšením sa hociktorého sklzu sa jej hodnota znižuje. Podľa definície 4.3 je jednotka v aditívnom modeli efektívna, ak má všetky sklzy nulové. V tomto prípade je $\rho = 1$.

Definícia 4.4 (Definícia efektivity v SBM):
Hovoríme, že DMU$_o$ je SBM-efektívne vtedy a len vtedy, ak $\rho^* = 1$.

Pozn.: (1) To je ekvivalentné s tým, že všetky sklzy sú nulové, t.j. $s^{-*} = 0$ a $s^{+*} = 0$.
(2) Referenčná množina neefektívnej jednotky je definovaná rovnako, ako pri predchádzajúcich modeloch.

Dôvodom, prečo je tento model invariantný na zmenu jednotiek je fakt, že sa v účelovej funkcii vyskytujú zlomky tvaru $\frac{s_i^-}{x_{io}}$ a $\frac{s_r^+}{y_{ro}}$, teda model počíta s relatívnymi hodnotami a takto sa jednotky takpovediac „zrušia“.

4.3.2 Riešenie SBM

Úloha (SBM) je úlohou matematického programovania. Preto je vhodné túto úlohu pretransformovať. Zavedením skaláru t a využitím myšlienky z tretej kapitoly pri prevedení úlohy (MP) na úlohu (LP) môžeme úlohu (SBM) prepísať na úlohu:

$$\min_{s^-, s^+, \lambda, t} \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{ts_i^-}{x_{io}}$$

(SBM´)

$$t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{ts_r^+}{y_{ro}} = 1$$
$$X\lambda + s^- = x_o$$
$$Y\lambda - s^+ = y_o$$
$$s^- \geq 0 \quad s^+ \geq 0$$
$$\lambda \geq 0 \quad t > 0$$

Následným zavedením premenných $S^- = ts^-$, $S^+ = ts^+$ a $\Lambda = t\lambda$ dostaneme nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$\min_{S^-, S^+, \Lambda, t} \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{S_i^-}{x_{io}}$$

(SBM´´)

$$t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{S_r^+}{y_{ro}} = 1$$
$$X\Lambda + S^- = tx_o$$
$$Y\Lambda - S^+ = ty_o$$
$$S^- \geq 0 \ S^+ \geq 0$$
$$\Lambda \geq 0 \quad t > 0$$

ktorú už vieme riešiť. Z optimálneho riešenia tejto úlohy potom spätnou transformáciou premenných dostaneme optimálne riešenie pôvodnej úlohy (SBM), pričom $\rho^* = \tau^*$ bude optimálna hodnota účelovej funkcie.

4.4 Kontrolovateľné a nekontrolovateľné premenné

Na konci tretej kapitoly sme uviedli, ako treba postupovať, ak niektoré premenné nie sú kontrolovateľné. Teraz uvedieme ďalší prístup na rozlišovanie kontrolovateľných a nekontrolovateľných premenných. Tento prístup je rozšírením aditívneho modelu. Publikoval ho Charnes a kol. v roku 1987.

$$
\text{(AD-N)} \qquad
\begin{aligned}
\max_{s^-, s^+, \lambda} \quad & \omega s^- + \omega s^+ \\
& X\lambda + s^- = x_o \\
& Y\lambda - s^+ = y_o \\
& s^- \le \beta x_o \\
& s^+ \le \gamma y_o \\
& s^- \ge 0 \quad s^+ \ge 0 \\
& \lambda \ge 0
\end{aligned}
$$

V tomto modeli β a γ sú vektory parametrov pre jednotlivé vstupy resp. výstupy, ktoré stanovíme na začiatku výpočtu. Označujú mieru kontrolovateľnosti premenných, ktorá sa prejavuje v ohraničeniach na sklzy. Nástrojom na zlepšenie jednotky v aditívnom modeli je totiž odstránenie sklzov. Komponenty vektora β (označme β_i, $i = 1,...,m$) môžu nadobúdať hodnoty 0 až 1, pričom $\beta_i = 0$ znamená úplnú nekontrolovateľnosť (lebo toto hovorí, že $s_i^- \le \beta_i x_o = 0$, t.j. $s_i^- = 0$) a $\beta_i = 1$ znamená úplnú kontrolovateľnosť premennej *i*. V prípade výstupných premenných komponenty vektora γ (označme γ_r, $r = 1,...,s$) môžu mať hodnoty 0 až nekonečno. $\gamma_r = 0$ znamená úplnú nekontrolovateľnosť premennej *r* a $\gamma_r \to \infty$ znamená, že premennú *r* môžeme úplne kontrolovať. Prípad $\gamma_r \to \infty$ dosiahneme vynechaním príslušnej podmienky.

4.5 Zhrnutie modelov

Na koniec tejto kapitoly sú zhrnuté vlastnosti prezentovaných modelov v nasledujúcich dvoch tabuľkách.

Tabuľka 4.2: Multiplikatívne modely

Model		CCR	CCR-O	BCC	BCC-O
Dáta	vstupy	$x \geq 0$ $x \neq 0$	$x \geq 0$ $x \neq 0$	$x \geq 0$ $x \neq 0$	voľné
	výstupy	voľné	voľné	voľné	$y \geq 0$ $y \neq 0$
Invariantnosť vzhľadom na posun	vstupy	×	×	×	✓
	výstupy	×	×	✓	×
Invariantnosť vzhľadom na zmenu jednotiek		✓	✓	✓	✓
Hodnota efektivity		[0,1]	[0,1]	(0,1]	(0,1]
Výnosy z rozsahu		CRS	CRS	VRS	VRS

Tabuľka 4.3: Aditívne modely

Model		AD	AD-PL	AD-CP	SBM
Dáta	vstupy	voľné	voľné	voľné	$x>0$
	výstupy	voľné	voľné	voľné	$x>0$
Invariantnosť vzhľadom na posun		len pri VRS	len pri VRS	len pri VRS	×
Invariantnosť vzhľadom na zmenu jednotiek		×	✓	✓	✓
Hodnota efektivity		×	×	×	(0,1]
Výnosy z rozsahu		CRS, VRS	CRS, VRS	CRS, VRS	CRS, VRS

Pozn.: 1) V aditívnych modeloch AD, AD-PL a AD-CP môžeme transformáciou hodnoty účelovej funkcie dosiahnuť číslo z intervalu (0,1], ktorú môžeme považovať za hodnotu efektivity. Najčastejšie sa používa transformácia $y = e^{-x}$, kde x je hodnota účelovej funkcie úlohy lineárneho programovania a nadobúda hodnotu z intervalu $[0, \infty)$.

2) V modeli založenom na sklzoch (SBM) môžu byť niektoré údaje aj nulové a v prípade výstupov môžeme pripustiť aj záporné hodnoty. Postup v takomto prípade je opísaný v časti 4.3.1.

5 Výber modelu

V predchádzajúcich kapitolách bolo uvedených niekoľko modelov. Aby sme mohli vybrať správny model pre našu analýzu, potrebujeme dôkladne preštudovať dáta.

Pri vyhodnocovaní efektívnosti pedagogickej práce sme mali k dispozícii dáta o počte pracovníkov, počty udelených kreditov pre bakalárov, magistrov a doktorandov, počet publikácií pre všetky skúmané katedry. Navyše boli k dispozícií výsledky študentskej ankety, ktoré vyjadrujú spokojnosť študentov s prácou jednotlivých vyučujúcich a hodia sa na meranie kvality vyučovania.

5.1 Počet premenných

Všeobecne sa tvrdí, že počet premenných by nemal presahovať tretinu počtu analyzovaných jednotiek. Preto je potrebné, aby sme zvolili vstupné a výstupné premenné tak, aby dobre znázornili prácu jednotlivých katedier, ale aby ich počet bol čo najmenší. Ak sa použije príliš veľa premenných, podľa našej analýzy bude veľa jednotiek efektívnych. Túto vlastnosť môžeme zdôvodniť tým, že pri väčšom počte premenných jednotky majú väčšiu voľnosť pri výbere váhových premenných. Táto vlastnosť je formulovaná v nasledujúcej vete.

Veta: Ak vo vstupne orientovanom CCR-modeli použijeme väčší počet premenných, tak hodnota efektivity θ bude väčšia alebo sa nezmení.

Dôkaz: Vetu dokážeme pre úlohu vyjadrenú v primárnom tvare. Predpokladajme, že zvýšime počet vstupov z m na k a zvýšime počet výstupov z s na r. V prípade m vstupov a s výstupov riešime nasledujúcu úlohu lineárneho programovania na výpočet efektivity θ:

$$\max_{u,v} \theta_o = u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \ldots + u_s y_{so}$$

$$\text{(LP1)} \quad \begin{aligned} \text{p.p.} \quad & v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \ldots + v_m x_{mo} = 1 \\ & u_1 y_{1j} + \ldots + u_s y_{sj} - v_1 x_{1j} - \ldots - v_m x_{mj} \le 0 \qquad j = 1,\ldots,n \\ & v_1, v_2, \ldots, v_m \ge 0 \\ & u_1, u_2, \ldots, u_s \ge 0 \end{aligned}$$

V prípade k vstupov a r výstupov riešime nasledujúcu úlohu:

$$\max_{u,v} \theta_o = u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \ldots + u_s y_{so} + u_{s+1} y_{s+1o} + \ldots + u_r y_{ro}$$

$$\text{(LP2)} \quad \begin{aligned} \text{p.p.} \quad & v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \ldots + v_m x_{mo} + v_{m+1} x_{m+1o} + \ldots + v_k x_{ko} = 1 \\ & u_1 y_{1j} + \ldots + u_s y_{sj} + u_{s+1} y_{s+1j} + \ldots + u_r y_{rj} - v_1 x_{1j} - \ldots - v_m x_{mj} - v_{m+1} x_{m+1j} - \ldots - v_k x_{kj} \le 0 \\ & \qquad j = 1,\ldots,n \\ & v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_k \ge 0 \\ & u_1, u_2, \ldots, u_s, u_{s+1}, \ldots, u_r \ge 0 \end{aligned}$$

Ako vidíme, ak sa nám zvýši počet premenných, tak sa nám zvýši rozmer úlohy lineárneho programovania. Aby sme mohli túto novú úlohu porovnať s pôvodnou, musíme pôvodnú úlohu (LP1) pretransformovať na úlohu, ktorá má rovnaký rozmer, ako úloha (LP2). Preto úlohu (LP1) pretransformujeme pridaním zvyšných premenných z úlohy (LP2).

Pôvodnú úlohu môžeme prepísať na nasledujúci tvar:

$$\max_{u,v} \theta_o = u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \ldots + u_s y_{so} + u_{s+1} y_{s+1o} + \ldots + u_r y_{ro}$$

$$\text{(LP1}'\text{)} \quad \begin{aligned} \text{p.p.} \quad & v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \ldots + v_m x_{mo} + v_{m+1} x_{m+1o} + \ldots + v_k x_{ko} = 1 \\ & u_1 y_{1j} + \ldots + u_s y_{sj} + u_{s+1} y_{s+1j} + \ldots + u_r y_{rj} - v_1 x_{1j} - \ldots - v_m x_{mj} - v_{m+1} x_{m+1j} - \ldots - v_k x_{kj} \le 0 \\ & \qquad j = 1,\ldots,n \\ & v_1, v_2, \ldots, v_m \ge 0 \qquad v_{m+1}, \ldots, v_k = 0 \\ & u_1, u_2, \ldots, u_s \ge 0 \qquad u_{s+1}, \ldots, u_r = 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že ani hodnota účelovej funkcie, ani obmedzenia sa v úlohe nezmenili, lebo nové premenné $u_{s+1},...,u_r,v_{m+1},...,v_k$ sme položili 0. Teraz už môžeme tieto dve úlohy porovnať.

Účelová funkcia úloh (LP1´) a (LP2) je rovnaká. V úlohe (LP1´) máme silnejšie obmedzenia, nakoľko nové premenné musia byť rovné nule, kým v úlohe (LP2) sa vyžaduje iba nezápornosť týchto premenných. Ostatné obmedzenia sú rovnaké v oboch prípadoch. Preto úloha (LP2) má väčšiu množinu prípustných riešení. Tieto úlohy sú maximalizačné úlohy a preto z toho, že (LP2) má väčšiu množinu prípustných riešení vyplýva to, že hodnota jej účelovej funkcie je väčšia alebo sa rovná hodnote účelovej funkcie úlohy (LP1´), teda aj (LP1). □

Aj pre ostatné modely sa dajú formulovať takéto tvrdenia, ktoré sa dokazujú podobným spôsobom. Pri aditívnom modeli sa zvýši počet sklzov, a využitím tohto faktu sa ukáže, že množina prípustných riešení úlohy s väčším počtom premenných je väčšia.

5.2 Charakteristika dát

V modeli boli použité dáta zo zimného semestra školského roku 2004/05. Od tohto školského roku je platné nové členenie katedier, v ktorom sa zlučovaním doterajších katedier znížil ich počet z pôvodných 27 na 10. To znamená, že v našej analýze bola vyhodnocovaná práca desiatich katedier našej fakulty. Pre takýto malý počet jednotiek je použitie DEA ťažšie. Menší počet jednotiek totiž vyžaduje od nás, aby sme zvolili menej vstupných a výstupných premenných.

Tabuľka 5.1: Katedry

MATEMATICKÉ KATEDRY
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky – KAGDM
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky – KAMS
Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky – KMANM
FYZIKÁLNE KATEDRY
Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie – KAFZM
Katedra experimentálnej fyziky – KEF
Katedra jadrovej fyziky a biofyziky – KJFB
Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky – KTFDF

INFORMATICKÉ KATEDRY
Katedra aplikovanej informatiky – KAI
Katedra informatiky – KI
Katedra základov a vyučovania informatiky – KZVI

Dve podporné katedry našej fakulty (Katedra jazykovej prípravy a Katedra telesnej výchovy a športu) neboli do analýzy zahrnuté.

Jediný vstup modelu tvorí počet pracovníkov skúmaných katedier. Do tejto položky boli zahrnutí všetci vyučujúci aj vedecký pracovníci katedier, pričom každý pracovník bol započítaný s takou váhou, na aký úväzok pracuje.

Pri výbere výstupov bolo potrebné postupovať opatrne, nakoľko sme potrebovali, aby počet premenných v modeli nebol príliš veľký. Preto počet udelených kreditov pre bakalárov a magistrov bol zahrnutý do jednej premennej. Kredity udelené pre magisterské štúdium sa počítali s dvojnásobnou váhou. Dôvodom toho je, že vyučovanie vo vyšších ročníkoch vyžaduje vyššiu mieru pripravenosti zo strany vyučujúceho. Aj v prípade doktorandov sme zaobchádzali podobne. Kredity udelené pre interných a externých doktorandov pred minimovou skúškou a po nej sme zahrnuli tiež do jednej premennej. Kredity pre interných doktorandov pred skúškou boli zahrnuté s váhou 3 a kredity pre doktorandov po skúške boli zahrnuté s váhou 4. V prípade externých doktorandov boli tieto váhy 2 resp. 3. Tieto váhy boli poskytnuté školou spolu s dátami.

Publikovanie článkov v rôznych uznávaných vedeckých časopisoch tvorí popri vyučovaní ďalšiu dôležitú časť práce na katedrách. Vedecká práca je časovo náročná, experimentovanie alebo výskum môže trvať aj roky, a preto bolo rozumné zohľadniť dlhšiu periódu v rámci tohto výstupu. Navyše údaje pre skúmaný semester ešte neboli k dispozícii, preto sme počítali s údajmi z rokov 2002–2004. Táto premenná zahrňuje počet vedeckých prác, publikácií v časopisoch, príspevkov na konferenciách.

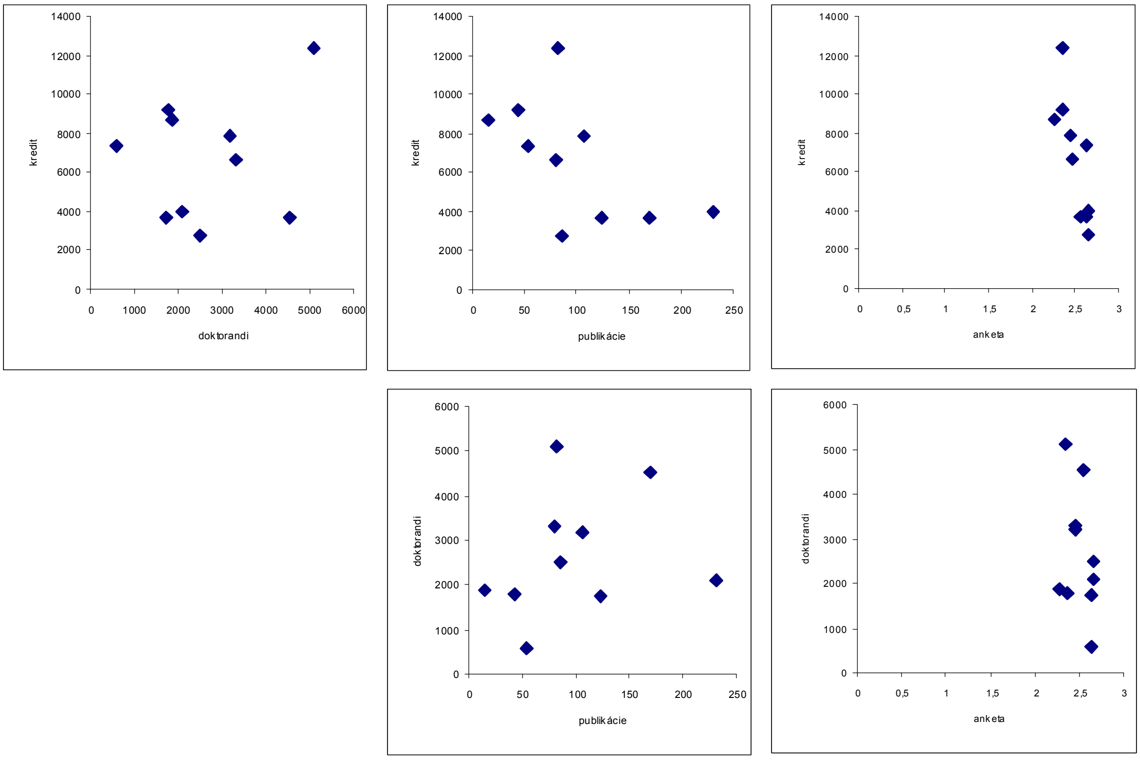
Na meranie kvality vyučovania boli použité výsledky študentskej ankety, na ktorej sa zúčastnilo 44,25% študentov. Do výsledkov boli zahrnutí všetci vyučujúci, ktorý dostali aspoň 5 hodnotení na ankete. Títo vyučujúci boli priradení k svojim katedrám a pre každú katedru sa určila priemerná známka. Keďže v ankete 1 znamenala najlepšiu známku a 4 najhoršiu, pre naše potreby to bolo potrebné pretransformovať. Použili sme transformáciu $y = 4-x$ a takto sme dostali hodnoty z intervalu [0,3], pričom 0 je najhoršie možné hodnotenie a 3 je najlepšie. Hodnotenie vyučujúcich, ktorí dostali menej ako 5 hlasov bolo považované (aj tvorcami ankety) za nespoľahlivé.

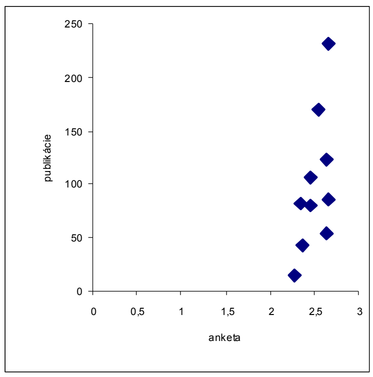
Tabuľka 5.2: Dáta

Katedra	Pracovníci	Kredit	Doktorandi	Publikácie	Anketa
KAFZM	29,62	3687	1740	124	2,63
KAGDM	30,30	12381	5100	83	2,35
KAI	31,15	6662	3300	80	2,46
KAMS	31,00	7852	3180	107	2,45
KEF	32,65	3986	2100	231	2,66
KI	20,48	8650	1860	15	2,27
KJFB	32,25	3710	4530	169	2,56
KMANM	26,83	9188	1770	43	2,36
KTFDF	26,30	2807	2490	85	2,66
KZVI	12,33	7408	600	54	2,64

V prípade ak niektoré premenné sú vysoko korelované, je možné ich počet zredukovať ďalším zlučovaním alebo vynechaním niektorej z nich. Totiž ak dve premenné majú vysoký korelačný koeficient, tak jedna z nich dobre vysvetľuje tú druhú a je zbytočné použiť obe premenné v modeli. Preto sme sa pozreli aj na korelácie medzi výstupnými premennými.

Graf 5.1: Korelácie medzi výstupnými premennými





Tabuľka 5.3: Korelácie medzi výstupnými premennými

Korelácie	Kredit	Doktorandi	Publikácie	Anketa
Kredit		0,23	-0,58	-0,81
Doktorandi			0,25	-0,29
Publikácie				0,60
Anketa				

Žiadny z korelačných koeficientov nebol taký veľký, aby sme niektorú premennú mohli vynechať. Preto sme v analýze použili všetky uvedené premenné.

5.3 Výnosy z rozsahu

Ako to už bolo uvedené v teoretickej časti tejto práce, pri analýze môžeme vyberať medzi konštantnými a variabilnými výnosmi z rozsahu. V našom prípade nemá zmysel uvažovať o variabilných výnosoch z rozsahu, nakoľko môžeme predpokladať, že uvedené výstupy sú úmerné počtu pracovníkov. Jedine výsledky študentskej ankety sú takého charakteru, že vyšší počet pracovníkov nemusí indikovať priamo úmerné zvýšenie hodnotenia. Všetky ostatné premenné nás podnecujú predpokladať konštantné výnosy z rozsahu.

Na základe vety 4.1 a jej dôkazu môžeme povedať, že hodnota efektivity pre model s variabilnými výnosmi z rozsahu je väčšia alebo sa rovná hodnote efektivity pre model s konštantnými výnosmi z rozsahu. Vo všeobecnosti teda môžeme očakávať, že model s variabilnými výnosmi z rozsahu nám označí za efektívne viac jednotiek ako model s konštantnými výnosmi z rozsahu. V našej analýze máme relatívne veľký počet premenných a môžeme očakávať, že pomerne veľa katedier bude označených ako efektívnych. Použitím modelu s variabilnými výnosmi z rozsahu by sa počet efektívnych jednotiek ešte zvýšil.

5.4 Typ modelu

Nakoniec je ešte potrebné rozhodnúť sa, že aký typ modelu použijeme: *multiplikatívny* alebo *aditívny*. Nakoľko sme sa rozhodli použiť model s konštantnými výnosmi z rozsahu, z uvedených multiplikatívnych modelov nám ostáva CCR-model. Z aditívnych modelov môžeme použiť hociktorý z uvedených a použijeme v ňom ohraničenia pre konštantné výnosy z rozsahu.

CCR-model má nevýhodu, že efektivitu nemôžeme určiť jediným číslom. Tento model totiž v hodnote efektivity θ nezahŕňa prítomnosť alebo neprítomnosť sklzov. Preto sme sa rozhodli používať aditívny model.

Klasický aditívny model z kapitoly 4.2 s jednotkovými váhami nie je najlepší výber, nakoľko v dátach máme rádovo rôzne hodnoty. Takto by niektoré premenné ovplyvnili hodnotu účelovej funkcie vo väčšej miere ako iné. Použitím váh Pastora a Lowella alebo

Coopera a Pastora sa tento problém jednoducho odstráni. Navyše tieto modely sú invariantné na zmenu jednotiek. Preto sme sa pozreli, aké váhy by sme dostali pomocou vzťahov (PL) a (CP).

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené váhy vypočítané podľa vzťahov (PL) a (CP). Na približné znázornenie akou váhou sa podieľajú jednotlivé premenné v hodnote účelovej funkcie, sú uvedené aj priemerné hodnoty jednotlivých premenných vynásobené s príslušnými váhami.

Tabuľka 5.4: Váhy pre jednotlivé premenné v aditívnom modeli

	Pracovníci	Kredit	Doktorandi	Publikácie	Anketa
Váhy podľa PL	0,1564	0,000326	0,0007277	0,01580	6,88
Váhy podľa CP	0,0098	0,000021	0,0000444	0,00093	0,51
Priemerná hodnota (P)	27,291	6633,1	2667	99,1	2,504
P×PL	4,2688	2,1636	1,9408	1,5660	17,22
P×CP	0,2686	0,13856	0,1185	0,0918	1,28

Vidíme, že pri použití váh podľa Pastora a Lowella sa priradí veľmi veľká váha pre výsledky študentskej ankety. Je to pôsobené tým, že štandardná odchýlka týchto hodnôt je príliš malá, a takto váha vypočítaná vzorcom $\omega_r^+ = \dfrac{1}{\sigma_r^+}$ je veľká. Preto túto voľbu váh sme zamietli.

V prípade voľby váh podľa Coopera a Pastora je to o niečo lepšie, ale k výsledkom študentskej ankety sa priraďuje stále pomerne veľká váha.

V modeli založenom na sklzoch (SBM) je tento problém vyriešený. V tomto modeli sa v účelovej funkcii používajú relatívne sklzy, teda sklzy sa porovnávajú s hodnotami premennej a každý „relatívny sklz“ má rovnakú váhu. Celkovo model založený na sklzoch vyhovuje pre našu analýzu, a preto sme sa rozhodli použiť tento model.

Na porovnanie uvedieme aj niektoré výsledky z aditívneho modelu s voľbou váh Coopera a Pastora, nakoľko tieto váhy sú celkom dobré odhliadnuc od váhy pre výsledky študentskej ankety.

5.5 Kontrolovateľné a nekontrolovateľné premenné

Počet pracovníkov môžeme považovať za kontrolovateľnú premennú, nakoľko katedry sú schopné meniť počet pracovníkov podľa vlastnej potreby. Teda v prípade, že katedra je neefektívna, zníženie počtu pracovníkov by ju mohla posunúť na efektívnu hranicu alebo bližšie k nej.

Podobne aj premenné *kredit* a *doktorandi* sme považovali za kontrolovateľné. Počet udelených kreditov sa napríklad dá zvýšiť prednášaním ďalších predmetov alebo podnecovaním študentov iných odborov zapísať si niektorý z predmetov katedry ako voliteľný predmet. Počet doktorandov je tiež ukazovateľ, ktorý sa dá zvýšiť a týmto dosiahnuť vyššiu efektivitu.

Zvýšením vedeckej činnosti sa dá zvýšiť aj počet publikácií, preto sme považovali aj túto premennú za úplne kontrolovateľnú.

Hodnotenie na študentskej ankete je premenná, ktorá prostredníctvom názoru študentov ohodnocuje kvalitu práce na katedrách. Kvalitu štúdia však nemožno zmeniť z jedného semestra na druhý, a pravdepodobne ani zvýšenie kvality sa neprejaví hneď na názore študentov. Teda katedry nemôžu priamo ovplyvniť hodnotu tejto premennej. Preto sme sa rozhodli túto premennú označiť ako nekontrolovateľnú. Hodnota tejto premennej je navyše ohraničená a nakoľko sú len malé rozdiely medzi hodnotami pre jednotlivé jednotky, malá zmena v hodnote by sa mohla značne prejaviť vo výsledkoch. Preto je vhodné používať model, v ktorom sú sklzy pre premennú *anketa* fixované na nulu. Riešenie modelu nám teda dá návod ako zvýšiť efektivitu pomocou iných premenných a nie pomocou hodnotenia študentskej ankety.

6 Výsledky

V tejto kapitole uvedieme výsledky na základe zvoleného modelu založenom na sklzoch. Tiež uvedieme výsledky z alternatívneho modelu, aditívneho modelu s voľbou váh Coopera a Pastora, ktoré potom porovnáme s výsledkami SBM. Ďalej v tejto časti uvedieme výsledky ďalších analýz.

6.1 Výsledky analýzy pomocou SBM

Na základe kritérií z predchádzajúcej kapitoly sme pomocou úlohy (SBM) vypočítali hodnoty efektivity pre všetkých 10 skúmaných katedier. Tieto výsledky sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke.

Výstup programu na riešenie modelu založenom na sklzoch sme vložili do tabuľky 6.1. Pre každú katedru je v nej uvedená hodnota efektivity, sklzy pre všetky premenné, a hodnoty λ. Do tabuľky sme vložili len stĺpce pre tie komponenty λ, ktoré reprezentovali efektívne jednotky. Nulové hodnoty sme do tabuľky kvôli lepšej prehľadnosti nezapísali.

Tabuľka 6.1: Výsledky analýzy pomocou modelu založenom na sklzoch

	Hodnota efektivity	Sklzy					Lambda			
		Pracovníci	Kredit	Doktorandi	Publikácie	Anketa	KAGDM	KEF	KJFB	KZVI
KAFZM	0,58		6238	2043			0,61	0,28		0,18
KAGDM	1,00						1,00			
KAI	0,68	7,33	3431				0,58	0,05		0,36
KAMS	0,80	5,36	1150				0,50	0,22		0,26
KEF	1,00							1,00		
KI	0,48			756	59,24		0,44	0,07		0,40
KJFB	1,00								1,00	
KMANM	0,59	7,24		791	20,76		0,44			0,50
KTFDF	0,52	4,54	6521				0,38	0,10		0,57
KZVI	1,00									1,00

Ako z tabuľky vidíme, štyri z desiatich katedier malo efektivitu 1, t.j. bolo efektívnych. Sú to *Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky*, *Katedra experimentálnej fyziky*, *Katedra jadrovej fyziky a biofyziky* a *Katedra základov a vyučovania informatiky*. Ostatné katedry boli na základe nášho modelu neefektívne a ich miera efektivity je uvedená v tabuľke.

Efektívne jednotky nemajú v žiadnej premennej sklzy a ležia na efektívnej hranici. Neefektívne jednotky neležia na efektívnej hranici a aby sa dostali na túto hranicu, potrebujú počas ich činnosti znížiť vstupy alebo zvýšiť výstupy. Napríklad *Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie* má hodnotu efektivity 0,58 a jej neefektívnosť je zapríčinená sklzami v premenných *kredit* a *doktorandi*. Ak by sa odstránili sklzy uvedené v tabuľke, jednotka by sa dostala na efektívnu hranicu. Ďalej vidíme, že referenčnú množinu pre túto katedru tvoria *KAGDM*, *KEF* a *KZVI*. Na základe hodnôt λ môžeme povedať, že v najväčšej miere je táto katedra porovnávaná s *Katedrou algebry, geometrie a didaktiky matematiky*.

Podobne, ak sa pozrieme na *Katedru matematickej analýzy a numerickej matematiky*, tak podľa hodnoty efektivity 0,59 môžeme určiť, že ani táto katedra nie je efektívna. Na efektívnu hranicu by sa mohla dostať znížením počtu pracovníkov o 7,24 a súčasne zvýšením počtu udelených kreditov pre doktorandov o 791 a taktiež zintenzívnením vedeckej práce. Sklz pre publikácie je 20,76 za tri roky, t.j. potrebovala by produkovať zhruba o 7 publikácií viac za rok. Táto katedra je v približne rovnakej miere porovnávaná s katedrami *KAGDM* a *KZVI*. Podobne môžeme postupovať aj v prípade ostatných katedier. Nakoľko sme premennú *anketa* považovali za nekontrolovateľnú premennú, žiadna z jednotiek nemôže mať sklz v tejto premennej.

Pri efektívnych katedrách je zaujímavé, že ako často sa vyskytujú v referenčných množinách neefektívnych jednotiek. *Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky* a

Katedra základov a vyučovania informatiky vystupuje v referenčnej množine všetkých šiestich neefektívnych katedier. *Katedra experimentálnej fyziky* vystupuje v referenčnej množine piatich neefektívnych jednotiek. *Katedra jadrovej fyziky a biofyziky* netvorí referenčnú množinu žiadnej neefektívnej jednotky, teda napriek tomu, že táto katedra je efektívna, žiadna neefektívna jednotka nie je porovnávaná s touto katedrou.

6.2 Výsledky aditívneho modelu

V tejto časti uvedieme výsledky aditívneho modelu s voľbou váh Coopera a Pastora. Podobne ako pri SBM, použili sme konštantné výnosy z rozsahu a výsledky študentskej ankety sme považovali za nekontrolovateľnú premennú. Oproti SBM sa zmenili niektoré hodnoty efektivity, avšak efektívne katedry sú efektívne aj podľa tohto modelu.

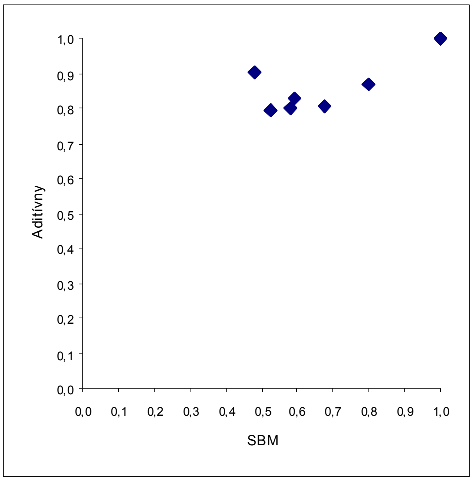
Tabuľka 6.2: Výsledky analýzy pomocou aditívneho modelu s voľbou váh Coopera a Pastora

	Hodnota efektivity	Hodnota účelovej funkcie	Sklzy					Lambda			
			Prac.	Kredit	Doktorandi	Publikácie	Anketa	KAGDM	KEF	KJFB	KZVI
KAFZM	0,80	0,22		6238	2043			0,61	0,28		0,18
KAGDM	1,00	0,00						1,00			
KAI	0,80	0,22		6128	1904	5,86		1,02			0,03
KAMS	0,87	0,14		3413	1493			0,85	0,15		0,02
KEF	1,00	0,00							1,00		
KI	0,90	0,10		678	990	49,29		0,51			0,40
KJFB	1,00	0,00								1,00	
KMANM	0,83	0,19		2168	2501	33,85		0,82			0,17
KTFDF	0,79	0,23		8438	1264			0,68	0,04		0,37
KZVI	1,00	0,00									1,00

Tabuľka 6.3: Porovnanie hodnôt efektivity dvoch použitých modelov

	SBM	Aditívny
KAFZM	0,58	0,8
KAGDM	1	1
KAI	0,68	0,8
KAMS	0,8	0,87
KEF	1	1
KI	0,48	0,9
KJFB	1	1
KMANM	0,59	0,83
KTFDF	0,52	0,79
KZVI	1	1

Graf 6.1: Grafické porovnanie hodnôt efektivity



Korelačný koeficient medzi dvoma hodnotami efektivity je 0,865. Dôvodom prečo nie sú hodnoty efektivity úplne korelované je, že v aditívnom modeli s váhami Coopera a Pastora nemajú jednotlivé sklzy rovnakú váhu a tak niektoré „nedostatky“ vystupujú s väčšou váhou v hodnote účelovej funkcie úlohy lineárneho programovania.

6.3 Analýza na základe kvalitatívnych a kvantitatívnych výstupov

Doteraz sme sa v našej analýze zaoberali s celkovou efektivitou daných jednotiek a použili sme všetky výstupy. Môže nás však zaujímať, akú efektivitu majú jednotlivé katedry v rôznych oblastiach činnosti. Napríklad je vhodné zistiť, ktoré katedry vynikajú v kvalite práce a ktoré sú zamerané skôr na kvantitu. Preto sme sa rozhodli spraviť kvalitatívnu a kvantitatívnu analýzu.

Na tento účel sme rozdelili výstupy na dve skupiny. Premenné *anketa* a *publikácie* sme považovali ako premenné charakterizujúce kvalitu práce. Premennú *kredit* sme považovali ako premennú, ktorá skôr vyjadruje zameranie na množstvo. Počet udelených kreditov pre doktorandov sme sa rozhodli rozdeliť na dve premenné: na počet kreditov udelených pre doktorandov pred minimovou skúškou a na počet kreditov udelených pre doktorandov po minimovej skúške. Hodnoty týchto premenných sú uvedené v tabuľke 6.4. Veľký počet prijatých doktorandov nezaručuje vysokú kvalitu práce, ale vyžaduje viac času od pracovníkov katedry venovať sa svojim doktorandom. Preto premennú vyjadrujúcu počet kreditov udelených pre doktorandov pred minimovou skúškou sme považovali za kvantitatívnu premennú. Na druhej strane doktorandi, ktorí už zložili minimovú skúšku predstavujú výsledok kvalitnej práce zo strany katedry. Preto sme počet kreditov udelených pre doktorandov po minimovej skúške použili ako kvalitatívnu premennú.

Tabuľka 6.4: Rozdelenie kreditov pre doktorandov

Katedra	Pred skúškou	Po skúške
KAFZM	1410	330
KAGDM	3720	1380
KAI	2640	660
KAMS	2820	360
KEF	1740	360
KI	1680	180
KJFB	2430	2100
KMANM	930	840
KTFDF	1710	780
KZVI	600	0

Na výpočet efektivity sme použili model založený na sklzoch. Premennú *anketa* sme považovali opäť za nekontrolovateľnú. Výsledky kvalitatívnej resp. kvantitatívnej analýzy sú uvedené v tabuľke 6.5 resp. 6.6.

Tabuľka 6.5: Výsledky kvalitatívnej analýzy

	Hodnota efektivity	Sklzy				Lambda		
		Pracovníci	Po skúške	Publikácie	Anketa	KEF	KJFB	KZVI
KAFZM	0,39		1464	29,44			0,85	0,17
KAGDM	0,69	5,99		41,71			0,66	0,25
KAI	0,49	0,16	1358	82,40			0,96	
KAMS	0,37	0,14	1650	54,74			0,96	
KEF	1,00					1,00		
KI	0,22		842	88,21			0,49	0,39
KJFB	1,00						1,00	
KMANM	0,49		796	96,13			0,78	0,14
KTFDF	0,68		656	49,16			0,68	0,34
KZVI	1,00							1,00

Pozn.: *KZVI* nemala žiadnych doktorandov po minimovej skúške, nakoľko prví doktorandi tejto katedry nastúpili len v minulom školskom roku. V prípade, ak niektorý výstup je nulový, môžeme nahradiť príslušnú zložku účelovej funkcie nejakou penalizáciou. V takomto prípade však jednotka sa stane automaticky neefektívnou, jej hodnota efektivity bude menšia ako 1 aj napriek tomu, že jednotka nemá žiadne sklzy. To sa stalo aj v prípade *KZVI* v našej kvalitatívnej analýze. Preto namiesto toho, aby sme zvolili nejakú priamu penalizáciu, použili sme iný postup. Nahradili sme v dátach 0 za 10, čo je v porovnaní s kreditmi udelenými inými katedrami veľmi malé číslo. Potom sme použili štandardný model založený na sklzoch. Takto bola táto katedra označená ako efektívna. Pri takomto postupe sa hodnota efektivity môže veľmi znížiť. Ak sa to stane, je vhodnejšie použiť metódu s penalizáciou.

Tabuľka 6.6: Výsledky kvantitatívnej analýzy

	Hodnota efektivity	Sklzy			Lambda	
		Pracovníci	Kredit	Pred skúškou	KAGDM	KZVI
KAFZM	0,34	18,14	1006		0,38	
KAGDM	1,00				1,00	
KAI	0,59		9138		0,50	1,30
KAMS	0,68	8,03	1534		0,76	
KEF	0,34		15238		0,07	2,48
KI	0,82			726	0,63	0,12
KJFB	0,36		13434		0,38	1,67
KMANM	0,42	4,34		1831	0,74	
KTFDF	0,32		11879		0,19	1,66
KZVI	1,00					1,00

V kvalitatívnej analýze boli efektívne tri katedry: *Katedra experimentálnej fyziky*, *Katedra jadrovej fyziky a biofyziky* a *Katedra základov a vyučovania informatiky*. Ostatné katedry boli neefektívne. V kvantitatívnej analýze boli efektívne len dve katedry: *Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky* a *Katedra základov a vyučovania informatiky*. Zaujímavé je, že v kvantitatívnej analýze mali najnižšiu efektivitu štyri fyzikálne katedry.

Hodnoty efektivít v kvalitatívnej i kvantitatívnej analýze boli v porovnaní s analýzou s použitím všetkých premenných u väčšine katedier menšie. Pri týchto analýzach je však najpodstatnejšie porovnanie hodnôt efektivity. V prípade, ak niektorá katedra má vysokú efektivitu v kvantitatívnej analýze a nízku v kvalitatívnej, tak môžeme povedať, že uprednostňuje množstvo vyučovania na úkor kvality. Toto platí napríklad pre *Katedru informatiky*, hoci nebola efektívna ani v kvalitatívnej analýze. Niektoré katedry sa na druhej strane zameriavajú na kvalitu, pričom zaostávajú z kvantitatívneho hľadiska, napríklad *Katedra experimentálnej fyziky* a *Katedra jadrovej fyziky a biofyziky*. Porovnanie hodnôt efektivity je uvedené v tabuľke 6.7. Tabuľka 6.8 obsahuje korelácie medzi hodnotami efektivity, ktoré sú znázornené aj na grafe 6.2.

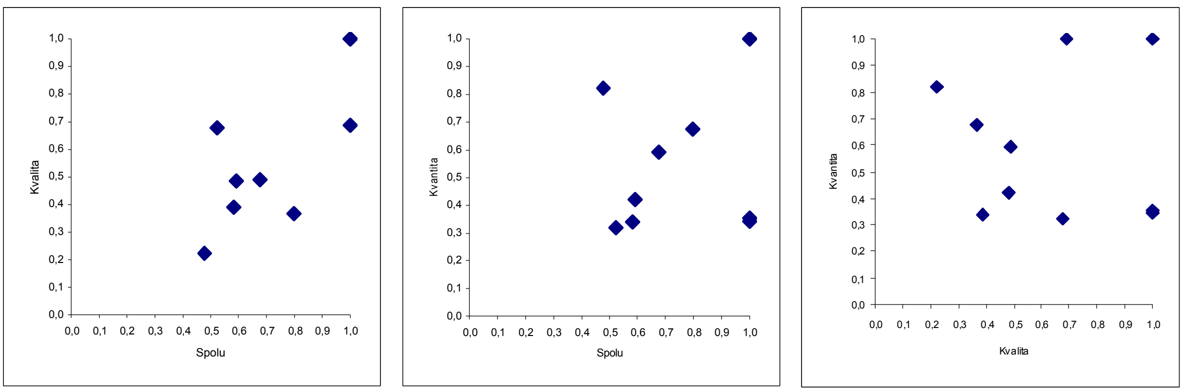
Tabuľka 6.7: Porovnanie efektivít

	Spolu	Kvalita	Kvantita
KAFZM	0,58	0,39	0,34
KAGDM	1,00	0,69	1,00
KAI	0,68	0,49	0,59
KAMS	0,80	0,37	0,68
KEF	1,00	1,00	0,34
KI	0,48	0,22	0,82
KJFB	1,00	1,00	0,36
KMANM	0,59	0,49	0,42
KTFDF	0,52	0,68	0,32
KZVI	1,00	1,00	1,00

Tabuľka 6.8: Korelácie medzi efektivitami rôznych analýz

	Spolu	Kvalita	Kvantita
Spolu		0,793164	0,286666
Kvalita			-0,0698
Kvantita			

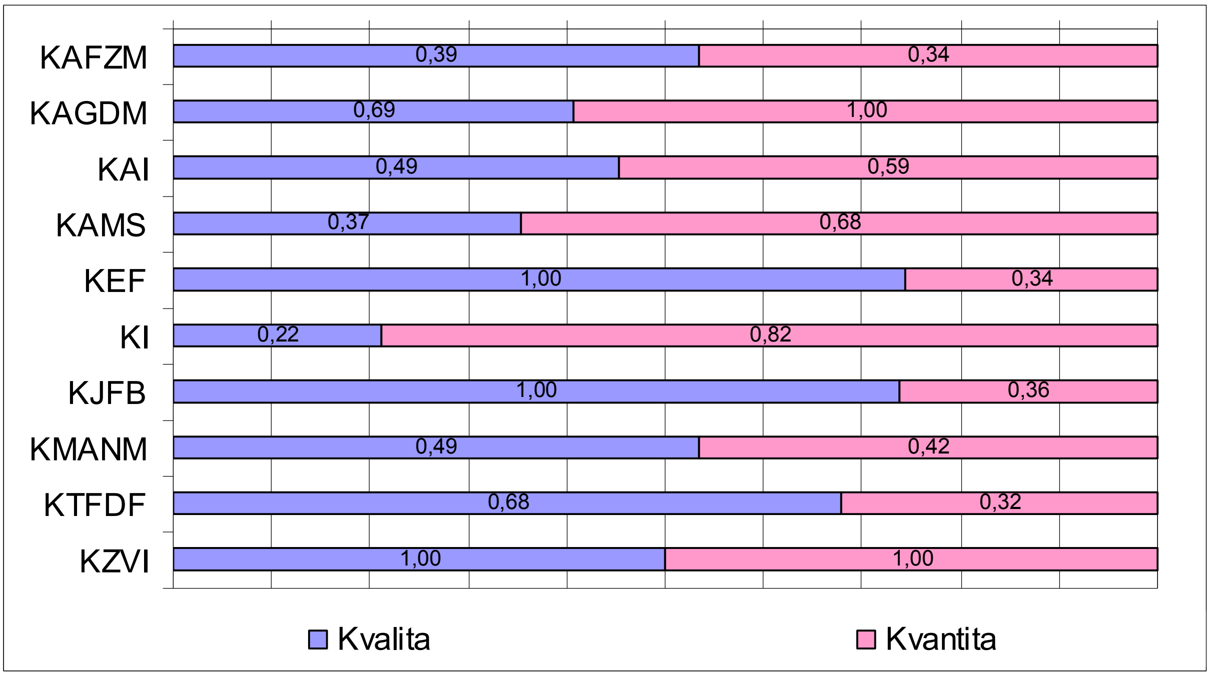
Graf 6.2: Grafické porovnanie hodnôt efektivity



Korelácie ukazujú, že je celkom vysoká súvislosť medzi výsledkami kvalitatívnej a celkovej analýzy. Na druhej strane je prekvapivá hodnota korelácie medzi výsledkami kvalitatívnej a kvantitatívnej analýzy. Očakávali sme, že medzi kvalitou a kvantitou bude záporná korelácia, čo by naznačovala, že jednotka, ktorá má vysokú efektivitu v kvalitatívnej analýze, bude mať nízku v kvantitatívnej a opačne. Hodnotu –0,0698 však môžeme považovať za skoro nulovú, a teda žiadnu lineárnu súvislosť nevieme preukázať.

Zameranie na kvalitu alebo kvantitu sme znázornili na grafe 6.3. Na ľavej strane sú hodnoty efektivity kvalitatívnej analýzy a na pravej sú hodnoty efektivity kvantitatívnej analýzy. Je dobre viditeľné, že u *KEF* a *KJFB* jednoznačne prevyšuje kvalita, kým *KI* je predovšetkým zameraná na kvantitu. *KZVI* bola efektívna v oboch prípadoch, a preto je pre túto katedru reprezentovaná aj kvalita aj kvantita rovnakou mierou.

Graf 6.3: Zameranie na kvalitu alebo kvantitu



6.4 Analýza pedagogickej práce

Nasledujúca analýza je zameraná výlučne na pedagogickú prácu. V modeli sme použili len tie premenné, ktoré súvisia priamo s pedagogickou prácou a preto sme vynechali premennú *publikácie*. Nakoľko väčšina vedeckých pracovníkov aj vyučuje na našej fakulte, vstupnú premennú *pracovníci* sme nezamenili za premennú vyjadrujúcu len počet vyučujúcich. Výsledky analýzy sú v tabuľke 6.8.

Tabuľka 6.8: Analýza čistej pedagogickej práce

	Hodnota efektivity	Sklzy				Lambda	
		Pracovníci	Kredit	Doktorandi	Anketa	KAGDM	KZVI
KAFZM	0,39	12,50	5141			0,25	0,77
KAGDM	1,00					1,00	
KAI	0,63	8,06	3715			0,60	0,40
KAMS	0,66	8,46	2347			0,57	0,42
KEF	0,40	13,90	5373			0,33	0,72
KI	0,82	2,26		455		0,39	0,51
KJFB	0,50	3,58	8477			0,86	0,20
KMANM	0,64	7,24		791		0,44	0,50
KTFDF	0,42	5,90	7047			0,41	0,64
KZVI	1,00						1,00

Z hľadiska pedagogickej práce boli efektívne len dve katedry: *Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky* a *Katedra základov a vyučovania informatiky*. Sú to tie isté katedry, ktoré boli efektívne v kvantitatívnej analýze. Na rozdiel od celkovej efektivity fyzikálne katedry *Katedra experimentálnej fyziky* a *Katedra jadrovej fyziky a biofyziky* neboli efektívne. Tieto jednotky dosahovali efektivitu vďaka veľmi veľkému počtu publikácií.

7 Záver

V tejto práci sme analyzovali efektivitu práce na katedrách našej fakulty. Na túto analýzu sme použili metódu DEA, ktorá je vhodná predovšetkým na výpočet efektivity v takých oblastiach, kde ceny výstupov alebo vstupov nejakej činnosti nemôžeme presne ohodnotiť. Prvá časť tejto práce bola zameraná na teóriu DEA modelov. Objasnili sme pojem Analýzy obálky dát, uviedli sme základné modely a niektoré rozšírenia týchto modelov. V ďalšej časti sme sa venovali výberu vhodného modelu a nakoniec sme spravili niekoľko analýz na výpočet efektivity. Tieto analýzy sa zameriavali na rôzne oblasti pedagogickej i vedeckej práce. Pomocou modelu založenom na sklzoch sme vypočítali celkovú efektivitu práce na katedrách, ďalej sme sa zamerali na kvalitu práce a na množstvo vykonanej práce a tiež sme vypočítali efektivitu výlučne pedagogickej práce. Výsledky DEA nám pomôžu nájsť nedostatky a dávajú nám určitý návod ako tieto nedostatky odstrániť.

Použitá literatúra

1. William W. Cooper, Lawrence M. Seiford, Kaoru Tone: *Data Envelopment Analysis (A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software)*, 2000, Kluwer Academic Publishers, Boston
2. William W. Cooper, Lawrence M. Seiford, Joe Zhu: *Handbook on Data Envelopment Analysis*, 2004, Kluwer Academic Publishers, Boston
3. Daniel Ševčovič, Margaréta Halická, Pavol Brunovský: *DEA Analysis for a Large Structured Bank Branch Network,* Central European Journal of Operations Research 9/2001, 329–342.
4. Andrea Némethová: *DEA modely a meranie efektívnosti*, 2001, Diplomová práca, FMFI UK v Bratislave
5. Dieter Gstach, Andrew Somers, Susanne Warning: *Output specific efficiencies: The case of UK private secondary schools*, 2003, Vienna University of Economics & B.A.
6. Oleksandr Stupnytskyy: *Secondary schools efficiency in the Czech Republic*, Center for Economic Research and Graduate Education, Prague, Czech Republic
7. Pekka Korhonen, Risto Tainio, Jyrki Wallenius: *Value Efficiency of Academic Reseach*, International Institute for Applied Systems Analysis, Austria

Príloha

1. *Štruktúra matíc pri riešení SBM pomocou lineárneho programovania*

Úlohu (SBM′′) môžeme prepísať do štandardného tvaru úlohy lineárneho programovania $\min_x \{cx \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$. Takto vektor neznámych x bude mať rozmer $m+s+n+1$ a bude tvaru (S^-, S^+, Λ, t). Je potrebné poznamenať, že v úlohe (SBM′′) je podmienka $t > 0$, ktorú sme nahradili podmienkou $t \geq 0$. Táto podmienka nám nezmení riešenie, nakoľko $t = 0$ nie je prípustným riešením tejto úlohy.

Matica A má rozmery $(m+s+n+1)\times(3.(m+s)+2)$ a má nasledovnú štruktúru (na prázdnych miestach sú nuly):

$$
\begin{array}{c|cc|c|c}
x = & (S^-, & S^+, & \Lambda, & t\,) \\
 & \text{m} & \text{s} & \text{n} & 1 \\
\hline
\text{m} & 1 & & \text{DATA} & -x_{io} \\
\text{s} & & \begin{matrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{matrix} & & -y_{ro} \\
\hline
\text{m} & -1 & & \text{-DATA} & x_{io} \\
\text{s} & & \begin{matrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{matrix} & & y_{ro} \\
\hline
\text{m} & -1 & & & \beta x_{io} \\
\text{s} & & \begin{matrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{matrix} & & \gamma y_{ro} \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{y_{ro}s} & & 1 \\
\hline
1 & 0 & -\frac{1}{y_{ro}s} & & -1
\end{array}
$$

Vektor b je rozmeru $3.(m+s)+2$, jeho posledné dva komponenty sú 1 a –1, ostatné sú nulové.

Vektor c z účelovej funkcie má rozmer $m+s+n+1$. Prvých m komponentov tvoria hodnoty $-\frac{1}{x_{io}m}$, potom nasledujú nuly a posledný komponent je 1.

Pri variabilných výnosoch z rozsahu pribudnú dva riadky do matice A, v ktorom komponenty prislúchajúce k Λ sú 1 resp. –1 a komponent prislúchajúci k t je –1 resp. 1. Vo vektore b pribudnú dva nulové komponenty.

2. *Program na riešenie SBM*

Najprv je potrebné zadať vstupné dáta. Zadáme maticu vstupných dát, kde v stĺpcoch je *n* skúmaných jednotiek, v prvých *m* riadkoch sú hodnoty vstupov a v ostatných *s* riadkoch sú hodnoty výstupov. Kvôli rozlišovaniu vstupov a výstupov je potrebné zadať aj počet vstupných premenných *m*.

Ďalej je potrebné zadať parametre pre mieru kontrolovateľnosti. Pre vstupy zadáme číslo z intervalu [0,1], pre úplne kontrolovateľné vstupy zadáme 1, pre úplne nekontrolovateľné 0. Pre výstupy zadáme číslo z intervalu [0,100], pričom 100 je pre úplne kontrolovateľné premenné (a reprezentuje nekonečno) a 0 je pre úplne nekontrolovateľné premenné.

Ak máme záporné alebo nulové výstupy, treba tiež zadať hodnotu penalizácie.

$$\text{Dat} = \begin{pmatrix} 29.62 & 30.3 & 31.15 & 31 & 32.65 & 20.48 & 32.25 & 26.83 & 26.3 & 12.33 \\ 3687 & 12381 & 6662 & 7852 & 3986 & 8650 & 3710 & 9188 & 2807 & 7408 \\ 1740 & 5100 & 3300 & 3180 & 2100 & 1860 & 4530 & 1770 & 2490 & 600 \\ 124 & 83 & 80 & 107 & 231 & 15 & 169 & 43 & 85 & 54 \\ 2.63 & 2.35 & 2.46 & 2.45 & 2.66 & 2.27 & 2.56 & 2.36 & 2.66 & 2.64 \end{pmatrix};$$

```
m = 1;
Par = {1, 100, 100, 100, 0};
Pen = 0.1;

s = Dimensions[Dat][[1]] - m;
n = Dimensions[Dat][[2]];
```

Program na riešenie obsahuje cyklus, ktorý pre každú jednotku:

- vytvorí maticu *A* a vektory *b* a *c*,
- pomocou funkcie LinearProgramming rieši úlohu lineárneho programovania,
- výsledky dá do požadovaného tvaru a vypíše ich.

Ukážka výstupu z programu:

```
Katedra 1
Sklz pre vstup:
0.
Sklz pre výstup:
6237.95
2042.59
0.
0.
lambda:
2  0.606624
5  0.277557
10  0.176565
Hodnota efektivity: 0.582599
```

3. *Štruktúra matíc pri riešení aditívneho modelu pomocou lineárneho programovania*

Úlohu (AD-C) môžeme prepísať do štandardného tvaru úlohy lineárneho programovania $\min_x\{cx \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$. Vektor neznámych x bude mať rozmer $m+s+n$ a bude tvaru (s^-, s^+, λ).

Matica A má rozmery $(m+s+n)\times(3.(m+s))$ a má nasledovnú štruktúru (na prázdnych miestach sú nuly):

$$
x = (\; s^-, \qquad s^+, \qquad \lambda \qquad)
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & m & s & & & & n \\
\hline
m & 1 & & & & & \\
\hline
s & & -1 & & & & \\
 & & & -1 & & & \text{DATA} \\
 & & & & -1 & & \\
 & & & & & -1 & \\
\hline
m & -1 & & & & & \\
\hline
s & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & -\text{DATA} \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
\hline
m & -1 & & & & & \\
\hline
s & & -1 & & & & \\
 & & & -1 & & & \\
 & & & & -1 & & \\
 & & & & & -1 & \\
\hline
\end{array}
$$

Vektor b je rozmeru $3.(m+s)$ a má nasledovnú štruktúru:

m	s	m	s	m	s
x_{io}	y_{ro}	$-x_{io}$	$-y_{ro}$	$-\beta x_{io}$	$-\gamma y_{ro}$

Vektor c z účelovej funkcie má rozmer $m+s+n$. Prvých $m+s$ komponentov tvoria váhy pre vstupy a výstupy, ostatné komponenty sú nuly.

V prípade variabilných výnosov z rozsahu nám pribudnú dva riadky do matice A, v ktorom komponenty prislúchajúce k λ sú 1 resp. –1 a v matici b pribudnú dva komponenty, 1 resp. –1.

4. Príloha na CD

Priložené CD obsahuje:

- *túto prácu vo formáte PDF*
- *dáta a výsledky uvedených modelov vo formáte XLS*
- *programy na riešenie aditívnych modelov (AD) a modelu založenom na sklzoch (SBM) vo formáte NB (Mathematica Notebook)*