

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Diplomová práca

Bratislava 2005

Gabriel Anda

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITA KOMENSKÉHO

V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika



Metódy optimalizácie bondov

Diplomant: Gabriel Anda

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Richard Dobiš

Bratislava 2005

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Pod'akovanie

Úprimne ďakujem vedúcemu diplomovej práce Mgr. Richardovi Dobišovi za odborné vedenie, cenné rady a čas, ktorý mi venoval pri písaní diplomovej práce.

Obsah

1	Úvod	3
2	Problém	5
2.1	Operačná analýza	5
2.2	Matematické programovanie	6
2.3	Monte Carlo	7
2.4	Iné techniky	8
2.5	Použitie	8
3	Model	10
3.1	Stochastické lineárne programovanie	10
3.1.1	Formulácia	11
3.1.2	Aplikácia	12
3.2	F-model	14
3.2.1	Portfólio dlhopisov	15
3.2.2	Scenáre a stromy scenárov	18
3.2.3	Transformovanie štruktúry portfólia	20
3.2.4	Ťažné sily	27
3.2.5	Normová funkcia $N(\alpha)$	32
3.2.6	Váhy dvoch síl	34
3.2.7	Ohraničenia	35
3.2.8	Formulácia F-modelu	36
4	Empirické testy	37
4.1	Test 1: Váhy dvoch síl	37
4.1.1	Popis príkladu	37
4.1.2	Výsledky	38
4.2	Test 2: Porovnanie dvoch modelov	41

4.2.1	Popis príkladu	41
4.2.2	Výsledky	43
4.3	Test 3: Porovnanie modelov v úlohe s väčšími rozmermi	46
4.3.1	Popis príkladu	46
4.3.2	Výsledky	46
5	Záver	48
	Literatúra	50

Kapitola 1

Úvod

V dnešnom svete, kde hlavným trendom je automatizácia, modernizácia a riadenie, ľudia neustále vymýšľajú nové, niekedy viac, inokedy menej prospešné vynálezy, kvalitnejšie algoritmy, metódy zohľadňujúce viacero ľudských faktorov.

Cieľom autorov nových teórií o metódach optimalizácie je nájsť taký prístup k problematike, ktorý by predpovedal udalosti s veľkou presnosťou, fungoval by na báze dokonalosti.

Úvaha o tom, či sa dá vytvoriť 100%-ne fungujúci model v reálnom prostredí má exaktnú odpoveď. Aj keby sa teoreticky dal skonštruovať, jeho fungovanie na trhu by bol krátkodobý kvôli narušeniu rovnováhy, čím by sa okamžite zmenili predpoklady. Preto nie je ani nezvyčajné, ak modely majú odlišné riešenia.

V diplomovej práci sa snažíme navrhnúť model, ktorý optimalizuje portfólio dlhopisov. Keďže sme podobný prístup nenašli v odbornej literatúre, naformulovali sme ho dopodrobna. Fungovanie modelu má fyzikálnu motiváciu. Aj preto sme ho nazvali ako **F-model**.

V kapitole 2 je stručný prehľad modelov, potreba a uplatnenie na finančnom trhu a v iných oblastiach. Kapitola 3 oboznámi čitateľa so zaužívaným modelom dvoj etapového lineárneho stochastického programovania a s jeho aplikáciou. Následne sa zdefinuje **F-model**, terminológia, jeho komponenty, potrebné transformácie, princíp fungovania. V kapitole 4 je uvedených zopár príkladov ako napr. porovnanie dvoch modelov, sú poskytnuté výsledky z empirických testov.

Pre testovanie a porovnanie modelov sme naprogramovali príslušné programy v software-i Matlab. Na priloženom CD sa nachádza diplomová práca v elektronickej forme, programové algoritmy pre obidva modely a niektoré vstupy a výstupy.

Kapitola 2

Problém

2.1 Operačná analýza

Operačná analýza (OA) bola aplikovaná na problémy z financie už v druhej polovici 20. storočia. Ubúdaním času je čoraz väčší počet publikácií na použitie OA vo finančníctve. Takisto OA hrala rolu aj pri adaptácii nových finančných teórií na finančnom trhu. Napríklad v 60-tych a 70-tych rokoch vedecká skupina manažérov vo Wells Fargo Bank v San Franciscu boli priekopníkmi v novej teórii OA a v zavedení do praxe prvé kopírovanie (tracking) indexu [Bernstein, 1992]. S nárastom použitia matematických modelov vo finančníctve [Merton, 1995] investičné banky prilákali do svojich radov analytikov vzdelaných v odbore kvantitatívnej techniky vrátane OA, aby navrhli cenové rovnováhy a analyzovali trhové dáta.[1]

Hlavná vlastnosť rôznych finančných problémov na trhu je, že sú zvyčajne oddeliteľné a jednoznačne definovateľné. Cieľom finančnej problematiky je buď maximalizovanie zisku alebo minimalizovanie rizika.

Jednu z prvých aplikácií finančnej techniky OA robil Harry Markovitz (1952), keď špecifikoval teóriu portfólia ako problém kvadratického programovania. Hráči na finančnom trhu zvyčajne chcú naštrukturovať rôzne typy portfólií, čím výrazne zredukujú riziko, ale nie na úkor výnosov, pretože očakávaný výnos pri nejakom riziku zostane nezmenený.

2.2 Matematické programovanie

Matematické programovanie je jedna technika OA. Je najviac používaná na finančnom trhu. Veľa typov matematického programovania bolo úspešne použitých, ako sú:

- lineárne programovanie,
- nelineárne programovanie,
- kvadratické programovanie,
- celočíselné programovanie,
- cieľové programovanie,
- programovanie s náhodnými obmedzeniami,
- stochastické programovanie,
- zlomkové programovanie,
- DEA(development environmental analysis),
- dynamické programovanie

Matematické programovanie bolo použité na riešenie významných problémov z finančného trhu, ako sú:

- akciové portfólio,
- portfólio cenných papierov,
- devízové portfólio s pôžičkou,
- zovšeobecnené zaistenie (hedgeovanie),
- imunizácia,
- kopírovanie (tracking) akciových a dlhopisových indexov,
- odhadovanie skrytého rizika s neutrálnou pravdepodobnosťou pre opcie,
- zostrojenie rozvrhu kupónov pre ponuku obecných dlhopisov,

- identifikovanie podcenených dlhopisov,
- nastavenie miery zadĺženia podniku,
- rozhodovanie, kedy refinancovať nesplatené obligácie
- odhadovanie špecializovaných kapitálových nákladov,
- určovanie požadovanej minimálnej hranice opcí,
- štrukturovanie hypotekárnych záložných listov (MBO - Mortgage Backed Securities),
- tvorba obchodnej stratégie na splnenie blokových obchodov,
- modelovanie prenájomania objektov financovaním treťou stranou,
- výpočet neprerušenej maximálnej straty akcionárov,
- roztriedenie chýb na burze cenných papierov a porozumenie sily finančnej inovácii

2.3 Monte Carlo

Najviac používaným prístupom na finančnom trhu je Monte Carlo simulácia. Hlavné oblasti jeho použitia sú:

- oceňovanie exotických opcí a cenných papierov s vloženou opciou
- odhadovanie hodnoty rizika pre rôzne finančné inštitúcie

Simulácia je veľmi zaužívaná v testovaní obchodných pravidiel a rizikových pozícií u cenných papierov. V niektorých prípadoch používanie techniky OA ovplyvňuje finančný trh, pretože umožňuje obchodníkom robiť lepšie rozhodnutia za kratší čas. Napríklad exotické opcie sa môžu obchodovať oveľa väčším cenovým rozptylom, keď sú obchodované na základe výpočtu Monte Carlo simulácie[1].

2.4 Iné techniky

Iné techniky OA sú menej používané na finančnom trhu. Arbitráž a problém multiperiódového portfólia boli sformulované ako sieťové modely, keďže efektívnosť trhu bol testovaný použitím neutrálnych sietí. Teória hier bola aplikovaná na:

- kontrolu firiem,
- rozhodovacie stromy pre analýzu hypotekárnych možností
- inventárny model pre nastavenie veľkosti a načasovanie firemných obligácií
- Markovove reťaze na ocenenie portfólia na pôžičky a testovanie efektívnosti trhu.

Jedna dôležitá technika OA našla len malé použitie na finančnom trhu: teória hromadnej obsluhy.

2.5 Použitie

Hlavná oblasť finančného trhu, kde OA bola aplikovaná, je problém portfólia a presné oceňovanie finančných inštrumentov. Techniky OA môžu byť použité finančnými regulátormi a finančnými inštitúciami pri nastavení priemerných kapitálových štandardov. Existujú aj iné oblasti, kde sa používa OA:

- navrhovanie prípustných riešení, ktoré narazia na komplikované nastavenie požiadaviek,
- rozhodovanie sa vo financiách,
- sledovanie imperfekcie a arbitrážnej príležitosti na finančnom trhu
- riešenie strategických problémov

Vzťah medzi finančníctvom a OA je obojsmerný. Techniky OA neboli len použité pre finančné problémy, ale boli aj vytvorené finančné teórie z potreby pre vývoj a zlepšenie riešenia techník OA.

Techniky OA hrajú veľkú rolu vo finančníctve a súčasným dramatickým zlepšením v dostupnosti reálnych dát a výkonnosti počítačov tento podiel bude naďalej rásť. Vytvorí príležitosť pre techniky byť najdôležitejšou súčasťou finančného trhu[1].

Kapitola 3

Model

Na modelovanie finančnej a manažérskej problematiky sa dá použiť veľa vhodných prístupov v závislosti od optimalizácie operačného výskumu. Tieto môžeme zaradiť do skupín. Spomenieme však len niektoré.

- Stochastické programovanie[4]
 - E modely: minimalizovanie očakávaných nákladov s dosadením strednej hodnoty pre náhodné veličiny
 - P modely: minimalizovanie pravdepodobnosti, že náklady pre-
vyšujú určitú úroveň
 - V modely: minimalizovanie strednej kvadratickej chyby
- Dynamické programovanie
- Lineárne programovanie

Zo širokého spektra možností pri riešení optimalizácie bondov sa budeme zaoberať s maximalizovaním úžitkovej funkcie na uzavretom intervale.

3.1 Stochastické lineárne programovanie

Pod terminológiou *statické modely* rozumieme také modely, kde počiatočné portfólio sa nerebalancuje ani raz počas celej optimalizácie, takýto model

je napr. *Buy & Hold model*. Pri *dynamických modeloch* budúce zmeny v počiatočnom portfóliu sú povolené. To vedie k úlohe *dvoj- a viacetapového stochastického programovania*[7, 5].

Úloha dvojetapového lineárneho stochastického programovania je najjednoduchšia úloha stochastického programovania. Prvá etapa vyjadruje stav sveta dnes, teda všetky parametre sú známe, kým v druhej etape niektoré parametre sú závislé od ďalšieho vývoja scenárov.

3.1.1 Formulácia

Symbol	Popis
x	vektor riešení v prvej etape
c	vektor koeficientov účelovej funkcie v prvej etape (napr. $c^T x$)
A	matica koeficientov ohraničení v prvej etape ($Ax = b$)
b	vektor pravých strán v ohraničeniach v prvej etape (napr. $Ax = b$)
y	vektor riešení v druhej etape
Q	hodnotová funkcia v príslušnej etape alebo priemerná hodnota hodnotovej funkcie
ω	náhodná udalosť, elementárna udalosť, scenár
d	vektor koeficientov účelovej funkcie v druhej etape dvojetapovej úlohy
T	matica koeficientov ohraničení v druhej etape dvojetapovej úlohy (napr. $W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)$)
W	matica koeficientov ohraničení rekurzíe v druhej etape dvojetapovej úlohy (napr. $W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)$)
h	vektor pravých strán v druhej etape dvojetapovej úlohy (napr. $W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)$)

(3.1)

Hľadá sa riešenie x také, ktoré minimalizuje náklady v prvej etape $c^T x$ plus očakávané náklady opravného riešenia y v etape druhej $Q(x)$ s dodržaním ohraničenia $Ax = b$.

Očakávané náklady $Q(x)$ sú priemerná hodnota nákladov v jednotlivých scenáriách $E_{\xi}[Q(x, \omega)]$.

Oprava y je nasledovná: v scenári ω minimalizuje náklady $d^T y$ pri dodržaní ohraničenia $Tx + Wy = h$.

$$\begin{aligned} & \min_x c^T x + E_{\xi}[Q(x, \omega)] \\ & \text{za podm.:} \\ & \quad Ax = b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde

$$\begin{aligned} Q(x, \omega) &= \min_y d(\omega)^T y \\ & \text{za podm.:} \\ & \quad W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)x \\ & \quad y \geq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Kde x je vektor rozhodnutí v prvej etape, $c \in \mathfrak{R}^{n_1}$, $b \in \mathfrak{R}^{m_1}$ sú konštantné vektory a A je konštantná matica s rozmermi $m_1 \times n_1$. Podobne, y je vektor rozhodnutí v druhej etape, $\forall \omega \in \Omega$ sú $d(\omega) \in \mathfrak{R}^{n_2}$ a $h(\omega) \in \mathfrak{R}^{m_2}$ náhodné vektory a $T(\omega)$ a $W(\omega)$ sú náhodné matice s rozmermi $m_2 \times n_1$, resp. $m_2 \times n_2$ [2].

3.1.2 Aplikácia

Pre testovanie a následné porovnávanie sa vytvorí dvojetapový lineárny stochastický model. Navrhne sa finančný problém, kde treba maximalizovať zisk na konci sledovanej periódy[6, 3]. Využije sa prístup na optimalizáciu portfólia pomocou E-modelov -teda optimalizácia cez strednú hodnotu-, ktorý bol spomenutý v kapitole 3.

Model funguje nasledovne:

- chceme získať čo najviac peňazí na svojom portfóliu bondov, čiže musíme maximalizovať množstvo peňazí na konci sledovaného času
- na začiatku sledovaného času nakúpime bondy za také množstvo peňazí, aké máme k dispozícii, vytvoríme portfólio a to tak, aby sme vedeli splniť prípadné záväzky alebo splácať pôžičku
- v ďalšom čase budeme portfólio rebalancovať pri transakčných nákladoch

- na konci sledovaného času nie je povolené zobrať pôžičku, tak sa zabráni zbytočným obchodom

$$\begin{aligned}
& \min_{x,r,t} -r_m \\
& \text{za podm.:} \\
& \sum_{i \in U} (P_{i,0} + \epsilon) \cdot x_{i,0} + r_0 = b_0 + \lambda \\
& \sum_{i \in U} F_{i,t-1} \cdot x_{i,t-1} + \\
& + (1 + \alpha_t) \cdot r_{t-1} + b_t + \\
& + \sum_{i \in U} (P_{i,t} - \epsilon) \cdot y_{i,t} = L_t + (1 + \beta_t) \cdot b_{t-1} + \\
& \qquad \qquad \qquad + r_t + \sum_{i \in U} (P_{i,t} + \epsilon) \cdot z_{i,t} \\
& \qquad \qquad \qquad x_{i,t} = x_{i,t-1} - y_{i,t} + z_{i,t} \\
& \qquad \qquad \qquad b_m = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad x_{i,t}, r_i, b_i \geq 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

popis symbolov je v tabuľke 3.5:

Symbol	Popis
$T = 0, \dots, m$	je sledovaný časový horizont s napr. mesačnou periódou
$U = 1, \dots, n$	je množina sledovaných dlhopisov, ktorú nazývame "univerzum"-om
i	je sledovaný dlhopis z celého univerzumu
r_T	reinvestícia peňazí v čase T
α_T	výnos z reinvestovania v čase T
b_T	požičanie si peňazí v čase T
β_T	úrok na pôžičku
$P_{i,T}$	cena bondu i v čase T
$F_{i,T}$	cash flow bondu i v čase T
ϵ	transakčné náklady
$x_{i,T}$	počet bondu i , ktoré vlastníme v čase T
$y_{i,T}$	počet bondu i , ktoré predáme v čase T
$z_{i,T}$	počet bondu i , ktoré kúpime v čase T

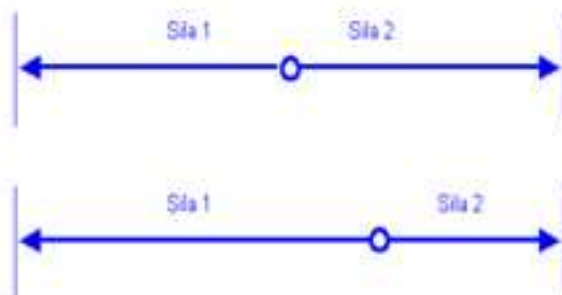
(3.5)

3.2 F-model

V odbornej literatúre sa autori viacerých inovatívnych prác zaoberajú s rôznymi prístupmi typu úloh optimalizácie. Náš model je sformulovaný z iného pohľadu videnia, ako je to zvyčajne zaužívané v iných prístupoch. Odlišnosť tohto modelu spočíva v prístupe k reálnej problematike o maximalizácie zisku.

Náš nový prístup sa nazve ako **F-model** kvôli fyzikálnej motivácii. Optimalizácia investovaných peňazí sa modeluje pomocou dvoch síl, ktoré fungujú ako protikladné ťažné sily, ktoré sa dajú predstaviť nasledovne: nech existuje nejaký vyvážený bod, so silami rovnakej veľkosti; ak sa bod vychýli z predchádzajúceho stavu, tak aj pomer síl sa mení, nájde sa nový vyvážený stav. Tieto sily majú za úlohu udržiavať portfólio bondov v rovnováhe. Ilustrujeme ich na obrázku 3.1.

Pre správne fungovanie modelu treba zakomponovať aj stratégiu samofinancovateľnosti. Tvorí základ v optimalizačných procesoch, preto nie je



Obrázok 3.1: Znáznornenie ťažných síl

žiadnou inováciou v prístupe, ale nevyhnutnou súčasťou procesu.

Skôr, ako sa vysvetlí podstata ťažných síl a sformuluje sa matematický zápis **F-modelu**, treba zaviesť niektoré pojmy, ktoré vysvetlia špecifické vlastnosti celého prístupu.

3.2.1 Portfólio dlhopisov

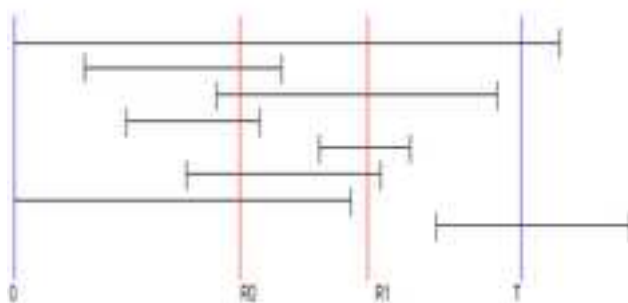
V nasledujúcich častiach pre jednoznačnosť pod výrazom portfólio budeme rozumieť portfólio dlhopisov. Portfólio sa skladá z viacerých dlhopisov (bondov). Každý bond má svoju charakteristiku:

- dátum emitovania
- splatnosť
- výška kupónu
- perióda vyplácania kupónu
- nominálna cena
- trhová cena

Čo znamená *portfólio dlhopisov a univerzum*?

Množinu dlhopisov, s ktorými môžeme obchodovať aspoň pri jednom rebalancovaní počas celého sledovaného obdobia, nazývame *univerzum*-om. Teda, *univerzum* zahŕňa všetky asety, ktoré sa môžu vyskytnúť v portfóliu.

Na obrázku 3.2 vizualizujeme nejaké *univerzum* bondov v časovom intervale: $[0, \dots, T]$, ktoré nemusia existovať v každom čase, keď sa rebalancuje portfólio. Jednotlivé úseky znázorňujú existenciu dlhopisu v čase $t \in [0, \dots, T]$. Označenie R_i vyjadruje i -te rebalancovanie.



Obrázok 3.2: *Univerzum* bondov

Pod termínom *portfólio dlhopisov* rozumieme takú skupinu dlhopisov z *univerza*, ktoré vlastnime v danom čase. Takéto portfólio nazveme *reálne portfólio*, označíme ρ . Portfólio bondov sa pri každom rebalancovaní môže meniť v závislosti od vývoja trhu, môžu dlhopisy pribúdať, ba čo viac, aj ubúdať. Dáva informácie o vlastnostiach a množstva jednotlivých bondov, ktoré obsahuje naše portfólio.

Aké má byť portfólio?

Predstavme si taký trh, kde existujú len bezkupónové dlhopisy (zerobondy) a nie sú transakčné náklady. Nazveme ho dokonalým trhom. Z portfólií, ktoré môžu jestvovať na takomto dokonalom trhu, sa dá vybrať najlepšie vzhľadom na rôzne vlastnosti:

- na konci manažovania vynáša najväčší dosiahnuteľný výnos pri danom riziku

- má minimálne riziko pri danom výnose
- má najlepší pomer medzi rizikom a výnosom

My pod svojim najlepším portfóliom budeme rozumieť v ilustratívnych príkladoch také, ktoré vynáša najväčší zisk. Takéto portfólio pre jednoznačnosť nazveme *dokonalé portfólio*, ďalej len ψ .

Dokonalé portfólio zostavené z jednoduchých assetov sa väčšinou nedá replikovať z reálnych bondov, t.j. z kupónových dlhopisov. Môže sa zostaviť len také *reálne portfólio*, ktoré sa mu viac či menej podobá. Naše portfólio má byť také, ktoré sa čo najviac podobá ψ :

$$\rho \longrightarrow \psi$$

Transakčné náklady, označíme ϵ , penalizujú zbytočné obchody, pretože za každý obchod sa musí zvlášť zaplatiť nejaká čiastka. V *reálnom portfóliu* preto by tam nemali byť obrovské zmeny, stav pred rebalancovaním ρ_b by sa mal podobáť stavu po rebalancovaní ρ_a :

$$\rho_b \doteq \rho_a$$

Pre interpretovateľnosť je nevyhnutné zabudovať samofinancovateľnú stratégiu, čo hovorí o tom, že hodnota portfólia, označíme $h(\cdot)$ pred rebalancovaním sa musí rovnať hodnote po rebalancovaní:

$$h(\rho_b) = h(\rho_a) \pm \epsilon$$

Ďalšie vlastnosti

Kvôli lepšiemu porozumeniu vzťahom medzi *reálnym* a *dokonalým portfóliom* spomenieme niekoľko prípadov. Pri označovaní treba spomenúť, že ρ a ρ_b majú ten istý význam, preto, ak nie je potrebné, index nevypisujeme.

Dokonalé portfólio sa niekedy dá replikovať z reálnych bondov, pri veľmi vhodnej konštelácii. To však vnáša so sebou veľké zmeny v *reálnom portfóliu*.

$$\begin{aligned} \rho &= \psi \\ \rho_a &\neq \rho_b \end{aligned}$$

Samozrejme dokonalý trh umožňuje obchody bez transakčných nákladov, preto aj pre hodnoty portfólií môže platiť:

$$h(\rho) = h(\psi)$$

Ak by sa na reálnom trhu ďalej predpokladala presná replikácia *dokonalého portfólia*, táto presná konštelácia by stála nejaké výdavky pri každej zmene kvôli existencii transakčných nákladov. Preto ani v tomto špecifickom prípade sa nie vždy oplatí snažiť sa o takúto presnú replikáciu. Dostávame vzťah:

$$h(\rho) \longrightarrow h(\psi)$$

3.2.2 Scenáre a stromy scenárov

V reálnom svete sa rozhodovanie v neistote vždy javí ako najväčšia ťažkosť.

V podkapitole 3.2.1 sa zaviedli pojmy ako *reálne portfólio* a *dokonalé portfólio*.

V každom čase sa uvažuje iné *dokonalé portfólio*, mení sa v závislosti od vývoja trhu.

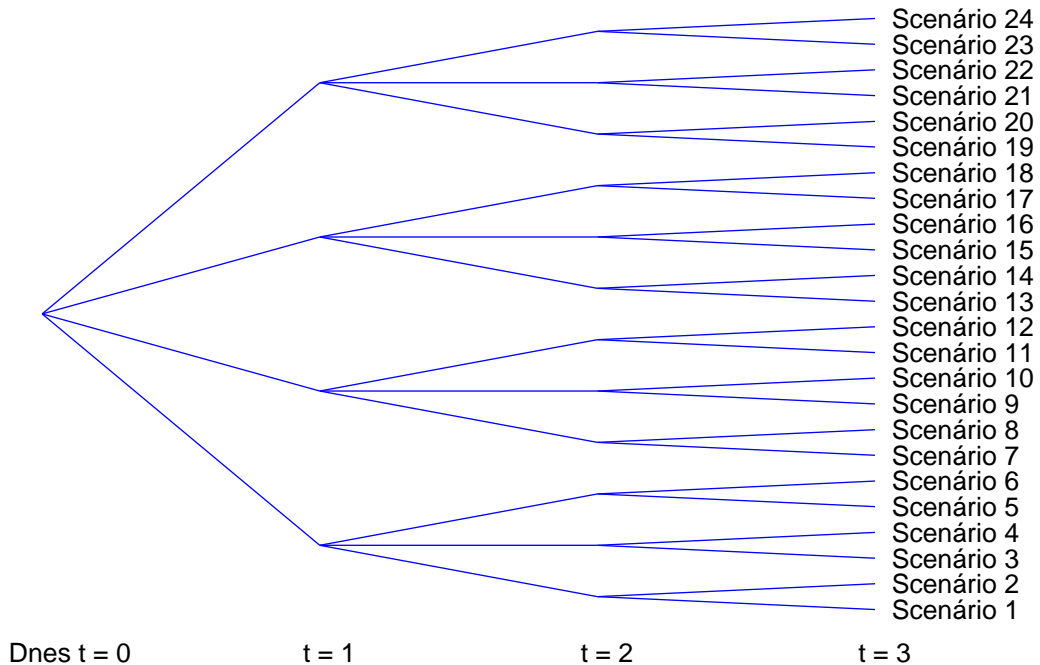
Aj v *reálnom portfóliu* môžu nastať menšie modifikácie z času na čas (pri rebalancovaní), čo spôsobuje zmena *dokonalého portfólia*. Táto modifikácia v ρ slúži nato, aby sa mohlo podobať čo najviac *dokonalému portfóliu*: $\rho \longrightarrow \psi$.

Podobnosť týchto portfólií sa sleduje v jednom čase a stave.

Podmienky obsiahnuté v podkapitole 3.2.1 sa dajú v čase napísať nasledovne:

$$\begin{aligned} \rho_t &\longrightarrow \psi_t \\ \rho_t &\doteq \rho_{t+1} \\ h_t(\rho_t) &= h_t(\rho_{t+1}) \pm \epsilon_t \quad \text{pre } \forall t \end{aligned} \tag{3.6}$$

V budúcnosti sa predpokladá niekoľko podobných realizácií (stavy), lebo sa nevie s istotou povedať, len odhadovať, ktorým smerom sa bude trh vyvíjať. Teda musí sa predpokladať niekoľko možných alternatív vývoja ρ a ψ = niekoľko scenárov.



Obrázok 3.3: Strom scenárov

Scenáre sú možné alternatívy realizácie udalosti s pravdepodobnosťou, ktoré sa skladajú z elementárnych udalostí. Sú to expertné odhady.

Informácie obsiahnuté v množine scenárov, ktoré popisujú neurčitosť, sa vizualizujú prostredníctvom stromovej štruktúry, kde koreň stromu je spojený s toľkými vrcholmi, koľko je scenárov. Koreň stromu predstavuje známu informáciu a vrcholy predstavujú možné realizácie. Vrchol stromu sa nachádza na konci hrany, kde hrana zobrazuje prechod v čase z jedného stavu do druhého.

Na obrázku 3.3 je príklad stromu scenárov. V čase $t = 0$ koreň stromu predstavuje dnes známu informáciu. V čase $t = 1$ sú možné 4 rôzne realizácie. Každá z nich má 3 rôzne realizácie v čase $t = 2$, atď. Konkrétny scenár je celá postupnosť realizácií v čase $t = 0$ (informácia známa dnes) a

v časoch $t = 1, 2$ a 3 , ktoré predstavujú možné realizácie[2].

Scenár opisuje budúcnosť, ako sa bude (môže) *dokonalé a reálne portfólio* meniť a strom obsahuje informáciu o tom, ako sú portfólia v dvoch rôznych časoch prepojené.

Scenáre sa matematicky zapisujú ako horné indexy, napr. scenár *s reálneho portfólia* by sa zapísal ako:

$$\rho^s$$

V práci sa nebude používať forma scenáru kvôli neprehľadnosti, ale sa spresní lokalita na strome. Scenár sa môže definovať pomocou množiny realizácií, keď v každom čase sa berie do úvahy príslušná jedna realizácia.

3.2.3 Transformovanie štruktúry portfólia

V podkapitole 3.2.2 bolo avizované, že približovanie *reálneho portfólia* k *dokonalému portfóliu* sa bude robiť simultánne v každom čase a stave, kde v každom čase a stave sa predpokladá iné ψ a modifikované ρ , teda len málo odlišné od predchádzajúceho. Preto *dokonalé a reálne portfólio* sa musia ukladať do príslušných vrcholov v príslúchajúcich scenároch na stromovej štruktúre. Ich matematický zápis nazývame ako *štruktúra portfólia*.

Štruktúry všeobecne

Pre štruktúru portfólia existuje niekoľko možností, ktoré sú založené na odlišnej báze vyjadrenia.

Možným zápisom je napríklad Markowitz-ova štruktúra, ktorá má percentuálne vyjadrenie. Popisuje obsah portfólia, koľko percent celej hodnoty portfólia je v bezkupónových dlhopisov.

Ďalším zaužívaným prístupom je reálna štruktúra. Tento zápis popisuje reálne portfólio a to tak, že zapisuje počty reálnych asetov.

Existuje aj taký zápis portfólia, ktorý interpretuje peňažnú hodnotu bezkupónových alebo reálnych dlhopisov.

Každá jedna štruktúra má tú istú úlohu, a to ukladať informácie o portfóliu. Preto sa dá nájsť nejaký zhodný prechod medzi všetkými možnými zápismi.

Štruktúry v F-modeli

Z podkapitoly 3.2.1 sme uvažovali, že *dokonalé portfólio* je zostavené z jednoduchých assetov, tzn. len z bezkupónových dlhopisov a *reálne portfólio* z reálnych assetov, tzn. z bondov, ktoré obsahuje *univerzum*.

ψ vyjadruje dokonalosť, preto je prirodzené, že jeho assety sú vyjadrené v percentách a nie v počte assetov. Aj naše ψ , ktoré sa skladá z jednoduchých assetov, budeme zadávať v percentách.

ρ vyjadruje reálny stav, čiže je prirodzené zapisovať jeho štruktúru v reálnych číslach, ktoré popisujú množstvá jednotlivých reálnych assetov.

Teda ψ a ρ v takejto počiatočnej štruktúre nie sú kompatibilné. Je potrebné vytvoriť také *reálne* a *reálne portfólio* aby mali jednotné vyjadrenie v rovnakom priestore.

Čiže sú potrebné také transformácie, pomocou ktorých sa zabezpečí jednota štruktúry každého portfólia.

V nasledujúcich odsekoch sa vysvetlia jednotlivé štruktúry, potom sa skonštruje vizualizácia samotného zápisu v priestore a napokon sa podá technický popis prechodu z jednej štruktúry do druhej.

Reálna štruktúra

Reálna štruktúra, označíme $r(\cdot)$, sa využíva v **F-modeli** jedine pri zobrazovaní zloženia ρ . Označenie $r(\rho)$ znamená v preklade: "reálna štruktúra *reálneho portfólia*".

$r(\rho)$ je možné vyjadriť pomocou vektora x , ktorý je z R^n , kde n je počet reálnych assetov a jednotlivý prvok x_i vyjadruje koľko kusov assetu i obsahuje *reálne portfólio*, t.j. ρ .

Matematický zápis opisuje reálny stav, zobrazuje jednotlivé množstvá vlastných dlhopisov. Štruktúra zapísaná vo vektorovom tvare je nasledovná:

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \quad (3.7)$$

Virtuálna štruktúra

Pomocou virtuálnej štruktúry *reálneho portfólia*, označíme $v(\rho)$, sa zrealizuje replikácia reálnych assetov prostredníctvom jednoduchých. Vyjadruje *reálne portfólio* pomocou vektora z , koľko kusov bezkupónových dlhopisov obsahuje.

Vektor z je z R^m , kde m je počet jednoduchých assetov a jednotlivý prvok z_i vyjadruje koľko kusov assetu i obsahuje *reálne portfólio*. Štruktúra vektoru z je zapísaná v tvare:

$$\begin{aligned} z &= \{z_1, z_2, \dots, z_m\}^T \\ \text{pričom:} & \\ z &= Mx \end{aligned} \tag{3.8}$$

Vektor z je zostavený zo súčinu matice M a vektoru x . Matica $M_{m \times n} \in R^{m \times n}$ je nový komponent, kde m je počet jednoduchých assetov a n je počet reálnych assetov. V matici $M_{m \times n}$ stĺpce zobrazujú reálne dlhopisy a riadky zas bezkupónové, pomocou ktorých sa replikujú dlhopisy z *univerza*.

Ideálna štruktúra

V tomto modeli sa vo významnej miere využíva ideálna štruktúra, $i(\cdot)$, ktorá opisuje dokonalé portfólio.

Je známe, že ψ má percentuálne zloženie jednoduchých assetov. Táto skutočnosť je zapísaná v $i(\psi)$, ktorá sa dá vyjadriť pomocou vektora $y \in R^m$, kde m je počet jednoduchých assetov. Popisuje koľko percent celej hodnoty portfólia je v jednotlivých bondoch. Vektor y nie je premenná, ale jeho hodnoty pre každý čas a realizáciu sú známe. Môžu sa vypočítať napríklad pomocou prístupu optimalizácie Markowitza ako samostatný príklad. Ale s touto časťou sa nebudeme zaoberať, budeme považovať y ako daný vektor.

$$y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}^T$$

Musí platiť:

$$\sum_{i=1}^n (y_i) = 1 \tag{3.9}$$

Hodnotová štruktúra

Hodnotová štruktúra, označíme $h(\cdot)$, slúži na vyjadrenie peňažnej hodnoty portfólia.

Nato, aby sa dala popísať táto hodnota, je potrebné poznať ceny reálnych assetov, ktorý označíme ako vektor v , ktorý je z R^m , kde m je počet jednoduchých assetov. Teda jednotlivý prvok v_i vyjadruje aká je cena reálneho assetu i . Štruktúra vektoru v sa vyjadrí vo forme:

$$v = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}^T \tag{3.10}$$

Transformácie

Podľa predchádzajúceho myšlienkového pochodu, v modeli nebude postačujúca jedna transformácia štruktúry, označíme T , aby sa dosiahlo zhodné vyjadrenie medzi *dokonalým* a *reálnym portfóliom*, ale až tri transformácie:

- musí sa vyriešiť nezhoda v zložení ψ a ρ . Pomocou prechodu zo zápisu reálnych assetov na jednoduché assety sa eliminuje táto rozdielnosť. Prechod zobrazuje ako replikovať kupónové dlhopisy pomocou bezkupónových dlhopisov. Dosiahne sa prostredníctvom prvej transformácie z reálnej štruktúry, $r(\cdot)$ do virtuálnej štruktúry, $v(\cdot)$, píšeme:

$$T_1 : r(\rho) \mapsto v(\rho)$$

- doľadí sa nejednotnosť v konečnom vyjadrení. Štruktúra bude interpretovať hodnotu *reálneho portfólia*, $h(\rho)$ po zložkách assetov:

$$T_2 : v(\rho) \mapsto h(\rho)$$

- podobná transformácia sa spraví aj v štruktúre *dokonalého portfólia*, $i(\psi)$. Pochopiteľne, aj táto konečná štruktúra bude mať zhodný výklad.

$$T_3 : i(\psi) \mapsto h(\psi)$$

Nasleduje technický popis prechodu z jednej štruktúry do druhej.

Dekompozícia na bezkupónové dlhopisy

Pre dosiahnutie jednoty vyjadrenia *dokonalého* a *reálneho portfólia*, t.j. nejaký prechod z reálnych asetov do jednoduchých, využijú sa vlastnosti bezkupónových bondov, označí sa ZB .

Je známe, že bezkupónový bond vypláca svoju celú nominálnu hodnotu až v deň jeho splatnosti, kým kupónový dlhopis, označí sa CB , vypláca okrem nominálnej hodnoty aj kupón, a to periodicky až do expirácie. Preto výpočet výnosu bezkupónových dlhopisov je oveľa jednoduchší:

$$P_{ZB} = \frac{N}{(1+i)^k} \quad (3.11)$$

s porovnaním kupónových dlhopisov:

$$P_{CB} = \frac{C+N}{(1+i)^k} + \frac{C}{(1+i)^{k-1}} + \dots + \frac{C}{1+i} \quad (3.12)$$

kde symboly sú popísané v tabuľke 3.13

Symbol	Popis
P	je aktuálna cena bondu
N	je nominálna hodnota bondu, zvyčajne je 100, ale nie je podmienkou
k	je čas do expirácie vyjadrený v rokoch
i	je percentuálny výnos za bond v aktuálnom čase

(3.13)

Pomocou bezkupónových dlhopisov s rôznymi dĺžkami splatnosti a s rôznymi hodnotami je možné namodelovať rôzne kupónové dlhopisy, a to tak, že výplaty, t.j. kupóny jedného kupónového bondu sa poskladajú zo súčtu násobkov viacerých bezkupónových bondov, napríklad:

$$CB_1 = a_1 \cdot ZB_1 + a_2 \cdot ZB_2 + \dots + a_m \cdot ZB_m \quad (3.14)$$

kde vektor $a = \{a_1, \dots, a_m\} \in N$

Je veľmi dôležité povedať, že poradie $ZB_i, i = 1, \dots, m$ nie je náhodné, ale je skonštruované v rastúcom poradí podľa dĺžky bezkupónových dlhopisov, označíme $\gamma(\cdot)$. Tým pádom ZB_1 je najkratší a ZB_m je najdlhší bezkupónový dlhopis:

$$\gamma(ZB_1) < \gamma(ZB_2) < \dots < \gamma(ZB_m) \quad (3.15)$$

Samozrejme, v portfóliu sa môže nachádzať aj bezkupónový dlhopis, nielen kupónový. V takom prípade je zrejmé, že:

$$ZB_1 = 1 \cdot ZB_1 + 0 \cdot ZB_2 + \dots + 0 \cdot ZB_m \quad (3.16)$$

Vektor a sa zobrazí v matici M , ako jeho stĺpec. A ďalšie vektory získané z ďalších replikácií reálnych assetov budú tvoriť ostatné stĺpce matice M . Z toho je zrejmé konštruovanie matice M .

Transformácia T_1

Pomocou *dekompozície na bezkupónové dlhopisy* sa môže zrealizovať prvá transformácia T_1 , čím dospejeme k virtuálnej štruktúre *reálneho portfólia*.

T_1 sa dá napísať v tvare:

$$T_1 : r(\rho) \mapsto v(\rho) = x \mapsto z$$

Transformácia T_2

Vzhľadom nato, že v transformácii T_2 je zámerom dosiahnuť vyjadrenie hodnotovej štruktúry *reálneho portfólia*, $h(\rho)$, ktorá má poskytovať peňažnú hodnotu každého jednoduchého assetu zvlášť. Aby sa dosiahol tento cieľ, musí sa vektor v rozmerovo vhodne naformátovať vzhľadom na rozmer vektoru z .

Z predchádzajúceho úmyslu jasne vyplýva, že vektor v sa zmení na diagonálnu maticu $D_{m \times m}$, kde $D_{i,i} = v_i$ a $i = 1, \dots, m$. Hodnota *reálneho portfólia* sa vyráta ako:

$$h(\rho) = D \cdot v(\rho) \quad (3.17)$$

Dostávame sa k druhej transformácii T_2 , kde:

$$T_2 : v(\rho) \mapsto h(\rho) = z \mapsto Dz$$

Transformácia T_3

Cieľom je vytvoriť hodnotovú štruktúru *dokonalého portfólia*, $h(\psi)$.

Pretože ideálna štruktúra má percentuálne vyjadrenie, hodnoty jednotlivých zložiek sa získajú s vynásobením celej hodnoty portfólia, označíme V , ktorú poľahky vypočítame, ako:

$$V \equiv v^T Mx \quad (3.18)$$

V tretej transformácii sa dopracujeme k zmene:

$$T_3 : i(\psi) \mapsto h(\psi) = y \mapsto yV$$

Syntéza ρ a ψ

Už je zabezpečená zhodnosť v oboch štruktúrach ψ a ρ , tým pádom sú jednoznačne porovnateľné a ich odchýlka je merateľná.

$$x \mapsto DMx$$

$$y \mapsto yv^T Mx$$

3.2.4 Ťažné sily

Podstata ťažných síl je najdôležitejšou časťou nášho prístupu. Na nich je založené správne fungovanie celého modelu.

Protikladné sily vytvárajú rovnováhu v systéme. Ak sa rovnovážny stav posunie smerom jednej sily, druhá sila posilní, kým tá prvá oslabí.

Je to rovnováha medzi nadmernou aktivitou a pasivitou. Každá sila má inú úlohu v procese. Prvá sila zodpovedá za to, aby systém zarobil čo najviac. Druhá sila má na starosti zabrániť veľkým zmenám v portfóliu.



Obrázok 3.4: Protikladné ťažné sily

Stratégia samofinancovateľnosti sa v procese predpokladá ako samozrejmosť. Tá zabezpečuje, aby si model vykrýval svoje výdavky z vlastných zdrojov. Je základom optimalizácie.

Sily nie sú stacionárne, tzn. cez tieto nástroje sa dá nastaviť optimalizáciu **F-modelu** pre individuálnych investorov, ktorí majú odlišné požiadavky.

Prvá sila: *potenciál dobrosti*

Ako už bolo uvedené, táto sila má za úlohu priblížiť *reálne portfólio* čo najbližšie k *dokonalému portfóliu*, tzn. aby štruktúra ρ čo najviac kopírovala

štruktúru ψ a tým zabezpečila v systéme to, aby mala skoro takú istú hodnotu. Teda:

$$\begin{aligned}\rho &\longrightarrow \psi \\ h(\rho) &\longrightarrow h(\psi)\end{aligned}$$

Prvú silu preto môžeme nazvať *potenciál dobrosti*. Avšak prvá sila má nielen pozitívny dopad na model, čo sa prejavuje tým, že sa snaží zarobiť čo najviac, ale aj negatívny, hlavne v tom, že so zmenami prináša transakčné náklady.

Odchýlku medzi ρ a ψ budeme merať cez hodnoty jednotlivých portfólií. Snažíme sa minimalizovať odchýlku, aby sme dosiahli najlepšie portfólio.

V matematickom zápise by sa dalo túto silu zapísať nasledovne:

$$(h(\rho) - h(\psi)) \longrightarrow \min \quad (3.19)$$

inak:

$$(DMx - yv^T Mx) \longrightarrow \min \quad (3.20)$$

Toto je vyjadrenie prvej sily v jednom čase a v jednej realizácii. Cieľom je minimalizovanie tejto odchýlky, čím sa zaručí aj podobnosť *reálneho portfólia* k *dokonalému portfóliu*.

V podkapitole 3.2.3 sa už spomenulo, že optimalizácia, približovanie k *dokonalému portfóliu* bude prebiehať simultánne v každom čase a v každom stave. Adaptácia *reálneho portfólia* bude vždy k inému *dokonalému portfóliu*.

Nech existuje:

- množina času t

$$[0, 1, \dots, k] \in t$$

- množina všetkých realizácií r , kde prvky r_t sú podmnožiny realizácií v čase t , ktoré obsahujú jednotlivé počty realizácií v danom čase (napr. na binárnom strome sú podmnožiny r_t nasledovné: $r_0 = 2^0 = 1$, $r_1 = 2^1 = 1$, $r_2 = 2^2 = 4$, \dots , $r_k = 2^k$)

$$[r_0 = 1, r_1, \dots, r_k] \in r \quad \text{pre } \forall t$$

- množina všetkých bezkupónových dlhopisov j , ktorej prvky sú podmnožiny ZB -ov z každej realizácie v danom čase

$$[j_{r_0}, j_{r_1}, \dots, j_{r_k}] \in j \quad \text{pre } \forall t$$

- množina všetkých reálnych dlhopisov i , ktorej prvky sú podmnožiny reálnych bondov z každej realizácie v danom čase

$$[i_{r_1}, i_{r_2}, \dots, i_{r_k}] \in i \quad \text{pre } \forall t$$

Takto dospejeme k rovnici

$$\begin{aligned} (D_t^{r_t} M_t^{r_t} x_t^{r_t} - y_t^{r_t} (v_t^{r_t})^T M_t^{r_t} x_t^{r_t}) \longrightarrow \min \\ \text{pre } \forall t, \forall r_t \end{aligned} \quad (3.21)$$

Keďže optimalizácia prebieha v každom čase a stave naraz, ináč povedané na celom strome, preto môžeme vytvoriť globálnu štruktúru, označíme, ako index $_{gl}$, ktorá zahŕňa celý strom:

$$\begin{aligned} \text{Nájd} \\ ((DM - yv^T M)_{gl} \cdot x_{gl}) \longrightarrow \min \end{aligned} \quad (3.22)$$

kde výraz 3.22 má nasledovnú diagonálnu štruktúru:

$$\begin{pmatrix} \delta_0^1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \delta_0^a & & & \\ & & & \delta_1^1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \delta_k^z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^a \\ x_1^1 \\ \vdots \\ x_k^z \end{pmatrix} \longrightarrow \min$$

a symboly majú nasledovný význam:

$$\delta_p^q = D_p^q M_p^q - y_p^q (v^T)^q M_p^q \quad p \in t, q \in r$$

$$\begin{aligned} [1, 2, \dots, a] &\in r_0 \\ [1, 2, \dots, z] &\in \{r \setminus r_0\} \end{aligned}$$

Druhá sila: *potenciál stálosti*

Potenciál stálosti je protikladnou silou prvej sily. Keď o prvej sile hovoríme, že prináša do procesu aktivitu, potom o druhej sile môžeme povedať, že vnáša so sebou pasivitu. Táto pasivita má za úlohu zabrániť zmenám v portfóliu, aby sa tak vyhol transakčným nákladom. Chce, aby v každom čase a stave bola štruktúra *reálneho portfólia* nezmenená. Avšak ako prvá sila, aj táto má negatívnu stránku. So svojou stálosťou zbaví model množstva peňazí, prináša stratu nevyužitých príležitostí.

Aj túto silu treba matematicky zadať. V prípade druhej sily sa nadefinuje obmedzenie množstva jednotlivých bondov, aby sa dosiahol potrebný efekt. Presnejšie: množstvo bondu j v čase t a v scenári s by sa mal rovnať množstvu bondu j v čase $t - 1$ v scenári s .

Z 3.2.2 je známe, že scenár s sa určuje pomocou realizácií. K vyjadreniu druhej sily je potrebné zaviesť tzv. prediktor realizácií, označíme $p(\cdot)$, ktorý stanoví, že ktorá realizácia je predchodcom realizácie r v čase t na scenári s .

$$\begin{aligned} (x_{t,j}^{p(r)} - x_{t-1,j}^r) &\longrightarrow \min \\ \text{pre } \forall t, \forall r, \forall j & \end{aligned} \quad (3.23)$$

V čase $t = 0$ sa rovnica 3.23 zapíše ako:

$$\begin{aligned} (x_{0,j}^1 - C_j) &\longrightarrow \min \\ \text{pre } \forall j & \end{aligned} \quad (3.24)$$

kde $C_j \geq 0$ je počet assetu j .

V procese sa predpokladajú aj krajné udalosti, ako vznik nového bondu, či zánik starého bondu.

Ak sa v portfóliu vyskytne nový asset, potom v systéme sa to zobrazí aj obmedzením:

$$(x_{t,j}^r - 0) \longrightarrow \min \quad (3.25)$$

pre $\forall t, \forall r, \forall j$

V prípade, ak bond, ktorý už existoval v portfóliu, vyprší alebo sa predá, proces nepenalizuje takúto udalosť, preto nebude mať žiadne obmedzenie.

Systém rovníc popisuje *potenciál stálosti*. Okrem toho aj to, ako sú jednotlivé vrcholy na strome prepojené, ľahko sa vydedukuje aká množina vrcholov vytvára jednotlivé scenáre. Druhú silu môžeme napísať v tvare:

$$\begin{pmatrix} (x_{0,j}^1 - C_j) \\ (x_{1,j}^{p(r)} - x_{0,j}^r) \\ \vdots \\ (x_{t,j}^{p(r)} - x_{t-1,j}^r) \end{pmatrix} \longrightarrow \min \quad (3.26)$$

Tu už je globálna štruktúra daná, len ju vyjadríme jednotne. Systém rovníc 3.26 sa zapíše v maticovom tvare:

$$(M_{tr} x_{gl} - C) \longrightarrow \min \quad (3.27)$$

kde matica M_{tr} pozostáva z núl a jednotiek a vektor C je:

$$C = \{C_j, 0, \dots, 0\}^T$$

Výraz 3.27 má nasledovnú diagonálnu štruktúru:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & 0 & \\ -1 & & 0 & 1 & 0 & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & -1 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^a \\ x_1^1 \\ \vdots \\ x_q^p \\ \vdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_j \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \min$$

Tento diagonálny zápis má len ilustratívny charakter, matica M_{tr} nadobudne takú štruktúru, ako sú vrcholy navzájom prepojené. Je závislý od počtu reálnych assetov v stavoch a od počtu vrcholov v strome. Počet stĺpcov má konštantný, jeho rozmer sa zhoduje rozmeru vektoru x_{gl} , a počet riadkov má variabilný.

3.2.5 Normová funkcia $N(\alpha)$

V tejto podkapitole sa snažíme vyjasniť zložitosť merania odchýlok v prvej sile a vzápätí navrhnúť riešenie tohto problému.

Normalizácia odchýlky $\alpha = h(\rho) - h(\psi)$ je veľmi podstatná. Účelom normovania je meranie odchýlky prvej sily. Normalizácia je potrebná kvôli správnej optimalizácii portfólia. V prvej sile sa minimalizuje peňažná odchýlka. Vektor odchýlky dáva informáciu o tom, koľko by malo byť a koľko je tam investovaných peňazí.

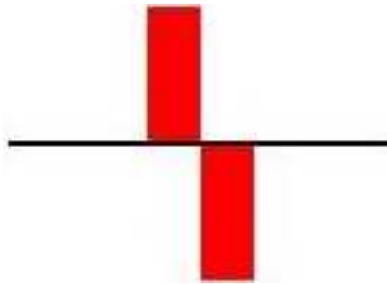
Odchýlka v *potenciáli dobrosti* medzi $h(\rho)$ a $h(\psi)$ sa meria po zložkách, každý asset zvlášť. Je preto možnosť skúmať rozdiely dopodrobna.

Potenciál dobrosti okrem celkového rozdielu medzi hodnotami portfólií v jednom čase t a stave r_t analyzuje v ktorom asete nastal rozdiel a či sa peňažná medzera eliminuje v nejakom ďalšom asete. Zo vzťahu 3.15 vieme, že asety sú zostavené v rastúcom časovom poradí, čiže ak znižovanie peňažného rozdielu nastane v i -tom bonde, to signalizuje, že za aký čas sa rozdiel zúži. Do procesu posielajú dvojakú podrobnú informáciu (viď. príklady na obrázku 3.5, 3.6):

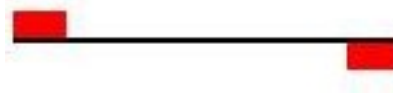
I.1.: aký veľký je peňažný rozdiel medzi daným assetom v ρ_t a ψ_t

I.2.: za aký čas sa vynuluje alebo sa zúži tento rozdiel

Pri meraní odchýlky nastáva rozdiel nielen vo veľkosti výnosu medzi *reálnym* a *dokonalým portfóliom*, ale aj v čase, t.j. v jednoduchom asete, kedy sa vypláca výnos bondov. Pomocou normovej matice $N(\alpha)$ chceme dosiahnuť to, aby proces robil rozdiely v tom, čo je lepšie: či malá peňažná odchýlka sa eliminuje po dlhšom čase (v asete s dlhšou splatnosťou) ako to znázorňuje aj obrázok 3.5 alebo veľká peňažná odchýlka sa eliminuje hneď v nasledujúcom čase (v asete s kratšou splatnosťou) ako vidieť na obrázku 3.6.



Obrázok 3.5: Veľká peňažná odchýlka, vynuluje sa za krátky čas



Obrázok 3.6: Malá peňažná odchýlka, vynuluje sa za dlhší čas

Keby odchýlka α bola merateľná len jednou vzdialenosťou, t.j. platilo by len I.1., problém by sa mohol riešiť pomocou Euklidovskej normi. Ale takto sa musí vytvoriť tzv. "kompozičná" normová funkcia $N(\alpha)$, ktorá berie ohľad na obidve aspekty. Vytvorenie takejto matice sa zdalo byť obťažné.

Normová funkcia $N(\alpha)$ je všeobecná. Snažíme sa vytvoriť takú funkciu, ktorá je jednoduchá. Preto si zvolíme lineárnu funkciu:

$$N(\alpha) = N \cdot \alpha \tag{3.28}$$

Rozmery matice N závisia od veľkosti rozmeru x_{gl} . Navrhujeme ju nasledovne:

$$N(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Prvá sila sa teda modifikuje na:

$$(N(DM - yv^T M) \cdot x) \longrightarrow \min \quad (3.30)$$

a v globálnej štruktúre sa matica $N(\alpha)$ toľko krát spojí, koľko je vrcholov:

$$N(\alpha)_{gl} = (N_0^1 \quad N_1^{r_1} \quad \dots \quad N_k^{r_k})$$

Teda Prvá sila v globálnom tvare je vyjadrená ako:

$$(N(DM - yv^T M)_{gl} \cdot x_{gl}) \longrightarrow \min \quad (3.31)$$

3.2.6 Váhy dvoch síl

Podstata dvoch síl je založená na protikladných ťažných silách. Kým sa prvá sila snaží o dosiahnutie maximálneho výnosu, čiže pohybuje sa smerom k stavu najlepšieho zloženia, k ψ , zatiaľ druhá sila jej v tom zabraňuje, lebo pod veľkými pohybmi vidí veľké transakčné náklady, pohybuje sa v smere počiatočného stavu.

Rizikovo averzný klient zohľadňuje fakty rizikovosti: istá strata z transakčných nákladov a potenciálny zisk. Jeho averzia závisí od voľby *dokonalého portfólia*.

Aby sa **F-model** dal aplikovať na rôzne stavy pre rôznych rizikovo averzných investorov, ktorý chcú analyzovať svoje možné výnosy na trhu, je vhodné zabudovať tzv. regulátor pomeru dvoch síl. Modifikáciu dosiahneme tak, že pre obidve sily zadefinujeme konštanty S_1, S_2 , ktoré budú znásobovať váhy síl.

$$(S_1 N(DM - yv^T M)_{gl} + S_2 M_{tr})x_{gl} \longrightarrow \min \quad (3.32)$$

3.2.7 Ohraničenia

V tejto časti sa zadajú potrebné ohraničenia **F-modelu**, aby optimalizačný proces bol presný a spoľahlivý. Sú len dve ohraničenia:

- samofinancovateľnosť
- nezápornosť

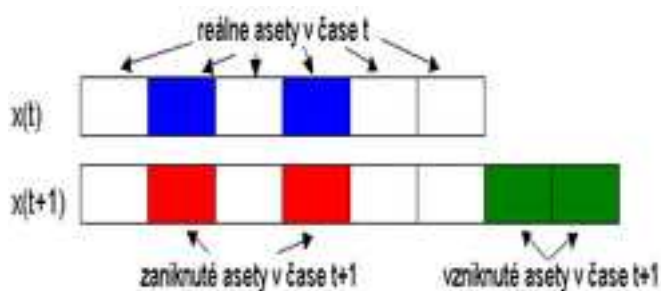
Podmienka *samofinancovania*

Stratégia samofinancovania nie je žiadnou novotou v teórii optimalizácie. Je to zaužívané obmedzenie v prístupoch optimalizácie.

Predpokladá nejaký ustálený stav, nejaké konštantné peňažné prostriedky, s ktorými sa obchoduje počas rebalancovania. Len za tú hodnotu peňazí, akú malo portfólio pred rebalancovaním sa dá nakúpiť ďalšie, t.j. hodnota portfólia pred rebalancovaním sa musí zhodovať s hodnotou portfólia po rebalancovaní. V rovnici by sa dalo vyjadriť nasledovne:

$$h_t(\rho_t) = h_t(\rho_{t+1}) \pm \epsilon_t \quad \text{pre } \forall t \quad (3.33)$$

Avšak treba zaručiť kompatibilitu v rozmeroch. Treba si uvedomiť, že hodnota portfólia je počítaná pred rebalancovaním, po rebalancovaní môžu vzniknúť a zaniknúť asety, ako to znázorňuje aj obrázok 3.7, pritom ceny asetov ešte zostávajú nezmenené, počíta sa s cenami z času t .



Obrázok 3.7: Prechod v čase

Technicky je to zvládnuteľné pomocou tzv. konverzných matíc K_M a K_x , ktoré zaručia kompatibilitu medzi $h_t(\rho_t)$ a $h_t(\rho_{t+1})$ a to tak, že berú do úvahy len tie asety, ktoré boli v čase t a stále existujú v čase $t + 1$.

Rovnicu 3.33 môžeme napísať ako:

$$v_t M_t K_t x_t = v_t M_{t+1} K_{t+1} x_{t+1} \pm \epsilon_t \quad \text{pre } \forall t$$

kde

$$K_t = K_{M_t} K_{x_t} \quad \text{a} \quad K_{t+1} = K_{M_{t+1}} K_{x_{t+1}} \quad (3.34)$$

Nezápornosť

V modeli sú striktne zakázané krátke pozície. To znamená, že z každého reálneho asetu môžeme vlastniť najmenej 0 kusov, nemôžeme dlhovať bondy.

$$x_{gl} \geq 0 \quad (3.35)$$

3.2.8 Formulácia F-modelu

Na minimalizáciu dvoch síl sme vybrali metódu najmenších štvorcov, použije sa Euklidovská normalizácia. Takto dospejeme k výslednému tvaru **F-modelu**:

$$\min_{x_{gl}} \| (S_1 N(DM - yv^T M) + S_2 M_{tr}) x_{gl} \|^2$$

za podm.:

$$v_t M_t K_t x_t = v_t M_{t+1} K_{t+1} x_{t+1} \pm \epsilon_t$$

$$x_{gl} \geq 0 \quad (3.36)$$

Kapitola 4

Empirické testy

V tejto kapitole sa ukážu nejaké porovnania dvoch modelov, 3.4 a 3.36, ich aplikácia na príklade a interpretácie výsledkov.

4.1 Test 1: Váhy dvoch síl

Váhy dvoch síl sú pre interpretateľnosť kľúčové, čo sa demonštruje na príklade.

Najpr sa prezentuje menší príklad, tzn. úloha s malým počtom assetov, scenárov a rebalancovaním pre dôkladnejšie vysvetlenie fungovania S_1 a S_2 a pre ľahšie vizualizovanie.

Investor sa môže rozhodnúť, akú výšku rizika si zoberie pri očakávanom výnose.

4.1.1 Popis príkladu

Nadefinuje sa strom, na ktorej sa bude optimalizovať:

- aktuálny čas (keď sa začne optimalizovať) je: 3.1.2005
- binárny strom (binárny znamená, že má 2 realizácie v každom čase okrem času 0) má 2 scenáre, a 2 časy: 0, 1 (raz sa rebalancuje), čiže dokopy má: $2^0 + 2^1 = 3$ vrcholy

- na vrcholoch sú zapísané ρ a ψ
- ρ obsahuje 2 reálne asety:
 1. bezkupónový dlhopis, ktorý má dátum vypršania 1.6.2007, vlastníme z neho 5 kusov
 2. kupónový dlhopis, ktorý výšku kupónu 5% vypláca ročne, dátum vypršania je 1.4.2011, vlastníme z neho 1 kus
- rebalancuje sa po 3 mesiacoch, t.j. 3.3.2005
- v matici M sa sledujú časy: 1.4.2005, 2.1.2006, 1.6.2007, 1.4.2011
- ψ tým pádom obsahuje 4 jednoduché asety v percentuálnom vyjadrení
- parametre investora: percentuálne rozdelenie ZB -ov:

$$\begin{aligned} (y_0^1)^T &= \{0 \ 0 \ 0.5 \ 0.5\} \\ (y_1^1)^T &= \{0 \ 0 \ 0.8 \ 0.2\} \\ (y_1^2)^T &= \{0 \ 0 \ 0.2 \ 0.8\} \end{aligned}$$

- ceny pre jednotlivé ZB -y:

$$\begin{aligned} v_0^1 &= \{0.993 \ 0.980 \ 0.895 \ 0.768\} \\ v_1^1 &= \{0.995 \ 0.985 \ 0.923 \ 0.827\} \\ v_1^2 &= \{0.991 \ 0.973 \ 0.864 \ 0.707\} \end{aligned}$$

4.1.2 Výsledky

Budú sa uvažovať vždy iné pomery síl (viď. 4.1). Jedna sila bude statická, druhá variabilná. Výstupy sa interpretujú na obrázkoch 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5. Obrázky obsahujú body $y'_i, i = 1, 2, 3$, ktoré sú vyrátané pomocou Markowitza, štartovací bod x_0 a body x_i , ktoré sú riešením F-modelu.

	Obr. 4.1	Obr. 4.2	Obr. 4.3	Obr. 4.4	Obr. 4.5
Sila 1:	1	1	1	1	1
Sila 2:	10	5	2	1	0.1

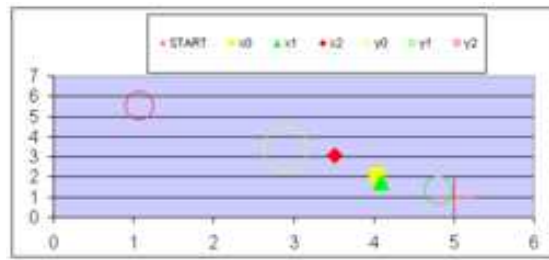
Tabuľka 4.1: Pomery síl



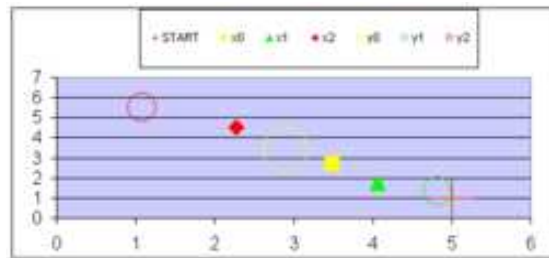
Obrázok 4.1: Pomer síl I



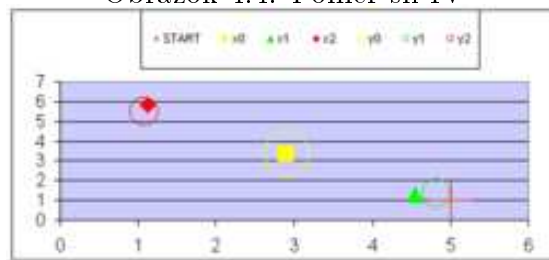
Obrázok 4.2: Pomer síl II



Obrázok 4.3: Pomer síl III



Obrázok 4.4: Pomer síl IV



Obrázok 4.5: Pomer síl V

Samozrejme iný klient môže mať celkom inú predstavu o tom, ako sa bude vyvíjať trh, čiže o percentuálnom zložení jednoduchých assetov. Preto sa ukáže aj ďalší prípad, či sa inými parametrami investora dokonverguje riešenie do najlepšieho stavu, do y' .

Zmeníme vstupy y -ov na:

$$\begin{aligned} (y_0^1)^T &= \{0 \ 0 \ 0,5 \ 0,5\} \\ (y_1^1)^T &= \{0 \ 0 \ 0,1 \ 0,9\} \\ (y_1^2)^T &= \{0 \ 0 \ 1 \ 0 \} \end{aligned}$$



Obrázok 4.6: Zmenené hodnoty y -ov

Výsledky ukazujú, že F-model funguje podľa očakávaní, a pomocou variabilnosti síl je schopný dokonvergovať do stavu, kde je maximálny výnos asetov. aj keď nastávajú numerické odlišnosti medzi Markowitzom a F-modelom.

4.2 Test 2: Porovnanie dvoch modelov

Už všetko je pripravené na konfrontáciu F-modelu a modelu dvojetapového lineárneho stochastického programovania. Účelom testu je, či v oboch prípadoch dávajú optimalizácie ten istý výsledok. Nepredpokladáme žiadnu totožnosť v koncových číslach, lebo obidva procesy optimalizujú na inej báze. Avšak nejaká korelovanosť medzi výsledkami by predsa len mala byť.

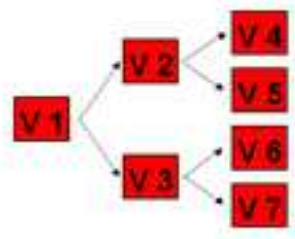
V príklade sa budú používať trhové historické dáta, ktoré slúžia aj ako skúška správnosti výsledku. V procese sa pracuje so slovenskými štátnymi dlhopismi.

4.2.1 Popis príkladu

Nadefinuje sa strom, na ktorej sa bude optimalizovať (viď. obrázok 4.7):

Vstupné údaje pre F-model:

- aktuálny čas (keď sa začne optimalizovať) je: 11.6.2002
- binárny strom má 4 scenáre, a 3 časy: 0, 1, 2 ,celkom má 7 vrcholov



Obrázok 4.7: Strom s parametrami

- ρ obsahuje 3 štátne dlhopisy:

	Typ	Kupón	Dátum emisie	Dátum maturity	# kusov
1.	kupónový	8.5	17.8.2000	17.8.2010	1
2.	kupónový	7.5	13.3.2002	13.3.2012	1
3.	kupónový	9	6.4.2000	6.4.2005	1

- rebalancuje sa trikrát: 11.6.2002, 11.6.2003 a 11.6.2004
- v matici M sa sledujú zhodné časy s rebalancovaním
- ψ tým pádom obsahuje 4 jednoduché asety v percentuálnom vyjadrení
- parametre investora: percentuálne rozdelenie ZB -ov:

$$(y_0^1)^T = (y_1^1)^T = (y_2^1)^T = (y_1^2)^T = (y_2^2)^T = (y_2^3)^T = (y_2^4)^T = \{0.33 \quad 0.33 \quad 0.33\}$$

- ceny pre jednotlivé ZB -y:

$$\begin{aligned} v_0^1 &= \{1 \quad 0.922 \quad 0.851\} \\ v_1^1 &= \{1 \quad 0.931 \quad 0.874\} \\ v_1^2 &= \{1 \quad 0.966 \quad 0.943\} \\ v_2^1 &= \{1 \quad 0.922 \quad 0.849\} \\ v_2^2 &= \{1 \quad 0.939 \quad 0.880\} \\ v_2^3 &= \{1 \quad 0.976 \quad 0.951\} \\ v_2^4 &= \{1 \quad 0.995 \quad 0.989\} \end{aligned}$$

Vstupné údaje pre dvojetapový lineárny stochastický model:

- sledujú sa tie isté 3 časy ako v F-modeli
- požadované sú ceny P pre všetky 4 scenáre, čiže matice P_s , kde $s = 1, 2, 3, 4$, ktoré vyjadrujú ceny bondov $j = 1, 2, 3$ v čase $t = 1, 2, 3$ sú nasledovné:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 109.152 & 97.563 & 102.861 \\ 115.969 & 105.782 & 104.691 \\ 104.4275 & 92.530 & 101.879 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 109.152 & 97.563 & 102.861 \\ 115.969 & 105.782 & 104.691 \\ 114.258 & 103.655 & 103.466 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 109.152 & 97.563 & 102.861 \\ 143.751 & 137.912 & 111.983 \\ 138.117 & 131.747 & 106.810 \end{pmatrix}$$

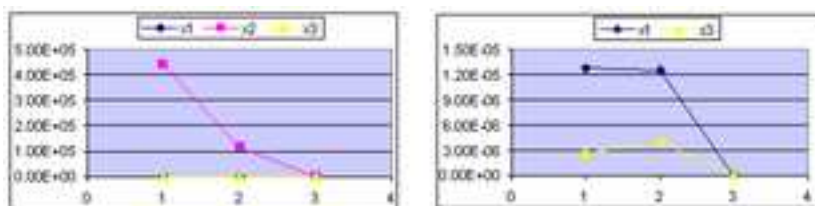
$$P_4 = \begin{pmatrix} 109.152 & 97.563 & 102.861 \\ 143.751 & 137.912 & 111.983 \\ 152.620 & 149.511 & 108.573 \end{pmatrix}$$

- ďalej systém potrebuje cash flow, čo pritečie z kupónov. Tieto ceny sú v každom sledovanom čase a scenári rovnaké, pretože rebalancujeme po roku a bondy vyplácajú kupóny tiež ročne. V scenároch figurujú rovnaké časy, teda matica F_s , kde $s = 1, 2, 3, 4$ je:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8.5 & 7.5 & 9 \\ 8.5 & 7.5 & 9 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Výsledky

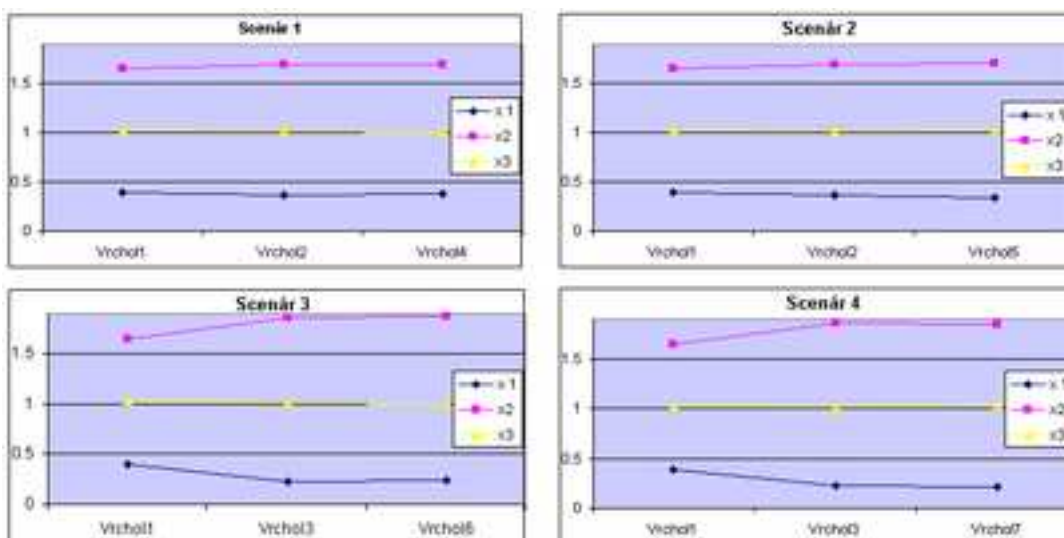
Dvojetapový lineárny stochastický model maximalizuje zisk portfólia cez stredné hodnoty. Vybere najlepší scenár, kým F-model analyzuje ako sa môže portfólio vyvíjať.



Obrázok 4.8: Stochastický model

Najprv ukážeme, čo navrhuje stochastický model, potom uvedieme predstavy F-modelu.

Na obrázku 4.8 vidieť, ako model na konci manažovania portfólia premení asety na peniaze. Hneď na začiatku času zavrhuje obchodovanie s bondami x_1 a x_3 a všetky peňažné prostriedky koncentruje do assetu x_2 , ktorý podľa neho vynáša najviac.

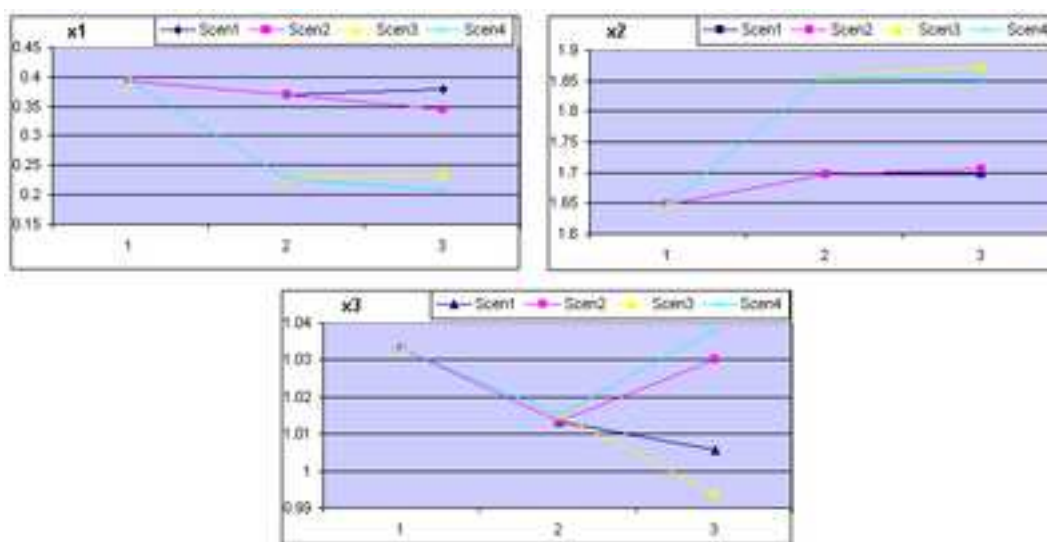


Obrázok 4.9: F-model

Zložený obrázok 4.9 znázorňuje prípady vývoja portfólia. F-model vyjadruje množstvo assetov pred rebalancovaním, kým stochastický model po

rebalancovaní. Preto je roziel v koncovom stave medzi modelmy.

Náš prístup radí zavrhnúť alebo minimalizovať obchodovanie s asetom x_1 a naopak odporúča, aby sme peniaze investovali do bondu x_2 . Čiže badať nejakú zhodu v odporúčaní oboch modelov.



Obrázok 4.10: Vývoj bondu x_1 , x_2 a x_3

Z obrázku 4.10, kde je možnosť sledovať bondy na scenároch, je jasne vidieť predpokladané vývoje v čase.

Proces nedáva radikálne rady, ako stochastický model. Je to aj vďaka stupni riziko-averznosti, t.j. váham S_1 a S_2 . Je jasné, že hodnotu portfólia je zbytočné porovnávať. Stochastický model má rádovo väčší zisk, lebo rieši úlohu na inej báze, napr. môže si požičať obrovské množstvo peňazí a riadiť portfólio s väčším rozpočtom. Náš model zohľadňuje viacej realitu. Nepredpokladá príliv peňazí, počíta s rizikom a averziou klienta.

Konklúzie z tohto jedného porovnania sa nedajú vyvodiť. Avšak je aj samozrejmosťou, že medzi modelmi nastávajú rozdiely a to kvôli odlišnému prístupu k problematike. Dôvod môže byť dvojaký:

1. iná štruktúra problému
2. iná metóda riešenia

4.3 Test 3: Porovnanie modelov v úlohe s väčšími rozmermi

Samozrejme testy sa nerobili len v úlohe s malými rozmermi, ale aj vo väčších príkladoch. Znázornenie malej úlohy je ľahšie a prehľadnejšie, ako v ostatných prípadoch. V tomto teste demonštrujeme jeden väčší príklad manažovania portfólia bondov.

4.3.1 Popis príkladu

Portfólio obsahuje 8 štátnych dlhopisov, konkrétne: 199, 189, 191, 174, 166, 133, 163 a 188 (www.nbs.sk). Z každého bondu vlastníme na začiatku 1 kus.

Robíme spätné testy z historických dát. Časový interval riadenia portfólia je pomerne krátky: 15.7.2003 - 8.4.2005.

Za toto obdobie rebalancovanie prebehne až 5-krát: 15.7.2003, 16.1.2004, 22.6.2004, 8.7.2004, 8.4.2005.

V každom čase (rebalancovaní) a v každom stave sa predpokladá ďalšie dva stavy, čiže binárny strom. Strom bude mať 31 vrcholov a 16 scenárov.

Klientove pžiadavky stanovíme podobne ako v 4.2, čiže predpokladá sa rovnomerné roz distribuovanie peňažných prostriedkov medzi assetmi.

Bolo by obtiažne znázorniť všetky odporúčania nášho a stochastického modelu, preto v podkapitole 4.3.2 ukážeme len jeden náhodne vybratý.

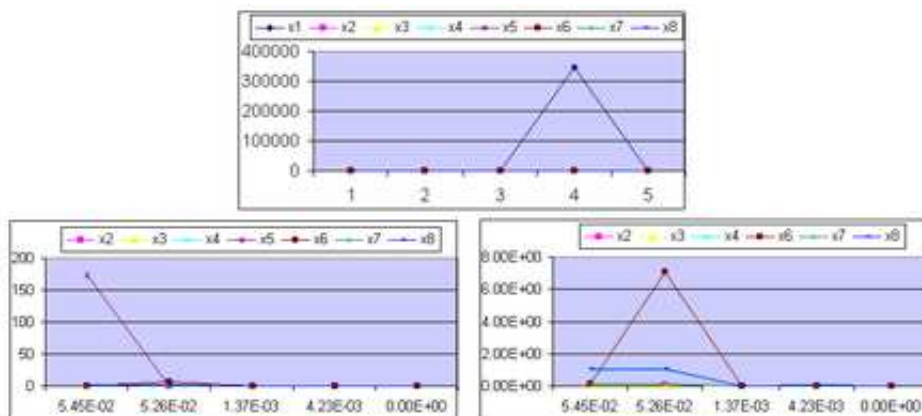
4.3.2 Výsledky

Stochastický model vygeneroval z úlohy maticu rozmeru 1112×2080 .

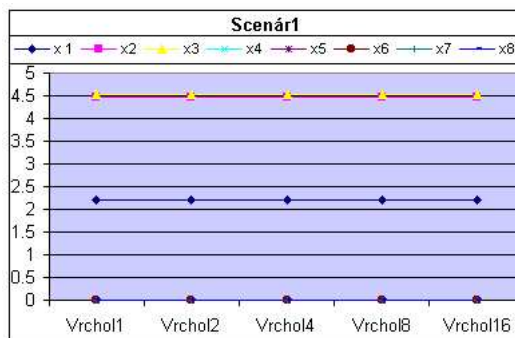
Na grafoch 4.11 a 4.12 znázorníme výsledky stochastického modelu a čiastočné výstupy nášho modelu.

Kým dvojetapová úloha investuje takmer celú časť peňazí do bondu x_1 , zatiaľ náš prístup uprednostňuje hlavne dlhopisy x_2 a x_3 ale vyniká aj asset x_1 . Môžeme teda skonštatovať, že aj na veľkej úlohe dostávame podobný výsledok, odporúčanie, ako v teste 4.2.

Pre exaktné výroky o úspešnosti výsledkov a fungovania **F-modelu** by bolo potrebné rozanalyzovať množstvo podobných príkladov. Preto tieto zistenia o výsledkoch modelu nie sú jednoznačné, avšak dávajú nejakú predstavu o správaní sa v iných situáciách.



Obrázok 4.11: Výsledky stochastického modelu a podrobné znázornenie počtu bondov v jednotlivých časoch



Obrázok 4.12: Demonštrovanie jedného scenára v **F-modeli**

Kapitola 5

Záver

Hlavnou podstatou diplomovej práce bolo skonštruovať **F-model**, otestovať na príklade a porovnať ho s iným modelom.

Na začiatku práce sa prezentoval stručný prehľad doterajšieho vývoja v operačnej analýze, spomenuli sa najvýznamnejší autori a ich prelomové modely.

V ďalšom bolo poskytnuté zhrnutie o stochastickom programovaní. Jeden z takýchto prístupov, konkrétne dvojetapové lineárne stochastické programovanie sa namodeloval ako porovnávajúci nástroj.

Nasledovala podstata práce, definovanie pojmov, prechodov a ohraňení, aby na konci ako celok mohol vzniknúť náš model. Podrobne bolo vysvetlené jeho fungovanie, proces optimalizácie a význam jeho komponentov.

Komponenty, ako sú váhy dvoch síl boli znázornené aj na príklade. Následne model bol konfrontovaný s modelom dvojetapového lineárneho stochastického programovania. Výsledky ukázali rozdielnosť modelov, avšak v stratégii manažovania portfólia bola medzi nimi badateľná zhoda.

Odlíšnosť netreba chápať ako chybu prístupu, hlavná príčina rozdielu je nekonzistentnosť v modelovaní a v riešení. Ako ani v reálnom svete nie sú veci rovnaké, napríklad ľudia majú rôzne názory na jeden prípad, tak sa môžu odlišovať aj optimalizačné riešenia. Pokladáme za úspech **F-modelu**, že navrhoval podobnú stratégiu v manažovaní portfólia bondov, ako stochastický model.

Môžeme povedať, že náš model je viac realistickejší, ako ten druhý. Neide zbytočne do rizika a pritom sa snaží zarobiť čo najviac. Je vytvorený pre univerzálneho investora, ktorý vie vniesť do modelu svoje predstavy a

požiadavky.

Univerzálnosť modelu však má aj nejaké obmedzenie. Prístup by mohol byť ešte viac efektívnejší, ak by sa zabudoval citlivejší regulátor síl. Klient by vedel nastaviť svoje riziko na každý čas a stav zvlášť. Tento predpoklad vychádza z faktu, že výška rizika rozhodovania sa v neistote je priamo úmerná s dĺžkou času manažovania. To znamená, že ak sa musíme rozhodnúť dnes, do akého inštrumentu chceme investovať peniaze zajtra, obnáša to menej rizika ako keby sme sa museli dnes rozhodnúť, kam investovať svoje peniaze o mesiac.

Tieto úvahy však zatiaľ zostávajú na hypotetickej báze.

Literatúra

- [1] John Board, Charles Sutcliffe, and William Ziemba. The Application of Operation Research Techniques to Financial Markets. *UK*, 1999.
- [2] Richard Dobiš. Metódy Stochastického Programovania. *Minimová práca*, 2003.
- [3] Bruce Forrest, Karl Frauendorfer, and Michael Schürle. A Stochastic Optimization Model for the Investment of Savings Account Deposit. *Gesellschaft für Operation Research(GOR)*, 1997.
- [4] Anne KU. Modeling Uncertainty in Electricity Capacity Planning. *home page: <http://www.analytical.com/thesis>*, 1995.
- [5] John M. Mulvey. Multi-stage Optimization for Long-term Investors. *Princeton*, 2000.
- [6] Soren S. Nielsen. Mat-Ok 3.2 Lecture Notes: Mathematical Modeling and Optimization with Applications in Finance. *DK*, 1997.
- [7] Li-Yong YU, Xiao-Dong JI, and Shou-Yang WANG. Stochastic Programming Models in Financial Optimization: A Survey. *AMO - Advanced Modeling and Optimization*, 2003.