FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave
Ekonomická a finančná matematika

Metódy riešenia nelineárnej úlohy o komplementarite

Diplomová práca

Diplomant: Balko Boris
Vedúci diplomovej práce: doc.RNDr. Milan Hamala , CSc.
Bratislava 2005

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne a použil som len literatúru uvedenú v zozname.

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Milanovi Hamalovi, CSc. za jeho odborné vedenie, cenné rady, vecné pripomienky a za množstvo času, ktoré mi venoval pri vypracovávaní tejto diplomovej práce.

Obsah

Úvod

Cieľom tejto diplomovej práce je ukázať možnosti riešenia nelineárnej úlohy o komplementarite, ktorá má široké uplatnenie pri riešení úloh nelineárneho programovania, pretože veľké množstvo optimalizačných problémov môžeme riešiť pomocou transformácie na úlohu o komplementarite. Takisto sa problém komplementarity vyskytuje v mnohých ekonomických modeloch ale aj pri rôznych aplikáciách v inžinierstve. Druhým a hlavným cieľom je naprogramovať a porovnať dve konkrétne metódy na riešenie nelineárnej úlohy o komplementarite.

V prvej kapitole uvedieme základné typy úloh o komplementarite ako aj rozličné možnosti ich zápisu. Spomenieme niektoré vlastnosti zobrazenia F, ktoré sa vyskytuje v týchto úlohách. Ukážeme ako riešenie minimalizačnej úlohy prevedieme na úlohu o komplementarite.

Druhá kapitola sa venuje možnostiam riešenia úlohy o komplementarite pomocou transformácie na sústavu nelineárnych rovníc. Ukážeme tri metódy ako možno takúto sústavu riešiť. Oboznámime sa s pojmami: komplementárna funkcia, funkcia kvality. Bližšie sa pozrieme na vlastnosti troch najpoužívanejších funkcií kvality pre úlohu nelineárnej komplementarity.

V tretej kapitola podrobne opíšeme metódu vyhladzovania Jakobiánu, ktorá je jednou z možností ako riešiť sústavu rovníc ekvivalentnú s úlohou o komplementarite. Pri jej spracovaní sme vychádzali z práce [1]. Táto metóda využíva Kanzovovu vyhladzovaciu funkciu Fischer-Burmeisterovej komplementárnej funkcie. V druhej časti kapitoly opíšeme samotný algoritmus tejto metódy.

V štvrtej kapitole sa pozrieme na Chenovu vyhladzovaciu metódu, ktorá využíva Chen-Mangasarianovu triedu vyhladzujúcich funkcií plus funkcie. V tomto prípade sme vychádzali z práce [5].

Piata kapitola obsahuje popis a výsledky numerických experimentov, ktoré sme uskutočnili pomocou naprogramovaných algoritmov spomenutých v tretej resp. štvrtej kapitole.

Kapitola 1

Úlohy o komplementarite

V tejto kapitole uvedieme základné typy úloh o komplementarite, s ktorými sa môžeme stretnúť. Ukážeme si z akých úloh vznikajú. Spoločným znakom všetkých úloh o komplementarite je kolmosť dvoch nezáporných vektorov, ktoré spĺňajú nasledujúce podmienky:

$$y = F(x) \qquad x^T y = 0 \qquad x, y \in R^n_+ \tag{1.1}$$

1.1 Nelineárna úloha o komplementarite

Nech je dané zobrazenie $\mathbf{F} : \mathbb{X} \rightarrow R^n$ definované na podmnožine $\mathbb{X} \subseteq R^n$ obsahujúcej nezáporný ortant. Potom cieľom úlohy o komplementarite je nájsť taký vektor $\mathbf{x} \in R^n$, aby bol splnený nasledujúci systém rovníc a nerovníc:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0_n} \qquad \mathbf{F(x)} \geq \mathbf{0_n} \qquad \mathbf{x^T F(x) = 0} \tag{1.2}$$

Úlohu (1.2) označujeme ako úlohu NCP(F) (Nonlinear Complementarity Problem).

Definícia 1.1.1 *Zobrazenie* $\mathbf{F} : R^n \rightarrow R^n$ *nazývame*

- P_0*-funkciou, ak pre každé* $x, y \in R^n$ *také, že* $x \neq y$ *existuje index* i *taký, že*

$$(x_i - y_i)[F_i(x) - F_i(y)] \geq 0, \qquad \textit{pre } x_i \neq y_i,$$

- *P-funkciou, ak pre každé $x, y \in R^n$ také, že $x \neq y$ existuje index i taký, že*
$$(x_i - y_i)[F_i(x) - F_i(y)] > 0, \qquad \text{pre } x_i \neq y_i.$$
- *uniform P-funkciou, ak existuje kladná konštanta μ taká, že pre každé $x, y \in R^n$ existuje index i taký, že*
$$(x_i - y_i)[F_i(x) - F_i(y)] \geq \mu \|y - x\|^2.$$

Definícia 1.1.2 *Zobrazenie $\mathbf{F} : R^n \to R^n$ nazývame*

- *monotónnou funkciou, ak pre každé $x, y \in R^n$ platí*
$$(x - y)^T[F(x) - F(y)] \geq 0.$$
- *rýdzo monotónnou funkciou, ak pre každé $x, y \in R^n$ také, že $x \neq y$ platí*
$$(x - y)^T[F(x) - F(y)] > 0.$$
- *silne monotónnou funkciou, ak existuje kladná konštanta μ taká, že pre každé $x, y \in R^n$ platí*
$$(x - y)^T[F(x) - F(y)] \geq \mu \|y - x\|^2.$$

Z definície je jasné, že každá monotónna funkcia je P_0-funkcia. Každá rýdzo-monotónna funkcia je P- funkcia a každá silne monotónna funkcia je uniform P-funkcia. Úlohy o komplementarite NCP(F), kde zobrazenie F je P_0-funkcia označujeme $P_0 - NCP(F)$.

Definícia 1.1.3 *Nech zobrazenie $\mathbf{F} : R^n \to R^m$ je lokálne Lipšicovské v $x \in R^n$. Hovoríme, že $\mathbf{F}$ je polohladké v bode x, ak*

$$\lim_{\substack{H \in \partial F(x + tv') \\ v' \to v, t \downarrow 0}} Hv' \tag{1.3}$$

existuje pre každé $v \in R^n$.

Je známe, že spojite diferencovateľné funkcie a konvexné funkcie sú polohladké.

Definícia 1.1.4 *Funkciu $f : R^n \to R$ nazývame SC^1 funkciou ak f je spojite diferencovateľná a jej gradient je polohladký.*

Veta 1.1.1 *Nech* $\mathbf{F} : \mathbb{X} \to R^n$ *je spojité zobrazenie na* $\mathbb{X} \subset R^n_+$. *Potom platia nasledujúce tvrdenia:*

- *Ak* $\mathbf{F}$ *je monotónne na* $\mathbb{X}$, *potom množina riešení NCP(F) je konvexná (môže byť aj prázdna).*
- *Ak* $\mathbf{F}$ *je rýdzomonotónne na* $\mathbb{X}$, *potom NCP(F) má maximálne jedno riešenie.*
- *Ak* $\mathbf{F}$ *je silnomonotónne na* $\mathbb{X}$, *potom NCP(F) má práve jedno riešenie.*

Skalárny súčin v systéme (1.2) môžeme rozpísať pomocou sumy jednotlivých zložiek $\mathbf{x^T F(x)} = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i(\mathbf{x})$ a teda úlohu (1.2) môžeme ekvivalentne prepísať v zložkovom tvare ako sústavu rovníc a nerovníc:

$$x_i \geq 0 \qquad F_i(\mathbf{x}) \geq 0 \qquad x_i F_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pre i} = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{1.4}$$

Z tvaru (1.4) úlohy o komplementarite vidíme, že stačí aby jedna zo zložiek x_i,$F_i(\mathbf{x})$ bola nulová, aby bola splnená podmienka komplementarity.Teda (1.4) môžeme prepísať v tvare:

$$\min(x_i, F_i(\mathbf{x})) = 0 \qquad \text{pre i} = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{1.5}$$

resp. vo vektorovom tvare

$$\min(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \tag{1.6}$$

Úlohu o komplementarite typu (1.2) dostaneme z nutných podmienok optimality pre úlohu nelineárneho programovania:

$$\min \{\, f(x) \mid g(x) \leq 0,\ x \geq 0 \} \,, \tag{1.7}$$

kde funkcie $f : R^n \to R$, $g : R^n \to R^m$ sú spojite diferencovateľné. Na získanie podmienok optimality pre úlohu (1.7) použijeme Lagrangeovu funkciu tvaru:

$$L(x, u) = f(x) + u^T g(x), \qquad x \in R^n_+, \qquad u \in R^m_+ \tag{1.8}$$

Ak predpokladáme, že sú splnené podmienky regularity, potom k optimálnemu riešeniu x^0 úlohy (1.7) existuje bod u^0 taký, že tieto body spoločne spĺňajú systém Kuhn-Tuckerových podmienok:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^0}{\partial \mathbf{x}} &\geq \mathbf{0_n^T} & \qquad \tfrac{\partial L^0}{\partial \mathbf{u}} &\leq \mathbf{0_m^T} \\ \frac{\partial L^0}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x^0} &= 0 & \qquad \tfrac{\partial L^0}{\partial \mathbf{u}}\mathbf{u^0} &= 0 \\ \mathbf{x^0} &\geq \mathbf{0_n} & \qquad \mathbf{u^0} &\leq \mathbf{0_m} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ak zavedieme označenie $\mathbf{y^0} = (\mathbf{x^0}, -\mathbf{u^0})$ a $\mathbf{F} = (\frac{\partial L^0}{\partial \mathbf{x}}, -\frac{\partial L^0}{\partial \mathbf{u}})$, potom Lagrangeove podmienky optimality môžme zapísať v tvare:

$$\mathbf{y^0} \geq \mathbf{0_{n+m}}, \qquad \mathbf{F} \geq \mathbf{0_{n+m}}, \qquad (\mathbf{y^0})^T \mathbf{F} = 0 \tag{1.10}$$

1.2 Lineárna úloha o komplementarite

Doposiaľ nebolo bližšie špecifikované zobrazenie $\mathbf{F}$. Ak predpokladáme, že zobrazenie $\mathbf{F} : \mathbb{X} \to R^n$, kde $\mathbb{X} \subseteq R^n$ je lineárne:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q}, \tag{1.11}$$

kde matica $\mathbf{M} \in R^{n \times n}$ a vektor $\mathbf{q} \in R^n$. Potom hovoríme o lineárnej úlohe o komplementarite (LCP - Linear Complementarity Problem) a označujeme LCP(M,q). Teda cieľom úlohy LCP je nájsť taký vektor $\mathbf{x} \in R^n$, ktorý rieši systém:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0_n} \qquad \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q} \geq \mathbf{0_n} \qquad \mathbf{x^T}(\mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q}) = 0 \tag{1.12}$$

Tak ako v prípade NCP aj úlohy LCP vznikajú z nutných podmienok optimality úloh nelineárneho programovania - v tomto prípade sú to úlohy kvadratického programovania v tvare:

$$\min\{\ \frac{1}{2} y^T C y + p^T y\ |Ay \leq 0,\ y \geq 0\} \tag{1.13}$$

Definícia 1.2.1 *Maticu* $\mathbf{M} \in R^{n \times n}$ *v úlohe LCP nazývame*

- P_0 *maticou, ak existuje taký index* i*, pre ktorý* $y_i \neq 0$ *a* $(Ay)_i y_i \geq 0$*, pre* $\forall \mathbf{y} \in R^n$.

- P *maticou, ak existuje taký index* i*, pre ktorý* $y_i \neq 0$ *a* $(Ay)_i y_i > 0$*, pre* $\forall \mathbf{y} \in R^n$.

Veta 1.2.1 *Matica* $\mathbf{M} \in R^{n \times n}$ *je*

- P_0 *matica práve vtedy, ak všetky jej hlavné minory sú nezáporné.*

- *P matica práve vtedy, ak všetky jej hlavné minory sú kladné.*
- *R_0 matica ak jediným riešením systému: $Mx \geq 0, x \geq 0, x^T Mx = 0$ je nulové riešenie.*

Opäť je zrejmé, že každá P-matica je zároveň P_0 matica aj R_0 matica. Jakobiho matica spojite diferencovateľnej P_0-funkcie je P_0 matica.

1.3 Zmiešaná úloha o komplementarite

Doteraz sme mali ohraničenia v podmienkach úlohy o komplementarite len v tvare nerovníc. Pri praktických problémoch sa však stretávame s úlohami, v ktorých vystupujú aj ohraničenia v tvare rovníc. Výnimkou pre úlohy o komplementarite nie sú ani voľné premenné. V takýchto prípadoch hovoríme o zmiešaných úlohách o komplementarite, ktoré označujeme MCP(Mixed Complementarity Problem). Pri týchto úlohách je cieľom nájsť takú dvojicu vektorov $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, ktoré budú spĺňať nasledujúci systém rovníc a nerovníc:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x} \in R^n_+ & (\text{ nezáporné premenné }) \\ \mathbf{y} \in R^m & (\text{ voľné premenné }) \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mathbf{0_n} & (\text{ ohraničenia v tvare nerovností }) \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0_m} & (\text{ ohraničenia v tvare rovností }) \\ \mathbf{x^T F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 & (\text{ podmienka komplementarity }) \,. \end{array}$$

Aj v prípade úlohy MCP existuje prípad, keď funkcie $\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x})$ sú lineárne. Vtedy úlohu MCP môžeme zapísať v tvare:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{a} + \mathbf{Ay} + \mathbf{Cx} & = & \mathbf{0_m}, & \mathbf{x} \geq \mathbf{0_n}, \\ \mathbf{b} + \mathbf{Dy} + \mathbf{Bx} & \geq & \mathbf{0_n}, & \mathbf{y} \in R^m \,, \\ \mathbf{x^T}(\mathbf{b} + \mathbf{Dy} + \mathbf{Bx}) & = & 0\,, & \end{array} \tag{1.14}$$

kde matice $\mathbf{A} \in R^{m\times m}, \mathbf{B} \in R^{n\times n}, \mathbf{C} \in R^{m\times n}, \mathbf{D} \in R^{n\times m}$ a vektory $\mathbf{a} \in R^n, \mathbf{b} \in R^m$ sú známe. Táto úloha sa nazýva zmiešanou úlohou o lineárnej komplementarite (MLCP- Mixed Linear Complementarity Problem). Špeciálny prípad nastane ak je matica $\mathbf{A}$ regulárna. Potom sa dá z prvej rovnice systému (1.14) vyjadriť vektor $\mathbf{y} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{a} + \mathbf{Cx})$ a dosadením do zvyšných rovníc prejdeme k systému, v ktorom už bude neznámy len vektor $\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{b} - \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{a}) + (\mathbf{B} - \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{x} & \geq & \mathbf{0_n} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0_n}\,, \\ \mathbf{x^T}[(\mathbf{b} - \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{a}) + (\mathbf{B} - \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{x}] & = & 0 & \end{array} \tag{1.15}$$

Ak preznačíme $(\mathbf{b} - \mathbf{DA^{-1}a}) = \mathbf{q}$ a $(\mathbf{B} - \mathbf{DA^{-1}C}) = \mathbf{M}$ prejdeme ku klasickej úlohe o lineárnej komplementarite. Druhým špeciálnym prípadom zmiešanej úlohy o komplementarite je prípad, kedy všetky premenné sú voľné a všetky ohraničenia sú v tvare rovníc. Vtedy prechádzame k úlohe nájsť vektor $\mathbf{x} \in R^m$, ktorý má spĺňať systém nelineárnych rovníc:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0_m} \tag{1.16}$$

Tento problém označujeme NE(G) (Nonlinear Equality).

1.4 Vertikálna úloha o komplementarite

V zápise základnej úlohy o komlementarite (1.2) vidíme, že podmienka komplementarity sa vyžaduje od dvoch vektorov, ktoré reprezentujú dvojicu zobrazení, pričom jedno z nich je identické zobrazenie. Pri riešení rôznych problémov to však nemusí platiť. V takomto prípade prechádzame ku všeobecnejšej formulácii úlohy o komplementarite:

$$\mathbf{F^1}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{F^2}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \quad (\mathbf{F^1}(\mathbf{x}))^{\mathbf{T}}\mathbf{F^2}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{1.17}$$

kde $\mathbf{F^1}, \mathbf{F^2} : R^n \to R^n$ sú dve zobrazenia, čo v tvare (1.6) znamená

$$\min(\mathbf{F^1}(\mathbf{x}), \mathbf{F^2}(\mathbf{x})) = 0 \tag{1.18}$$

Tento problém môžeme rozšíriť na prípad, v ktorom budeme mať viac ako dve zobrazenia

$$\min(\mathbf{F^1}(\mathbf{x}),\ \mathbf{F^2}(\mathbf{x}),\ \ldots, \mathbf{F^m}(\mathbf{x})) = 0 \tag{1.19}$$

Úlohu (1.19) nazývame vertikálnou úlohou o komplementarite a označujeme VCP(Vertical Complementarity Problem). Ekvivalentný zápis v zložkovom tvare je :

$$\begin{aligned} F_i^1(\mathbf{x}) \geq 0,\ F_i^2(\mathbf{x}) \geq 0, \ldots,\ F_i^m(\mathbf{x}) &\geq 0 \\ F_i^1(\mathbf{x}).\ F_i^2(\mathbf{x}).\ \ldots F_i^m(\mathbf{x}) &= 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \end{aligned} \tag{1.20}$$

Kapitola 2

Prehľad metód riešenia úlohy NCP

V tejto kaptole uvedieme niektoré základné poznatky o možnostiach riešenia nelineárnej úlohy o komplementarite (1.2), oboznámime sa s pojmami ako sú funkcia kvality, komplementárna funkcia. Ukážeme si niektoré ich vlastnosti, ktoré sú potrebné pri riešení komplementárnych úloh. Väčšina algoritmov na riešenie úlohy NCP je založená na pretransformovaní pôvodného systému rovníc a nerovníc tvaru:

$$x_i \geq 0, \qquad F_i(\mathbf{x}) \geq 0, \qquad x_i F_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pre i } =1, 2, 3, \ldots, n \tag{2.1}$$

na ekvivalentný nelineárny systém rovníc:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi(x_1, F_1(\mathbf{x})) \\ \varphi(x_2, F_2(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ \varphi(x_n, F_n(\mathbf{x})) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

pomocou tzv. komplementárnych funkcií φ,
alebo na minimalizačný problém:

$$\min \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

použitím funkcie kvality $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})$ napr. $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$.

2.1 Komplementárna funkcia

Definícia 2.1.1 *Funkciu $\varphi : R^2 \to R$ nazývame komplementárnou funkciou ak platí:*

$$\varphi(a,b) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a \geq 0, \qquad b \geq 0, \qquad ab = 0 \tag{2.4}$$

Prehľad najčastejšie používaných komplementárnych funkcií:

1. $\varphi_{FB}(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} - a - b$;
2. $\varphi_{CH}(a,b) = a - (a+b)_+$;
3. $\varphi_{min}(a,b) = min(a,b)$;
4. $\varphi(a,b) = |\varphi_{FB}(a,b)|$;
5. $\varphi(a,b) = \sqrt{[[-\varphi_{FB}(a,b)]_+]^2 + [(-a)_+]^2 + [(-b)_+]^2}$;
6. $\varphi_{KK}(a,b) = \sqrt{(a-b)^2 + \lambda ab} - a - b$, $\quad \lambda \in (0,4)$ pevný parameter
7. $\varphi_{CKK}(a,b) = \lambda\varphi_{FB}(a,b) - (1-\lambda)(a)_+(b)_+$, $\quad \lambda \in (0,1)$ pevný parameter

Prvá komplementárna funkcia je Fischer-Burmeisterova funkcia [14]. Druhá v poradí je Chenova komplementárna funkcia, pričom plus funkcia $(x)_+$ je definovaná nasledovne $(x)_+ = \max\{0, x\}$. Ďalšou je minimová funkcia. Na prvý pohľad je zrejmé, že sú dobre definované a je splnená podmienka z definície (2.1.1). Nasledujúce komplementárne funkcie sú odvodené z Fischer-Burmeisterovej funkcie, napr. šiesta v poradí je Kanzow-Kleinmichelova [15], ktorá sa pri hodnote parametra λ=2 stane pôvodnou F-B funkciou a v limitnom prípade keď parameter λ položíme rovný 0 sa stane násobkom minimovej funkcie. Siedma je Chen,Chen,Kanzowova komplementárna funkcia [16].

2.1.1 Systém rovníc a jeho riešenie

Úlohu o komplementarite (1.2) môžeme pomocou komplementárnej funkcie zapísať v tvare:

$$\varphi(x_i, F_i(x)) = 0 \qquad \text{pre i} = 1, 2, 3 ... n \tag{2.5}$$

alebo pomocou rovnicového operátora $\Phi : R^n \rightarrow R^n$, kde zložky tohto operátora sú komplementárne funkcie (2.4) v tvare :

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} \varphi(x_1, F_1(\mathbf{x})) \\ \varphi(x_2, F_2(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ \varphi(x_n, F_n(\mathbf{x})) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

Vo všeobecnosti však operátor $\mathbf{\Phi}$ nemusí byť hladkým zobrazením, takže nemôžeme použiť klasickú Newtonovu metódu na riešenie systému (2.6). V ďalšej časti uvádzame tri alternatívne prístupy na riešenie nehladkej sústavy (2.6)

Nehladké Newtonove Metódy (Nonsmooth Newton methods).

Namiesto Newtonovej metódy možno aplikovať nehladkú Newtonovu metódu, ktorá využíva Clarkov zovšeobecnený Jakobián $\partial\Phi(x)$ funkcie Φ v bode $x \in R^n$ [9]. Napríklad nehladká Newtonova metóda, ktorú používajú Qi a Sun [13] rieši v každej iterácii zovšeobecnenú Newtonovu rovnicu :

$$V_k d = -\Phi(x^k), \tag{2.7}$$

kde $V_k \in \partial\Phi(x)$. Táto metóda je síce dobre definovaná a lokálne konverguje za určitých predpokladov, ale nie je možné ju použiť pre hocijaký rovnicový operátor $\Phi(x)$. Naopak veľkou výhodou je, že pre dobre zvolené zobrazenie $\Phi(x)$ nehladké Newtonove metódy úspešne riešia množstvo úloh nelineárnej komplementarity.

Vyhladzujúce metódy (Smoothing methods).

Poznáme však aj iný spôsob ako sa vyrovnať s nehladkosťou operátora Φ. Môžeme ho aproximovať hladkou funkciou $\Phi_\mu : R^n \rightarrow R^n$, kde μ je vyhladzujúci parameter. Presnosť približného riešenia v postupnosti sústav:

$$\Phi_\mu(x^k) = 0 \tag{2.8}$$

je tým presnejšia, čím je parameter μ bližšie k 0. Výhodou tohto postupu je, že môžeme použiť štandardnú Newtonovu metódu na riešenie každej sústavy (2.8), teda v každej iterácii riešime sústavu lineárnych rovníc:

$$\Phi'_\mu(x^k)d = -\Phi_\mu(x^k) \tag{2.9}$$

Najväčšou nevýhodou vyhladzovacích metód je, že potrebujeme aby zobrazenie F v úlohe (1.2) bolo minimálne P_0-funkciou, aby sme mohli zaručiť, že lineárny systém (2.9) bude riešiteľný. Preto je ťažké zabezpečiť, aby tieto metódy fungovali na každej úlohe NCP (pretože Jakobiho matica v (2.9) môže byť singulárna). Vyhladzujúce metódy sa snažia pri riešení úlohy o komplementarite sledovať tzv. vyhladzovaciu cestu (smoothing path), ktorá však nemusí existovať ak $\mathbf{F}$ nie je P_0-funkcia. Jednu z metód, ktorá patrí do tejto skupiny a ktorú sme naprogramovali podrobne opíšeme v kapitole 4.

Metódy vyhladzovania Jakobiho matice (Jacobian smoothing methods).

Treťou triedou algoritmov na riešenie sústavy (2.6) sú tzv. metódy vyhladzovania Jakobiánu, ktoré sú istou kombináciou predošlých dvoch metód v nasledovnom zmysle. Zo sústavy (2.7) preberajú pravú stranu a zo sústavy (2.9) preberajú ľavú stranu, t.j. riešia sústavu:

$$\Phi'_\mu(x^k)d = -\Phi(x^k). \tag{2.10}$$

Touto metódou sa budeme bližšie zaoberať v nasledujúcej kapitole.

2.2 Funkcia kvality

Ako sme už spomenuli na začiatku tejto kapitoly druhou možnosťou ako riešiť úlohu NCP je jej transformácia na minimalizačný problém pomocou tzv. funkcie kvality.

Definícia 2.2.1 *Nech je daná množina $\mathbb{C} \subseteq R^n$. Potom funkciou kvality pre úlohu NCP (1.2) nazývame nezápornú funkciu $\mathbf{\Psi} : \mathbb{C} \to R_+$ takú, že $\bar{\mathbf{x}}$ je riešením úlohy NCP práve vtedy keď $\bar{\mathbf{x}}$ je globálnym minimom funkcie $\mathbf{\Psi}(\mathbf{x})$ na množine $\mathbb{C}$, pričom platí $\mathbf{\Psi}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.*

V tomto prípade riešiť úlohu NCP znamená vlastne riešiť ekvivalentnú minimalizačnú úlohu:

$$\min\{\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{C}\} \tag{2.11}$$

V praxi je dosť ťažké nájsť funkciu kvality, ktorá by mala užitočné vlastnosti a s ktorou by sa ľahko pracovalo, pretože množina $\mathbb{C}$, na ktorej hľadáme globálne minimum môže byť komplikovaná a minimalizačná úloha môže mať stacionárne body, ktoré nemusia byť bodmi globálneho minima. Takouto funkciou kvality je napr. $\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$, ktorú minimalizujeme na množine $\mathbb{C} := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R^n} \ / \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}\}$. Vidíme, že takto definovaná množina $\mathbb{C}$ má dosť komplikovanú štruktúru a preto táto funkcia kvality je v praxi takmer nepoužiteľná. Ak by sme chceli porovnať dve rôzne funkcie kvality mohli by sme sa zamerať na nasledujúce vlastnosti:

- podmienky, pri ktorých je každý stacionárny bod danej funkcie zároveň jej globálnym minimom;
- podmienky, pri ktorých úrovňové množiny:
$$L(\alpha) := \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{x} \in \mathbb{C}, \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) \leq \alpha\} \tag{2.12}$$
sú ohraničené;
- stupeň hladkosti funkcie $\mathbf{\Psi}$;
- štruktúra množiny $\mathbb{C}$.

V ďalšej časti sa podrobnejšie pozrieme na vlastnosti troch funkcií kvality, ktoré sa používajú pri riešení úloh NCP:

- implicitný Lagrangian - navrhnutý dvojicou autorov Mangasarian, Solodov [17]
- Fukushima-ova funkcia kvality (regularized gap function) [10]
- prirodzená funkcia kvality (natural merit function)

2.2.1 Implicitný Lagrangian

Implicitný Lagrangian je definovaný nasledovne:

$$\mathbf{\Psi_{ms}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \frac{1}{4}(||[\mathbf{x} - 2\mathbf{F}(\mathbf{x})]_+||^2 - ||\mathbf{x}||^2 + ||[\mathbf{F}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{x}]_+||^2 - ||\mathbf{F}(\mathbf{x})||^2) \tag{2.13}$$

$\mathbf{\Psi_{ms}}(\mathbf{x})$ je funkcia kvality definovaná na množine $\mathbb{C} = R^n$, to znamená, že riešiť úlohu NCP je ekvivalentné s nájdením globálneho minima úlohy:

$$\min \{\mathbf{\Psi_{ms}}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R^n}\}. \tag{2.14}$$

Funkcia kvality (2.13) má nasledujúce vlastnosti:

- Ψ_{ms} je spojite diferencovateľná.
- ak Jakobiho matica zobrazenia $\mathbf{F}$ je kladne definitná matica pre každé $\mathbf{x}$, potom každý stacionárny bod funkcie (2.13) je bodom globálneho minima úlohy (2.14).
- ak zobrazenie $\mathbf{F}$ je silne monotónne a lokálne Lipšicovské potom úrovňové množiny $L(\alpha)$ (2.12) sú ohraničené.

Dôkazy týchto tvrdení môžeme nájsť v [8].

2.2.2 Fukushima-ova funkcia

Fukushima-ova funkcia kvality pre úlohu NCP (1.2) je definovaná takto:

$$\mathbf{\Psi_{fa}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x^T F}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(||[\mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x})]_+||^2 - ||\mathbf{x}||^2) \tag{2.15}$$

Pričom množina $C = R^n_+$ a teda vyriešiť úlohu NCP je totožné s vyriešením nasledujúcej úlohy:

$$\min\{\mathbf{\Psi_{fa}}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0_n}\}. \tag{2.16}$$

Funkcia kvality (2.15) má nasledujúce vlastnosti:

- $\mathbf{\Psi_{fa}}$ je spojite diferencovateľná
- ak Jakobiho matica zobrazenia $\mathbf{F}$ je kladne definitná matica pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{C}$, potom každý stacionárny bod funkcie (2.15) je bodom globálneho minima úlohy (2.16).
- ak zobrazenie F je silne monotónne potom úrovňové množiny $L(\alpha)$ (2.12) sú ohraničené.

Dôkazy týchto tvrdení môžeme nájsť v [10] resp. [11].

Ak by sme chceli porovnať tieto dve funkcie kvality tak vidíme, že každá má svoju výhodu aj nevýhodu. Zatiaľ čo v prvom prípade máme úlohu na voľný extrém, v druhom prípade máme úlohu na viazaný extrém daný podmienkou $x \in R^n_+$. Naopak, čo sa týka podmienky pre ohraničenosť úrovňových množín tá je sinejšia v prvom prípade.

2.2.3 Prirodzená funkcia kvality

V praxi sa najčastejšie využíva nasledujúca funkcia kvality:

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}||\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})||^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\mathbf{x_i}, \mathbf{F_i}(\mathbf{x}))^2 \tag{2.17}$$

najmä pre svoju jednoduchosť a dobré vlastnosti. V prípade funkcie kvality (2.17) je množina $\mathbb{C} = R^n$ a teda rovnako ako v prípade (2.13) nájsť riešenie úlohy NCP znamená májsť riešenie minimalizačnej úlohy $\min\{\mathbf{\Psi}(\mathbf{x})\}$. Funkcia (2.17) má tieto vlastnosti:

- je spojite diferencovateľná, a navyše ak každá F_i je SC^1 funkcia potom (2.17) je takisto SC^1 funkcia (pripomíname: to znamená, že je spojite diferencovateľná a navyše jej gradient je polohladký (semismooth).[2]
- ak zobrazenie F je P_0-funkcia potom každý stacionárny bod funkcie (2.17) je bodom globálneho minima uvedenej úlohy
- ak zobrazenie F je uniform P-funkcia potom úrovňové množiny $L(\alpha)$ sú ohraničené.

Kapitola 3

Metóda vyhladzovania Jakobiánu

V tejto kapitole sa podrobnejšie oboznámime s metódou vyhladzovania jakobiánu na riešenie nelineárnej úlohy o komplementarite pomocou minimalizácie funkcie kvality Ψ. Táto metóda ako sme už spomenuli sa v každej iterácii snaží riešiť sústavu tvaru:

$$\Phi'_\mu(x^k)d = -\Phi(x^k). \tag{3.1}$$

Aj keď sa tieto metódy často radia do triedy vyhladzujúcich metód, majú bližšie k nehladkým Newtonovým metódam, pretože sa nesnažia nasledovať nejakú vyhladzujúcu cestu a taktiež riešia neperturbovaný problém (2.6) nahradením matice $V_k \in \partial\Phi x^k$ v (2.7) aproximáciou $\Phi'_\mu(x^k)$. Metóda, ktorú sme naprogramovali je založená na použití Fischer-Burmeisterova komplementárnej funkcie:

$$\varphi_{FB}(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} - a - b, \tag{3.2}$$

pomocou ktorej úlohu:

$$x \geq 0, \qquad F(x) \geq 0, \qquad x^T F(x) = 0 \tag{3.3}$$

môžeme ekvivalentne prepísať v tvare:

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} \varphi_{FB}(x_1, F_1(\mathbf{x})) \\ \varphi_{FB}(x_2, F_2(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ \varphi_{FB}(x_n, F_n(\mathbf{x})) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

A funkcia kvality, ktorú sa snažíme minimalizovať je $\Psi(x) := \frac{1}{2}||\Phi(x)||^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i, F_i(x))^2$, príslušný vyhladzujúci rovnicový operátor prislúchajúci k $\Phi(x)$ je $\Phi_\mu(x) : R^n \rightarrow R^n$:

$$\Phi_\mu(x) := \begin{pmatrix} \varphi_\mu(x_1, F_1(\mathbf{x})) \\ \varphi_\mu(x_2, F_2(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ \varphi_\mu(x_n, F_n(\mathbf{x})) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

pričom $\varphi_\mu(a, b) : R^2 \rightarrow R$ je Kanzovova vyhladzovacia funkcia:

$$\varphi_\mu(a, b) := \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu} - a - b, \qquad \mu \geq 0 \tag{3.4}$$

pôvodnej Fischer-Burmeisterovej funkcie.

Vlastnosti Kanzovovej funkcie:

- pre pevný parameter $\mu \geq 0$ je $\varphi_\mu(a, b)$ spojite diferencovateľná pre všetky $(a, b)^T \in R^2$ na rozdiel od Fischer-Burmeisterovej funkcie, ktorá nie je diferencovateľná v bode $(0, 0)$ a parciálne derivácie spĺňajú podmienku:

$$(-2, -2) \leq \Big(\frac{\partial\varphi_\mu(a, b)}{\partial a}, \frac{\partial\varphi_\mu(a, b)}{\partial b}\Big) \leq (0, 0)$$

- pre dvojicu $(a, b) \in R^2$ je $\varphi_\mu(a, b)$ spojite diferencovateľná, monotónne restúca a konkávna vzhľadom na parameter μ

- pre dvojicu parametrov μ_1,μ_2 takých, že $0 \leq \mu_2 \leq \mu_1$ platí:

$$0 \leq (\varphi_{\mu_1}(a, b) - \varphi_{\mu_2}(a, b)) \leq \sqrt{2}(\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2})$$

  pre všetky $(a, b) \in R^2$

- pre každý parameter $\mu \geq 0$ platí:

$$0 \leq \varphi_\mu(a, b) - \varphi(a, b) \leq \sqrt{2}\sqrt{\mu}$$

  pre všetky $(a, b) \in R^2$

Po zavedení Kanzovovej funkcie môžeme úlohu NCP pretransformovať na minimalizačný problém:

$$\min \quad \Psi_\mu(x) \tag{3.5}$$

kde

$$\Psi_\mu(x) := \frac{1}{2}\Phi_\mu(x)^T\Phi_\mu(x) \tag{3.6}$$

Veta 3.0.1 *Pre funkciu Ψ_μ platia nerovnosti:*

$$||\Psi_{\mu 1}(x) - \Psi_{\mu 2}(x)|| \leq \kappa|\sqrt{\mu 1} - \sqrt{\mu 2}|$$

pre všetky $x \in R^n$ a pre všetky $\mu 1, \mu 2 \geq 0$, kde $\kappa := \sqrt{2n}$, resp.:

$$\|\Psi_\mu(x) - \Psi(x)|| \leq \kappa\sqrt{\mu}$$

pre všetky $x \in R^n$ a všetky $\mu \geq 0$

Veta 3.0.2 *Nech $\{x^k\} \subseteq R^n$ a $\{\mu_k\} \subseteq R$ sú dve postupnosti také, že $\{x^k\} \to x^\star$ pre nejaké $x^\star \in R^n$ a $\{\mu_k\} \downarrow 0$. Potom:*

$$\lim_{k\to\infty} \nabla\Psi_{\mu_k}(x^k) = \nabla\Psi(x^\star)$$

Veta 3.0.3 *Nech $\{x^k\}, \{d^k\} \subseteq R^n$ a $\{t_k\} \in R$ sú postupnosti, ktoré spĺňajú $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$, také, že $\{x^k\} \to x^\star, \{d^k\} \to d^\star$ a $t_k \downarrow 0$ pre pevne dané vektory $x^\star, d^\star \in R^n$. Navyše nech $\{\mu_k\} \in R$ je postupnosť, taká, že $\{\mu^k\} \to 0$. Potom*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Psi_{\mu_k}(x^k + t_k d^k) - \Psi_{\mu_k}(x^k)}{t_k} = \nabla\Psi(x^\star)^T d^\star.$$

Dôkazy týchto tvrdení nájdeme v [1].
Pripomeňme, že:

$$\nabla\Psi_\mu(x) = \Phi'_\mu(x)^T\Phi_\mu(x)$$

a

$$\Phi'_\mu(x) = \operatorname{diag}\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + F_i(x)^2 + 2\mu}} - 1\right) + \operatorname{diag}\left(\frac{F_i(x)}{\sqrt{x_i^2 + F_i(x)^2 + 2\mu}} - 1\right)F'(x),$$

kde $F'(x)$ je Jakobiho matica zobrazenia F v bode x.

3.1 Algoritmus metódy vyhladzovania jakobiánu

V tejto časti opíšeme samotný algoritmus tejto metódy, ktorý je publikovaný v článku [12], ale je v ňom jedno zovšeobecnenie, ktoré zaviedli Kanzow,Pieper [1] vďaka ktorému je tento algoritmus aplikovateľný na väčšinu úloh o nelineárnej komplementarite. Algoritmus navrhnutý trojicou autorov Chen,Qi a Sun [12] funguje iba v prípade, že zobrazenie F je P_0-funkciou, pretože len vtedy je lineárny systém (3.1) riešiteľný v každej iterácii. Toto je však silný predpoklad, ktorý nie je vždy splnený a preto Kanzow a Pieper v prípade, že systém (3.1) nie je v nejakej iterácii riešiteľný alebo v prípade, že nájdený smer nie je dostatočne dobrý smer určili ako gradient funkcie Ψ. Tento gradientný smer komplikuje výpočet vyhladzujúceho parametra μ, avšak práve on umožňuje použiť takto zmenený algoritmus na riešenie väčšiny úloh o nelineárnej komplementarite. Pripomeňme, že aj my sme v algoritme urobili jednu zmenu. Optimálnu dĺžku kroku sme v jednotlivých iteráciách hľadali pomocou metódy zlatého rezu.

Algoritmus vyhladzovania jakobiánu:

Krok 1 (Inicializačný krok) Zvolíme štartovací bod $x^0 \in R^n$ a parametre $\alpha, \eta, \rho \in (0,1), \gamma \geq 0, p \geq 2$ a požadovanú presnosť $\epsilon \geq 0$. Položíme $\beta_0 := ||\Phi(x^0)||, \kappa := \sqrt{2n}, \mu_0 := (\frac{\alpha}{2\kappa}\beta_0)^2$ $k := 0$.

Krok 2 Ak $||\nabla\Psi(x^k)|| \leq \epsilon$ STOP

Krok 3 (Určenie smeru d_k) Nájdeme riešenie $d^k \in R^n$ lineárneho systému rovníc:

$$\Phi'_{\mu_k}(x^k)d = -\Phi(x^k). \qquad \text{(Newtonov krok)} \tag{3.7}$$

Ak systém (3.7) nie je riešiteľný alebo podmienka

$$\Phi(x^k)^T\Phi'_{\mu_k}(x^k)d^k \leq -\rho||d^k||^p \tag{3.8}$$

nie je splnená, položíme

$$d^k := -\nabla\Psi(x^k). \qquad \text{(Gradientný krok)} \tag{3.9}$$

Krok 4 (Dĺžka kroku) Metódou zlatého rezu riešime jednorozmernú minimalizačnú úlohu:

$$\text{Min}\{\varphi(\lambda) = \Psi_{\mu_k}(x^k + \lambda d_k) \mid \lambda \in R_+\} \tag{3.10}$$

v prípade, že d^k je daný riešením sústavy (3.7) resp. úlohu

$$\text{Min}\{\varphi(\lambda) = \Psi(x^k + \lambda d_k) \mid \lambda \in R_+\} \tag{3.11}$$

v prípade, že d^k je daný predpisom (3.9).
Položíme $x^{k+1} = x^k + d_k\lambda$

Krok 5 (Zlepšenie parametra μ) Ak

$$||\Phi(x^{k+1})|| \leq \max\{\eta\beta_k, \frac{1}{\alpha}||\Phi(x^{k+1}) - \Phi_{\mu_k}(x^{k+1})||\} \tag{3.12}$$

potom položíme

$$\beta_{k+1} := ||\Phi(x^{k+1})||$$

a parameter μ_{k+1} zvolíme tak, aby

$$0 < \mu_{k+1} \leq \min\left\{ \left(\frac{\alpha}{2\kappa}\beta_{k+1}\right)^2, \frac{\mu_k}{4}, \tilde{\mu}(x^{k+1}, \gamma\beta_{k+1}) \right\}. \tag{3.13}$$

Ak podmienka (3.12) nie je splnená a smer $d^k = -\nabla\Psi(x^k)$, potom zvolíme

$$\beta_{k+1} := \beta_k$$

a parameter μ_{k+1} zmeníme tak, aby

$$0 \leq \mu_{k+1} \leq \min\left\{ \left(\frac{\alpha}{2\kappa}||\Phi(x^{k+1}||\right)^2, \left(\frac{||\Phi(x^k)|| - ||\Phi(x^{k+1})||}{2\kappa}\right)^2, \frac{\mu_k}{4} \right\}. \tag{3.14}$$

Ak podmienka (3.12) nie je splnená a smer d^k nie je určený vzťahom (3.9) potom ponecháme

$$\beta_{k+1} = \beta_k \qquad \text{a} \qquad \mu_{k+1} = \mu_k.$$

Zväčšíme počet iterácií $k = k + 1$ a vrátime sa na Krok 2.

V nerovnici (3.13) vystupuje funkcia $\tilde{\mu}(x,\delta)$, ktorá je definovaná nasledovne: Nech $x \in R^n$ je ľubovoľné, ale dané. Predpokladajme, že x nie je riešením úlohy NCP(F). Definujme konštanty:

$$\gamma(x) := \max_{i \notin \beta(x)} \{||x_i e_i + F_i(x)\nabla F_i(x)||\} \geq 0 \tag{3.15}$$

a

$$\alpha(x) := \min_{i \notin \beta(x)} \{x_i^2 + F_i(x)^2\} > 0 \tag{3.16}$$

kde

$$\beta(x) := \{i \mid x_i = F_i(x) = 0\}. \tag{3.17}$$

Nech $\delta > 0$ je dané, potom definujeme:

$$\tilde{\mu}(x,\delta) := \begin{cases} 1 & \text{ak } \left(\frac{n\gamma(x)^2}{\delta^2} - \alpha(x)\right) \leq 0 \\ \frac{\alpha(x)^2}{2}\left(\frac{\delta^2}{n\gamma(x)^2 - \delta^2\alpha(x)}\right) & \text{inak} \end{cases}$$

Kapitola 4

Chenova vyhladzovacia metóda

Ako sme už spomenuli vyhladzujúce metódy (smoothing methods) sa snažia nahrádzať komplementárne funkcie, ktoré nie sú hladké nejakou vhodnou aproximáciou, ktorá by bola hladká.
Úlohu NCP v tvare :

$$\mathbf{x} \geq 0, \qquad \mathbf{F}(x) \geq 0, \qquad \mathbf{x^T F(x)} = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

môžeme zapísať pomocou plus funkcie v tvare:

$$\mathbf{x} - (\mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x}))_+ = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

Otázkou zostáva akou hladkou funkciou nahradíme plus funkciu, ktorá nie je diferencovateľná.

4.1 Vyhladenie plus funkcie

Plus funkciu môžeme aproximovať nasledovne:

$$(x)_+ = \int_{-\infty}^{x} \sigma(y)\, dy\,, \tag{4.3}$$

kde $\sigma(x)$ je schodovitá funkcia:

$$\sigma(x) := \begin{cases} 1 & \text{ak } x > 0 \\ 0 & \text{ak } x \leq 0 \end{cases}$$

Schodovitú funkciu môžme zapísať ako:

$$\sigma(x) := \int_{-\infty}^{x} \delta(y)\, dy\,, \tag{4.4}$$

pričom $\delta(x)$ je Diracova delta funkcia, ktorá okrem iných spĺňa nasledujúce dve podmienky:

$$\delta(x) \geq 0 \qquad \text{a} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \tag{4.5}$$

a môžeme o nej uvažovať ako o limite funkcie hustoty. Vidíme, že plus funkciu získame dvojitým integrovaním Diracovej delta funkcie, čo nám dovoľuje použiť pri aproximácii plus funkcie funkciu hustoty pravdepodobnosti $d(x)$, ktorá spĺňa tieto podmienky:

$$d(x) \geq 0, \qquad \text{a} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d(x)\, dx = 1 \tag{4.6}$$

Definujme parametrizáciu tejto funkcie hustoty $d(x)$ ako:

$$\hat{t}(x, \beta) = \frac{1}{\beta} d(\frac{x}{\beta}), \qquad \text{kde } \beta \text{ je kladný parameter.} \tag{4.7}$$

Platí, že

$$\lim_{\beta \to 0} \hat{t}(x, \beta) = \delta(x). \tag{4.8}$$

Po zavedení týchto funkcií môžeme schodovitú funkciu aproximovať výrazom:

$$\hat{s}(x, \beta) = \int_{-\infty}^{x} \hat{t}(t, \beta)\, dt \approx \sigma(x) \tag{4.9}$$

a plus funkciu jej integrálom

$$(x)_+ \approx \hat{p}(x, \beta) = \int_{-\infty}^{x} \hat{s}(y, \beta)\, dy = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \hat{t}(\xi, \beta)\, d\xi dy. \tag{4.10}$$

Z tejto rovnice vidíme, že aproximácia plus funkcie funkciou $\hat{p}(x, \beta)$ sa zlepšuje zmenšovaním parametra β. Teda plus funkciu môžme aproximovať dvojitým integrálom funkcie hustoty.

Táto funkcia hustoty $d(x)$ však musí spĺňať podmienky (4.6) a tieto požiadavky:

(A1) $d(x)$ je po častiach spojitá s konečným počtom častí

(A2) $E[|x|]_{d(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| d(x) dx < +\infty$

Vlastnosti funkcie $\hat{p}(x, \beta)$:
Nech $d(x)$ je funkcia hustoty spĺňajúca podmienky A1 a A2, ktorá je parametrizovaná funkciou $\hat{t}(x, \beta) = \frac{1}{\beta} d(\frac{x}{\beta})$, kde β je kladný parameter. Potom pre funkciu $\hat{p}(x, \beta)$ platí:

1. $\hat{p}(x, \beta)$ je spojite diferencovateľná. Ak naviac $d(x)$ je k-krát spojite diferencovateľná potom $\hat{p}(x, \beta)$ je (k+2)-krát spojite diferencovateľná.

2. $-D_2\beta \leq \hat{p}(x, \beta) - (x)_+ \leq D_1\beta$, kde

$$D_1\beta = \int_{-\infty}^{0} |x| d(x) dx \qquad \text{a} \qquad D_2 = \max\{\int_{-\infty}^{\infty} x d(x) dx, 0\}$$

3. $\hat{p}(0, \beta) = D_1\beta$

4. $\hat{p}(x, \beta)$ je neklesajúca a konvexná v x pre $\beta \geq 0$

5. $0 \leq \hat{p'}(x, \beta) \leq 1$

Ak navyše funkcia $d(x)$ spĺňa popmienku $supp\{d(x)\} = R$ potom má funkcia $\hat{p}(x, \beta)$ tieto vlastnosti:

1. $\hat{p}(0, \beta)$ je rastúca a rýdzokonvexná v x pre $\beta \geq 0$

2. $0 < \hat{p'}(x, \beta) < 1$

3. ak konštanta $D_2 = 0$ potom $\hat{p}(x, \beta) > x$

Dôkazy týchto tvrdení môžeme nájsť v [5].

Najpoužívanejšia vyhladená plus funkciou, ktorú sme použili aj v našom programe využíva klasickú sigmoidnú funkciu:

$$s(x, a) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha x}}, \qquad \alpha > 0, \tag{4.11}$$

ktorej aproximácia schodovitej funkcie sa zlepšuje, keď $\alpha \to \infty$. Pretože sa derivácia tejto funkcie podľa x približuje Diracovej delta funkcii, keď $\alpha \to \infty$ vidíme. že α v tomto prípade preberá úlohu β^{-1}. Nech

$$d(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \tag{4.12}$$

Dvojitým integrovaním funkcie $\frac{1}{\beta}d(\frac{x}{\beta})$ dostávame:

$$\hat{p}(x,\beta) = x + \beta \log(1 + e^{-\frac{x}{\beta}}) \tag{4.13}$$

Substitúciou $\alpha = \frac{1}{\beta}$ dostávame aproximáciu plus funkcie v tvare:

$$(x)_+ \approx p(x,\alpha) = \hat{p}(x, \frac{1}{\alpha}) = \int s(\xi,\alpha)d\xi = x + \frac{1}{\alpha}\log(1+e^{-\alpha x}) \tag{4.14}$$

Keď už máme konkrétny tvar vyhladenej plus funkcie, môžeme sústavu:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x}))_+ = \mathbf{0} \tag{4.15}$$

prepísať ekvivalentne do tvaru:

$$\mathbf{\Phi}_\alpha(x) = \mathbf{x} - \mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x}), \alpha) = \mathbf{0} \tag{4.16}$$

po zjednodušení do tvaru:

$$\mathbf{\Phi}_\alpha(x) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\alpha}\log(\mathbf{1} + e^{-\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{F}(\mathbf{x}))}) = \mathbf{0} \tag{4.17}$$

kde, $\mathbf{\Phi}_\alpha(\mathbf{x})$ je vyhladzujúci operátor zobrazenia $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$. Pripomeňme, že v tomto prípade sa presnosť aproximácie zlepšuje so zväčšujúcim sa parametrom α.

Tak ako pri metóde vyhladzovania jakobiánu aj tu sa úloha NCP pretransformuje na minimalizačný problém min $\{\Psi_\alpha(x)\}$, kedy opäť použijeme prirodzenú funkciu kvality $\mathbf{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{\frac{1}{2}}\mathbf{\Phi}_\alpha(\mathbf{x})^\mathbf{T}\mathbf{\Phi}_\alpha(\mathbf{x})$

.

4.2 Algoritmus Chenovej vyhladzovacej metódy

Chenov algoritmus:

Krok1 (Inicializačný krok) Dané sú parametre $\delta \in (0,1), \sigma \in (0, \frac{1}{2})$. Zvolíme štartovací bod $x_0 \in R^n$, požadovanú presnosť ϵ, počiatočnú hodnotu parametra α_0, počítadlo iterácii nastavíme na $k = 0$

Krok2 Ak $||\nabla\Psi_\alpha(x^k)|| < \epsilon$, STOP

Krok3 (Newtonov krok) Určíme smer d_k ako riešenie systému lineárnych rovníc:

$$\Phi'_\alpha(x^k)d = -\Phi_\alpha(x^k) \tag{4.18}$$

Krok4 (Dĺžka kroku - Armijo) Určíme optimálnu dĺžku kroku λ_k ako maximum z hodnôt $1, \delta, \delta^2, \ldots$ tak, aby platilo:

$$\Psi_\alpha(x^k) - \Psi_\alpha(x^k + \lambda_k d_k) \geq \sigma\lambda_k |d_k^T \nabla\Psi_\alpha(x^k)| \tag{4.19}$$

Položíme $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d_k$

Krok5 (Zlepšenie parametra) Vylepšíme parameter α_{k+1} , zvýšime počet iterácií $k = k + 1$ a ideme na Krok 2

Kapitola 5

Numerický experiment

V tejto kapitole popíšeme výsledky, ktoré sme dostali pri testovaní naprogramovaných metód: metóde vyhladzovania jakobiánu (kap. 3) a Chenovej vyhladzovacej metóde (kap. 4), pomocou ktorých sme riešili nelineárnu úlohu o komplementarite. Na záver porovnáme obidve metódy aby sme zistili, ktorá z nich je efektívnejšia. Algoritmy sme naprogramovali aj testovali v jazyku C++.

5.1 Vytváranie úloh

Zamerali sme sa na kvadratické úlohy o komplementarite, ktoré sme generovali nasledovne:
Zobrazenie $F : R^n \to R^n$ bolo dané v zložkovom tvare:

$$F_i(x) = \frac{1}{2}x^T G_i x + h_i^T x + \kappa_i,$$

kde $G_i \in R^{n\times n}$ sú kladne definitné, regulárne matice, ktoré sme vytvárali ako $G_i = \frac{1}{n^2}(A^T A + D)$, kde $A \in R^{n\times n}$ je matica, ktorej prvky sú náhodne generované čísla z intervalu (-5,4) a $D \in R^{n\times n}$ je diagonálna matica. Vektory $h_i \in R^n$ sú náhodne generované. Aby sme zaručili, že nami generované úlohy budú mať riešenie najskôr sme vygenerovali optimálne riešenie (pripomíname, že je to len jedno z riešení danej úlohy) - vektor $\bar{x}$, ktorý pozostával z náhodného počtu núl a zvyšok tvorili kladné čísla. Potom sme dopočítali konštanty κ_i tak, aby buď $\bar{x}_i = 0$ alebo $F_i(\bar{x}) = 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Postupovali sme nasledovne:

$$\begin{array}{llll} \text{ak} & \bar{x}_i = 0 & \text{potom} & \kappa_i = 1 - \frac{1}{2}\bar{x}^T G_i \bar{x} - h_i^T \bar{x} \\ \text{ak} & \bar{x}_i > 0 & \text{potom} & \kappa_i = -\frac{1}{2}\bar{x}^T G_i \bar{x} - h_i^T \bar{x} \end{array}$$

V oboch metódach sme sústavu lineárnych rovníc:

$$\Phi'_{\mu_k}(x^k)d = -\Phi(x^k) \tag{5.1}$$

v prípade metódy vyhladzovania Jakobiánu, resp.

$$\Phi'_{\alpha_k}(x^k)d = -\Phi_{\alpha_k}(x^k) \tag{5.2}$$

v prípade Chenovej vyhladzovacej metódy riešili pomocou QR-rozkladu. Pripomeňme, že jakobiho matica zobrazenia $\Phi_\mu(x)$ v prvom prípade vyzerá nasledovne:

$$\Phi'_\mu(x) = \mathrm{diag}\Big(\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + F_i(x)^2 + 2\mu}}\Big) + \mathrm{diag}\Big(\frac{F_i(x)}{\sqrt{x_i^2 + F_i(x)^2 + 2\mu}}\Big).F'(x) \tag{5.3}$$

kde jakobiho matica $F'(x)$ zobrazenia F je tvaru:

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x) \\ \nabla F_2(x) \\ \vdots \\ \nabla F_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient funkcie kvality $\Psi(x) = \frac{1}{2}\Phi(x)^T\Phi(x)$ je:

$$\nabla\Psi(x) = \Phi'(x)^T\Phi(x) \tag{5.4}$$

V prípade Chenovej vyhladzovacej metódy má jakobiho matica zobrazenia:

$$\Phi_\alpha(x) = x - p(x - F(x), \alpha) = F(x) - \frac{1}{\alpha}\log(1 + e^{-\alpha(x - F(x))}) \tag{5.5}$$

tvar:

$$\Phi'_\alpha(x) = F'(x) + \mathrm{diag}\left(\frac{e^{-\alpha(x_i - F_i(x))}}{1 + e^{-\alpha(x_i - F_i(x))}}\right)(I - F'(x)) \tag{5.6}$$

V prípade prvého algoritmu sme to ako sa vylepšuje vyhladzujúci parameter uviedli priamo v tele tohto algoritmu. V prípade Chenovej vyhladzovacej

metódy je tento proces zložitejší, pretože v nej vystupuje exponencionálna funkcia, ktorá môže zapríčiniť, že program zlyhá. Preto sme vylepšovali tento parameter pomocou nasledujúceho postupu:
Budeme požadovať aby v každej iterácii bola splnená podmienka:

$$-200 \leq -\alpha_k(x_i^k - F_i(x^k)) \leq 200 \qquad \forall i \in (1, 2, \ldots, n) \tag{5.7}$$

teda α_k musí spĺňať:

$$\alpha_k \leq \frac{200}{|x_i^k - F_i(x^k)|} \qquad \forall i \in (1, 2, \ldots, n) \tag{5.8}$$

Keďže aproximácia plus funkcie v tomto prípade je tým lepšia, čím väčší je parameter α, hľadáme maximálnu hodnotu $\bar{\alpha_k}$, ktorá bude vyhovovať všetkým nerovniciam v sústave (5.8).Teda

$$\bar{\alpha_k} = \min\left\{\frac{200}{|x_i^k - F_i(x^k)|} \;\middle|\; i \in (1, 2, \ldots, n)\right\} \tag{5.9}$$

Ak v (k-1)-ej iterácii bola použitá hodnota $\alpha_{k-1} > 0$ potom v k-tej iterácii použijeme α_k z intervalu $\alpha_{k-1} < \alpha_k < \bar{\alpha_k}$, konkrétne my sme určili $\alpha_k = \frac{1}{2}(\bar{\alpha_k} - \alpha_{k-1}) + \alpha_{k-1}$ za predpokladu, že $\alpha_{k-1} < \bar{\alpha_k}$. V prípade, že $\bar{\alpha_k} < \alpha_{k-1}$ zvolíme $\alpha_k = \bar{\alpha_k}$.

5.2 Hodnoty parametrov použitých v programoch

V prípade oboch naprogramovaných metód sme koncové podmienky pre algoritmus zvolili takto:

$$\Psi(x^k) \leq 10^{-12},\ ||\nabla\Psi(x^k)|| \leq 10^{-6},\ k > 300$$

Hodnoty parametrov programu v prípade metódy vyhladzovania jakobiánu:

$$\alpha = 0.95,\ p = 2.1,\ \rho = 10^{-18},\ \gamma = 30,\ \eta = 0.9,$$

Požadovanú presnosť pri zlatom reze sme nastavili na : 10^{-15}
Hodnoty parametrov v prípade Chenovej vyhladzovacej metódy:

$$\delta = 0.6,\ \sigma = 0.4$$

Maximálny počet iterácií pre výpočet Armijovho ohraničenia na dĺžku kroku sme nastavili na: 30

5.3 Výsledky experimentov

Samotný experiment pozostával z vyriešenia série 100 náhodných úloh. Po vyriešení každej série sme zaznamenali minimálny, maximálny, priemerný počet iterácií ako aj počet úloh, ktoré algoritmus nedokázal vypočítať. Čas, ktorý sme zaznamenali je čas potrebný na vyrátanie tých úloh, ktoré algoritmus úspešne vyrátal. Štartovací bod sme volili nasledovne: Vygenerovali sme náhodný bod y, ktorý mal všetky zložky kladné a následne sme určili štartovací bod x^0 takto:

$$\mathbf{x^0} = \mathbf{x^{opt}} + \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x^{opt}})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x^{opt}}|}\delta, \tag{5.10}$$

aby jeho vzdialenosť od bodu x^{opt} bola δ.

V prvej časti experimentu sme menili rozmer úloh pri zafixovanej vzdialenosti $\delta = |x^{opt} - x^0|$ štartovacieho bodu x^0 od nami vygenerovaného riešenia x^{opt}. V druhej časti sme pre konkrétne rozmery: 5, 10, 15, 20 menili vzdialenosť štartovacieho bodu x^0 od nami vygenerovaného riešenia x^{opt} pomocou parametra δ.
Výsledky prvej časti experimentu:
V nasledujúcich tabuľkách uvádzame prehľad výsledkov pre rôzne rozmery úloh. Parameter δ bol v tomto prípade $0,05$.

rozmer	min	max	priemer	čas	nevyp. úlohy
5	3	11	4,08	0,160	0
10	2	15	4,15	0,841	0
15	2	29	4,38	2,484	0
20	2	26	4,4	5,698	0
25	2	34	4,09	9,963	0
30	2	150	6,34	26,759	0
35	2	146	6,44	45,905	1
40	2	57	4,95	59,885	0
45	2	16	3,91	114,154	0
50	2	225	8,2	386,906	0

Tab.5.1 : Metóda vyhladzovania jakobiánu

rozmer	min	max	priemer	čas	nevyp. úlohy
5	2	39	3,16	0,110	0
10	2	184	7,46	0,841	2
15	2	237	5,55	1,712	0
20	2	8	2,36	1,571	1
25	2	10	2,29	3,174	1
30	2	40	2,82	6,929	0
35	2	5	2,28	9,663	0
40	2	3	2,14	21,200	0
45	2	6	2,21	23,624	0
50	2	11	2,37	40,968	1

Tab.5.2 : Chenova vyhladzovacia metóda

Z tabuliek 5.1. a 5.2. vidíme, že minimálny počet iterácií je vo všetkých prípadoch malý 2. resp. 3 pre obe metódy. Priemerný počet iterácií taktiež nie je veľký, avšak takmer v každej sérii sa nájde aspoň jedna úloha, ktorej počet iterácii niekoľkonásobne prevyšuje priemerný počet iterácii. V Chenovej vyhladzovacej metóde je priemerný počet iterácii potrebných na nájdenie riešenia danej úlohy nižší ako pri metóde vyhladzovania jakobiánu. Ďalej vidíme, že čas sa s nárastom rozmeru úlohy zväčšuje pre obidve metódy a pri prvej metóde pre väčšie rozmery je podstatne väčší ako v prípade druhej metódy. Pre malú vzdialenosť δ štartovacieho bodu od optimálneho riešenia (v tomto prípade $\delta = 0,05$) pozorujeme, že iba pre nepatrnú časť úloh program nenašiel riešenie. Aká je táto štatistika pre väčšie vzdialenosti si ukážeme v druhej časti nášho experimentu. Pre názornosť ešte zobrazíme závislosť času od rozmeru úlohy pre obidve metódy v jednom spoločnom grafe (Príloha1).

Výsledky druhej časti experimentu:
Ako sme už spomenuli v tejto časti sme pre rozmery úloh: 5, 10, 15 a 20 menili vzdialenosť δ štartovacieho bodu od optimálneho riešenia. Postupne sme parameter δ volili: 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 3, 5, 10, 15 a 20. Tentoraz sme sa zamerali na na počet úloh, ktoré sa nepodarilo vyriešiť a na čas potrebný na vyriešenie 100 úloh. V nasledujúcich tabuľkách opäť prinášame nami zaznamenané výsledky.

	prvá metóda				**druhá metóda**			
δ\rozmer	5	10	15	20	5	10	15	20
0,1	0	0	0	0	3	7	7	11
0,2	0	1	0	1	7	11	18	19
0,5	0	0	2	2	11	25	19	29
1	0	0	3	5	10	20	16	32
2	3	5	6	12	8	21	23	33
3	0	3	5	10	6	20	26	27
5	1	3	8	10	17	24	21	41
10	2	3	4	7	16	23	29	30
15	2	4	4	9	16	24	32	34
20	2	5	6	8	13	27	23	30

Tab.5.3 : Porovnanie počtu nevypočítaných úloh pre rôzne rozmery a pre rôzne hodnoty parametra δ

Z týchto výsledkov môžeme povedať, že pre nami generované úlohy metóda vyhladzovania jakobiánu vyriešila väčší počet úloh ako Chenova vyhladzovacia metóda. Pre obidve metódy platí, že pri nezmenenej vzdialenosti štartovacieho bodu od optimálneho riešenia a zväčšujúcom sa rozmere úlohy počet vyriešených úloh klesá.

	prvá metóda				**druhá metóda**			
δ\rozmer	5	10	15	20	5	10	15	20
0,1	0,189	1,191	4,025	11,217	0,288	0,883	1,668	9,610
0,2	0,251	1,710	8,743	23,388	0,419	3,115	10,475	25,712
0,5	0,48	3,114	12,967	45,361	0,606	3,832	18,101	48,138
1	0,681	4,515	15,340	62,406	0,322	5,097	14,211	49,527
2	0,639	4,152	22,253	84,110	0,489	4,158	19,768	47,425
3	0,751	6,274	20,407	87,150	0,884	4,765	14,509	50,428
5	0,768	6,524	23,994	114,119	0,603	4,730	18,189	58,593
10	0,877	6,182	21,103	73,405	0,820	4,162	22,777	60,157
15	0,837	6,508	24,201	79,829	0,642	5,985	27,776	61,348
20	0,713	7,441	27,273	80,788	0,977	6,032	19,875	82,315

Tab.5.4 : Porovnanie časov potrebných na vypočítanie 100 úloh pre rôzne rozmery a pre rôzne hodnoty parametra δ

Z tabuľky 5.4 jasne vidno, že čas potrebný na vyrátanie 100 úloh sa zväčšuje aj pri zväčšujúcej sa vzdialenosti štartovacieho bodu od optimálneho riešenia, aj pre zväčšujúce sa rozmery riešených úloh. Z hodnôt nameraných v tejto časti experimentu nemožno jednoznačne povedať, že niektorá z metód pracuje rýchlejšie.

Záver

V diplomovej práci sme načrtli možnosti riešenia nelineárnej úlohy o komplementarite pomocou transformácie na nelineárny systém rovníc. Teoreticky sme ukázali tri metódy ako riešiť tento systém, pričom dvoma z nich sme sa zaoberali podrobnejšie: metódou vyhladzovania jakobiánu, ktorá využíva Kanzowovu vyhladenú funkciu Fischer-Burmeisterovej komplementárnej funkcie a Chenovou vyhladzovaciu metódu, ktorá využíva Chen-Mangasarianovu triedu vyhladzovacích funkcií plus funkcie. Obe tieto metódy sme naprogramovali a pri experimentoch sme riešili jeden konkrétny typ úloh. Pripomeňme, že obidva algoritmy uvedené v tejto diplomovej práci možno použiť aj na iné typy nelineárnych úloh o komplementarite.

Experiment ukázal, že metóda vyhladzovania jakobiánu vyrieši väčší počet úloh ako Chenova vyhladzovacia metóda a teda, že je spoľahlivejšia, aj keď v mnohých prípadoch potrebuje viac času na nájdenie riešenia. V obidvoch metódach platí, že so zväčšujúcim sa rozmerom úlohy počet vyriešených úloh klesá. Na záver môžeme povedať, že pre obidva naprogramované algoritmy a nami generovaý typ úloh existujú príklady, ktoré skonvergujú veľmi rýchlo a na druhej strane sa vyskytujú aj úlohy, ktoré potrebujú veľký počet iterácií na nájdenie riešenia.

Existuje veľa iných metód na riešenie nelineárnej úlohy o komplementarite a takisto je k dispozícii veľké množstvo literatúry, ktorá sa zaoberá touto problematikou. Dúfam, že táto práca a problém komplementarity niekoho zaujme a bude východiskom pre ďalšie práce.

Literatúra

[1] Ch. Kanzow a H.Pieper, *Jacobian Smoothing Methods for Nonlinear Complementarity Problem*, SIAM Journal on Optimization Vol. 9, No. 2, pp. 342-373, 1999.

[2] F.Facchinei a J.Soares, *A New Merit Function for Nonlinear Complementarity Problems and Related Algorithm*, SIAM Journal on Optimization Vol. 7, No. 1, pp. 225-247, 1997.

[3] B.Chen a P.T.Harker, *Smooth Approximations to NCP* SIAM Journal on Optimization Vol. 7, No.2, pp. 403-420, 1997.

[4] Ch.Chen a O.L.Mangasarian, *Smoothing Methods for Convex Inequalities and Linear Complementarity Problems* Mathematical Programming 71, pp. 51-69, 1995.

[5] CH.Chen, Smoothing Methods in Mathematical Programming, Dizertačná práca, University of Wisconsin - Madison, 1995.

[6] P.Lysý, *Vyhladzovacie metódy na riešenie úlohy o komplementarite*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 2004.

[7] C.Chen a O.L.Mangasarian, *A class of smoothing function for nonlinear and mixed complementarity problems*, Computional optimization and applications, 5, pp. 97-138, 1996

[8] N.Yamashita a M.Fukushima, *On stationary points of the implicit Lagrangian for nonlinear complementarity problems*, J.Optim. Theory Appl., 86, pp. 653-663, 1995.

[9] F.H.Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1983.

[10] M.Fukushima, *Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems*, Math. Programming Ser. A, 53, pp. 99-110, 1992.

[11] K.Taji, M.Fukushima a T.Ibaraki, *A globally convergent Newton method for solving strongly monotone variational inequalities*, Math. Programming Ser. A, 58, pp. 369-383, 1993.

[12] X.Chen, L.Qi a D.Sun, *Global and superlinear convergence of the smoothing Newton method and its application to general box constrained variational inequalities*, Math. Comp., 67, pp. 519-540, 1998.

[13] L.Qi a J.Sun, *A nonsmooth version of Newton's method*, Optimization, 24, pp. 269-284, 1992.

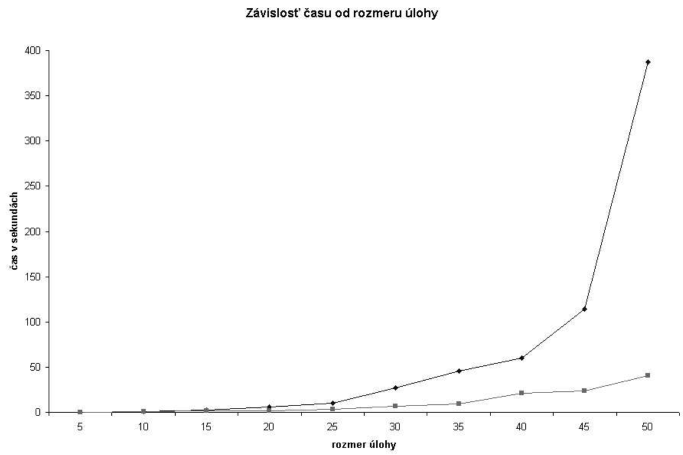
[14] A.Fischer, *A special newton-type optimization mthod*, Math. Programming Ser. A, 58, pp. 353-367, 1993.

[15] C.Kanzow a H.Kleinmichel, *A new class of semismooth Newton-type methods for nonlinear complementarity problems*, Computational Optimization and Applications.

[16] B.Chen,X.Chen a C.Kanzow, *A penalized Fischer-Burmeister function: Theoretical investigation and numerical results*, Preprint 126,Institute of Applied Mathematics, University of Hamburg, Hamburg, Germany, 1997.

[17] O.L.Mangasarian a M.V.Solodov, *Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization*, Math.Programming Ser.B,62,pp. 277-297,1993.

Príloha



Závislosť času od rozmeru úlohy
čas v sekundách
rozmer úlohy
0
50
100
150
200
250
300
350
400
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50