

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave
Ekonomická a finančná matematika



Oceňovanie derivátov indexov

Diplomová práca

Diplomant: Michal Lopusan

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2005

Prehlasujem, že predkladanú diplomovú prácu
som vypracoval samostatne, len za pomoci konzultácií
a literatúry uvedenej v zozname.

Zároveň týmto spôsobom úprimne ďakujem svojmu diplomovému vedúcemu

Doc. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc.

za všestrannú pomoc, množstvo podnetných nápadov

a ochotu prejavenu pri vedení práce.

V Bratislave 25.4.2005

Obsah

Úvod	1
1 Čo je to index.	2
1.1 Základné informácie.	2
1.2 Hlavné svetové indexy.	4
1.2.1 Dow Jones Industrial Average	4
1.2.2 Standard and Poor's 500 Index	4
1.2.3 Deutscher Aktien Index	6
1.2.4 Dow 10	7
2 Čo je to derivát indexu.	10
2.1 Základné informácie	10
2.2 Opcie na indexy	10
3 Skúmanie korelačných vlastností akcií tvoriacich index a overenie lognormality	13
3.1 Overenie lognormality	13
3.2 Skúmanie korelácie	15
4 Teoretická stránka problému	18
4.1 Odvodenie viacrozmernej Black-Scholesovej rovnice	18
4.2 Analytické riešenie viacrozmernej Black-Scholesovej rovnice	21
4.3 Numerické metódy	23
4.4 Metóda aditívneho operátorového rozštiepenia.	25
5 Metódy riešenia	28
Záver	41
Literatúra	42

Úvod

V deväťdesiatych rokoch minulého storočia sa masívne rozbehlo zaistovanie investícií pomocou derivátov. Vznikla preto prirodzená potreba správneho ocenenia derivátov, čo v zásade nie je problém, pokiaľ podkladovým aktívom je jednorozmerný nástroj (akcia, dlhopis,...). Problém však nastáva, pokiaľ zvýšime rozmer úlohy, t.j. za podkladové aktívum zoberieme napríklad index, ktorý je vlastne váženou sumou viacerých akcií (či dlhopisov). Prvotným problémom je to, že sa poruší základný predpoklad lognormality modelu, pretože vážená suma lognormálne sa správajúcich objektov už nie je lognormálna. Druhý, ako sa neskôr ukáže, oveľa závažnejší problém je, že treba pri ocenení brať do úvahy korelácie medzi jednotlivými komponentami indexu.

Hlavným cieľom tejto práce bolo overiť v praxi spôsob riešenia ocenenia derivátu viacrozmerného podkladového aktíva (aplikovaním tzv. AOS schémy), ako je to z teoretickej stránky podrobne popísané v diplomovej práci [1] Soni Kilianovej z roku 2004. Ako sa ale neskôr ukázalo, táto jediná idea nestačila a bolo treba pridať k AOS schéme ďalší nápad, ktorý by celý problém spravil riešiteľným.

Celá práca je poňatá viac prakticky, preto sa v úvodných kapitolách najskôr oboznámime so základnými princípmi tvorby indexov, ich derivátov a trochu podrobnejšie sa budeme zaoberať indexom Dow 10, na ktorého dátach spravíme niektoré základné testy. V ďalšej časti si ukážeme prečo samotná AOS schéma nestačí a objasníme si niektoré viac či menej úspešné metódy riešenia celého problému.

1 Čo je to index.

1.1 Základné informácie.

Akciový index je štatistickou veličinou, ktorá meria zmeny v portfóliu akcií reprezentujúcich časť celkového akciového trhu (niekedy dokonca i trh celý). Tým poskytuje pomerne kvalitnú informáciu o tom, ktorým smerom sa trh, či jeho určitá časť, uberá. Do niektorých indexov možno aj priamo investovať. Výhoda takejto investície spočíva v tom, že investor vlastní často veľmi rozsiahle portfólio akcií reprezentované iba jedným cenným papierom, čo so sebou prináša výrazné zjednodušenie celej investície a s ňou spojenej diverzifikácie rizika, ako aj celkové zníženie transakčných nákladov. Trhové indexy sú bežne zostavované tromi základnými spôsobmi. Každý z týchto spôsobov má svoje špecifiká, a preto je dôležité poznať spôsob ich tvorby, aby bolo možné korektne interpretovať vývoj týchto indexov resp. stav na tom či onom trhu.

1) Podiel konkrétneho titulu na celkovom indexe je daný trhovou kapitalizáciou spoločnosti. (value weighted indexes) Tento prístup vychádza z jednoduchej logiky, že väčšie spoločnosti by mali mať väčší podiel na trhovom indexe, pretože ich hospodárske výsledky majú omnoho väčší vplyv na ekonomiku ako činnosť menších spoločností. Týmto spôsobom je tvorená väčšina hlavných svetových indexov ako napríklad Standard & Poor's 500 Index, NASDAQ Composite Index (Obr. 1), DAX Index, Wilshire 5000 Index, London FTSE, indexy MSCI a rovnako aj český index PX 50 ako aj slovenský akciový index SAX.

2) Cenovo vážené indexy. (price weighted indexes) Konštrukcia takýchto indexov ignoruje celkovú trhovú kapitalizáciu spoločností a uspokojuje sa iba so znalosťou aktuálnych cien jednotlivých akcií. To v praxi znamená, že čím vyššia bude cena akcií spoločnosti, tým väčšiu váhu budú mať tieto akcie v indexe. Preto aj firma "trpaslík" môže pohnúť indexom viac ako

firma "obor".

Príkladom cenovo váženého indexu je jeden z najznámejších a najsledovanejších indexov vôbec, americký Dow Jones Industrial Average. Obdobným spôsobom je konštruovaný aj japonský Nikkei 225.

3) Podiel konkrétneho titulu na celkovom indexe je pre každú spoločnosť rovnaký. (equal weighted indexes) Konštrukcia takýchto indexov (rovnako ako cenovo vážených indexov) ignoruje celkovú trhovú kapitalizáciu spoločností a priradzuje každej spoločnosti rovnakú váhu. Preto sú všetky akcie takéhoto typu indexu zrovnoprávnené.

Príkladom takto tvorených indexov je S&P 500 Equal Weight Index, Dow 5 a Dow 10, s ktorým sa v tejto práci budeme zaoberať trochu podrobnejšie.



Obr. 1: Vývoj ceny indexu NASDAQ Composite.

1.2 Hlavné svetové indexy.

1.2.1 Dow Jones Industrial Average

Dow Jones Industrial Average (DJIA) je index tridsiatich amerických blue chips, teda akcií veľkých spoločností, ktoré sú najlepšimi predstaviteľmi americkej ekonomiky. Tento index vytvoril Charles Dow v roku 1896 a je v súčasnosti historicky najstarším americkým akciovým indexom. Pôvodný index zahŕňal iba dvanásť akcií vrátane spoločnosti General Electric, ktorú ako jediná stále nájdeme v tomto indexe. V roku 1916 bol DJIA rozšírený na dvadsať akcií a konečného počtu tridsiatich akcií sa index dočkal v roku 1928. Najväčšou slabinou indexu DJIA je jeho veľmi úzke zameranie, a to i napriek tomu, že index sleduje výkonnosť tridsiatich obrích spoločností. Určite stojí za zmienku fakt, že tento index je zostavovaný editormi denníka Wall Street Journal, čo predpokladá určitú mieru subjektivity pri jeho zostavovaní. Napriek všetkým svojim nedostatkom však index DJIA dokázal pomerne presne kopírovať vývoj celého amerického akciového trhu.

DJIA je počítaný podľa vzťahu (1):

$$DJIA = \frac{\sum_{i=1}^{30} P_i}{Divisor} \quad (1)$$

,kde P_i znamená aktuálnu trhovú cenu i -tej akcie. Divisor (deliteľ) je číslo, ktoré slúži na odstránenie zmien hodnoty indexu v dôsledku niektorých korporátnych javov. Ide predovšetkým o výplatu hotovostných dividend, štiepenie akcií a vznik dcérskych spoločností. Nový deliteľ sa v takýchto prípadoch nastavuje tak, aby hodnoty indexu pred korporátnym javom a po ňom boli zhodné.

1.2.2 Standard and Poor's 500 Index

Zatiaľčo index DJIA priťahuje pozornosť médií, index Standard and Poor's 500 Index (S&P 500) je odborníkmi považovaný za štandardné meradlo výkonnosti amerického akciového trhu. Akcie zahrnuté v tomto indexe tvoria asi

70 percent celkovej kapitalizácie amerického akciového trhu. Index S&P 500 síce uzrel svetlo sveta v roku 1957, ale tvorcovia indexu retroaktívne určili jeho hodnotu už od roku 1926. Index neobsahuje 500 najväčších spoločností, ako by mohlo vyplývať z jeho názvu, ale 500 spoločností, ktoré sú vybrané výborom spoločnosti Standard&Poor's, a to predovšetkým na základe nasledujúcich kritérií:

- veľkosť
- odvetvie (aby index čo najviac reprezentoval americkú ekonomiku vo všetkých odvetviach)
- likvidita (tzn. aby akcie boli "dobře obchodovateľné")
- stabilita (musí sa jednať o silné spoločnosti)

To sú všeobecné podmienky, ktoré musia spoločnosti spĺňať, aby sa do indexu dostali. Z indexu naopak spoločnosti môžu vypadnúť:

- fúziou s inou spoločnosťou
- bankrotom
- tým, že prestanú reprezentovať svoje odvetvie,...

Okrem amerických spoločností, ktorých je v indexe drvivá väčšina, tu nájdeme aj niekoľko kanadských spoločností a iba dve európske spoločnosti: Royal Dutch Petroleum a Unilever. Viac ako 85% spoločností je obchodovaných na New York Stock Exchange (NYSE), zbytok väčšinou na NASDAQ a len nepatrné množstvo na American Stock Exchange (AMEX).

S&P500 je počítaný podľa vzťahu (2):

$$S\&P500 = \frac{\sum_{i=1}^{500} P_i * Q_i}{Divisor} \quad (2)$$

,kde P_i znamená aktuálnu trhovú cenu i -tej akcie, Q_i znamená množstvo emitovaných akcií na trhu. Podobne ako pri DJIA, aj pre S&P500 vykonáva

deliteľ funkciu akéhosi kompenzátora nepriaznivých vplyvov korporátnych javov. Ide napríklad o emisiu nových akcií v objeme väčšom ako 5%, spätné odkúpenie akcií opäť vo väčšom objeme ako 5%, výplata hotovostných dividend, nahradenie spoločnosti v indexe a pod.

Skutočné množstvo emitovaných akcií spoločnosti na trhu sa v dôsledku neustálych drobných emisií a odkupovania (pod 5%) nezhoduje s hodnotou Q_i používanou na výpočet hodnoty indexu. Dôvod je ten, že v dôsledku neustáleho menenia počtu akcií na trhu by muselo dochádzať k adekvátnemu upravovaniu deliteľa a tým by dochádzalo ku kumulovaniu zaokrúhlovacích chýb, až by sa tieto stali významnými. Preto spoločnosť Standard&Poor's zaviedla štvrťročné rebalancovanie, pri ktorom sa tieto odchýlky vyrovnávajú.

V Tabuľke 1 môžeme vidieť hodnotu a výšku deliteľa nami diskutovaných indexov.

Index	Hodnota	Deliteľ
DJIA	9873.42	0.135003
S&P500	1064.726	9255069213.6
DAX	3891.59	555043.05
Dow10	100	1020.518

Tabuľka 1: Parametre vybraných indexov. Údaje sú aktuálne k 25.3.2005.

1.2.3 Deutscher Aktien Index

Deutscher Aktien Index (DAX) je zložený z tridsiatich nemeckých blue chips (analogicky ako v prípade Dow Jonesu sa jedná o tridsať najväčších a najviac obchodovaných predstaviteľov nemeckej ekonomiky kótovaných na Frankfurt-skej burze cenných papierov) a je považovaný za nástupcu "Boersen-Zeitung Indexu", s historickými dátami siahajúcimi do roku 1959. DAX však na roz-

diel od Dow Jonesu patrí medzi kapitálovo vážené indexy. Je teda počítaný a upravovaný na základe tých istých pravidiel ako S&P500.

1.2.4 Dow 10

Index Dow 10 je jedným z rovnako vážených indexov. Pomocou neho sa pokúsime v tejto práci objasniť niektoré základné princípy fungovania viacrozmerných inštrumentov a ich derivátov, preto budeme trochu podrobnejší. Dow 10 sa vytvára nasledujúcim postupom:

1. každý december je tridsať akcií tvoriacich Dow Jones Industrial Average zoradených podľa dividendových výnosov v priebehu celého roka a desať najlepších je zaradených do Dow 10.
2. Každému z týchto desiatich titulov je pridelená rovnaká váha desiatich percent.
3. Použitím vzťahu (3) sa počíta hodnota indexu.

$$Dow10 = \frac{\sum_{i=1}^{10} P_i * Q_i}{Divisor} \quad (3)$$

,kde P_i predstavujú aktuálne kurzy akcií. Množstvá Q_i sú vypočítané na prelome rokov podľa vzťahu (4) a sú platné počas celého nasledujúceho roka.

$$Q_i = \frac{10000}{P_i^*} \quad (4)$$

P_i^* predstavujú kurzy, na ktorých dané akcie uzavreli kalendárny rok. Použitím vzťahu (4) sa zabezpečuje rovnováha medzi jednotlivými komponentami. V Tabuľke 2 môžeme vidieť spomínaný postup realizovaný na konkrétnych číslach na prelome rokov 2003/2004. Dow 10 je rebalancovaný pravidelne na prelome decembra a januára, kedy sa aplikuje predchádzajúci postup a dochádza aj ku úprave deliteľa, ktorý sa nastaví tak, aby hodnota pred a po rebalancovaní zostala nezmenená. Je zrejmé, že účasť konkrétnej akcie na tvorbe indexu nie je istá, keďže akcie sú volené na základe dividendových

Symbol	Názov	Cena	Množstvo	Váha
DD	Du Pont Ei De Nemours	45.89	218	10.00%
EK	Eastman Kodak Co	25.67	390	10.01%
GE	General Electric Co	30.98	323	10.01%
GM	General Motors Corp	53.40	187	9.98%
JPM	Jp Morgan Chase And Co Inc	36.73	272	9.99%
MO	Altria Group Inc	54.42	184	10.01%
MRK	Merck And Company Inc	46.20	216	9.98%
SBC	Sbc Communications Inc	26.07	384	10.01%
T	At And T Corp	20.30	493	10.01%
XOM	Exxon Mobil Corp	41.00	244	10.00%

Tabuľka 2: Výsledok rebalancovania Dow10 k 1.1.2004.

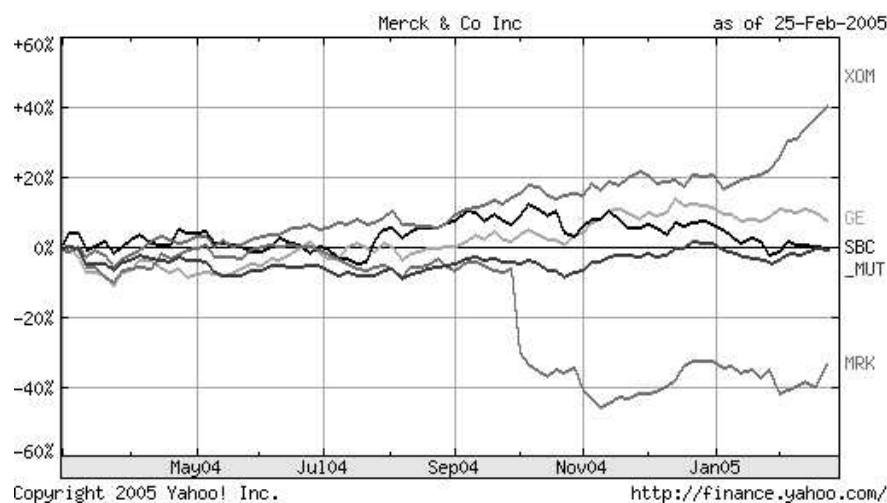
výnosov a teda je bežné, že nie všetky akcie obsiahnuté v indexe na konci roka, sú v ňom aj na začiatku nasledujúceho roka. Z predchádzajúceho je taktiež jasné, že Dow 10 nie je rovnako vážený v pravom zmysle slova počas celého roka, ale iba na jeho začiatku.

Pokiaľ v priebehu roka nastane jav, že spoločnosť tvoriaca Dow 10 zanikne, prípadne je z akýchkoľvek príčin vyradená z indexu Dow Jones, nahrádzajú ju aktuálne dividendovo najlepšia spoločnosť, ktorá zatiaľ v indexe nevystupuje, pričom jej je priradená aktuálna váha akcie, ktorú nahrádza.

Momentálne (rok 2005) index tvoria všetky akcie uvedené v Tabuľke 2 s tým, že Coca-Cola Co (KO) nahradila akciu firmy General Electric Co. (GE), Citigroup Inc. (C) nahradila Exxon Mobil Corp. (XOM) a Pfizer Inc. (PFE) a Verizon Communications Inc. (VZ) sa objavili v indexe potom, ako z kľúčového DJIA vypadli spoločnosti Eastman Kodak Co (EK) a At And T Corp (T).

Štiepenie akcií je ošetrené použitím vzorca (4) s aktuálnou cenou akcie za podmienky, že rozštiepená akcia si ponecháva váhu akcie, z ktorej vznikla.

Pokiaľ v priebehu roka dôjde ku vzniku dcérskej spoločnosti, ktorá sa oddeľí od spoločnosti tvoriacej Dow 10, tak v indexe zostáva iba pôvodná (rodičovská) spoločnosť, pričom sa vypočíta nové množstvo akcií Q_i pomocou vzorca (4) s aktuálnou cenou akcie po oddelení. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade, váha akcie pred a po vzniku dcérskej spoločnosti zostáva rovnaká.



Obr. 2: Vývoj cien vybraných akcií a indexu.

Z Obr. 2 môžeme jasne vidieť charakter správania sa indexu vzhľadom na svoje akcie, t.j., že samotná akcia má pomerne malý vplyv na celkovú sumu, ktorej je časťou a teda pokles či nárast jednej zložky sa na indexe vôbec nemusí prejaviť. Preto treba mať vždy na pamäti, že indexom výrazne pohne iba súčasná a rovnako orientovaná zmena viacerých podkladových aktív.

2 Čo je to derivát indexu.

2.1 Základné informácie

Keďže do indexov sú investované milióny dolárov, euro či jenov po celom svete, vzniká prirodzená potreba, ako možno znížiť riziko spojené s týmito investíciami. Riešenie tohto problému poskytujú práve deriváty ako napr. opcie, forwardy a futures. V tejto práci sa budeme venovať špeciálne opciám.

Kde je možné obchodovať s opciami? Jednou z najväčších búrz opcií na svete je **Chicago Board Options Exchange (CBOE)**, ktorá bola založená roku 1973. Európskou obdobou CBOE je **EUREX**, založený v roku 1998. Viacero búrz, na ktorých sa dá obchodovať s opciami a inými derivátmi, je možné nájsť na stránke:

www.world-exchanges.org/WFE/home.asp?action=document&menu=281

2.2 Opcie na indexy

Opcia na index predstavuje právo na kúpu (call) alebo predaj (put) indexu (underlying asset) za vopred stanovenú cenu (strike price) v stanovenom termíne (expiration cycle končiaci s expiration date). Podľa tohto termínu delíme opcie na európske a americké. S americkou opciou môžeme svoje právo uplatniť kedykoľvek do stanoveného dátumu, s európskou opciou je to možné iba presne v daný deň.

Vlastnosti opcií na indexy (DJIA, S&P 500, Dow 10):

- ich základom je jedna stotina indexu, ku ktorému prislúchajú, t.z., že ak napr. index je na úrovni 7500 bodov, tak jeho hodnota je 75
- cena opcií je stanovená v desatinných číslach, pričom jeden bod sa rovná 100USD (alebo inej peňažnej jednotky, odteraz ak sa vyskytne nejaký údaj viažúci sa na menu, budeme používať iba americké doláre)

- minimálna zmena strike price opcií, ktorých hodnota je pod 3.0 (300 USD), je 0.05 (5 USD) a pre všetky ostatné je to 0.1 (10 USD), t.j. existujú iba opcie so strike price 85, 90, 95, 100, atď, človek bude márne hľadať strike price rovnú napr. 91
- posledný deň, kedy je možné s opciami obchodovať je pracovný deň (zvyčajne štvrtok) pred tretím piatkom v mesiaci, kedy končí platnosť opcie
- expiration date je sobota po treťom piatku mesiaca, v ktorom vyprší expirácia
- dĺžka expiračného cyklu sa skladá z troch najbližších mesiacov, dlhšie cykly sú založené na kvartálnom posune (t.z., že ak je teraz december 2003, tak je možné obchodovať s opciami na dec03, jan04, feb04, mar04, jun04, sep04, dec04, mar05, atď)
- opcie na index bývajú hotovostne vyúčtované (cash-settled), čo znamená, že pri uplatnení opcie v dobe expirácie jej majiteľ nemá právo na kúpu (pri call-opcii), či predaj (pri put-opcii) indexu za strike price, ale dochádza iba ku finančnému vyrovnaniu, pri ktorom získava sumu rovnú rozdielu strike price a aktuálnej hodnoty indexu násobenú číslom 100
- za aktuálnu hodnotu indexu, branú do výpočtu hodnoty vyrovnania, sa berie otváracia hodnota indexu v pracovný deň pred expiráciou (zvyčajne piatok). Pokiaľ niektorá akcia tvoriaca index neotvorila v tento deň, tak za jej kurz sa berie posledná zaznamenaná hodnota, za ktorú bola daná akcia predaná

Vlastnosti opcií na DAX (rovnaké ako v predch. časti, rozdiely sú nasledovné):

- ich základom je jedna pätina indexu

- posledný deň obchodovania s opciou je tretí piatok v mesiaci, v ktorom vyprší expirácia (ak sa v tento den neobchoduje, tak sa berie posledný obchodný deň pred tým)
- do hodnoty indexu, ktorá je braná do výpočtu sumy vyrovnania po expirácii, sa berú posledné ceny akcií, za ktoré bol zrealizovaný obchod v daný deň

3 Skúmanie korelačných vlastností akcií tvoriacich index a overenie lognormality

V tejto časti sa pozrieme nato, aký je vzťah medzi vývojom kurzu indexu a kurzami akcií, ktoré ho tvoria, ako aj tým, či je splnený základný predpoklad lognormálneho správania sa zúčastnených aktív. Skúmať budeme index Dow 10 v rôznych časových periódach: po 1 minúte, 5 minútach, 30 minútach a hodine. Dáta, z ktorých vychádzame, sú zozbierané v období 14.9.2004 až 29.11.2004 v minútových intervaloch. Ich zdrojom sú stránky www.cboe.com a finance.yahoo.com.

3.1 Overenie lognormality

Nato, či pracujeme s lognormálne sa správajúcimi objektami, použijeme Jarque-Berov test. Testovacia štatistika meria rozdiel šikmosti a špicatosti dát so šikmosťou a špicatosťou normálneho rozdelenia. Štatistika je teda počítaná z relatívnych prírastkov cien nasledovne:

$$JB = \frac{N - k}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4}(K - 3)^2 \right) \quad (5)$$

,kde S je šikmosť, K je špicatosť, N predstavuje počet meraní a k znamená počet odhadovaných koeficientov (v našom prípade 0). Za platnosti nulovej hypotézy normálneho rozdelenia dát je Jarque-Berova štatistika rozdelená ako Chí-kvadrát s dvoma stupňami voľnosti. Zobrazovaná pravdepodobnosť (Probability) je pravdepodobnosť toho, že štatistika prekročí (v absolútnej hodnote) pozorovanú hodnotu. Malá pravdepodobnosť vedie k zamietnutiu nulovej hypotézy o normálnom rozdelení dát. V Tabuľkách 3 a 4 sú uvedené jednotlivé charakteristiky pre index a vybrané akcie.

Nemá význam zaťažovať čitateľa s hodnotami pre všetky akcie a všetky skúmané časy, pretože nezobrazené akcie sa správajú podobne ako zobrazené. Zo všetkých dát je zrejmé, že reálne dáta sú veľmi vzdialené lognormalite (čo je spôsobené nízkou likviditou týchto aktív pri malých časových intervaloch), ale s rastúcim časovým intervalom medzi dátami sa blížime k lognormalite.

po 60 min.	JPM	MO	SBC	T	XOM	MRK
Mean	-1,5E-4	5,7E-4	-1,7E-3	6,1E-4	2,1E-3	2,4E-3
Median	2,2E-4	0	0	0	0	2,1E-4
Maximum	2E-2	8,1E-2	1,9E-2	3E-2	1,7E-2	2,3E-2
Minimum	-2,9E-2	-2,3E-2	-2,7E-2	-2,7E-2	-2,1E-2	-1,6E-2
Std. Dev.	5,2E-3	8,4E-3	4,7E-3	5,7E-3	4,1E-3	3,2E-3
Skewness	-1,17	5,39	-0,1	0,13	-0,23	1,07
Kurtosis	10,39	52,32	8,62	7,7	6,85	15,74
Jarque-Bera	783	33447	415	289	194	2175
Probability	0	0	0	0	0	0
Observations	313	315	315	313	311	313

Tabuľka 3: Výsledné charakteristiky pre hodinový interval medzi dátami

po 1 min.	JPM	MO	SBC	T	XOM	MRK
Mean	-2.9E-6	9.9E-6	-2.9E-6	1E-5	4.2E-6	1.6E-7
Median	0	0	0	0	0	0
Maximum	2.2E-2	8,8E-2	1,6E-2	3.3E-2	1,4E-2	2,1E-2
Minimum	-3.4E-2	-3,3E-2	-2,8E-2	-1.8E-2	-1,1E-2	-1,5E-2
Std. Dev.	6.7E-4	1.1E-3	6.7E-4	8.8E-4	6.2E-4	4E-4
Skewness	-5.59	46.19	-3.54	4	0.77	7.1
Kurtosis	508.57	3594.11	207.77	186.53	96.23	707.38
Jarque-Bera	2E+8	1E+10	3E+7	3E+7	7E+6	4E+8
Probability	0	0	0	0	0	0
Observations	18630	18645	18645	18618	18631	18629

Tabuľka 4: Výsledné charakteristiky pre minútový interval medzi dátami

Môže sa prirodzene vynoriť otázka, na čo je dobrý Black-Scholesov prístup, keď nie je ani zďaleka splnený základný predpoklad lognormality? Odpoveď je jednoduchá, pokiaľ nepoznáme rozdelenie, ktoré nám dokáže opísať vývoj

cien akcií lepšie, musíme si vystačiť s tým, čo máme. Okrem toho, ako už raz bolo napísané, s rastúcim časovým intervalom sa k lognormalite blížime. Pozorný čitateľ si už určite všimol, že index nie je o nič menej ani viac vzdialený lognormalite ako akcie, z ktorých sa skladá. Prečo teda treba aplikovať viacrozmerný prístup? Odpoveď je možno nie celkom zrejmá. Ide o toto. Keď odhliadneme od problému lognormality a zameriame sa iba nato, že index nie je nič iné ako vážená suma akcií, medzi ktorými existujú **korelácie**, je otázne, či správnejšiu cenu derivátu dostaneme, keď zabudneme na viacrozmernosť a použijúc jednorozmerný prípad Black-Scholesovej rovnice dokážeme explicitne vyjadriť cenu derivátu, alebo sa pokúsime, akceptujúc určité nepresnosti v riešení, dostať cenu derivátu ako riešenie viacrozmernej Black-Scholesovej rovnice, v ktorej korelácie medzi akciami zahrnuté sú. V tejto diplomovej práci budeme rozvíjať práve tú druhú a jednoznačne zložitejšiu cestu. Samozrejme by bolo vhodné na reálnych dátach testovať oba prístupy, aby sme dostali kvázi jednoznačnú odpoveď, načo však treba kvantitatívne omnoho viac dát, ako momentálne máme k dispozícii. Pozrime sa v nasledujúcej časti nato, akú úlohu v indexe hrajú toľko spomínané korelácie.

3.2 Skúmanie korelácie

Korelačné matice relatívnych prírastkov cien akcií a indexu vyzerajú nasledovne:

po 60 minutach	DD	EK	GE	GM	JPM	MO	MRK	SBC	T	XOM	MUT
DD	1	0,28	0,63	0,41	0,40	0,53	-0,22	0,49	0,10	0,33	0,60
EK	0,28	1	0,40	0,28	0,42	0,26	-0,14	0,26	-0,06	0,14	0,56
GE	0,63	0,40	1	0,45	0,57	0,52	-0,15	0,54	0,14	0,35	0,73
GM	0,41	0,28	0,45	1	0,43	0,33	-0,30	0,26	0,14	0,11	0,44
JPM	0,40	0,42	0,57	0,43	1	0,21	-0,11	0,35	0,12	0,24	0,61
MO	0,53	0,26	0,52	0,33	0,21	1	-0,17	0,38	0,12	0,27	0,61
MRK	-0,22	-0,14	-0,15	-0,30	-0,11	-0,17	1	-0,09	0,05	-0,18	0,25
SBC	0,49	0,26	0,54	0,26	0,35	0,38	-0,09	1	0,21	0,25	0,59
T	0,10	-0,06	0,14	0,14	0,12	0,12	0,05	0,21	1	0,08	0,30
XOM	0,33	0,14	0,35	0,11	0,24	0,27	-0,18	0,25	0,08	1	0,39
MUT	0,60	0,56	0,73	0,44	0,61	0,61	0,25	0,59	0,30	0,39	1

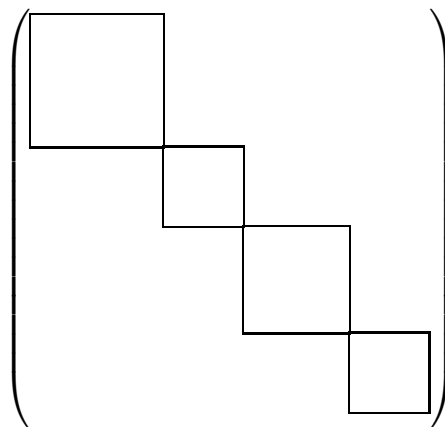
po 1 minute	DD	EK	GE	GM	JPM	MO	MRK	SBC	T	XOM	MUT
DD	1	0,17	0,42	0,31	0,25	0,37	-0,11	0,29	0,06	0,31	0,49
EK	0,17	1	0,23	0,20	0,07	0,24	-0,14	0,14	0,07	0,13	0,40
GE	0,42	0,23	1	0,33	0,31	0,42	-0,06	0,31	0,11	0,36	0,60
GM	0,31	0,20	0,33	1	0,29	0,27	-0,35	0,21	0,09	0,21	0,32
JPM	0,25	0,07	0,31	0,29	1	0,18	-0,04	0,22	0,10	0,23	0,43
MO	0,37	0,24	0,42	0,27	0,18	1	-0,16	0,22	0,04	0,30	0,55
MRK	-0,11	-0,14	-0,06	-0,35	-0,04	-0,16	1	-0,03	-0,01	-0,07	0,32
SBC	0,29	0,14	0,31	0,21	0,22	0,22	-0,03	1	0,09	0,25	0,43
T	0,06	0,07	0,11	0,09	0,10	0,04	-0,01	0,09	1	0,11	0,24
XOM	0,31	0,13	0,36	0,21	0,23	0,30	-0,07	0,25	0,11	1	0,47
MUT	0,49	0,40	0,60	0,32	0,43	0,55	0,32	0,43	0,24	0,47	1

Z uvedených čísel vyplýva celkom zaujímavý, ale aj dosť prekvapujúci fakt. Totiž, ak je akcia A málo korelovaná s akciou B a súčasne aj s akciou C, tak potom aj akcie B a C sú málo korelované. (pričom akcie považujeme za málo korelované, pokiaľ absolútna hodnota korelačného koeficientu medzi nimi je ≤ 0.25)

Naproti tomu si predstavme náhodnú premennú X, ktorá je málo korelovaná s náhodnou premennou Y. Majme ďalej tretiu náhodnú premennú Z, ktorá je rovná dvojnásobku prvej. Tým pádom korelácia medzi Z a Y je rovnako malá ako medzi X a Y, ale X a Z sú pritom perfektne korelované.

Preto je trochu prekvapujúci obsah korelačných matíc. Vychádzajúc z týchto čísel a teda akceptujúc "tvrdenie o prenose korelácie", máme v rukách silnú zbraň, ktorá nám jeden obrovský veľkorozmerný problém rozbije na viacero menejrozmerných podproblémov, ktoré sa dajú riešiť samostatne. Ide v podstate len o to, roztriediť akcie tvoriace daný index na podskupiny, ktorých prvky sú medzi sebou signifikantne korelované a súčasne tak, že akcie z rôznych podskupín sú korelované málo. Potom napr. jeden 100-rozmerný problém (ktorý momentálne nedokážeme riešiť žiadnym spôsobom) môžeme rozbiť na 10 podproblémov, ktorých rozmer pri troche šťastia neprekročí rozmer 20 a každú z podúloh potom riešiť samostatne. Nasledujúci obrázok spraví jasno v tom, ako nato. Stačí len vrámci korelačnej matice preskupiť jednotlivé akcie tak, aby nám okolo hlavnej diagonály vznikli podmatice typu $n_1 \times n_1$, $n_2 \times n_2, \dots, n_m \times n_m$, pričom $n_1 + n_2 + \dots + n_m = N$, kde N je rozmer pô-

vodnej úlohy. Všetky prvky, ktoré nepatria žiadnej matici umiestnenej na diagonále sú v absolútnej hodnote ≤ 0.25 a môžeme ich zanedbať.



Nateraz je ale už dosť rečí o praktickej stránke problému, pozrime sa spolu v nasledujúcej kapitole na trocha teórie, ktorá stojí v pozadí.

4 Teoretická stránka problému

Celá táto práca čerpá teoretické podklady z diplomovej práce [1], preto si len stručne ukážeme základné body a skúmaného čitateľa odkážeme na uvedenú, veľmi precízne vypracovanú prácu.

4.1 Odvodenie viacrozmernej Black-Scholesovej rovnice

Nech $S_i, i = 1, 2, \dots, n$ sú ceny aktív a $V(S_1, S_2, \dots, S_n, \tau)$ cena derivátu na danú skupinu aktív, pričom τ predstavuje čas do expirácie. Predpokladajme, že ceny aktív sa správajú podľa lognormálneho difúzneho procesu:

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dZ_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kde μ_i a σ_i predstavujú očakávanú mieru návratnosti a volatilitu aktív i , dZ_i je diferenciál príslušného Wienerovho procesu. Nech ďalej ρ_{ij} znamenajú korelačné koeficienty medzi dZ_i a dZ_j ,

$$E(dZ_i dZ_j) = \rho_{ij} dt, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j.$$

Každý proces Z_i môžeme považovať za lineárnu kombináciu Wienerových procesov ω_k s nezávislými prírastkami, $k = 1, 2, \dots, n$. Teda

$$dZ_i = \sum_{k=1}^n \tilde{\sigma}_{ik} d\omega_k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

s tým, že

$$E(d\omega_i d\omega_j) = \begin{cases} dt & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Potom ale vieme, že:

$$E(dZ_i dZ_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{\sigma}_{jl} E(d\omega_k d\omega_l) = \sum_{k=1}^n \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{\sigma}_{jk} dt$$

Z toho už je zrejmé, že korelačné koeficienty vyhovujú vzťahu (6)

$$\rho_{ij} = \sum_{k=1}^n \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{\sigma}_{jk}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j. \quad (6)$$

Lema 4.1.1 (Itoôva lema pre funkcie vektorového argumentu) Nech $f = f(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkcia vektorového argumentu $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Nech premenné $x_i, i = 1, \dots, n$ vyhovujú systému stochastických diferenciálnych rovníc:

$$dx_i = \mu_i(\mathbf{x}, t)dt + \sum_{k=1}^n \tilde{\sigma}_{ik}(\mathbf{x}, t)d\omega_k,$$

kde $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$ je vektor Wienerových procesov, ktorého zložky majú navzájom nezávislé prírastky. Predchádzajúci systém rovníc môžeme prepísať ako:

$$d\mathbf{x} = \mu(\mathbf{x}, t)dt + K(\mathbf{x}, t)d\omega,$$

kde $K(\mathbf{x}, t) = \{\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, t)\}_{i,j=1,\dots,n}$ je matica typu $n \times n$. Potom prvý diferenciál f vyzerá nasledovne:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{Tr}(K^T \nabla_x^2 f K) \right) dt + \nabla_x f d\mathbf{x},$$

kde $\nabla_x f$ je gradient funkcie f a $\text{Tr}(K^T \nabla_x^2 f K) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^n \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{\sigma}_{jk}$

Použijúc túto lemu s tým, že $\mu_i(\mathbf{x}, t) = \mu_i S_i, \tilde{\sigma}_{ik}(\mathbf{x}, t) = \sigma_i \tilde{\sigma}_{ik} S_i$, dostaneme vzťah (7) pre prírastok ceny derivátu.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial S_i} dS_i \quad (7)$$

Tak ako pri odvádzaní jednorozmernej B-S rovnice aj pri viacrozmernej vy-
užijeme pri tvorbe bezrizikového portfólia, zloženého z určitého počtu aktív
(napr. akcií), opcií a dlhopisov, tri základné princípy, t.j. nulový rast investí-
cií, samofinancovanosť portfólia a riziko averznosť investora. Pokiaľ označíme
 Q_V ako počet opcií s cenou V , Q_{S_i} ako počet jednotlivých aktív s cenou S_i a

B ako cenu bezrizikového dlhopisu, tak nulový rast investícií sa dá vyjadriť ako:

$$\sum_{i=1}^n S_i Q_{S_i} + V Q_V + B = 0$$

a samofinancovanosť portfólia ako:

$$\sum_{i=1}^n S_i dQ_{S_i} + V dQ_V + \delta B = 0,$$

kde dQ_{S_i} , dQ_V a δB znamenajú zmenu v počte kusov aktív, opcií a zmenu hodnoty dlhopisov v našom portfóliu.

Postupným upravovaním predchádzajúcich výrazov a eliminovaním všetkých náhodných výrazov (riziko averznosť investora) sa prepracujeme k rovnici (8), ktorú nazývame **všeobecná n-rozmerná Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica**.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + r \sum_{i=1}^n S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0, \quad (8)$$

$$0 < S_1, \dots, S_n < \infty$$

, ktorá sa často vyskytuje vo forme (9), keď otočíme čas $\tau = T - t$ (T je expiračný čas), a získame tak veličinu, ktorá predstavuje čas do expirácie.

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + r \sum_{i=1}^n S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} - rV, \quad (9)$$

$$0 < S_1, \dots, S_n < \infty, \quad \tau > 0$$

Samozrejme k predchádzajúcim rovniciam prislúchajú počiatočné podmienky (tzv. payoff funkcie), ktoré závisia na type derivátu. Príklady payoff funkcií pre forward, call opciu a put opciu v tomto poradí sú:

$$V_{forward}(\mathbf{S}, T) = \sum_{i=1}^n w_i S_i - E,$$

$$V_{call}(\mathbf{S}, T) = \text{Max}\left(\sum_{i=1}^n w_i S_i - E, 0\right),$$

$$V_{put}(\mathbf{S}, T) = \text{Max}(E - \sum_{i=1}^n w_i S_i, 0),$$

kde E predstavuje expiračnú cenu (tzv. strike price) a w_i sú váhy jednotlivých akcií v indexe. Ak sa pozrieme na spôsob kalkulácie hodnoty indexu Dow 10, je zrejmé, že pre váhu konkrétnej akcie platí:

$$w_i = \frac{Q_i}{\text{Divisor}},$$

kde Q_i je po celý rok konštantný počet akcií stanovený pri rebalancovaní indexu na prelome rokov. (samozrejme pokiaľ nenastanú nepredvídateľné javy ako napr. štiepenie akcií, oddelenie dcérskej spoločnosti a pod.), treba si ale uvedomiť, že týmito udalosťami sa nemenia váhy w_i .

4.2 Analytické riešenie viacrozmernej Black-Scholesovej rovnice

Riešenie rovnice (8) je známe a pri jeho hľadaní sa vychádza z tvaru:

$$V(\mathbf{S}, T - \tau) = e^{-r\tau} \int_{R^n} \psi(\xi; \mathbf{S}, \tau) V(\xi, \mathbf{T}) d\xi, \quad (10)$$

kde $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)^T$ a $\psi(\xi; \mathbf{S}, \tau)$ je funkcia n -rozmernej premennej $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$

Hľadanie funkcie $V(\mathbf{S}, \tau)$ vo forme (10), ktorá spĺňa rovnicu (9) v podstate znamená hľadanie riešenia nasledujúcej diferenciálnej rovnice:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j S_i S_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial S_i \partial S_j} + r \sum_{i=1}^n S_i \frac{\partial \psi}{\partial S_i}, \\ \psi(\xi; \mathbf{S}, 0) = \delta(\xi - \mathbf{S}), \end{cases} \quad (11)$$

kde $\delta(x)$ je Diracova funkcia:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

Nasledujúcimi dvoma transformáciami premenných:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \mathbf{y}, \\ y_i &= \frac{1}{\sigma_i} \left(r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \tau + \frac{1}{\sigma_i} \ln S_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

sa od úlohy (11) dostaneme k riešeniu úlohy (13):

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{x}} \tilde{\Phi} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\kappa}, \tau \in [0, T] \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, 0) = \tilde{\Phi}^0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\kappa}. \end{cases} \quad (13)$$

v ktorej Δ je tzv. Laplaceov operátor definovaný ako $\Delta \tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_i^2}$. V daných transformáciach sme použili matice $\mathbf{\Lambda}$ a \mathbf{Q} , ktoré získame nasledovne. Vytvoríme symetrickú korelačnú maticu \mathbf{R} typu $n \times n$, ktorej elementy sú $\mathbf{R}_{ij} = \rho_{ij}$, $i, j = 1, \dots, 2$, $i \neq j$. Jej diagonálne prvky sú rovné 1. Táto matica je vždy pozitívne semidefinitná. Pokiaľ predpokladáme, že stochastické procesy dZ_i , $i = 1, \dots, n$, o ktorých sme hovorili v predchádzajúcej časti, nie sú perfektne korelované, matica \mathbf{R} je kladne definitná. V tom prípade z teórie matíc vyplýva, že existuje ortogonálna matica \mathbf{Q} , pre ktorú platí:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{R} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$$

kde matica $\mathbf{\Lambda}$ je diagonálna matica vytvorená z vlastných čísel matice \mathbf{R} .

Riešenie rovnice (13) je však známe a spätnou transformáciou premenných sa dá dostať k riešeniu pôvodnej úlohy ako:

$$V(\mathbf{S}, T - \tau) = e^{-r\tau} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi; \mathbf{S}, \tau) V_0(\xi) d\xi,$$

kde $V_0(\mathbf{S}) = V(\mathbf{S}, T - 0) = V(\mathbf{S}, T)$ je počiatočná podmienka a

$$\psi(\xi; \mathbf{S}, \tau) = \frac{1}{(2\pi\tau)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \mathbf{R}} \prod_i \sigma_i \prod_i \xi_i} \exp\left(-\frac{1}{2\tau} \mathbf{w}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{w}\right).$$

Hlavný problém spočíva v tom, že riešenie je vyjadrené vo forme viacrozmerného integrálu, ktorý momentálne nevie nikto explicitne rozriešiť. Nemusíme ísť ani do veľkých dimenzií (v príp. indexu S&P100 treba riešiť 100-rozmerný integrál), pretože nepoznáme riešenie ani pre $n=2$.

Skúsme preto inú metódu, ktorá nás posunie bližšie k riešeniu. Vieme, že transformáciami (12) sa dostaneme od pôvodnej úlohy k úlohe (13), pričom vzťah medzi nimi je nasledovný:

$$V(\mathbf{S}, T - \tau) = e^{-r\tau} \psi(\mathbf{S}, \tau) = e^{-r\tau} \phi(\mathbf{y}, \tau) = e^{-r\tau} \tilde{\phi}(\mathbf{x}, \tau)$$

Pre počiatkové podmienky pritom platí:

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{y}, 0) = \psi(\mathbf{S}, 0) = V(\mathbf{S}, T) = V_0(\mathbf{S})$$

Takže pokiaľ získame riešenie úlohy:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{x}} \tilde{\Phi} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\kappa}, \tau \in [0, T] \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, 0) = \tilde{\Phi}^0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\kappa}. \end{cases}$$

s ľubovoľnou počiatkovou podmienkou, získame aj riešenie pôvodnej úlohy. V ďalšej časti sa preto sústredíme na riešenie tejto obcej viacrozmernej rovnice vedenia tepla.

4.3 Numerické metódy

V tejto nasledujúcich častiach si ukážeme, prečo nie je možné všeobecnú úlohu (ktorá je zobecním nášho problému):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \Delta u = 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tau \in [0, T] \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (14)$$

riešiť klasickým numerickým prístupom a ukážeme si ako sa dá celý problém výrazne zjednodušiť, pokiaľ použijeme techniku **aditívneho operátového rozštiepenia (tzv. AOS schému)**.

Klasickou časovou diskretizáciou prevedieme úlohu (14) na:

$$\frac{u^j(\mathbf{x}) - u^{j-1}(\mathbf{x})}{k} - (Au^j)(\mathbf{x}) = 0 \quad (15)$$

kde A reprezentuje Laplaceov operátor Δ , t.j. $Au = \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Po úprave (15) získame:

$$u^j = (\mathbf{I} - k\mathbf{A})^{-1} u^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (16)$$

Predpokladajme pre jednoduchosť, že každý z priestorových smerov rozdelíme na d vnútorných bodov. Ak teda celý priestor zúžime na dostatočne veľkú n -rozmernú kocku $\Omega = (-L, L)^n$, dostaneme v každom smere $d + 2$

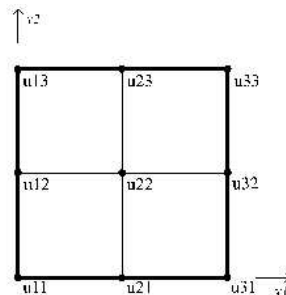
bodov vzdialených od seba $h = \frac{2L}{d+1}$, h je priestorový krok.

Uvedomme si, že pre riešenie všeobecnej n -rozmernej úlohy klasickými numerickými prístupmi (metóda sietí, metóda striedavých smerov, ...) potrebujeme v pamäti držať informáciu o všetkých deliacich bodoch, čo je v prípade viacrozmernej úlohy nemožné, keďže by sme potrebovali d^n údajov, pokiaľ predpokladáme, že všetky okrajové body vieme popísať úspornejším spôsobom. Tadeo teda cesta nevedie.

Pozrime sa bližšie na maticu \mathbf{A} z rovnice (16). Nech rozmer úlohy je 2 a nech máme tri vnútorné deliace body v každom smere. Na aproximáciu druhých parciálnych derivácií použijeme centrálné diferencie, t.j.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \approx \frac{u_{p+1,q} + u_{p-1,q} + u_{p,q+1} + u_{p,q-1} - 4u_{p,q}}{h^2},$$

príčom pre jednoduchosť predpokladajme, že vo všetkých okrajových bodoch je funkčná hodnota rovná 0. Pracujeme teda s nasledujúcou množinou vnútorných bodov:



ktorú si usporiadame do vektora $(u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{13}, u_{23}, u_{33})$.

Potom matica A vyzerá nasledovne:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2} \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} -4 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 1 & & 1 & & & & \\ 0 & 1 & -4 & & & & 1 & & \\ \hline 1 & & & -4 & 1 & 0 & & 1 & \\ & 1 & & 1 & -4 & 1 & & & 1 \\ & & 1 & 0 & 1 & -4 & & & 1 \\ \hline & & & 1 & & 0 & -4 & 1 & \\ & & & & 1 & & 1 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

Maticu \mathbf{A} môžeme vyjadriť ako súčet dvoch matíc, z ktorých každá reprezentuje aproximáciu druhej parciálnej derivácie iba podľa jednej z premenných. ($\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$)

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{h^2} \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} -2 & 1 & & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & & \\ & 1 & -2 & & & & & & \\ \hline & & & -2 & 1 & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & & 1 & -2 & & & \\ \hline & & & & & & -2 & 1 & \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 \end{array} \right); \mathbf{A}_2 = \frac{1}{h^2} \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} -2 & & & 1 & & & & & \\ & -2 & & & 1 & & & & \\ & & -2 & & & 1 & & & \\ \hline 1 & & & -2 & & & 1 & & \\ & 1 & & & -2 & & & 1 & \\ & & 1 & & & -2 & & & 1 \\ \hline & & & 1 & & & -2 & & \\ & & & & 1 & & & -2 & \\ & & & & & 1 & & & -2 \end{array} \right)$$

V nasledujúcej časti uvidíme, ako nám tieto matice poslúžia.

4.4 Metóda aditívneho operátorového rozštiepenia.

Metóda aditívneho operátorového rozštiepenia (Additive Operator Splitting technique, AOS scheme) je používaná hlavne pri spracovaní obrazu, kde sa rovnako ako je to v našom prípade treba vysporiadať s viacrozmernosťou úlohy a teda veľkými pamäťovými a časovými nárokmi. My túto metódu použijeme na približné riešenie úlohy (14) resp. (16).

Hlavnou myšlienkou AOS schémy je nahradenie aritmetického priemeru operátorov (alebo matíc) geometrickým priemerom, t.j.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \quad \longleftrightarrow \quad n \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i^{-1} \right)^{-1}.$$

Čo môžeme rozšíriť aj na prevrátené hodnoty

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \right)^{-1} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i^{-1}.$$

V predchádzajúcej časti sme videli, že matica \mathbf{A} , ktorá reprezentuje Laplaceov operátor Δ sa dá vyjadriť ako suma matíc, ktoré reprezentujú druhú parciálnu deriváciu podľa jednotlivých premenných, teda $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i$. Potom ale $\mathbf{I} - k\mathbf{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i$, kde $\mathbf{B}_i = \mathbf{I} - kn\mathbf{A}_i$. AOS aproximácia $(\mathbf{I} - k\mathbf{A})^{-1}$ vyzerá nasledovne:

$$(\mathbf{I} - k\mathbf{A})^{-1} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{I} - kn\mathbf{A}_i)^{-1}.$$

Potom ale formulu (16) môžeme aproximovať ako:

$$\bar{u}^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{I} - kn\mathbf{A}_i)^{-1} \bar{u}^{j-1}, \quad \bar{u}^0 = u^0, j = 1, \dots, m. \quad (17)$$

Odvodenie rádu presnosti uvedenej aproximácie čitateľ nájde v práci, z ktorej čerpá celá táto kapitola. Všimnime si, že riešenie (17) môžeme napísať ako

$$\bar{u}^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{v}_i^j$$

kde

$$\bar{v}_i^j = (\mathbf{I} - kn\mathbf{A}_i)^{-1} \bar{u}^{j-1}.$$

z čoho malou úpravou dostaneme

$$\frac{\bar{v}_i^j - \bar{u}^{j-1}}{k} - n\mathbf{A}_i \bar{v}_i^j = 0$$

a teda vidíme, že \bar{v}_i^j je aproximáciou jednorozmernej parabolickej rovnice (18)

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} - n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = 0, & x_i \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T), \\ v(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}, x_i, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_n, 0) = \\ = \bar{u}^{j-1}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}, x_i, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_n), & x_i \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (18)$$

v časovom reze j , t.j.

$$\bar{v}_i^j(\mathbf{x}) \approx v(\mathbf{x}, jk).$$

Avšak explicitné riešenie (18) poznáme a vieme ho pomocou Greenovej funkcie

$$G(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi n\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4n\tau}\right). \quad (19)$$

vyjadriť ako

$$v(\mathbf{x}, \tau) = \int_{\mathbb{R}} G(x_i - \xi_i, \tau) v(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n, 0) d\xi_i.$$

Takže aproximácia v vyzerá nasledovne:

$$\bar{v}_i^j(\mathbf{x}) \approx \int_{\mathbb{R}} G(x_i - \xi_i, k) \bar{u}^{j-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi_i \quad (20)$$

Riešenie pôvodnej úlohy (14) preto môžeme v každej časovej vrstve vyjadriť ako aritmetický priemer riešení jednorozmerných parabolických diferenciálnych rovníc

$$\bar{u}^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{v}_i^j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

kde

$$\bar{v}_i^j(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} G(x_i - \xi_i, k) \bar{u}^{j-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi_i \quad (22)$$

a $\bar{u}^{j-1} = u^{j-1}$. Teda počiatočná podmienka pre časový rez j je samotným riešením z časového rezu $j - 1$.

5 Metódy riešenia

Riešenie nášho problému pomocou AOS schémy, ako je to popísané v predchádzajúcej časti je veľmi dobrý, žiaľ nie postačujúci nápad. Prečo? Pri jeho aplikácii na našu úlohu totiž musíme opakovane používať kroky (21) a (22) v každom časovom reze, pričom priebežné riešenie musíme vedieť vyjadriť v explicitnom tvare, teda ako funkčný predpis, aby sme ho mohli použiť na získanie riešenia v nasledujúcej časovej vrstve opäť v explicitnom tvare, ktoré potom použijeme na nasledujúci časový rez, atď, atď, až pokiaľ sa neprepacujeme k času, ktorý nás zaujíma. A to práve nevieme. Preto treba prísť s ďalším nápadom, ktorý nás posunie ďalej.

Zrejme každého okamžite napadne skúsiť **globálne** aproximovať riešenie v každej vrstve funkciou, ktorá by bola (samozrejme spojená s Greenovou funkciou) dobre integrovateľná pri kroku (22). Problém je v tom, že dostatočne kvalitne aproximovať neštandardnú veľkorozmernú funkciu je v podstate nemožné.

Skúsme preto **lokálnu** aproximáciu, kedy budeme mať o priebežnom tvare riešenia informáciu len z niektorých bodov a zvyšok budeme aproximovať pomocou vhodných funkcií. Z integrálu (22) je zrejmé, že nám stačí aproximácia vždy iba v jednom smere. To je práve prínos aplikovania AOS schémy. Pokiaľ sa pustíme touto cestou, musíme si teda zvoliť množinu bodov, ktorá bude dostatočne kvalitne informovať o aproximovanej funkcii a súčasne bude "rozumne veľká". Musíme mať totiž stále na pamäti, že uvažujeme o veľkorozmerných úlohách.

Pokiaľ sa pozrieme na spôsob ako sú kótované opcie na samotné akcie, uvidíme analógiu s indexami, t.j. strike prices sa nezvyšujú kontinuálne ale v tzv. tickoch, čo aj potvrdzuje Obr. 3, na ktorom sú vypísané všetky kótované call a put opcie na akciu firmy Du Point Ei De Nemours (DD) zo dňa 12.4.2005.

Ak je napr. akcia momentálne na úrovni okolo 50, tak vypísané a z pohľadu investorov zaujímavé strike prices sú 42.5, 45, 47.5, 50, 52.5, 55, 57.5, 60. Je preto celkom rozumné, zvoliť si našu množinu bodov práve v týchto kľúčových bodoch (preto odteraz budeme vždy hovoriť o množine kľúčových

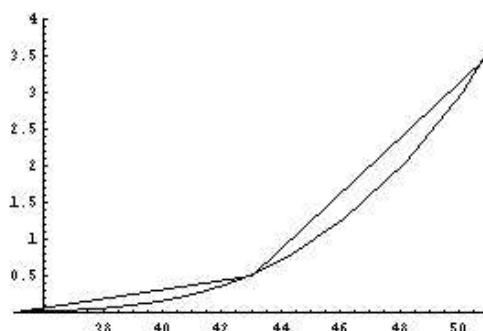
Calls	Last Sale	Net	Bid	Ask	Vol	Open Int	Puts	Last Sale	Net	Bid	Ask	Vol	Open Int
05 Apr 45.00 (DD DI-E)	5.40	pc	4.50	4.70	0	2910	05 Apr 45.00 (DD PI-E)	0.05	pc	0	0.05	0	8766
05 Apr 47.50 (DD DW-E)	2.25	-0.75	2.10	2.20	11	5357	05 Apr 47.50 (DD PW-E)	0.05	-0.05	0	0.10	94	6161
05 Apr 50.00 (DD DJ-E)	0.30	-0.45	0.20	0.25	196	17022	05 Apr 50.00 (DD PJ-E)	0.35	+0.10	0.55	0.65	100	4278
05 Apr 55.00 (DD DK-E)	0.05	pc	0	0.05	0	14684	05 Apr 55.00 (DD PK-E)	4.10	pc	5.30	5.50	0	1236
05 May 45.00 (DD EI-E)	0	pc	4.70	4.90	0	15	05 May 45.00 (DD OI-E)	0	pc	0.15	0.25	0	0
05 May 47.50 (DD EW-E)	3.30	pc	2.55	2.70	0	37	05 May 47.50 (DD OW-E)	0.50	+0.15	0.55	0.65	10	1783
05 May 50.00 (DD EJ-E)	1.10	-0.45	1.00	1.10	2	1173	05 May 50.00 (DD OJ-E)	1.60	+0.40	1.55	1.65	165	2300
05 May 55.00 (DD EK-E)	0.25	pc	0.05	0.15	0	6056	05 May 55.00 (DD OK-E)	4.90	pc	5.60	5.80	0	277

Obr. 3: Kótované opcie pre DD

bodov). Samozrejme táto voľba bodov nie je o nič lepšia oproti iným, pokiaľ chceme oceniť opciu na akciu, ktorej cena je momentálne medzi dvoma tickmi. Vtedy je určite lepšie zvoliť si body tak, aby jeden z nich sa presne zhodoval s cenou akcie. To ale teraz pre nás nie je podstatné.

Podobne ako v prípade numerického riešenia jednorozmernej Black-Scholesovej rovnice aj vo viacrozmere je priebežné riešenie funkcia konvexná v každom smere (s výnimkou počítačovej podmienky dokonca rýdzo konvexná) a to nielen v priestore cien akcií, ale aj v transformovanej oblasti, ktorú získame pomocou (12).

Na nasledujúcom obrázku je znázornená aproximácia pomocou po častiach lineárnej funkcie, ktorá sa pretína s našou funkciou iba v nami zvolených kľúčových bodoch. Obmedzme sa teraz iba na jednorozmer, aby sme mohli



posúdiť, či nás tento nápad posúva ďalej alebo nie (keďže v jednorozmere riešenie poznáme vždy, môžeme si kontrolovať do akej miery je testovaný prístup riešenia presný). Pokiaľ chceme získať funkčnú hodnotu v danom bode o jednu časovú vrstvu vyššie, stačí nám integrál (22) rozdeliť na dva a dosadiť lineárne funkcie, pretože ako je z predchádzajúceho obrázka jasné, naša po častiach lineárna funkcia sa láme práve v tomto bode.

Testovaním sa ukázalo, že tento nápad nie je vhodný. Príčina je dobre viditeľná opäť z predchádzajúceho obrázka. Ide o to, že touto aproximáciou vždy nadhodnocujeme funkčné hodnoty medzi kľúčovými bodmi a preto (ako testovanie ukázalo) nám po krátkom čase uletia funkčné hodnoty do obrovských výšok.

Samozrejme by sa dalo aproximovať priebežné riešenie pomocou polynómu vyššieho stupňa, ktorý by bol v spojení s Greenovou funkciou "dobro" integrovateľný, a ktorý by bol na nami skúmanej oblasti konvexný. Tu zas problém spočíva v tom, že máme v n -tej časovej vrstve a v danom smere k dispozícii vždy iba malý počet bodov (kvôli pamäťovej a časovej obmedzenosti) a teda kvalita aproximácie by bola veľmi nízka, čo by opäť časom spôsobilo veľké odchýlenie sa od skutočného tvaru riešenia.

Problém predchádzajúcich nápadov spočíval v tom, že na priebežné riešenie mali vplyv aj body, ktoré ležia medzi kľúčovými bodmi a teda kvalita riešenia závisí od kvality aproximácie. Skúsme sa teraz nato pozrieť z druhej strany a všimajme si len kľúčové body. T.j. dá sa závislosť medzi bodmi dvoch po sebe nasledujúcich časových vrstiev rozumne vyjadriť? O tom, či táto závislosť existuje, nie je pochyb, otázne je len, či ju dokážeme odhaliť a hlavne použiť.

Povedzme, že závislosť, ktorú hľadáme je lineárna. Môžeme teda písať, že kľúčové body v časovej vrstve b^j závisia na kľúčových bodoch z vrstvy b^{j-1} podľa nasledujúceho vzťahu

$$b^j = \mathbf{M}.b^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (23)$$

,kde \mathbf{M} je matica typu $n \times n$, pokiaľ máme n kľúčových bodov. Ako budeme

hľadať maticu \mathbf{M} ? Opäť nám dobre poslúži jednorozmer. Keďže poznáme explicitné riešenie jednorozmernej Black-Scholesovej rovnice, máme k dispozícii cenu opcie v ľubovoľnom čase pre ľubovoľnú hodnotu akcie.

Zrejme sa vynorí otázka, či nie je tento nápad naivný. Vo všeobecnosti áno, pokiaľ by sme mali ľubovoľné funkcie, ktorých vývoj by sme sa snažili zachytiť na základe znalosti funkčných hodnôt iba v pár vybraných bodoch. Treba si ale uvedomiť, že v jednorozmERE pracujeme vždy iba s presnou triedou funkcií, konkr. s funkciami, ktoré sú **konvexné** a **rastúce** na celom definičnom obore, čo by mohlo stačiť, aby tento prístup "natrénovania" prechodovej matice nebol úplne márnny.

Ako by hľadaná matica mala vyzeráť? Ako celkom rozumná požiadavka sa javí to, že táto matica by mala byť blízka k jednotkovej matici, keďže najväčší vplyv na funkčnú hodnotu v danom bode v časovej vrstve j má bezpochyby funkčná hodnota v tomto bode o jednu vrstvu nižšie.

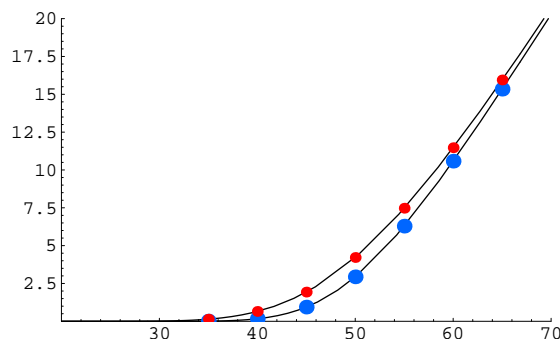
Ako budeme maticu \mathbf{M} hľadať? Skúsme využiť systém lineárnych rovníc, ktorého neznáme budú koeficientami hľadanej matice. Treba si ale uvedomiť, že pokiaľ pracujeme s n bodmi, matica \mathbf{M} je typu $n \times n$ a preto pri jej hľadaní potrebujeme minimálne n^2 rovníc. Jednotlivé rovnice môžeme zostavovať viacerými spôsobmi. My budeme používať tieto dva:

1. V každej vrstve si zvolíme n^2 bodov, medzi ktorými je aj našich n kľúčových bodov (v skutočnosti je toto číslo zbytočne veľké, stačilo by aj menej bodov, ale momentálne to nie je nijako obmedzujúce). Z týchto bodov postupne vyťahujeme n n -tíc tak, aby jednou z nich bola aj n -tica kľúčových bodov. Z týchto n -tíc a príslušných n -tíc o jednu časovú vrstvu vyššie potom zostavíme n^2 rovníc, ktorých neznáme sú prvkami hľadanej matice
2. V každej vrstve si zvolíme n bodov, ktoré sa presne zhodujú s našimi kľúčovými bodmi. Rovnice potrebné na výpočet prvkov matice \mathbf{M} potom zostavujeme tak, že sa neobmedzíme iba na jednu vrstvu (keďže

by sme mali iba n rovníc a my potrebujeme n^2 rovníc), ale vyberieme si n "prechodov" z vrstvy na vrstvu.

V oboch prípadoch je treba riešiť sústavu $n^2 \times n^2$ lineárnych rovníc. Existujú samozrejme mnohé ďalšie spôsoby hľadania matice \mathbf{M} , ktoré ale už napr. strácajú výhodu linearity.

Základná otázka je, či matica \mathbf{M} je rovnaká pre všetky vrstvy alebo bude treba počítať samostatnú maticu pre každú vrstvu zvlášť. Ukazuje sa, že budeme potrebovať viac týchto matíc. To sa dá overiť jednoduchým postupom, keď napr. v druhom postupe hľadania matice použijeme viac ako n "prechodov" (napr. $n + 1$) pri zostavovaní rovníc. Výsledná sústava typu $(n + 1) \cdot n \times n^2$ lineárnych rovníc vtedy nemá riešenie. Čo je v podstate aj dosť logické, keďže hľadáme matice, ktoré majú mať v sebe obsiahnutú informáciu o závislosti n -tice bodov na predchádzajúcej n -tici bodov a s meniacim sa časom sa táto závislosť tiež mení. Na nasledujúcom obrázku vidíme ako pomocou vzťahu (23) a už známej matice M prechádzame z nižšej časovej vrstvy (väčšie modré body) na vyššiu (menšie červené body). Treba mať na



pamäti, že stále pracujeme s obráteným časom (časom do expirácie) a teda vyššia časová vrstva je vzdialenejšia od expirácie a teda bližšia k súčasnosti. Obrázok je kvôli lepšej názornosti vytvorený v priestore pôvodných premenných (cien akcií). Nezabúdajme ale nato, že AOS schéma sa uplatňuje na viacrozmernú difúznú rovnicu, ktorú dostaneme aplikovaním transformácií (12) a teda samotné hľadanie matice \mathbf{M} musí prebiehať v priestore, v ktorom

hľadáme riešenie rovnice

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \tau \in [0, T] \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (24)$$

Túto rovnicu dostaneme aplikovaním transformácie premenných (25) v jednorozmernej Black-Scholesovej rovnici

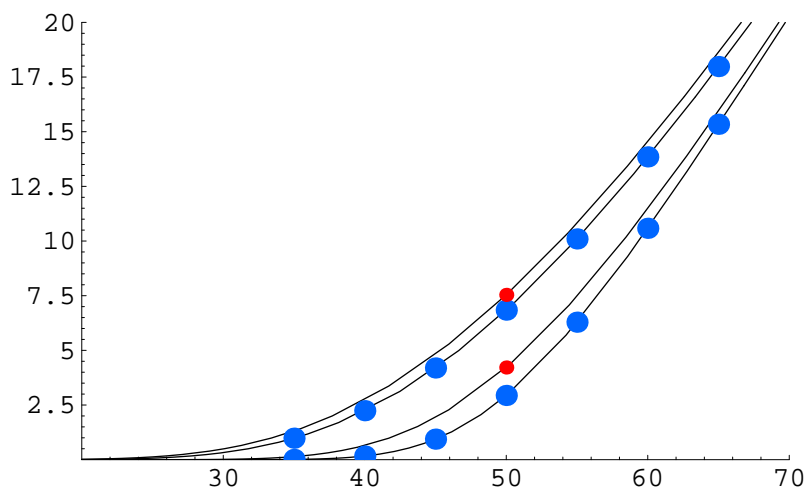
$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \ln \frac{S}{\text{strike}}, \\ \tau &= T - t \end{aligned} \quad (25)$$

pričom hľadané funkcie sú vo vzťahu $V(S, T - t) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$, kde $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}$ a $\beta = -\frac{r}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{8}$.

Pokiaľ na určenie prvkov hľadaných matíc používame sústavy lineárnych rovníc, vynára sa jeden závažný problém. Takto nájdené matice sa vôbec nepodobajú na jednotkovú maticu, ako sme to na začiatku predpokladali, a navyše k tomu sa niektoré prvky ukazujú byť rádovo veľké. To ale znamená, že malá zmena na vstupnej vrstve sa môže prejaviť a aj prejaví ako výrazná zmena na nasledujúcej vrstve. Uvedomme si, že pokiaľ máme "natrénované" matice z jednorozmeru a chceme ich používať vo viacrozmeru (hoci vždy iba na jeden smer), tak vstupná časová vrstva sa celkom určite nebude presne zhodovať so vstupom, ktorý sme používali pri "tréningu" (dokonca ani nultá vrstva, teda payoff, sa nebude zhodovať s payoffom z jednorozmeru, čo vyplýva z tvaru použitých transformácií). Musíme mať na pamäti, že **všetky** smery majú vplyv na tvar riešenia. Tým pádom treba nájsť iný spôsob ako získať prechodové matice.

Skúsme použiť metódu najmenších štvorcov (MNS), kedy za "pozorovania" potrebné ako vstup do tejto metódy, zoberieme usporiadané n -tice kľúčových bodov (presnejšie pod pozorovaním myslíme vplyv n -tice bodov na vždy presne zvolený bod z tejto n -tice akurát o vrstvu vyššie). Opäť máme dve možné cesty. Buď budeme hľadať prechodovú maticu pre každú vrstvu zvlášť, vtedy potrebujeme v každej vrstve väčší počet n -tíc bodov, aby sme

mohli použiť MNŠ, pričom jednou z týchto n -tíc je aj pre nás dôležitá n -tica. Počet pozorovaní musí byť väčší alebo rovný ako počet odhadovaných koeficientov, čo je základný predpoklad použitia MNŠ. Treba si uvedomiť, že pokiaľ budeme vychádzať iba z rovnakého počtu pozorovaní ako je počet odhadovaných koeficientov, budeme iba kopírovať predchádzajúci postup hľadania matice pomocou sústavy lineárnych rovníc, a preto tento počet musí byť ďaleko väčší. Alebo, a práve touto cestou sa teraz pustíme, v každej vrstve sledujeme iba našu n -ticu a skúmame jej vplyv na nasledujúcu vrstvu, vtedy hľadáme pre viacero vrstiev jednu spoločnú maticu (opäť pri tomto prístupe potrebujeme viac ako n "prechodov" z vrstvy na vrstvu, aby sme nekopírovali predchádzajúci postup a teda nedostali rovnako nekvalitné výsledky). Samozrejme môžeme pri testovaní s týmto parametrom narábať a skúmať jeho vplyv na presnosť riešenia. Nasledujúci obrázok spraví jasno v tom, ako používame MNŠ.



Obr. 4: Znázornenie dvoch "pozorovaní" a k nim patriacich výstupov

Opäť používame predchádzajúce značenie, t.j. väčšie modré body tvoria hodnoty vysvetľujúcich premenných, menšie červené body predstavujú hodnoty vysvetľovanej premennej. Obr. 4 sa dá cez maticový rozpis MNŠ napísať

nasledovne:

$$\begin{pmatrix} u_1^0 & u_2^0 & \cdot & \cdot & \cdot & u_n^0 \\ u_1^1 & u_2^1 & \cdot & \cdot & \cdot & u_n^1 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ u_1^{m-1} & u_2^{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & u_n^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_i^1 \\ \beta_i^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_i^m \end{pmatrix}$$

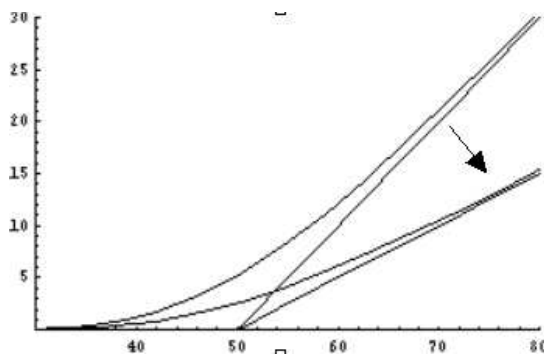
u_i^j predstavuje funkčnú hodnotu v i – *tom* bode našej kľúčovej množiny v j – *tej* časovej vrstve. β_i^j sú hľadané prvky matice \mathbf{M} . Konkrétne $\beta_i^j = \mathbf{M}_{i,j}$. Je teda jasné, že uvedený postup sa opakuje toľkokrát, koľko máme kľúčových bodov.

Vráťme sa ešte raz k tomu, že priebežný tvar riešenia v jednom smere je síce konvexne rastúci, ale nemusí sa podobať ani na jedno z priebežných riešení, ktoré sme použili na výpočet koeficientov pomocou MNŠ. S týmto problémom sa dá vysporiadať celkom ľahko. Stačí si uvedomiť, že lineárna kombinácia konvexných funkcií (nezáleží na tom, či rastúcich alebo klesajúcich) je opäť konvexná. Samozrejme všetky koeficienty v tejto lineárnej kombinácii musia byť nezáporné. Preto je veľmi rozumné (a opäť to potvrdzuje aj testovanie) pri hľadaní prechodovej matice pre akciu i vychádzať buď z viacerých umiestnení strike price pozdĺž množiny kľúčových bodov, alebo, a to je presne spôsob, ktorý budeme využívať v ďalšom priebehu, využiť to, že index je vážená suma jednotlivých komponentov a teda pri zafixovaní všetkých ostatných akcií sa zo vzťahu (26) stáva vzťah (27)

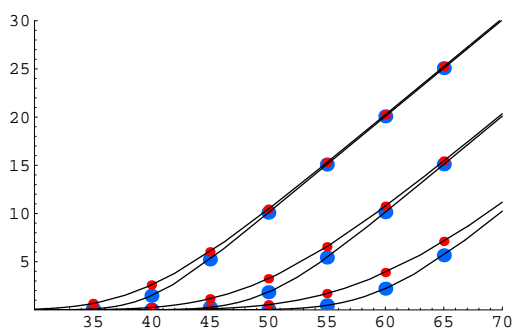
$$\sum_{i=1}^n w_i * S_i \leftrightarrow \text{strike} \tag{26}$$

$$w_j * S_j \leftrightarrow \text{strike} - \sum_{i=1}^{j-1} - \sum_{i=j+1}^n, \quad j \in 1, 2, \dots, n \tag{27}$$

A teda na vzťah (27) sa môžeme dívať ako na vzťah akcia verzus modifikovaná strike price, čo je presne prvý prístup. Ani koeficient w_j nie je nijako obmedzujúci, ba práve naopak, zovšeobecňujúci, pretože, ako nasledujúci obrázok ukazuje, takto pracujeme s ľubovoľným násobkom priebežného riešenia, čo je aj vhodné pre tvorbu lineárnych kombinácií jednotlivých riešení. A preto do



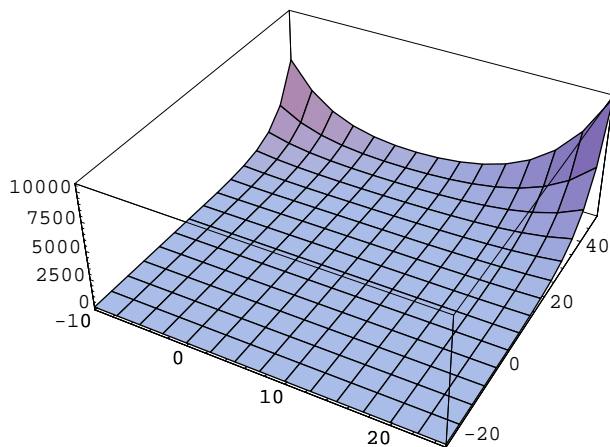
MNŠ vstupujú dáta, ktoré vyjadrujú závislosť kľúčových bodov v jednotlivých zložkách lineárnej kombinácie jednorozmerných riešení B-S rovnice na presne tých istých bodoch akurát o jednu vrstvu nižšie. A teda takto nájdená matica bude dobrá pre ľubovoľnú lineárnu kombináciu jednorozmerných riešení (tieto jednorozmerné riešenia budeme v ďalšom nazývať bázické funkcie, ich počet, braný do MNŠ, sa neskôr ukáže ako významný parameter ovplyvňujúci presnosť riešenia), čo je už dostatočne široká trieda funkcií. Pre lepšiu názornosť ešte jeden obrázok, ako v predchádzajúcej časti túto informáciu využívame. Opäť väčšie modré body sú hodnoty vysvetľujúcich premenných, menšie červené body sú hodnoty vysvetlovej premennej.



Pri zrovnaní všetkých ostatných parametrov akcií, ktoré majú vplyv na hodnotu opcie, volatila je parameter, ktorý nemôžeme zrovnať, a preto musíme maticu M hľadať pre každú akciu zvlášť. Tu je ukážka prechodovej matice pre akciu s volatilitou rovnou 0,2 (ostatné parametre: strike = 50; časový krok = 0,001; $r = 0,01$; $T = 1$; počet kľúčových bodov = 7; rozloženie kľúčových bodov (35,40,45,50,55,60,65)). Žiaľ testovaním použitia prechodových

$$\begin{pmatrix} 0.992318 & 0.00176513 & 0.00730043 & -0.00681006 & 0.00414547 & -0.00164766 & 0.000318566 \\ 0.0109694 & 0.974303 & 0.020877 & -0.00868938 & 0.00393354 & -0.00136512 & 0.000246091 \\ 0.00218078 & 0.00565679 & 0.981256 & 0.0141839 & -0.0036117 & 0.000931427 & -0.000143848 \\ -0.000294757 & 0.00167565 & 0.00622992 & 0.981443 & 0.0132499 & -0.00258693 & 0.0003446 \\ 0.000745244 & -0.00207005 & 0.00392511 & 0.00385696 & 0.983901 & 0.0110424 & -0.00128986 \\ -0.00303088 & 0.00842558 & -0.0145355 & 0.0194806 & -0.0114698 & 0.995329 & 0.00543437 \\ 0.0110137 & -0.0306664 & 0.0531782 & -0.0714014 & 0.0775815 & -0.0565874 & 1.01824 \end{pmatrix}$$

matic v dvojrozmere sa ukázalo, že táto metóda je veľmi nepresná. Jednou z príčin je aj porušenie predpokladu rastu riešenia v každom smere, pretože ako ukazuje Obr. 5 dvojrozmerného payoffu, v transformovanej oblasti nie je riešenie viacrozmernej Black-Scholesovej rovnice funkcia rastúca v každom smere. Predpoklad konvexnosti zostáva splnený.



Obr. 5: Payoff funkcia dvojrozmerného rovnako váženého indexu s korelačným koeficientom 0,3

Doteraz sme pri hľadaní prechodovej matice využívali znalosť riešenia pre jednorozmernú B-S rovnicu pre call opciu, pretože sme predpokladali, že funkcia, ktorú hľadáme, je podobne ako funkcia oceňujúca call opciu, v každom smere konvexne rastúca. Po porušení predpokladu monotónnosti v danom smere však môžeme využiť znalosť riešenia B-S rovnice pre put opciu v ľubovoľnom čase, pretože sa jedná o konvexne klesajúcu funkciu. V tomto okamihu sa ponúkajú dve cesty, ktorými môžeme pokračovať:

1. Hľadáme jednu spoločnú maticu použitím MNŠ, pričom pri odhadovaní jednotlivých koeficientov využívame súčasne call aj put opcie v jednotlivých časových rezoch
2. Hľadáme dve matice, jedna obsahuje informáciu iba o call opciách, druhá iba o put opciách.

Testovaním sa ukázalo, že lepšie výsledky poskytuje druhý prístup, kedy už získané matice používame tak, že pokiaľ v danom smere a v danom bode máme klesajúci priebeh, tak na výpočet funkčnej hodnoty v tomto bode do ďalšej vrstvy použijeme maticu získanú z put opcií, pokiaľ je priebeh rastúci, tak použijeme maticu z call opcií.

Podme sa teraz pozrieť na konkrétne čísla, na ktorých posúdime, do akej miery nás tento spôsob riešenia posúva ďalej. Za testovací príklad bol vo väčšine prípadom braný dvojrozmerný index s rovnako rozloženými váhami medzi akciami, ktorých volatily boli 0,2 a 0,25, korelačným koeficientom 0,3, čas do expirácie bol rovný 1, dĺžka časového kroku pre numerickú časť a časť hľadania prechodových matíc bol nastavený na 0,001, množiny kľúčových bodov boli pre jednoduchosť pre obe akcie rovnaké, v priestore pôvodných premenných (35,40,45,50,55,60,65), strike price na opciu indexu rovný 50. Skúmali sme prvých 100 časových vrstiev. Čitateľa zrejme napadne otázka, prečo sme používali iba sedem bodov. Naším cieľom bolo pôvodne vedieť oceniť opciu na 10-rozmerný index. S týmto diskutovaným prístupom potrebujeme mať v každej časovej vrstve informáciu o priebežnej funkčnej hodnote

v množine bodov, ktorá teda obsahuje 7^{10} bodov, čo je ešte relatívne rozumné číslo. Zvýšením počtu kľúčových bodov na 8 alebo viac by už pamäťové nároky presiahli únosnú mieru.

Ako najlepšie (vzhľadom na veľkosť chýb) sa ukázalo byť hľadať jednu maticu pre všetkých 100 vrstiev naraz (samozrejme uvažujúc rozličné matice pre jednotlivé akcie a s rozdelením pre cally a puty, teda dokopy 4 matice). V Tabuľke 5 sú konkrétne hodnoty priemerných absolútnych a maximálnych relatívnych chýb pre rozličné hodnoty počtu bazických funkcií. Počet bazických funkcií sa ukázal ako ďalší z parametrov, ktorý ovplyvňuje veľkosti chýb, keďže so zväčšujúcim sa počtom týchto funkcií sa (s výnimkou prvých vrstiev) presnosť vylepšuje. Prvé vrstvy by ale nemali mať príliš veľkú váhu pri našom posudzovaní, pretože relatívne chyby sú v týchto vrstvách ovplyvnené funkčnými hodnotami blízkymi nule (pokiaľ by sme skúmali umietnenie bodov, v ktorých tieto chyby vznikli, zistili by sme, že sa jedná o body, ktorých je správna funkčná hodnota blízka nule).

vrstva	7 báz. funkcií		16 báz. funkcií		31 báz. funkcií	
	PACH	MRCH	PACH	MRCH	PACH	MRCH
10	0,08	0,79	0,11	1,37	0,1	1,18
20	0,05	0,05	0,07	0,02	0,06	0,02
30	0,12	0,12	0,11	0,03	0,12	0,03
40	0,21	0,2	0,18	0,14	0,19	0,15
50	0,29	0,25	0,25	0,18	0,26	0,18
60	0,38	0,29	0,31	0,27	0,33	0,28
70	0,47	0,33	0,38	0,31	0,39	0,31
80	0,56	0,37	0,44	0,34	0,46	0,35
90	0,64	0,57	0,58	0,37	0,54	0,37
100	0,73	0,61	0,59	0,39	0,62	0,4

Tabuľka 5: Priemerná absolútna chyba (PACH) a maximálna relatívna chyba (MRCH) vo vybraných vrstvách

Ukazuje sa, že obe chyby sa s rastom časových vrstiev zväčšujú, čo je spôsobené postupným nabaľovaním chýb pri využívaní stále tej istej matice. Vynára sa preto prirodzená otázka, či by nebolo vhodné, v určitom okamihu začať používať inú maticu (resp. matice), ktorá by lepšie charakterizovala prechody medzi danou množinou vrstiev. T.j. používať jednu maticu na povedzme prvých k vrstiev, inú maticu na vrstvy k až $2k$, atď. Samozrejme sme skúšali rozličné varianty, či už pri hľadaní konkrétnej matice využívať presný interval vrstiev, ako interval, na ktorý má byť matica použitá, alebo hľadať maticu na intervale vrstiev, ktorý obsahuje interval, na ktorom má byť matica aplikovaná. Žiaden zo skúmaných spôsobov však neposkytol presnejšie výsledky ako vyššie spomenutý postup, ktorý sa ale sám ukazuje byť, s rastúcim časom nie príliš presný. Preto sa metóda prechodových matíc na hľadanie správnej ceny viacrozmerného derivátu ako rozšírenie AOS schémy momentálne ukazuje ako stále nedostačujúca.

Záver

Táto diplomová práca mala za cieľ preniknúť hlbšie do praktickej stránky tvorby indexov, ich oceňovania a oceňovania ich derivátov. Ďalším cieľom bolo overiť v praxi presnosť AOS metódy na ocenenie derivátu viacrozmerného podkladového aktíva. Potom, ako sa ukázalo, že samotná AOS schéma nestačí, sme sa snažili rozšíriť túto metódu o ďalší nápad, ktorý by nám v rozumnom čase a s rozumnými pamäťovými nárokmi umožnil získať cenu call opcie indexu, ktorá by sa príliš nelíšila od ceny zrátanej numericky (keďže vo viacrozmere nepoznáme iný spôsob). Ako jeden z nádejných nápadov sa ukázalo použitie tzv. prechodových matíc získaných z riešenia jednorozmernej B-S rovnice a ich aplikácia na jednotlivé smery pri AOS schéme. Žiaľ, testovaním sa ukázalo, že aj tento spôsob je nedostačujúci a teda ho v budúcnosti bude treba vylepšiť. Každopádne však tento spôsob predstavuje výrazný pokrok pri hľadaní ceny (vzhľadom na súčasnú situáciu v oceňovaní derivátov indexov) a naznačuje smer, ktorým by sa ďalšie pokusy mohli uberať. Momentálne však zostáva otázka oceňovania derivátov viacrozmerných podkladových aktív pomocou AOS schémy otvorená.

Literatúra

- [1] Soňa Kilianová, *Analytical and numerical methods for stock index derivative pricing*, Bratislava, Diplomová práca, , FMFI UK, 2004.
- [2] Kwok, Y. K., *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Singapore, Springer - Verlag, 1998.
- [3] Daniel Ševčovič, *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, FMFI UK, Bratislava, 2001.
- [4] Daniel Ševčovič, *Parciálne diferenciálne rovnice*, FMFI UK, Bratislava, 1999.
- [5] E. Vitásek, *Numerické metódy*, SNTL, Praha, 1987.