

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE



DIPLOMOVÁ PRÁCA

MARTIN MARTIŠKA

BRATISLAVA, 2005

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

EKONOMICKÁ A FINANČNÁ MATEMATIKA

**ŠTÚDIUM NIEKTORÝCH EKONOMICKÝCH
UKAZOVATEĽOV METÓDAMI EKONOFYZIKY**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Martin Martiška

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto prácu vykonal samostatne na základe vedomostí získaných štúdiom a s použitím uvedenej literatúry.

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Júliusovi Vankovi, PhD. za odborné vedenie, cenné rady a trpezlivosť pri tvorbe tejto práce.

Ďalej ďakujem rodičom za možnosť, učiteľom za vedomosti a kamarátom i všetkým milým ľuďom za spríjemnenie štúdia na vysokej škole.

Obsah

1. Úvod.....	6
2. Ekonofyzika.....	9
2.1 Analógie medzi fyzikou a ekonómiou.....	11
2.2 Štatistická fyzika	13
2.3 Štatistická mechanika peňazí.....	14
2.4 Rozdelenie príjmov	15
2.5 Rozloženie veľkostí	18
3. Koncepty termodynamiky v ekonomických systémoch – ekonomický rast	20
3.1 Peňažné cykly.....	22
3.2 Prvý zákon ekonómie: zisk	24
3.3 Spoločný peňažný cyklus domácností a priemyslu	25
3.4 Ekonomické reťazce	26
3.5 Integrovaný faktor	28
3.6 Druhý zákon ekonómie: ekonomická teplota	28
3.7 Entropia	29
3.8 Tretí zákon ekonómie: práca.....	30
3.9 Carnotove cykly	31
3.10 Produkčný cyklus.....	32
4. Aplikácie teoretických poznatkov na reálne dáta	35
4.1 Rozdelenie príjmov	35
4.1.1 Rozdelenie príjmov domácností v Slovenskej republike v rokoch 1960 až 1988	36
4.1.2 Rozdelenie príjmov domácností v Slovenskej republike v roku 2002.....	38
4.1.3 Rozdelenie príjmov domácností v Českej republike	39
4.1.4 Rozdelenie príjmov jednotlivcov v Rakúsku.....	41
4.2 Rast HDP.....	42
4.2.1 Rast HDP v USA.....	42
4.2.2 Rast HDP v okolitých krajinách a na Slovensku	44
4.3 Rozdelenie HDP a HDP na hlavu krajín sveta	46
5. Záver.....	50
6. Použitá literatúra	52

1. Úvod

Fyzika je prírodná experimentálna a teoretická veda, ktorá skúma fyzikálne vlastnosti prírodných objektov a ich vzájomné pôsobenie - interakciu. Fyziku možno rozdeliť podľa metód práce, ktoré fyzici používajú na experimentálnu, teoretickú a aplikovanú. Experimentálna fyzika sa zaoberá pozorovaním javov, ktoré prebiehajú v prírode samovoľne (napr. pohyby planét) alebo sú vyvolané zámerne pri plánovanom pokuse. Teoretická fyzika hľadá všeobecné zákony a z nich sa usiluje odvodiť nové poznatky. Aplikovaná fyzika sa zaoberá využitím fyzikálnych poznatkov v praxi, napr. v technike, priemysle, lekárstve, meteorológii, elektronike.

Ekonómia skúma na základe čoho a akým spôsobom spoločnosť rieši problém vzácnosti, pomáha riešiť základné ekonomické problémy. Skúma spôsob výroby, využitia vzácných statkov. Ako veda vznikla v 18 stor., zakladateľ je Adam Smith. Súvisí so vznikom kapitalistického tovarového hospodárstva. Koncom 19 stor. sa rozčlenila na 2 časti. Mikroekonómia skúma správanie sa jednotlivcov, podnikov, firiem, domácností. Zaoberá sa vytváraním cien jednotlivých druhov tovarov, vysvetľuje prečo vzniká nezamestnanosť, ako funguje trh. Makroekonómia sa zaoberá ekonomikou ako celkom, zaujíma ju celkový dopyt a ponuka tovarov a služieb, inflácia, národno-hospodárske výsledky, úloha štátu v ekonomike.

Často si ani neuvedomujeme, že fyzika je veda, ktorá vo veľkej miere ovplyvňuje ostatné prírodovedné disciplíny. Používaním fyzikálnych princípov vznikali kombinované vedné odbory ako sú biofyzika, geofyzika, fyzikálna chémia, astrofyzika, biomedicínska fyzika, ... Prenikanie fyziky do ostatných vied sa dialo vcelku prirodzene, a preto by nemalo prekvapiť, že

fyzici zamerali svoju pozornosť aj na ekonómiu, pretože v nej videli širokú možnosť uplatnenia svojich poznatkov a skúseností. Fyzici sú známi svojim veľmi dobrým matematickým aparátom a verím, že ich nenahnevám tvrdením, že každý fyzik sa snaží nájsť oblasť, kde by tento aparát mohol využiť. Svet ekonómie je presne to miesto, kde sa môžu cítiť ako ryba vo vode. Finančné trhy poskytujú nepredstaviteľné množstvá dát, ktoré dávajú priestor na skúmanie, analýzu a hľadanie rôznych zákonitostí, ktoré by dopomohli lepšie popísať a spoznať, ako sa takéto ekonomické systémy správajú. Nesmieme opomenúť ani ďalší motivačný faktor, ktorým svet financií láka, ba priam priťahuje fyzikov, a to sú peniaze. Svedčí o tom aj ich razantný vstup na New Yorkský Wall Street, ktorý predstavuje baštu svetových financií, kde väčšinu (asi 90%) ľudských zdrojov netvorí ekonómia, ale fyzici.

“V dobrom detektívnom príbehu najzrejmejšie domnienky často vedú k nesprávnym obvineným. Rovnako v našej snahe pokúsiť sa porozumieť zákonom prírody zisťujeme, že najzrejmejšie intuitívne vysvetlenie je často nesprávne.”

A.Einstein, L.Infeld

Cieľom tejto diplomovej práce je poskytnúť prehľad princípov, ktoré sa všeobecne spájajú s fyzikou, ale svoje využitie nachádzajú aj v ekonómii a financiách a pokúsiť sa predostrieť a popísať paralely, ktoré medzi týmito, na prvý pohľad rozdielnymi vednými disciplínami existujú. Práca sa bližšie zaoberá rozdelením príjmov, a to jednotlivcov i domácností, ktoré predstavuje jednu z hlavných oblastí súčasného štúdia, ako i novou modernou koncepciou popisujúcou makroekonomické prostredie, ktorá využitím štatistickej termodynamiky popisuje produkčný cyklus ekonomiky,

ktorého priamym dôsledkom je ekonomický rast. Praktickým výstupom práce bude overenie platnosti spomenutých zákonitostí analýzou reálnych dát so snahou tieto dáta čerpať z nášho regiónu, pretože väčšina štúdií, ktoré sa v „ekonofyzikálnom“ svete zaoberali touto problematikou, sleduje vývoj v ekonomicky silných svetových veľmociach ako sú Spojené štáty americké, Japonsko a Veľká Británia a bude zaujímavé sledovať platnosť niektorých zákonitostí v nám bližšom prostredí a zároveň porovnať dosiahnuté výsledky z hľadiska historického vývoja u nás a konfrontovať získané závery s už známymi pozorovaniami v ostatných krajinách sveta.

2. Ekonofyzika

Ekonofyzika je veda, ktorá aplikuje myšlienky, metódy a modely fyziky na analýzu dát z ekonomického prostredia a tvorbu modelov jeho mechanizmov. Rozdeľujeme ju na experimentálnu, ktorá skúma a analyzuje reálne dáta z reálnych trhov a snaží sa ich pochopiť a na teoretickú, ktorá hľadá modely, ktoré budú v zhode s experimentálnymi faktami. Predmetom skúmania sú 3 hlavné oblasti. Časové rady cien akcií, výmenných kurzov a ceny tovarov reprezentujú prvú oblasť. Druhú časť tvorí veľkosť firiem, HDP, individuálneho bohatstva a príjmov. Treťou je tzv. sieťová analýza ekonomických javov. [1]

Ekonofyzika je veľmi mladá vedná disciplína, rádovo môžeme hovoriť o pár desiatkach rokov odkedy sa začala výraznejšie rozvíjať a dostávať do povedomia odbornej verejnosti. Prvé náznaky možného využitia fyziky a ukážky aplikácie jej princípov v ekonómii sa objavili už koncom 19.storočia. Samotný pojem „Ekonofyzika“ vznikol iba na sklonku 20. storočia, keď jeho dnešná podoba bola prezentovaná v roku 1997. [2, 3]

Súčasná aplikácia fyzikálnych princípov v ekonómii využívajú najmä koncepty, ako sú mocninový zákon, škálovanie, nepredvídateľné časové rady a analógie medzi termodynamikou a trhom. Avšak objavujú sa aj snahy o využitie úplne nových konceptov, ako sú napríklad Hamiltonov – Lagrangeov formalizmus a kvantový princíp. [4, 5] Prekvapujúcim sa môže zdať fakt, že prvé využitie mocninového rozdelenia a prvá matematická formulácia náhodnej prechádzky sa udiali v sociálnych vedách. Pred vyše 100 rokmi, taliansky sociálny ekonóm Pareto preskúmal štatistický charakter individuálneho bohatstva v stabilnej ekonomike a tvrdil, že jeho rozdelenie má tvar [6]

$$y \approx x^{-v} \quad (2.1)$$

kde y je počet ľudí, ktorí majú príjem minimálne x , v je nezáporný exponent, ktorého hodnotu Pareto odhadol na 1,5. Pareto spozoroval, že tento výsledok je všeobecný a aplikovateľný na rôzne krajiny.

Od roku 1970 sa vo svete financií uskutočnilo viacero významných zmien. Jeden z kľúčových bol rok 1973, kedy sa na finančných trhoch začalo obchodovať s menami krajín a hodnoty výmenných kurzov začali byť určované dopytom a ponukou na devízových trhoch. Odvtedy rastú obchodované objemy na devízových trhoch neuveriteľným tempom. V roku 1995 boli transakčné objemy 80 krát väčšie ako v roku 1973.

Ešte pôsobivejší rast bol zaznamenaný na poli finančných derivátov. Celková hodnota vydaných derivátov na finančných trhoch v roku 1996 predstavovala sumu 35 triliónov USD. Tento vývojový scenár bol iba logickým vyústením okolností, pretože v roku 1973 páni F.Black a M.Scholes publikovali prvý článok, v ktorom prezentovali vzorec na racionálne oceňovanie opcí. Ide o známu Black-Scholesovu rovnicu, ktorá popisuje časový vývoj ceny derivátu na finančnom trhu [7]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (2.2)$$

kde V je cena derivátu, S je cena akcie, σ je volatilita časového vývoja akcie a r predstavuje úrokovú mieru. Táto rovnica vychádza z fyzikálneho princípu Brownovho pohybu a rovnice vedenia tepla.

Ďalšia revolúcia nastala v roku 1980, kedy sa na finančných trhoch začalo obchodovať elektronickou formou. V rovnakom období sa začalo s elektronickým skladovaním dát z finančných trhov, tieto boli tzv. vysokofrekvenčné, pretože priemerný časový interval medzi dvoma záznamami predstavoval iba niekoľko sekúnd. Prudký rozvoj finančných trhov si vyžiadala prísun veľkého množstva peňažných prostriedkov ako aj ľudských zdrojov na dosiahnutie spoľahlivého vyhodnotenia a minimalizácie

možných rizík pre najrôznejšie finančné inštitúcie. Tak vznikol priestor aj pre uplatnenie fyzikov vo finančníctve.

„Verím, že mikroskopické simulácie trhu zohrávajú v ekonomike a financiách dôležitú úlohu. Ak na jej vysvetlenie treba ľudí mimo ekonomiky a financií – možno fyzikov – nebude to po prvý krát, keď neekonómovia spravili značné pokroky v tejto oblasti.“

Z listu laureáta Nobelovej ceny za ekonómiu Harryho M. Markowitza „ekonofyzikovi“ Dietrichovi Staufferovi.

2.1 Analógie medzi fyzikou a ekonómiou

Vo fyzikálnych systémoch popisovaných klasickou mechanikou uvažujeme súbor hmotných bodov, častíc, ktoré medzi sebou interagujú. Vzájomné pôsobenie medzi dvoma objektmi pozorujeme nielen na mikroskopickej úrovni, t.j. pôsobenie medzi atómami, molekulami, ale skúmajú sa aj vzájomné účinky dvoch, resp. viacerých väčších systémov, ako napríklad tepelná výmena medzi rôznymi prostrediami.

Vo svete ekonómie uvažujeme súbor agentov, ktorí medzi sebou obchodujú. Ekonomická teória sa nezaobrá len transakciami na úrovni jednotlivcov, ale sleduje aj vzťah väčších finančných systémov, ako napríklad stav exportu, resp. importu medzi dvoma krajinami.

V uzavretom systéme platia viaceré zákony. Jedným z nich je zákon zachovania energie, t.j. že celková energia systému ostáva nezmenená, hoci medzi jednotlivými časticami prebieha výmena energie. Teda ak pred „kolíziou“ majú dve častice energie E_1 a E_2 , a po nej sa ich energie zmenia

o hodnotu navzájom vymenenej energie ε , t.j. $E_1' = E_1 + \varepsilon$, $E_2' = E_2 - \varepsilon$, tak celková energia systému ostane nezmenená $E_1' + E_2' = E_1 + E_2$.

Tento fyzikálny zákon môžeme aplikovať aj na ekonomické prostredie a síce ako zákon zachovania peňazí, napr. pri dvoch agentoch a transakčnej čiastke Δm , sa celkové množstvo peňazí nezmení: $M_1' = M_1 + \Delta m$, $M_2' = M_2 - \Delta m$ \square $M_1' + M_2' = M_1 + M_2$.

Zákon zachovania energie je podstatou pre odvodenie základného rovnovážneho zákona v štatistickej mechanike a síce Boltzmannovho – Gibbsovho zákona, ktorý hovorí, že pravdepodobnostná distribučná funkcia energie častíc plynu ε má tvar

$$P(\varepsilon) = Ce^{-\varepsilon/T}, \quad (2.3)$$

kde T je teplota a C je normalizačná konštanta.

Predpokladáme, že v uzavretom ekonomickom systéme platí zákon zachovania peňazí. Preto by sa v rovnovážnom stave mala pravdepodobnostná distribučná funkcia peňazí m riadiť Boltzmannovým – Gibbsovým zákonom

$$P(m) = Ce^{-m/T}. \quad (2.4)$$

Tu m predstavuje množstvo peňazí a T je efektívna teplota rovnajúca sa priemernému množstvu peňazí na jedného agenta. [8]

Správanie jednotlivých častíc môžeme popísať trajektóriami, ktoré sa menia v čase ($x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ pre n - časticový systém). Celkový stav systému popisuje veličina nazývaná potenciálna energia, označujeme ju U . Vývoj systému je daný zmenou potenciálnej energie, inak povedané druhá derivácia súradnice polohy častice (trajektórie v čase) podľa času je úmerná derivácii potenciálnej energie:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

Správanie ekonomických agentov môžeme v každom čase charakterizovať pomocou parametrov x_1, x_2, \dots, x_n , takže stav systému je úplne určený zadaním numerických hodnôt jednotlivých parametrov. Na popísanie celkového stavu systému slúži tzv. funkcia užitočnosti U . Vývoj systému je daný jej deriváciou, tzv. hraničnou užitočnosťou. Za určitých podmienok môžeme povedať, že analogicky ako vo fyzikálnom systéme platí (2.5). [3]

2.2 Štatistická fyzika

Štatistická fyzika predstavuje hlavný nástroj na skúmanie problémov v ekonómii a financiách. Je to časť teoretickej fyziky, ktorej úlohou je štúdium fyzikálnych objektov tvoriacich súbor mechanických systémov v rovnovážnom stave.

Poznáme 3 druhy štatistických metód. Metóda klasickej štatistiky, ktorá na riešenie konkrétnych fyzikálnych problémov uplatňuje zákony klasickej mechaniky. Pochádza od L.Boltzmann, pri svojej vedeckej práci ju použil najmä J.C.Maxwell, preto túto klasickú štatistiku nazývame aj Boltzmann – Maxwellovou. Ďalšie dva druhy metód majú kvantový charakter, t.j. pri štúdiu vlastností fyzikálnych objektov uplatňujú zákony kvantovej mechaniky. Sú to symetrická kvantová štatistika, ktorá sa uplatňuje najmä pri štúdiu elektromagnetického žiarenia v rovnovážnom stave a podľa svojho objaviteľa D.Boseho i podľa A.Einsteina, ktorý sa zaslúžil o jej používanie, sa nazýva Bose – Einsteinova. Treťou je antisymetrická kvantová štatistika, ktorá pochádza od E.Fermiho a P.A.M.Diraca a používa sa hlavne pri výskume vlastností elektrónov v kovoch a pri štúdiu elektrónového plynu v okolí jadra atómu.

2.3 Štatistická mechanika peňazí

Uvažujme systém veľkého množstva ekonomických agentov $N \gg 1$ a to jednotlivcov, ale aj firiem, pričom ich celkový počet ostáva nezmenený. Každý agent má určitý obnos peňazí, ktorý môže využiť na rôzne aktivity, ktorých jediným pre nás dôležitým výsledkom je výmena nejakého množstva peňazí medzi agentmi. Celkové množstvo peňazí v systéme M však ostáva nezmenené. Rovnako predpokladáme, že systém je uzavretý, t.j. doňho nevstupujú finančné prostriedky zvonku.

Zadefinujme pravdepodobnostnú distribučnú funkciu peňazí $P(m)$ tak, že počet agentov, ktorí majú množstvo peňazí z intervalu $(m, m+dm)$ sa rovná $N P(m)dm$. Nás zaujíma stacionárne rozdelenie $P(m)$, ktoré korešponduje so stavom termodynamickej rovnováhy. V tomto stave množstvo peňazí agenta jednotlivca silne fluktuuje, ale celkové pravdepodobnostné rozdelenie $P(m)$ ostáva nezmenené.

Rovnovážnu pravdepodobnostnú funkcia $P(m)$ môžeme odvodiť rovnakým spôsobom ako rovnovážnu pravdepodobnostnú funkciu energie $P(\epsilon)$ vo fyzike. Rozdeľme systém na dve časti, množstvo peňazí ostáva zachované a aditívne: $m = m_1 + m_2$, kým pravdepodobnosť je multiplikatívna: $P = P_1 P_2$, z toho odvodíme, že $P(m_1 + m_2) = P(m_1)P(m_2)$. Riešením takejto rovnice je (2.4), takže rovnovážne pravdepodobnostné rozdelenie peňazí má Boltzmannov – Gibbsov tvar. Z normalizačných podmienok

$$\int_0^{\infty} P(m)dm = 1 \quad (2.6)$$

$$\int_0^{\infty} mP(m)dm = M / N \quad (2.7)$$

dostávame, že $C=1/T$ a $T=M/N$, takže efektívna teplota sa rovná priemernému množstvu peňazí na agenta.

Boltzmannovo – Gibbsovo rozdelenie môžeme odvodiť aj maximalizovaním entropie rozdelenia peňazí

$$S = - \int_0^{\infty} P(m) \ln P(m) dm \quad (2.8)$$

za podmienky zachovania peňazí. Podľa originálneho Boltzmannovho prístupu rozdelíme peňažnú os $0 \leq m \leq \infty$ na malé intervaly veľkosti dm a očísľujeme intervaly postupne indexom $b=1, 2, \dots$. Nech počet agentov v intervale b je N_b , teda celkový počet agentov $N = \sum_{b=1}^{\infty} N_b$. Agenti v intervale b majú množstvo peňazí m_b , celkové množstvo peňazí je potom $M = \sum_{b=1}^{\infty} m_b N_b$. Pravdepodobnosť realizácie určitého zatriedenia agentov do nejakej množiny intervalov $\{N_b\}$ je úmerné počtu spôsobov, koľkými môžeme N agentov rozdeliť do jednotlivých intervalov, a síce $N! / N_1! N_2! \dots$. Logaritmus pravdepodobnosti je entropia: $\ln N! - \sum_{b=1}^{\infty} \ln N_b!$. Ak sú čísla N_b veľké a použijeme Stirlingov vzorec $\ln N! \approx N \ln N - N$, tak entropia na agenta je

$$S = (N \ln N - \sum_{b=1}^{\infty} N_b \ln N_b) / N = - \sum_{b=1}^{\infty} P_b \ln P_b, \quad (2.9)$$

kde $P_b = N_b / N$ je pravdepodobnosť, že agent má peniaze m_b . Použitím metódy Lagrangeových multiplikátorov na maximalizáciu entropie S vzhľadom na množinu $\{N_b\}$ s obmedzením na celkové množstvo peňazí M a celkový počet agentov N dostávame pre $P(m)$ Boltzmannovo – Gibbsovo rozdelenie. [8]

2.4 Rozdelenie príjmov

Osobné príjmy sú základnou zložkou ekonomiky. Preto štúdium ich rozdelenia a skúmanie súvisiacich mechanizmov má dôležitý význam

v ekonofyzike. Štúdium osobných príjmov má dlhú históriu a tejto oblasti sa už venovalo mnoho výskumných prác. Ako prvý sa štúdiom osobných príjmov začal pred viac ako 100 rokmi zaoberať V.Pareto, ktorý jeho rozdelenie aproximoval mocninovým zákonom. Rozdelenie príjmov skúmal pre viaceré krajiny a pre rôzne roky a zistil, že pravdepodobnostná funkcia $p(x)$ osobného príjmu x má tvar

$$p(x) = Ax^{-(1+\alpha)}, \quad (2.10)$$

kde A je normalizačná konštanta. Tomuto mocninovému zákonu sa hovorí Paretov zákon a exponent α sa nazýva Paretov index. Dnes je už známe, že Paretov zákon je platný a aplikovateľný len na malý rozsah príjmov a síce na príjmy z najvyššej kategórie. J.Gibrat objasnil, že pre príjmy zo strednej kategórie platí lognormálne rozdelenie a má tvar

$$p(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\log^2(x/x_0)}{2\sigma^2}\right], \quad (2.11)$$

kde x_0 je stredná hodnota a σ^2 je variancia. Koeficientu $\beta = 1/\sqrt{2\sigma^2}$ sa hovorí Gibratov index. Veľká variancia znamená globálne rozdelenie príjmov, preto malá β hovorí o nerovnomernom rozdelení príjmov. Ani toto rozdelenie sa však neukázalo byť vhodné, nakoľko nie je stacionárne, pretože sa jeho šírka mení v čase. [9]

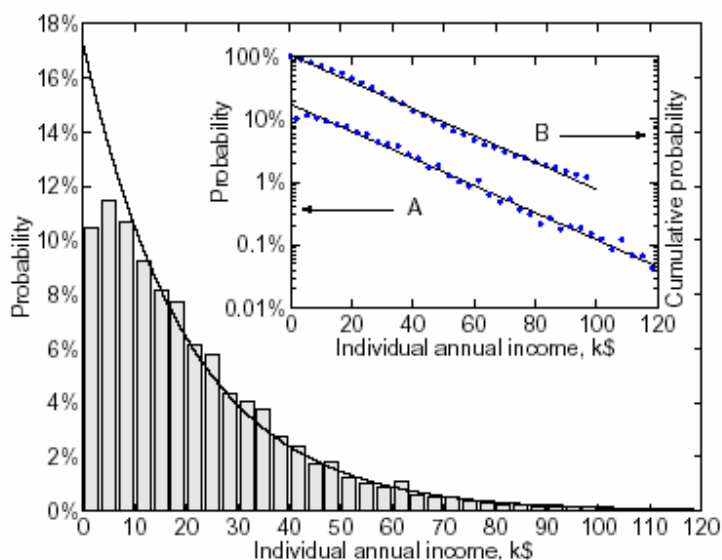
V súčasnosti sa štúdiom príjmov zaoberá viacero vedeckých tímov. Medzi najobsiahlejšie a najzaujímavejšie patria práce A. Dragulesca a V. Yakovenka [3, 8], ktorí sa zaoberali štúdiom príjmov v Spojených štátoch amerických. Zistili, že príjmy jednotlivcov väčšiny populácie sa správajú podľa exponenciálneho zákona, ktoré sa vo fyzike nazýva Boltzmann-Gibbsovo rozdelenie a je charakteristické pre veličiny, ktoré sa správajú podľa zákona zachovania, ako napríklad energia. Keďže peniaze sa tiež správajú podľa zákona zachovania, pretože ich celkové množstvo ostáva nezmenené hoci nastáva ich výmena medzi agentmi, môžeme

predpokladať ich exponenciálne pravdepodobnostné rozdelenie. Príjmy môžeme tiež chápať ako peniaze a rozdelenie príjmov by rovnako mohlo sledovať exponenciálny zákon.

Na analýzu použili dáta z roku 1996. Získané údaje očistené o ľudí s nulovými príjmami rozdelili do príjmových skupín od 0 po 120 tisíc dolárov. Šírka jednotlivých intervalov bola 10/3 tisíc dolárov. Treba poznamenať, že išlo o celkové ročné príjmy jednotlivcov. Nasledujúci graf (na obr. 2.1) zobrazuje hustotové rozdelenie získaných dát. Tie sú preložené exponenciálnou funkciou v tvare

$$P(x) = \frac{1}{R} e^{-x/R}, \quad (2.12)$$

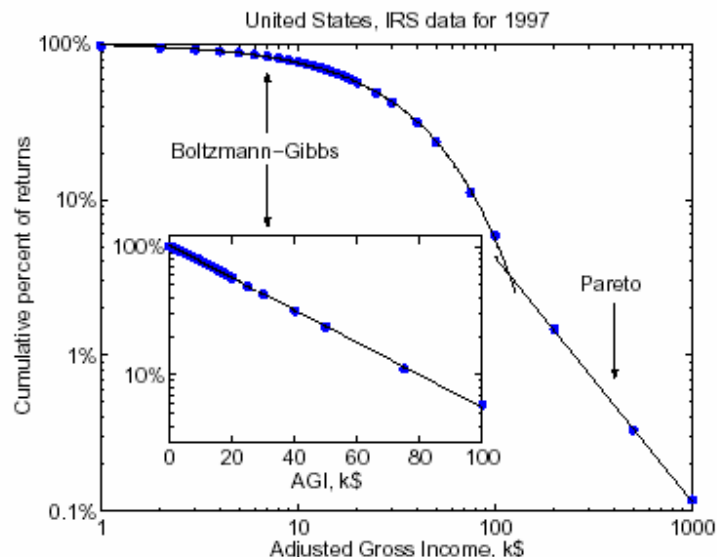
kde parameter R predstavuje priemerný príjem a je to analogická konštanta ako priemerná teplota T v Boltzmann-Gibbsovom rozdelení.



Obr. 2.1 príjmy jednotlivcov v USA

Prínosom Dragulesca a Yakovenka bolo aj zistenie, že exponenciálne rozdelenie dobre popisuje iba asi 97% z celkovej škály

príjmov, zvyšné 3%, ktoré predstavujú najvyššie príjmové vrstvy s ročným príjmom nad 100 tis. dolárov, aproximovali Paretovým rozdelením v tvare (2.10). Tento moment približuje graf na obr. 2.2.



Obr. 2.2 príjmy jednotlivcov v USA

2.5 Rozloženie veľkosti

Medzi rozdielnymi komunitami v ekonomike existujú rôzne vzťahy ako sú obchod, spolupráca, súťaž. Tie zohrávajú v ekonomike dôležitú úlohu. Výsledkom takýchto aktivít je, že rozloženie bohatstva poskytuje vedcom priestor na skúmanie vlastností vzťahov medzi ekonomickými entitami. Tento prístup nám pomáha lepšie chápať vzťahy medzi subjektami, ale zaujímajú nás aj akési všeobecné charakteristiky samotných ekonomických jednotiek ako sú jednotlivci, firmy, štáty a teda ďalšou hlavnou náplňou ekonofyziky je skúmanie rozloženia veľkosti ekonomických jednotiek, pričom veľkosť môžeme chápať v rôznych formách. Pre

jednotlivcov môže byť meradlom veľkosti jeho bohatstvo, resp. príjem, pre firmu počet zamestnancov, objem predaja či množstvo kapitálu, kým pre štát môžeme uvažovať o veľkosti HDP.

Pri skúmaní firiem sa porovnávali údaje od tých najmenších až po najväčšie a sledovali sa v dlhšom časovom horizonte. Zistila sa zaujímavá a dôležitá vlastnosť – univerzalita. Rôzne prístupy k meraniu veľkosti ako sú počet zamestnancov, objem predaja, aktíva a kapitál viedli k rovnakému rozdeleniu a to nezávisle na čase, dokonca aj počas krízových rokov, počas ktorých dochádzalo k veľkým zmenám vo veľkosti pracovnej sily. Ďalšie výskumy ukázali spoločné zákonitosti pre rôzne krajiny. Podobné výsledky boli zistené aj pre HDP, keď pre krajiny po celom svete platilo mocninové rozdelenie HDP na hlavu.

3. Koncepty termodynamiky v ekonomických systémoch – ekonomický rast

Jednou z moderných koncepcií, ktoré popisujú ekonomické prostredie z pohľadu fyziky je štatistická termodynamika. [10, 11] Táto kapitola sa venuje aplikácii termodynamického princípu pracovného cyklu na ekonomické systémy, popisuje produkčný cyklus i s jeho fyzikálnym pozadím a objasňuje ekonomický rast, ktorý je dôsledkom tohto procesu.

Termodynamika je štatistická teória popisujúca veľké systémy atómov s energetickými obmedzeniami. Ekonomika je veľký systém ekonomických agentov a tovarov s kapitálovými obmedzeniami. Oba systémy môžu byť popísané Lagrangeovým princípom, štatistickým zákonom pre veľké systémy s určitými obmedzeniami. Očakáva sa, že tak termodynamika ako aj ekonomika sa riadia rovnakými zákonitosťami:

1. Prvý zákon ekonómie: zisk je neúplne diferencovateľná rovnica, ktorá závisí na spôsobe jeho nadobudnutia (bližšie v kapitole 3.2)
2. Druhý zákon ekonómie: priemerné bohatstvo alebo životný štandard je integračný faktor zisku a vedie k nerovnomernému rozdelenia kapitálu (kapitoly 3.5, 3.6)
3. Tretí zákon ekonómie: práca zvyšuje kapitál a znižuje rozdelenie kapitálu (práca je spojená so zhromažďovaním kapitálu cez distribúciu tovarov). Pravidelná práca je vždy spojená s dvomi rôznymi ekonomickými úrovňami (viac v kapitole 3.8)

Pravidelná priemyselná produkcia a produkcia domácností vedie ku Carnotovmu procesu (bližšie popísaný v kapitole 3.9) peňažného cyklu, ktorý určuje ekonomický rast. Ponuka a dopyt vedú k Boltzmannovmu rozdeleniu kapitálu, bohatstva, príjmov a tovarov.

Sociálne väzby sú podobné tým atómovým, sú príťažlivé, odpudivé alebo neutrálne. Sociálne vzťahy sú podobné chemickým reakciám: manželstvá ľudí bielej a tmavej pleti, či katolíkov a protestantov ukazujú rovnaké fázové diagramy ako zlúčenina zlata a platiny. Lagrangeov princíp v binárnych systémoch vedie ku šiestim rôznym vzťahom v socio-ekonomických systémoch: partnerstvo, hierarchia, rovnosť, zjednotenie, oddelenie a útočenie.

Termodynamika je postavená na dvoch korešpondujúcich prístupoch, prvý uvažuje o fyzike na makroskopickej úrovni (motory, chladničky, tepelné ohrievače,...), druhý na mikroskopickej úrovni (vzájomné pôsobenie atómov,...):

1. Podľa druhého zákona termodynamiky:

$$\delta W = dY - Td \ln P \quad (3.1)$$

práca (W) znižuje entropiu ($\ln P$). V ekonómii práca znižuje neusporiadanosť rozloženia kapitálu: firma vyberá od zákazníkov kapitál predajom tovarov. Toto môže byť opakované v Carnotovom ekonomickom cykle a viesť k ekonomickému rastu. Rovnica (3.1) vedie makroekonomiku k produkcii priemyselných tovarov a peňažných cyklov. Práca v termodynamike je to isté ako produkcia v ekonomike. Priemyselní pracovníci sa často stávajú príliš drahými a sú nahradzovaní robotmi, počítačmi, strojmi, ktoré sa správajú podľa druhého zákona termodynamiky a často pracujú s vyššou efektívnosťou než ľudia.

2. Druhý prístup je založený na Lagrangeovom štatistickom prístupe:

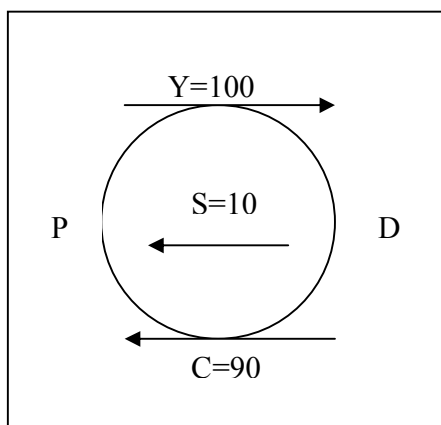
$$L = T \ln P - Y \rightarrow \max \quad (3.2)$$

L je tzv. voľná energia, Y je energia atómových väzieb, P je pravdepodobnosť, T je Lagrangeov parameter a predstavuje priemernú kinetickú energiu, resp. teplotu. Ekonomika je trh s obchodníkmi s cenovými obmedzeniami. Spoločnosť je systém agentov obmedzovaný

spoločenskými väzbami. Štatistické zákony nikdy nezávisia od typov objektov, ale iba od ich počtu. Z tohto dôvodu je nevyhnutné objasniť významy funkcií L , T , P a Y v socio-ekonomických systémoch. V atómových systémoch môžu byť tepelné vlastnosti látok (tuhých, kvapalných alebo plyných) odvodené od Lagrangeovho princípu a jednou z oblastí ekonofyziky je skúmanie nakoľko tento prístup odôvodňuje a nakoľko dobre popisuje aj iné systémy, napr. ekonomické, spoločenskovedné či politické.

3.1 Peňažné cykly

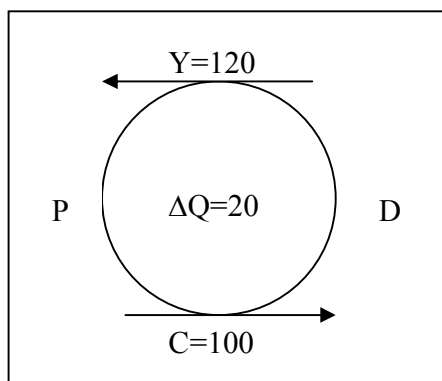
Najjednoduchším spôsobom ako popísať vzťah medzi priemyslom a domácnosťami je tzv. peňažný cyklus, ktorý je znázornený na obr. 3.1.



Obr. 3.1 Tradičný peňažný cyklus z pohľadu domácností medzi priemyslom (P) a domácnosťami (D). Peniaze vo forme miezd (Y) tečú z priemyslu do domácností a vo forme spotreby (C) a úspor (S) sa vracajú naspäť do priemyslu.

Priemysel vypláca domácnostiam mzdy $Y(=100)$ a domácnosti spotrebúvajú množstvo $C(=90)$ na tovary. Spotrebované peniaze tečú späť do priemyslu. Zvyšné úspory $S(=10)$, t.j. rozdiel medzi platom a spotrebou sa cez banky vracia tiež späť do priemyslu.

Peňažný cyklus z obr. 3.1 vedie k logickému záveru pre domácnosti a síce, že zarobia viac než spotrebujú. Tým pádom môžu nejaké peniaze ušetriť, čím zvyšujú hodnotu svojho majetku. Avšak obr. 3.1 nie je rozumným riešením pre priemysel. Pretože po vyplatení miezd ($Y=100$) a prijatí prostriedkov vo forme spotreby ($C=90$) si musí ešte požičať ($S=10$) od banky, aby mal na konci cyklu späť všetky peniaze. Takto to ale nemôže a ani v skutočnosti nefunguje, pretože v tomto cykle chýba zisk. V reálnom prostredí priemysel zaplatí $C (=100)$ vo forme miezd, očakáva, že predá $Y(=120)$, aby dosiahol zisk $\Delta Q = Y - C = 20$. Zisk sa môže znova investovať.



Obr. 3.2 Peňažný cyklus priemyslu.

Obr. 3.1 a 3.2 naznačujú, že je potrebné pozerať sa na rovnováhu každej strany (domácností, resp. priemyslu) oddelene, predtým než budeme uvažovať spoločný cyklus. Cykly na obr. 3.1 a 3.2 reprezentujú ekonomickú rovnováhu pre každú jednotku, pre každú osobu, domácnosť, podnik,

krajinu alebo živú bytosť. V každom takomto systéme musí byť príjem (Y) väčší ako spotreba (C). Zisk môže byť použitý rôznymi spôsobmi, domácnosti môžu zisk spotrebovať alebo uložiť, priemysel ho môže preinvestovať, biologický systém použije zisk na reprodukciu. Peňažný cyklus je úzko spojený s biologickým modelom krvného obehu. Matematický popis peňažného cyklu je spätý s Carnotovým termodynamickým cyklom. Tento umožňuje technikom naštartovať motory, či rozbehnúť chod chladničiek alebo tepelných púmp. Matematická podstata je založená na výpočtoch úplných a neúplných diferenciálnych rovníc. Tieto objasňujú, že uzavreté integrály alebo cykly nie sú vždy nulové, ale môžu viesť ku zisku alebo strate energie alebo kapitálu.

3.2 Prvý zákon ekonómie: zisk

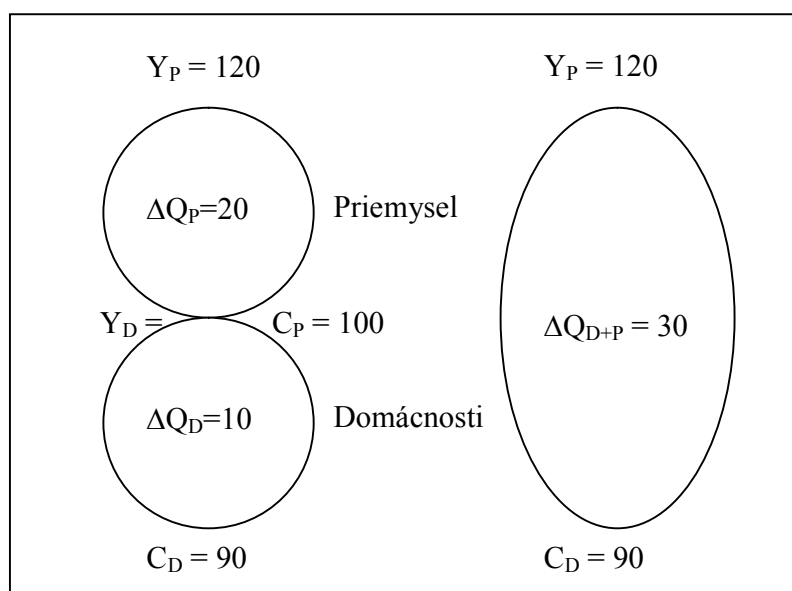
Prvý zákon termodynamiky hovorí, že tepelná zmena δQ nie je v úplne diferencovateľnom tvare, uzavretý integrál je nenulový a hodnota Q závisí na smere cesty integrovania,

$$\oint \delta Q \neq 0 \quad (3.3)$$

To isté platí aj v ekonomike. Investovanie peňazí v Japonsku, Európe či Spojených štátoch bude viesť v každom prípade k rôznym ziskom. Zisk môže byť záporný, pretože uvažujeme aj straty. Zisk δQ nie je v úplne diferencovateľnom tvare, hodnota zisku závisí na spôsobe investovania. Následne môžeme rovnicu (3.3) nazývať prvý zákon ekonómie.

3.3 Spoločný peňažný cyklus domácností a priemyslu

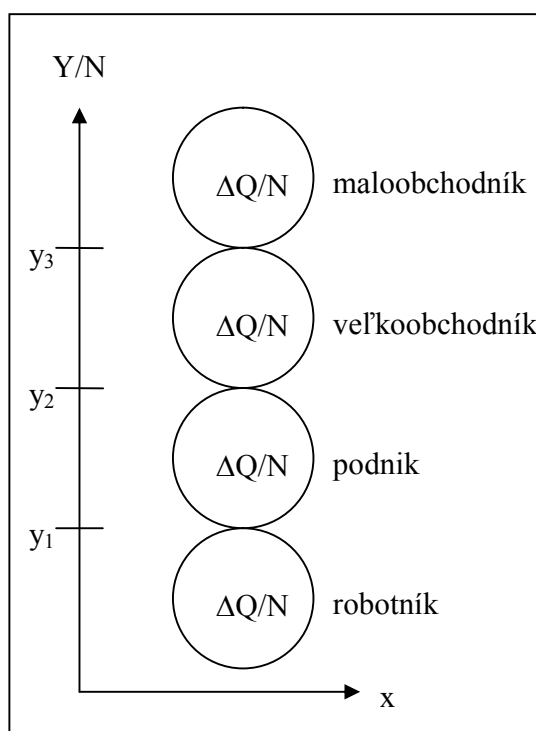
Každá individualita a každá spoločnosť má svoj vlastný peňažný cyklus a na prežitie vyžaduje kladnú hodnotu integrálu z δQ . Môžeme však spojiť dva cykly (priemyselný a domácností) jeden nad druhým nakoľko príjmy domácností Y_D sa rovnajú nákladom priemyslu C_P . Dostaneme tak spoločný cyklus priemyslu a domácností, ktorý je na obr. 3.3.



Obr. 3.3 Kombinovaný peňažný cyklus priemyslu a domácností. Predajom zarobí priemysel Y_P (=120). Náklady na mzdy C_P (=100) sú zároveň príjmy domácností (Y_D). Domácnosti spotrebujú C_D (=90). Spoločný zisk ΔQ_{D+P} (=30) sa rozdelí medzi obe strany prostredníctvom ich agentov (odbory a zástupcovia).

3.4 Ekonomické reťazce

Ak podobne ako na obr. 3.3 spojíme viacero peňažných cyklov pričom cenu prepočítame na 1 výrobok ($y = Y/N$), dostaneme tzv. ekonomický reťazec, ktorý je znázornený na obr. 3.4

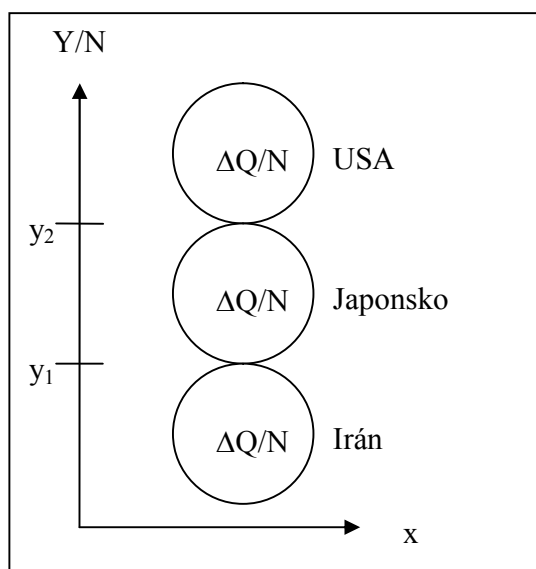


Obr. 3.4 Ekonomický reťazec peňažných cyklov pre produkciu N tovarov. Jednotková cena (Y/N) bude rôzna pre robotníkov, priemysel, veľkoobchod a maloobchod. Všetky skupiny sú zoradené v hierarchii, každá pridá nejakú hodnotu k produktu.

Robotník vyrobí tovar a dostane zaplatenú mzdu od podniku a na každom produkte zarobí. Podnik predá so ziskom produkt veľkoobchodu, ten ho so ziskom predá maloobchodu, od ktorého ho odkúpi zákazník.

Každý na jednej produkčnej jednotke utŕži zisk $\Delta Q/N$ a pridá nejakú hodnotu produktu. Na konci si robotník nemôže dovoliť kúpiť vlastnoručne vyrobený výrobok u maloobchodníka. Po každom cykle je zisk rozdelený ekonomickými agentmi, cena y_n je určovaná dopytom a ponukou.

Podobný reťazec peňažných cyklov môžeme zostrojiť aj pre medzinárodný obchod. Na jeho spodku sú krajiny, ktorých hlavnými zložkami hospodárstva sú poľnohospodárstvo alebo ťažba nerastných surovín. Patria sem napríklad Irán, Saudská Arábia alebo Brazília. Priemyselné krajiny (Japonsko, Európa,...) od nich nakupujú suroviny, aby z nich vyrobili produkty s vyššou hodnotou (stroje, autá, počítače,...). Tie sú potom exportované a predané za vyššiu cenu v krajinách s vysokou životnou úrovňou.



obr. 3.5 Ekonomický reťazec peňažných cyklov rôznych krajín, ktoré sú zoradené v hierarchii podľa HDP na domácnosť alebo životnej úrovne, každá utŕži zisk a pridá výrobku hodnotu $\Delta Q/N$.

Pri pohľade na obr. 3.5 sa vynára problém: kto kúpi produkty najbohatších krajín? Jedno možné riešenie je predaj bohatým ľuďom v chudobných krajinách. Toto však funguje len ak je počet chudobných krajín oveľa väčší než počet bohatých. Ďalším riešením je vlastníť produkčné zdroje v chudobných krajinách.

3.5 Integrovaný faktor

Dvojrozmerná neúplne diferencovateľná rovnica

$$\delta\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy \quad (3.4)$$

môže byť pretransformovaná do úplne diferencovateľného tvaru (df) použitím *integrovaného faktora* ($1/y$). Uzavretý integrál potom bude nulový:

$$\oint \delta\omega \neq 0 \rightarrow \oint \delta\omega / y = \oint df = 0 \quad (3.5)$$

3.6 Druhý zákon ekonómie: ekonomická teplota

Druhý zákon termodynamiky: teplota T predstavuje integrovaný faktor neúplne diferencovateľnej rovnice tepelnej zmeny δQ . Teplota zodpovedá priemernej kinetickej energii na 1 atóm, $T=E/N$.

Druhý zákon ekonómie: ekonomická teplota T je integrovaným faktorom neúplne diferencovateľnej rovnice zisku δQ . Ekonomická teplota zodpovedá priemernému zisku na 1 osobu, $T=Q/N$. Ekonomická teplota krajiny je daná priemerným HDP na hlavu.

3.7 Entropia

Integračný faktor $1/y$ vedie k úplne diferencovateľnej rovnici df novej funkcie f . V termodynamike integračný faktor $1/T$ vedie k novej funkcii S ,

$$dS = \delta Q / T \quad (3.6)$$

ktorú nazývame entropia. Je to fyzikálna veličina, ktorá hovorí o miere neusporiadanosti systému. Uzavretý integrál entropie je rovný nule. Uzavretý inetrál tepelnej zmeny môžeme v zmysle entropie zapísať nasledovne:

$$\oint \delta Q = \oint TdS \neq 0 \quad (3.7)$$

Tento uzavretý integrál vedie ku zisku, obr. 3.4, obr. 3.5:

$$\Delta Q = \oint TdS = \oint ydx \neq 0 \quad (3.8)$$

Premenné peňažného cyklu (y, x) sú dané životnou úrovňou alebo bohatstvom na domácnosť a entropiou: $y = T = Y/N$, $x = S$. Entropia bola uvedená do sveta ekonómie už skôr, avšak nebola preukázaná jej nevyhnutnosť a dôležitosť.

V termodynamike je entropia úzko spätá s pravdepodobnosťou (P) rozloženia energie v systéme, napr. v plyne

$$S = \ln P \quad (3.9)$$

$$P = N! / (N_1! N_2! \dots N_k!) / K^N \quad (3.10)$$

V ekonomike je entropia úzko spojená s rozložením kapitálu v nejakom ekonomickom systéme, napr. na trhu. To si môžeme priblížiť na jednoduchom príklade:

Farmár predáva 10 jablák pri cene 1 koruna za kus. Pred predajom jablák sú jednokorunové mince rovnomerne rozdelené medzi 10 zákazníkmi a farmár nemá žiadnu mincu. Pravdepodobnosť takejto situácie je nasledovná (pre $N=10$ a $K=11$):

$$P_1 = 10!/(1!1!\dots 1!0!)/11^{10} = 0,00014$$

$$S_1 = \ln(0,00014) = -8,87$$

Po predaji všetkých 10 jabĺk vlastní farmár všetky mince a všetci zákazníci nemajú žiadnu. Pravdepodobnosť nastatia takejto situácie je:

$$P_2 = 10!/(10!0!0!\dots 0!)/11^{10} = 11^{-10}$$

$$S_2 = -10 \ln 11 = -23,98$$

Procesom predaja sa entropia rozloženia peňazí zmenila nasledovne:

$$S_2 - S_1 = -23,98 + 8,87 = -15,11$$

Tento výsledok ukazuje dôležitosť entropie v ekonómii. Teda môžeme povedať, že predaj tovarov, resp. zhromažďovanie peňazí je ekvivalentné poklesu entropie, naopak zbieranie, zhromažďovanie tovarov, resp. rozdeľovanie peňazí znamená nárast entropie.

3.8 Tretí zákon ekonómie: práca

Bez práce nastáva rozptýlenie entropie:

Voda vždy tečie z vyššieho bodu do nižšieho

Teplo vždy prúdi z teplejšieho prostredia do chladnejšieho

Kapitál vždy smeruje od bohatých k chudobným

Práca môže otočiť proces rozptýlenia entropie:

Prácou vodnej pumpy môže voda tečť z nižšieho bodu do vyššieho

Prácou tepelnej pumpy môže teplo prechádzať z chladnejšieho prostredia do teplejšieho

Prácou môže kapitál ísť od chudobného k bohatému

Prvý a druhý zákon termodynamiky môžeme zapísať ako

$$\delta W = dY - T dS \quad (3.11)$$

Práca zvyšuje energiu (Y) a znižuje rozloženie energie (S). Nahradenie energie kapitálom vedie k tretiemu zákonu ekonómie: práca zvyšuje kapitál (Y) a znižuje rozptýlenie kapitálu (S).

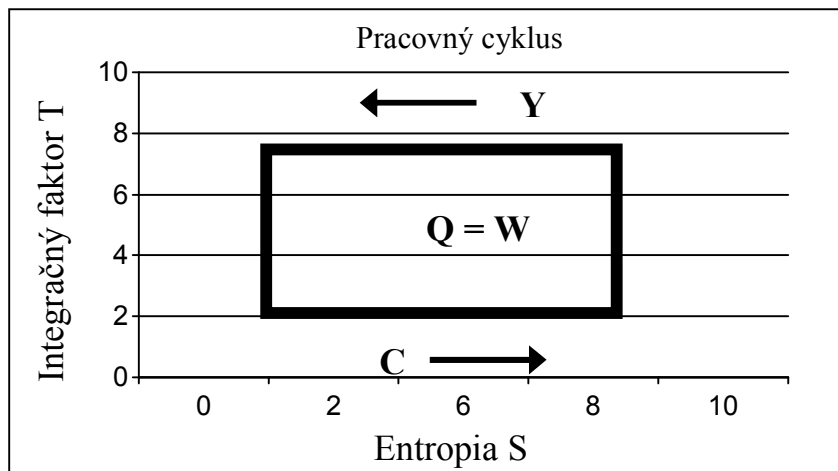
3.9 Carnotove cykly

Cyklická práca motora vedie ku Carnotovmu cyklu a môže byť vypočítaná uzavretým integrálom

$$-\oint \delta W = -\oint (dY - TdS) = \oint \delta Q = Q = \Delta T \Delta S \quad (3.12)$$

V motore sa teplo (Q) mení na prácu (W), v tepelnom čerpadle sa práca (W) mení na teplo (Q). Stroje ako sú motory a tepelné čerpadlá vždy vyžadujú alebo vytvárajú dve rozdielne teploty (T): vo vnútri motora je horúco, ale vonkajšok musí byť chladený, chladnička je vo vnútri studená a zvonka má izbovú teplotu. Tento teplotný rozdiel je nevyhnutný pre chod takýchto strojov. Keby sme dvere chladničky nechali otvorené, nefungovala by.

Obdobne, pracovná sila, firma a obchod vyžadujú alebo vytvárajú dve rôzne cenové úrovne alebo životné úrovne (T), náklady musia byť nižšie než príjem. Ak sa náklady a príjem rovnajú, spoločnosť alebo domácnosť nemôže fungovať. Obr. 3.6 ukazuje Carnotov cyklus a korešponduje s peňažným cyklom na obr. 3.2.



Obr. 3.6 Carnotov proces motora v T – S diagrame. Energia je zhromaždená pri vysokej teplote zo spaľovacieho tepla (v Y) a je rozptýlená splodinami do studeného vzduchu (v C). Tento proces korešponduje s peňažným cyklom z obr. 3.2: V Y je veľký obnos peňazí zozbieraný od zákazníkov. V C je malý obnos peňazí rozdelený medzi robotníkov za výrobu tovarov.

3.10 Produkčný cyklus

Uvažujme, že produkcia prebieha v chudobnej krajine. V produkčnom procese určitého výrobku (C na obr.6) jeho komponenty nemenia svoju hodnotu, t.j. $Y = Y_0$,

$$\delta W = dY - T dS = - T dS \quad (3.13 a)$$

$$W = - T \Delta S = - T \Delta \ln P \quad (3.13 b)$$

Produkcia je ekvivalentná so znižovaním entropie ($\Delta S = \Delta \ln P$) komponentov. Hodnota (Y) materiálu ostáva konštantná v produkčnom procese. Pre lepšiu názornosť uvediem malý príklad: Auto je vyrobené z mnohých súčiastok, ktoré do seba zapadajú. Pred výrobou môžeme súčiastky pospájať veľkým množstvom spôsobov, počet možností a teda aj entropia sú veľmi vysoké. Vo výrobnom procese musíme dodržiavať výrobné postupy avšak auto zložíme správne iba jedným jediným postupom. Počet možností je teraz $P = 1$, a entropia je veľmi malá, $\ln P = 0$.

V rovnici (3.13 a) sú platy (W) úmerné životnej úrovni (T): čím vyššia životná úroveň, tým vyššie náklady na prácu. V produkčnom procese sa bez ohľadu na to, v ktorej krajine je výrobok vyrobený, dodržiavajú rovnaké výrobné postupy (ΔS), pre krajinu s nízkou životnou úrovňou platí $W_1 = T_1 \Delta S$, pre krajinu s vysokou životnou úrovňou zase $W_2 = T_2 \Delta S$.

V produkčnom procese sú tovary zhromažďované a peniaze rozdeľované medzi robotníkov. Vysoká produkcia vedie k nízkej hladine nezamestnanosti v chudobnej krajine.

Import z chudobnej krajiny do bohatej nemení entropiu komponentov, teda import je vlastne práca pri konštantnej entropii (S_0),

$$\delta W = dY - T d S_0 = dY \quad (3.14 a)$$

$$W = \Delta Y \quad (3.15 b)$$

Import je ekvivalentný so zhromažďovaním tovarov a rozdeľovaním peňazí medzi dvomi úrovňami príjmov Y . Import tovarov robí chudobnú krajinu bohatšou a bohatú krajinu chudobnejšou. Import tovarov do bohatej krajiny zároveň predstavuje export pracovnej sily a zvyšuje nezamestnanosť v bohatej krajine.

Následný predaj tovarov v bohatej krajine je ekvivalentný s distribúciou tovarov a zhromažďovaním kapitálu od zákazníkov s vysokou úrovňou príjmov (Y na obr. 3.6).

Export z bohatej krajiny do chudobnej nemení hodnotu produktu. Exportom tovarov sa zbiera kapitál z chudobnej krajiny, tá sa tak stáva ešte chudobnejšou a bohatá bohatšou.

Výsledkom produkčného cyklu je zisk, ktorý je prerozdelený medzi oboma ekonomikami, dôsledkom čoho je ekonomický rast, t.j. zvyšovanie životnej úrovne v oboch krajinách. Pri konštantnej výnosnosti (účinnosti) produkčného cyklu je ekonomický rast exponenciálny, čoho dôkazom je exponenciálny rast HDP mnohých krajín sveta v 20. storočí.

4. Aplikácie teoretických poznatkov na reálne dáta

V diplomovej práci sme sa venovali štúdiu rôznych oblastí ekonómie, v ktorých boli pozorované určité zákonitosti, ktoré poznáme najmä z fyziky. Zamerali sme sa na rozdelenie príjmov a ekonomický rast (rast HDP).

Konkrétne sme skúmali rozdelenie príjmov domácností v Slovenskej republike, pričom sme sa pozreli aj na časový vývoj rozdelenia príjmov domácností na Slovensku ako súčasti vtedajšieho Československa v druhej polovici 20. storočia. Teoretické poznatky sme aplikovali aj pre príjmy v Rakúsku a Českej republike.

Rast HDP sme analyzovali pre krajiny USA, Rakúsko, Nemecko, Slovensko, Česká republika, Maďarsko a Poľsko.

V poslednej časti tejto kapitoly sa práca venuje rozdeleniu HDP a HDP na hlavu krajín sveta.

Všetky analýzy a regresie boli vykonané v programe MS Excel.

4.1 Rozdelenie príjmov

Základnú stavebnú jednotkou ekonomických systémov predstavujú jednotlivci, preto jednou z hlavných oblastí, ktorými sa výskumné práce z oblasti ekonofyziky zaoberajú, je štúdium príjmov jednotlivcov. My sme sa snažili na analýzu zohnať dáta o príjmoch jednotlivcov z nášho regiónu, bohužiaľ na Slovensku sa údaje o príjmoch jednotlivcov nezverejňujú a preto sme sa ich štúdiom v našom prostredí nezaoberali, podarilo sa nám

zohnať príjmy jednotlivcov v Rakúsku, na ktorých sme overovali platnosť teoretických poznatkov.

Domácnosti tiež predstavujú akési ekonomické subjekty, ktoré sú súčasťou systému a aktívne sa podieľajú na dianí v ňom. Preto predpokladáme, že aj domácnosti by sa mohli správať podľa určitých zákonitostí platných vo fyzikálnych systémoch. Štúdiom príjmov domácností sme sa zaoberali v Slovenskej a Českej republike.

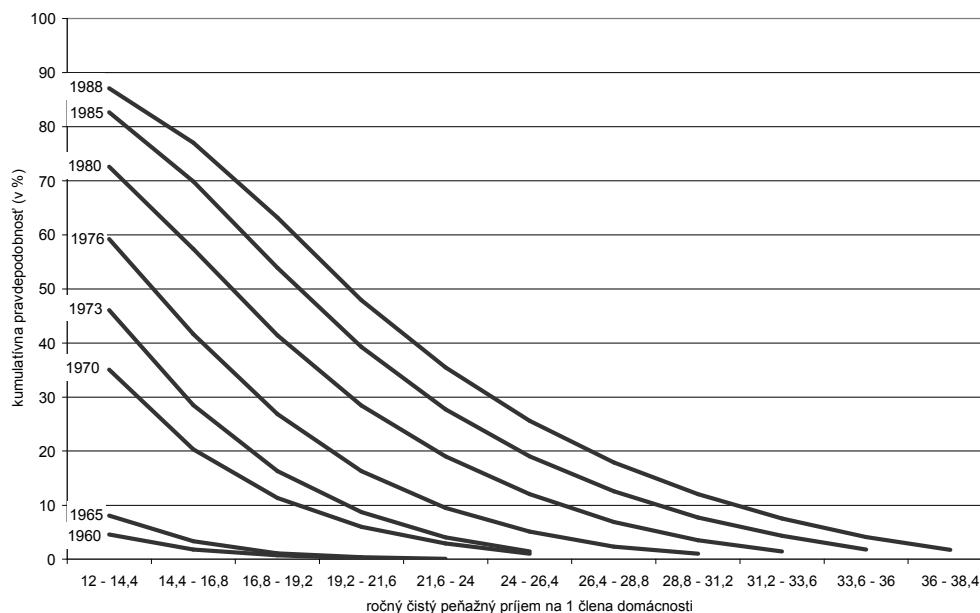
4.1.1 Rozdelenie príjmov domácností v Slovenskej republike v rokoch 1960 až 1988

V práci sme chceli preskúmať vývoj príjmov aj z historického hľadiska. Bohužiaľ zohnať dáta z našej histórie nie je jednoduché a tak sme použili dáta, ktorých množstvo nie je štatisticky veľmi významné, ale na priblíženie a jednoduché analýzy postačujúce, a tak sme sa ich predsalen rozhodli použiť. [12] Výsledky sumárne znázorňuje obr. 4.1, dáta sú v tvare kumulatívnej pravdepodobnostnej hustotovej funkcie (presnejšie kumulatívnej relatívnej početnosti), ktorej hodnota na y-ovej osi vyjadruje percento domácností, ktorých príjem je väčší než hodnota na x-ovej osi. Na analýzu sme nepoužili prvý ani posledný príjmový interval, nakoľko počet domácností v prvom intervale (0-12 tis. Kčs) je nepomerne väčší než v susednom intervale a pri poslednom (v každom roku bol tento interval rôzny) absentuje horné ohraničenie intervalu.

Z obrázka je zrejmé, že v sledovanom období nastával postupne rast životnej úrovne, nakoľko sa zvyšoval počet domácností, ktoré mali príjem väčší než hodnoty jednotlivých príjmových intervalov. Zároveň sa postupom času zmenšoval sklon krivky popisujúcej rozdelenie príjmov, čo značí, že sa znižovala nerovnomernosť rozdelenia príjmov. Tento moment približuje

tabuľka 1, v ktorej sú uvedené koeficienty exponenciálnej rovnice, ktorá aproximuje príjmy domácností v jednotlivých rokoch, rovnica má všeobecný tvar

$$y = Ce^{-x/T} \quad (4.1)$$



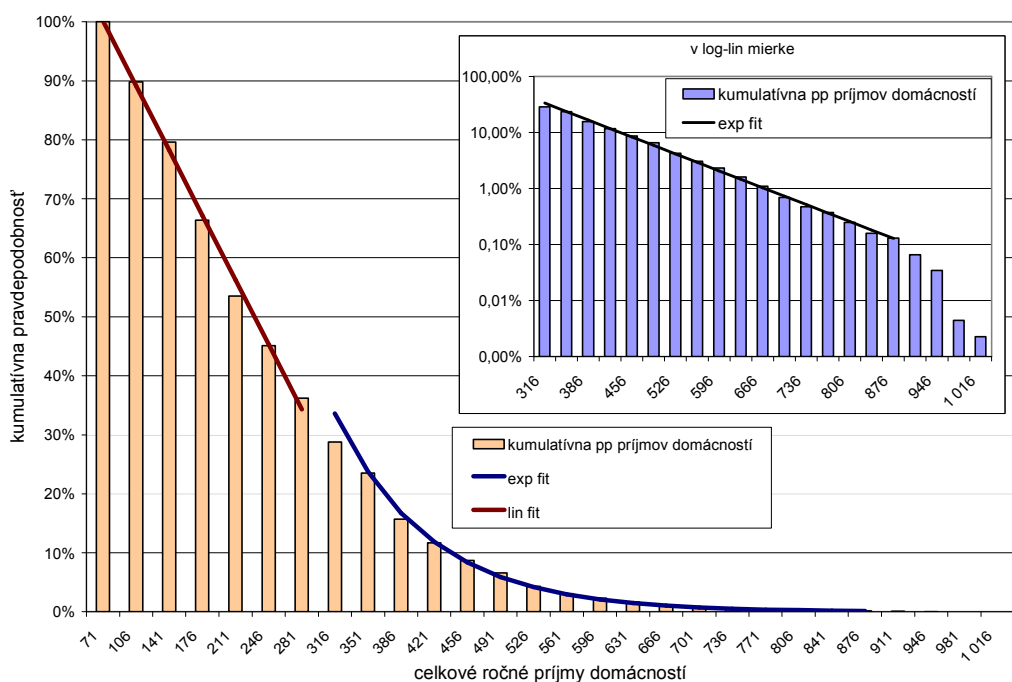
obr. 4.1 Vývoj peňažných príjmov v SR v rokoch 1960 až 1988 (údaje o roku sú v rámečkoch pri jednotlivých krivkách) v tvare kumulatívnej pravdepodobnosti. Na x-ovej osi sú znázornené rozsahy príjmových intervalov v tis. Kčs.

Rok \ koeficienty	C	1/T
1960	13,8	1,035
1965	27,172	1,089
1970	81,548	0,693
1973	110,91	0,685
1976	137,92	0,578
1980	162,71	0,477
1985	175,97	0,409
1988	190,07	0,375

4.1.2 Rozdelenie príjmov domácností v Slovenskej republike v roku 2002

Na Slovensku sa štúdiom príjmov domácností zaoberal Štatistický úrad Slovenskej republiky v projekte Mikrocenzus, ktorý bol uskutočnený už viackrát a síce v rokoch 1970, 1980, 1988, 1992, 1996 a 2002. My sme na skúmanie mali k dispozícii a použili sme dáta z jeho poslednej verzie (2002). [13] Predmetom nášho skúmania boli celkové čisté peňažné príjmy domácností bez ohľadu na celkový počet členov, počet aktívnych členov, či počet detí. Domácnosti sme rozdelili do 30 príjmových intervalov, pričom prvý a posledný sme kvôli skresleniu dát vynechali. Dáta sú na obr. 4.2 a sú v rovnakom tvare ako na obr. 4.1.

Ako už vidno z obrázka, hodnoty príjmov domácností v intervaloch od 36 do 281 tisíc Sk sú veľmi dobre aproximované lineárnou funkciou v tvare $y = - 0,00313 x + 1,169$ ($R^2=0,996$). Príjmy v rozmedzí 281 až 911 tisíc Sk veľmi dobre popisuje exponenciálna funkcia v tvare (4.1) s koeficientmi $C = 6,55$ a $T = 100,5$ ($R^2=0,998$). Bolo by určite zaujímavé zistiť, prečo sa rozdelenie príjmov mení z lineárneho na exponenciálne práve v okolo hodnoty 281 tisíc Sk, konkrétne, či to má nejaký ekonomický význam. Jednou z možností, ktorá je prinajmenšom zaujímavá je, že pri priemernom počte 3,21 osoby na domácnosť (domácnosti s aspoň 1 ekonomicky aktívnym členom) predstavuje hodnota 281 tis. pre celú domácnosť sumu približne 87 tis. na jednu osobu, ktorá sa približne rovná hodnote životného minima.

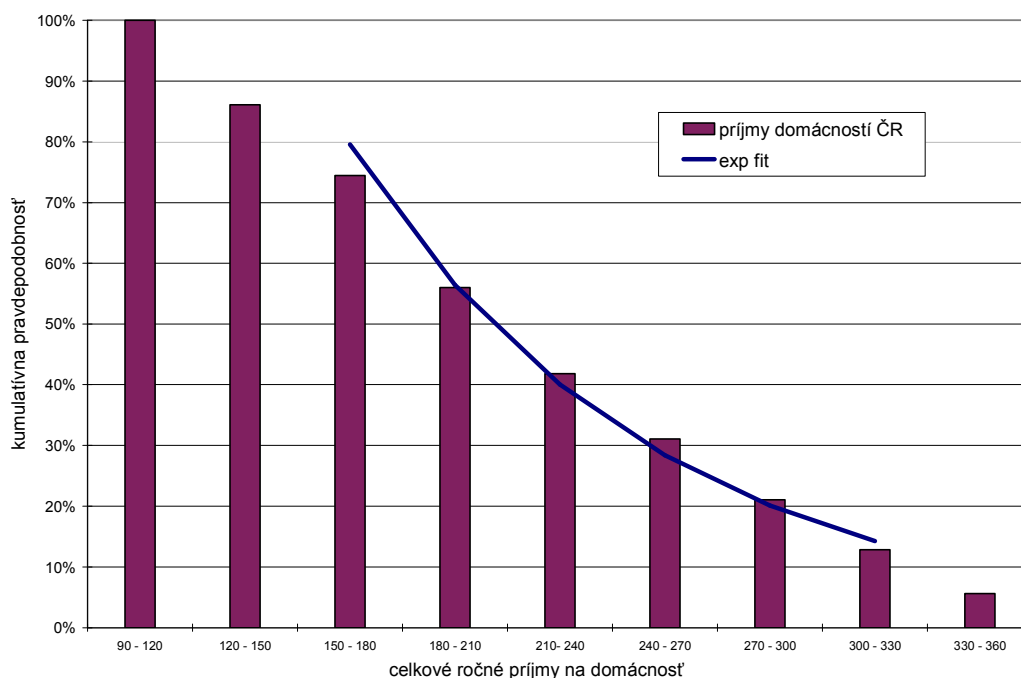


obr. 4.2 Kumulatívne pravdepodobnostné rozdelenie celkových ročných príjmov domácností aproximované lineárnou funkciou (lin fit), resp. exponenciálnou funkciou (exp fit – pre lepšiu názornosť vo vloženom grafe v log-lin mierke). Údaje na x-ovej osi sú v tis. Sk a predstavujú pravú hranicu príjmového intervalu.

4.1.3 Rozdelenie príjmov domácností v Českej republike

V rámci porovnania s okolitými krajinami sa najzaujímavejšie javí Česká republika. Český štatistický úrad, rovnako ako ŠÚSR, vykonal štúdiu príjmov domácností v roku 2002, údaje sú prepočítané na celú domácnosť a nie na jedného člena domácnosti. Nevýhodou získaných dát je ich hrubé zatriedenie do príjmových intervalov, domácnosti boli rozdelené do 11

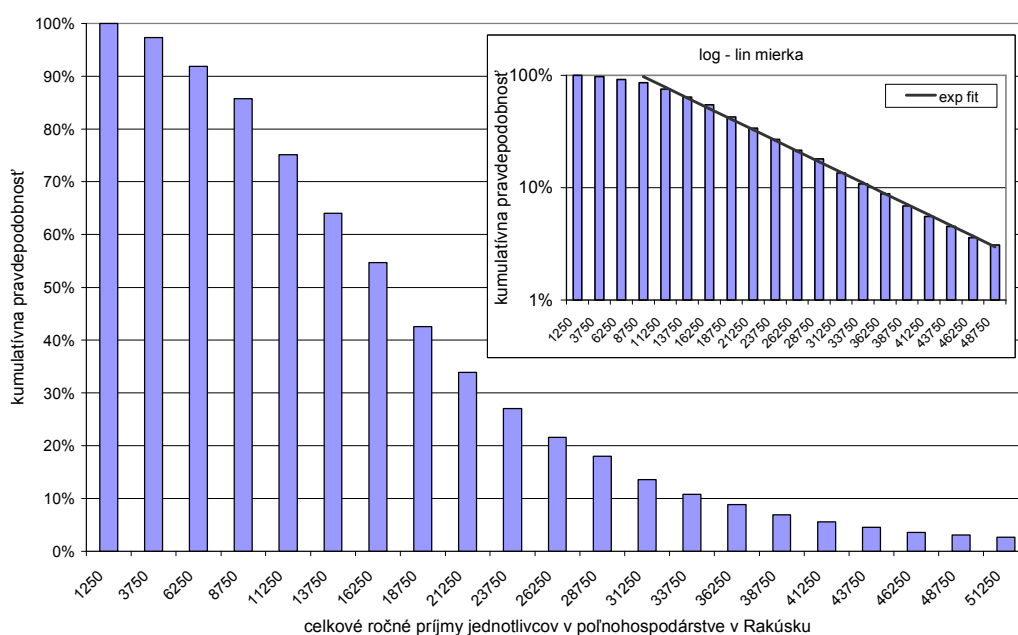
intervalov, pričom na analýzu je vhodných len vnútorných 9, pretože prvý a posledný už z vyššie uvedených príčin v časti 4.1.1 nevyhovuje. Aj na zvyšných dátach je však viditeľná platnosť exponenciálneho zákona, ako je zobrazené na obr. 4.3, kde sú dáta opäť v tvare kumulatívnej distribučnej funkcie. Príjmy z intervalu od 150 do 330 tisíc českých korún sú dobre aproximované exponenciálnou funkciou (4.1), pričom jej koeficienty sú $C=5,27$ a $T=87,295$ ($R^2=0,99$).



obr. 4.3 Kumulatívne pravdepodobnostné rozdelenie celkových ročných príjmov domácností ČR aproximované exponenciálnou funkciou (exp fit). Údaje na x-ovej osi sú v tis. Kč a predstavujú rozsah príjmového intervalu.

4.1.4 Rozdelenie príjmov jednotlivcov v Rakúsku

Rakúsky štatistický úrad sa štúdiu príjmov jednotlivcov venuje dosť podrobne avšak nevýhodou ponúkaných dát je ich hrubé rozdelenie do 10 príjmových intervalov. Jedinou oblasťou, kde je toto rozdelenie jemnejšie, bolo priemyselné odvetvie poľnohospodárstva, ktoré sme využili na analýzu.



Obr. 4.4 Kumulatívne pravdepodobnostné rozdelenie celkových ročných príjmov jednotlivcov v poľnohospodárstve v Rakúsku v lin–lin mierke (veľký obrázok), resp. v log–lin mierke aproximované exponenciálnou funkciou (vložený obrázok). Údaje na x-ovej osi sú v EUR a predstavujú priemernú hodnotu príslušného príjmového intervalu.

Údaje boli rozdelené do 21 príjmových intervalov o šírke 2500 EUR. Horný interval (nad 50000 EUR) sme vynechali kvôli nepomerne väčšiemu počtu jednotlivcov v ňom, čo bolo spôsobené absenciou horného ohraničenia intervalu.

Dáta sú zobrazené na obr. 4.4 v tvare kumulatívnej distribučnej funkcie. Ako vidno, aj na týchto dátach sa opäť prejavila platnosť Boltzmannovho – Gibbsovho zákona, presnejšie pre príjmy nad 7500 EUR, ktoré dobre popisuje exponenciálna rovnica v tvare (4.1) s koeficientmi $C=2,08$ a $T=11482$ ($R^2=0,998$).

4.2 Rast HDP

Podľa teoretických poznatkov o využití termodynamických konceptoch v ekonómii, by sa ekonomika krajiny, ktorá je súčasťou produkčného cyklu, mala správať podľa určitých zákonitostí. Sila ekonomiky (vo forme životnej úrovne alebo hrubého domáceho produktu) by mala sledovať trend exponenciálneho rastu. Či je tomu naozaj tak aj v skutočnosti, sme zisťovali na vývoji HDP.

Dáta sme čerpali z databázového zdroja Medzinárodného peňažného fondu (IMF – International Monetary Fund) a to publikácie v elektronickej forme s názvom Medzinárodné finančné štatistiky (IFS – International Financial Statistics). [14]

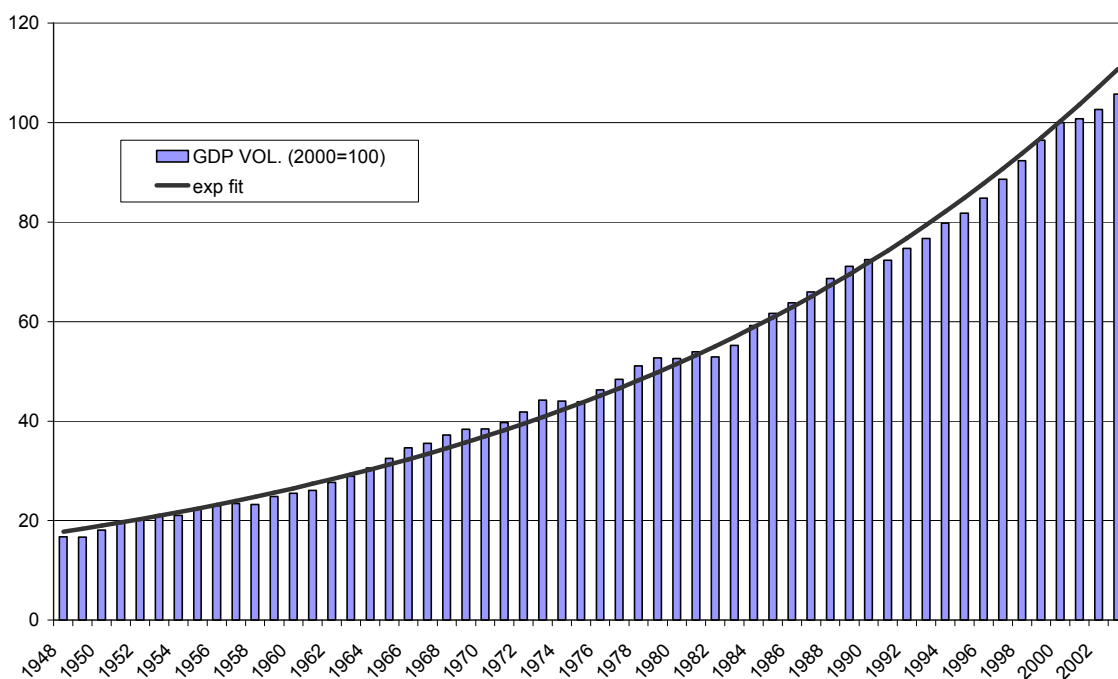
4.2.1 Rast HDP v USA

Ekonomika USA je vôbec najsilnejšou na svete, pričom jej sila vyjadrená v hodnote hrubého domáceho produktu je asi 2,5 krát väčšia než

Japonska, ktoré má 2. najvyšší hrubý domáci produkt na svete. Preto sme sa rozhodli preskúmať práve jej historický vývoj.

Skúmaný časový rad predstavuje hodnoty hrubého domáceho produktu v stálych cenách, pričom hodnota v roku 2000 sa berie ako základná a má hodnotu 100. Sledované časové obdobie je od roku 1948 až do roku 2003.

Údaje sú znázornené na obr. 4.4 a potvrdzujú, že HDP Spojených štátov amerických skutočne zaznamenával od polovice 20. storočia exponenciálny rast. Dáta sú preložené exponenciálnou krivkou $y = 17,177e^{0,0333x}$ ($R^2=0,995$). Z hodnôt parametrov tejto funkcie ľahko zistíme, že priemerný rast ekonomiky USA bol počas sledovaného obdobia 3,33%.

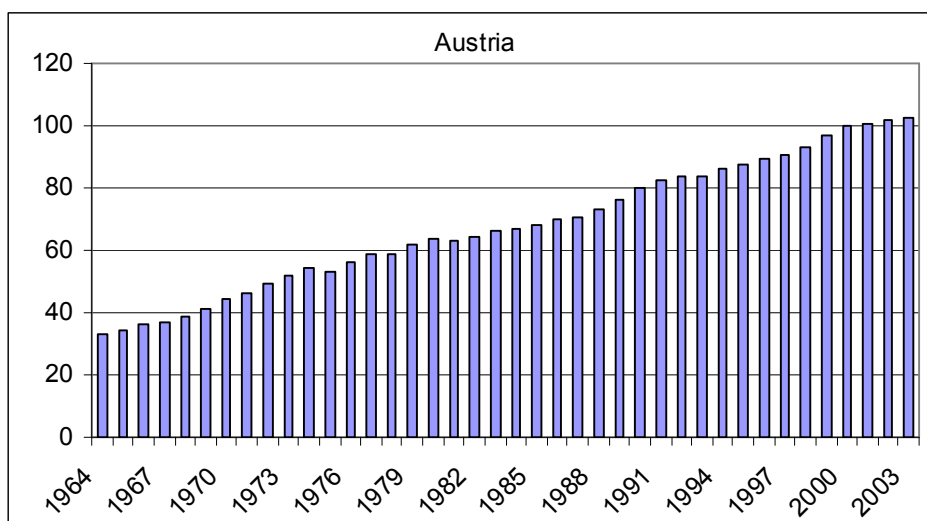


Obr. 4.5 vývoj HDP v stálych cenách v USA v rokoch 1948-2003. Údaje na y-ovej osi sú v %, hodnota v roku 2000 predstavuje 100%. Dáta sú preložené exponenciálnou krivkou (exp fit)

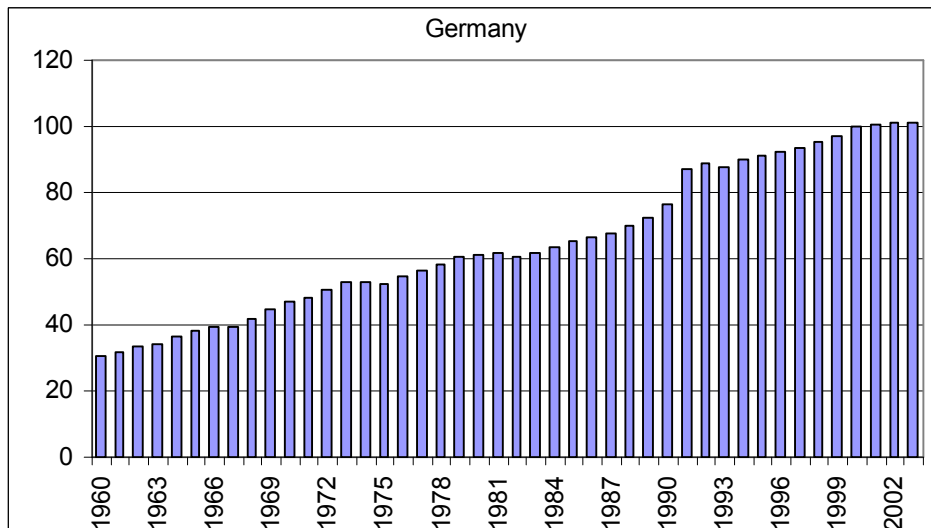
4.2.2 Rast HDP v okolitých krajinách a na Slovensku

V tejto časti sme upriamili našu pozornosť na rast hrubého domáceho produktu krajín nášho regiónu a síce Slovenskej republiky, Českej republiky, Rakúska, Maďarska, Poľska a Nemecka.

Najskôr sa venujeme vývoju v Rakúsku a Nemecku (obr. 4.6, 4.7). Rast ekonomík oboch krajín je exponenciálny avšak tento rast nie je rovnaký počas celého sledovaného obdobia. Jednotlivé etapy sme preložili exponenciálnou krivkou v tvare $y(t)=Ce^{Rt}$, kde t predstavuje čas a R rýchlosť rastu. V ďalšom skúmaní budeme analyzovať a používať na porovnanie parameter R . V rýchlosti rastu nastávali zmeny počas rokov, kedy ekonomiky zažívali recesiú a po nich sa trend rastu znížil. Pre Rakúsko bol jediným takýmto zlomovým rokom rok 1975. Do tohto obdobia bol rast HDP na hladine 5,17%, odvtedy sa rast v priemere viac ako o polovicu spomalil, ale až do roku 2003 sa udržal na úrovni 2,31%. V Nemecku v rokoch 1960 až 1975 bol medziročný rast HDP v priemere 4,11%, potom do roku 1989 bol zaznamenaný rast 2,06%. Po páde „železnej opony“ nastal prudký medziročný nárast HDP o viac než 13%, po stabilizovaní rástla nemecká ekonomika od roku 1991 až doteraz na úrovni 1,41%.



Obr. 4.6 vývoj HDP v stálych cenách v Rakúsku v rokoch 1964 až 2003. Údaje na y-ovej osi sú v %, hodnota v roku 2000 = 100%.



Obr. 4.7 vývoj HDP v stálych cenách v Nemecku v rokoch 1960 až 2003. Údaje na y-ovej osi sú v %, hodnota v roku 2000 = 100%.

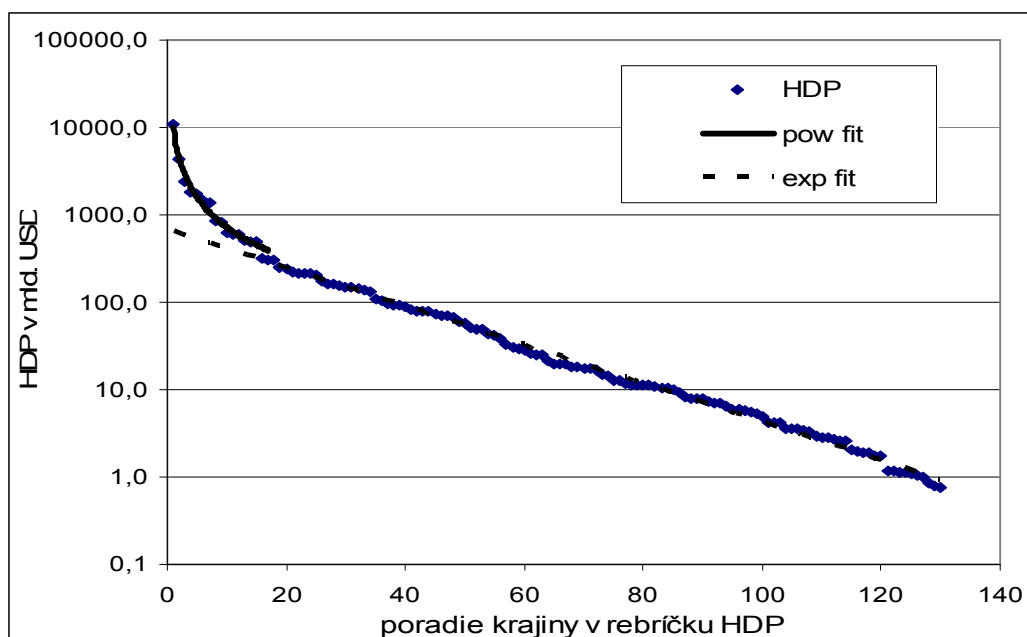
Teraz si ešte povedzme pár slov k rastu ekonomík Slovenska, Českej republiky, Maďarska a Poľska, teda krajín V4. Ich porovnanie je bezpochyby zaujímavé. U všetkých sme sledovali vývoj v rovnakom časovom rozmedzí a to v rokoch 1993 až 2003 a porovnávali sme rast HDP v stálych cenách. Keďže sa jedná o transformujúce sa ekonomiky, exponenciálny trend rastu nie je tak dobre čitateľný ako u stabilných ekonomík (exponenciála popisuje dáta s R^2 na úrovni 96-97%), avšak v rámci porovnania je táto aproximácia postačujúca. Najvýraznejší rast zaznamenávalo Poľsko a to na úrovni 5,0%, za ním nasledovalo Slovensko s 3,96% a Maďarsko s 3,64%. Spomedzi krajín V4 mala najpomalší rast HDP Česká republika v priemere 2,45%.

4.3 Rozdelenie HDP a HDP na hlavu krajín sveta

Pri práci s dátami (HDP, HDP na hlavu) pre všetky dostupné krajiny sveta sme objavili zopár zaujímavých závislostí. Pracovali sme so vzorkou 132 krajín sveta, nakoľko u niektorých krajinách neboli k dispozícii údaje potrebné na výpočet HDP na hlavu, resp. údaje potrebné na prepočet hodnôt v jednotlivých domácich menách na hodnoty v USD.

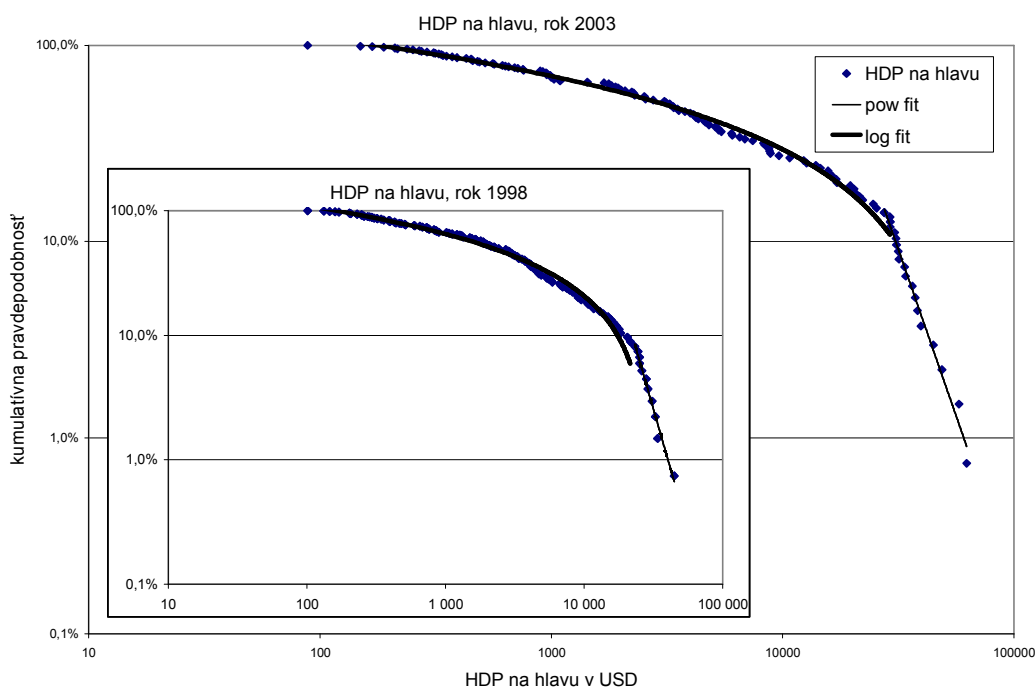
Keď sa pozrieme na závislosť výšky HDP od poradia krajiny v rebríčku výšky HDP¹, zistíme, že táto závislosť je pre väčšinu krajín exponenciálna, no pre 10% najvýkonnejších ekonomík sveta platí mocninový zákon (obr. 4.8).

¹ V roku 2003 spomedzi dostupných krajín sveta bola na 1.mieste USA s HDP vo výške 11004 mld. USD a Slovensko bolo na 57. mieste s HDP 32,5 mld. USD.



Obr. 4.8 HDP krajín sveta v závislosti od poradia krajiny v rebríčku výšky HDP, jednotlivé body grafu predstavujú dvojicu [poradie krajiny; HDP]. Údaje sú z roku 2003. Dáta sú preložené exponenciálnou (exp fit), resp. mocninovou krivkou (pow fit). Graf je v log-lin mierke.

Podobná závislosť platí aj pre výšku HDP na hlavu v závislosti od poradia v rebríčku HDP na hlavu. Zmenením závislosti z obr. 4.8 do tvaru kumulatívnej distribučnej funkcie, ktorá vyjadruje percento krajín s HDP na hlavu vyšším než hodnota na x-ovej osi (obr. 4.9) logicky dostaneme, že sa pre spodných 90% závislosť zmení na logaritmickú a pre top 10% stále platí mocninový zákon..



Obr. 4.9 Kumulatívne pravdepodobnostné rozdelenie HDP na hlavu v rokoch 2003 (vonkajší obrázok) a 1998 (vložený obrázok). Dáta sú preložené logaritmicou (log fit), resp. mocninovou funkciou (pow fit). Grafy sú v log-log mierke.

Rovnica logaritmickej krivky, ktorá aproximuje dáta má tvar $y = -0,1927 \ln(x) + 1,9813$ (rok 1998, $R^2=0,993$), resp. $y = -0,1747 \ln(x) + 1,9043$ (rok 2003, $R^2=0,994$). Koeficient α funkcie v tvare (2.10), ktorou sú vybraté dáta preložené sa zmenil z 2,89 (rok 1998) na hodnotu 2,40 (rok 2003). Teda môžeme povedať, že sklon oboch aproximujúcich kriviek sa počas tohto obdobia znížil, t.j. zmenšila sa nerovnomernosť rozdelenia HDP na hlavu pre krajiny sveta. Pravdepodobne to je spôsobené tým, že čím je krajina vyspelejšia, resp. rozvinutejšia so stabilizovanejšou ekonomikou, tým pomalší rast HDP zaznamenávala.

Z údajov o HDP na hlavu krajín sveta v rokoch 1998 a 2003 sa dajú vyčítať pre nás veľmi zaujímavé porovnania so susednými krajinami (Rakúsko, Česká republika, Poľsko, Maďarsko a Ukrajina) a niektorými krajinami, ktoré sú novými členmi Európskej únie (Estónsko, Lotyšsko, Litva).

Najskôr spomeňme údaje o Slovensku, aby sme získali predstavu, v akých úrovniach sa porovnanie nachádza. V roku 1998 bol náš HDP na 1 obyvateľa 4118 USD a v rebríčku krajín, ktoré sú v našom porovnaní mu patrila 51. priečka. Do roku 2003 sme sa posunuli o 2 priečky vyššie s HDP na 1 obyvateľa 6019 USD.

Porovnávať Rakúsko a Ukrajinu so všetkými spomenutými krajinami nemá veľmi zmysel, nakoľko HDP na hlavu Rakúska (31 028 USD v roku 2003) vysoko prevyšuje ostatné krajiny a v tomto ukazovateli, ktorý hovorí o vyspelosti ekonomiky, patrí medzi popredné krajiny sveta a naopak Ukrajina (829 USD v roku 2003) sa nachádza na opačnej strane a patrila jej 97. (1998), resp. 99. (2003) priečka medzi sledovanými krajinami.

V našom regióne si drží prvenstvo Česká republika (8770 USD v 2003), avšak rozdiel medzi ňou a Slovenskom sa zmenšil z 13 priečok na 10 (38. v 98, 39. v 03). Poľsko (5427 USD v 2003) v spomínanom rebríčku tesne nasledovalo Slovensko a v oboch rokoch bolo o priečku nižšie. Maďarsko (8384 USD v 2003) zaznamenalo posun o 4 priečky na 42. miesto.

Zaujímavou skupinou sú pobaltské štáty, ktoré zaznamenali výrazný posun vpred. Estónsko (6862 USD v 2003) sa posunulo o 8 priečok pričom prebehlo Slovensko aj Poľsko a skončilo na 45. mieste. Litva (5289 USD v 2003) poskočila o 11 miest a nasledovala hneď za Slovenskom a Poľskom. Najvýraznejší posun zaznamenalo Lotyšsko (4807 USD v 2003), ktoré sa posunom o 14 priečok dostalo na 53. pozíciu.

5. Záver

Cieľom diplomovej práce bolo priblížiť mladú vedeckú disciplínu ekonofyziku, ktorá aplikuje fyzikálne princípy na ekonómiu a v súčasnosti zaznamenáva prudký rozvoj. Práca nepopisuje všetky aplikácie, ktorými sa ekonofyzika zaoberá, ale venuje sa iba niekoľkým, pretože rozsah tejto modernej oblasti je natoľko široký, že ďaleko prevyšuje plánovaný záber tejto práce. Tá sa najskôr venuje jednému z hlavných možných využití fyzikálnych princípov v ekonomickej teórii a to rozdeleniu príjmov, ktoré je popisované na základe fyzikálneho princípu rozdelenia energie. Väčšia časť teoretickej časti je venovaná jednému z najnovších prístupov, ktorý využíva princípy štatistickej termodynamiky, na základe ktorých popisuje príčiny rastu ekonomiky ako dôsledku produkčného cyklu.

Praktická časť potvrdila „všadeprítomnosť“ rôznych fyzikálnych zákonov v rôznych oblastiach ekonomického sveta a to exponenciálneho, mocninového i logaritmického. Práca sa zaoberala štúdiom nasledovných ekonomických ukazovateľov

Rozdelenie príjmov domácností SR v rokoch 1960 až 1988

Rozdelenie príjmov domácností SR v roku 2002

Rozdelenie príjmov domácností ČR v roku 2002

Rozdelenie príjmov jednotlivcov v Rakúsku

Rast HDP v rôznych krajinách sveta

Rozdelenie HDP a HDP na hlavu krajín sveta

Exponenciálny zákon dobre popisoval rozdelenie príjmov pre väčšiu časť sledovanej populácie vo viacerých krajinách, ale aj rast HDP rôznych štátov sveta. Pri sledovaní rastu HDP bol jasne badateľný vplyv rôznych svetových kríz (vojnové, ropné,...) alebo aj lokálnych kríz (pád „železnej opony“). Mocninovou a logaritmickou funkciou sa veľmi dobre dalo aproximovať

rozdelenie HDP a HDP na hlavu všetkých krajín sveta. Zaujímavé je, že pozorované závislosti pre rôzne druhy dát nie sú stále, t.j. že sa nedajú popísať jednou jednoduchou mocninovou (exponenciálnou) závislosťou, ale pri určitej hodnote sa závislosť mení na inú (z exponenciálnej na mocninovú, z logaritmickú na mocninovú alebo z lineárnej na exponenciálnu). Presné pozadie tohto javu nie je známe a vyžadovalo by si ďalšie skúmanie a podrobnejšiu analýzu. Ak by sme chceli popísať závislosti pre celý rozsah dát len jednou krivkou, museli by sme použiť zložitejšiu funkciu. Pre zaujímavosť uvádzame tvary polynomickej funkcie 3. rádu, ktorou sme preložili údaje o príjmoch domácností a jednotlivcov:

$$y = -0,0001 x^3 + 0,0077 x^2 - 0,1669 x + 1,1957 \text{ (domácnosti SR v r. 2002)}$$

$$y = 0,0009 x^3 - 0,0077 x^2 - 0,1246 x + 1,1359 \text{ (domácnosti ČR v r. 2002)}$$

$$y = 0,0001 x^3 - 0,0002 x^2 - 0,0924 x + 1,1601 \text{ (jednotlivci Rak. v r. 2002)}$$

Získané výsledky považujeme za príspevok do diskusie o preberaných témach, zároveň odhaľujú možnú perspektívu a nastoľujú otázky, ktoré budú zaujímavé a aktuálne pre štúdium v ďalších prácach.

6. Použitá literatúra

- [1] Yougui Wang, Jinshan Wu, Zengru Di: *Physics of Econophysics*, arXiv:cond-mat/0401025 v1, 2004
- [2] Z. Burda, J. Jurkiewicz, M. A. Nowak: *Is Econophysics a Solid Science?*, arXiv:cond-mat/0301096 v1, 2003
- [3] Nicola De Liso, Giovanni Filatrella: *Econophysics: The emergence of a new field?*, 2002
- [4] Martin Schaden: *Quantum Finance*, arXiv:physics/0203006 v2, 2002
- [5] Zeqian Chen: *Quantum Finance: The Finite Dimensional Case*, arXiv:quant-ph/0112158 v2, 2002
- [6] R. N. Mantegna, H. E. Stanley: *Introduction to Econophysics Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, 2000
- [7] Daniel Ševčovič: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, FMFI UK Bratislava, 2001
- [8] Adrian A. Dragulescu, Victor M. Yakovenko: *Applications of physics to economics and finance: money, income, wealth, and stock market*, arXiv:cond-mat/0307341, 2002
- [9] Wataru Souma: *Physics of Personal Income*, arXiv:cond-mat/0202388 v1, 2002
- [10] Jürgen Mimkens: *Concepts of Thermodynamics in Economic Systems*, www.rrojasdatabank.org/thermo00.htm, 2004

- [11] Alastair D. Jenkins: *Thermodynamics and economics*, arXiv:cond-mat/0503308, 2005
- [12] Federální statistický úřad: *Statistické údaje, které jsme nesměli znát*, SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1990
- [13] Štatistický úrad Slovenskej republiky: *Mikrocenzus 2003, I.diel, Údaje o príjmoch domácností*, 2004
- [14] International Monetary Fund: *International Financial Statistics*, 2004
- [15] Jean-Philippe Bouchaud: *Power-laws in economy and finance: some ideas from physics*, arXiv:cond-mat/0008103 v1, 2000
- [16] Adrian A. Dragulescu, Victor M. Yakovenko: *Research in Econophysics*, arXiv:cond-mat/0302270, 2003
- [17] Kirill Ilinski: *Physics of Finance*, arXiv:hep-th/9710148 v1, 1997
- [18] Charles Kittel: *Thermal physics*, Wiley, 1975
- [19] V. Obetková, A. Mamrillová, A. Košinárová: *Teoretická mechanika*, ALFA, 1990
- [20] Bertrand M. Roehner: *A bridge between liquids and socio-economic systems: the key role of interaction strengths*, arXiv:cond-mat/0405309 v1, 2004
- [21] Dietrich Stauffer: *Introduction to Statistical Physics outside Physics*, arXiv:cond-mat/0310037 v1, 2003
- [22] Internetové zdroje: www.arxiv.org, www.santafe.edu, www.unifr.ch/econophysics