FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2005

ROBERT MENKYNA

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky

CGE modely a vstupno-výstupné modely

Diplomová práca

Diplomant: Robert Menkyna

Vedúci diplomovej práce: Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne len s využitím teoretických vedomostí a s použitím uvedenej literatúry.

Robert Menkyna

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce Prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za cenné rady a pripomienky pri tvorbe tejto práce. Zároveň sa chcem poďakovať svojim rodičom za podporu počas štúdia na vysokej škole.

Obsah

Úvod

Zostavenie kvalitného ekonometrického modelu si vyžaduje dáta zozbierané za dlhé časové obdobie. Politické zmeny v niektorých regiónoch spôsobili, že tieto dáta sú buď nekonzistentné alebo ani neexistujú. Táto skutočnosť bráni tvorbe ekonometrických kvalitných modelov. Naopak, dátová základňa pre modely všeobecnej ekonomickej rovnováhy (CGE) pozostáva z SAM matice, ktorá čerpá údaje z komoditno-odvetvových tabuliek a národných účtov za jedno obdobie. Vo vedeckých publikáciách nájdeme praktické príklady širokého použitia CGE modelov. Avšak človek, ktorý začína pracovať s CGE modelmi sa stretáva s problémom nedostatočného množstva ucelenej literatúry o problematike zostavovania CGE modelov. Nasledujúca práca má za cieľ predstaviť CGE modely a priblížiť čitateľovi ich tvorbu.

Práca pozostáva zo siedmich kapitol. V prvej je uvedený produkčný sytém opísaný input-output tabuľkou. V druhej je popísané chovanie sa výrobcov a spotrebiteľov na trhu podľa mikroekonomickej teórie. V tretej kapitole je uvedený základný CGE model a ukázaná analógia medzi CGE modelom a vstupno-výstupným modelom. Kalibrácii tohoto modelu sa venuje štvrtá kapitola. V piatej je ukázané jeho rozšírenie o zahraničie, vládu, kapitál a investície. Tá istá ekonomika je modelovaná ešte raz v šiestej kapitole, ale na modelovanie zahraničného obchodu bol použitý Armingtonov prístup. Rozličné možnosti uzavretia modelu sú ukázané v siedmej kapitole. V prílhoe sú uvedené dopytové funkcie pri rôznych produkcných a úžitkových funkciách, rovnice posledného modelu a jednosektorový Johansenov model.

1 Produkčný systém: Input-output tabuľka.

1.1 Input-output matica.

Uvažujme produkčný systém uzevretej ekonomiky, v ktorej každé produkčné odvetvie produkuje jeden agregovaný produkt (tovar, službu). Ďalej predpokladajme že máme len jeden primárny vstup a to prácu a len jedného kúpcu finálneho výrobku. Všetky toky vo vnútri tejto ekonomiky budeme merať namiesto fyzických jednotiek v množtve peňazí. Takto sa nám vstupy prejavia ako náklady a a výstupy ako zdroj príjmov. Informácie o tokoch v ekonomike môžme vyjadriť pomocou input-output matice, ktorej stĺpce predstavujú vstupy a riadky výstupy jednotlivých účastníkov tejto ekonomiky. Input-output matica je v agregovanej forme. Nevystupujú v nej jednotlivý výrobcovia, ale agregované odvetvia. Bolo by asi nezrealizovateľné zostaviť input-output tabuľku, v ktorej by vystupovali jednotlivý výrobcovia. V praxi sa zostavujú tabuľky v agregovanej forme, kde výrobcovia so spoločnými charakteristikami vystupujú ako jeden reprezentatívny výrobca, ktorý vyrába jeden výrobok. Input-output maticu môžme vidieť v tabuľke 1

Tabuľka 1

	Produkcia (tovary a služby)	Konečné produkty	Spolu
Produkcia (tovary a služby)	$\mathbf{W}$	$\mathbf{e}$	$\mathbf{q}$
Primárne vstupy	$\mathbf{y}$	$\mathbf{0}$	μ
spolu	$\mathbf{q}$’	μ	

Popis jednotlivých symbolov:

- **W** - štvorcová matica vykazujúca toky produktov medzi jednotlivými produkčnými odvetviami; W_{jk} predstavuje množstvo výstupu sektora j použitého ako vstup sektorom k.
- **e** - stĺpcový vektor konečných výstupov odvetví (tovary a služby predané výrobcom konečnému spotrebiteľovi = domácnosti).
- **q** - stĺpcový vektor celkových výstupov odvetví, ktoré sa rovnajú hodnote celkových vstupov do odvetví.
- **y** - riadkový vektor nákladov na vstup primárneho faktora (práce).
- μ - skalár celkových nákladov na vstupy primárneho faktora v celej ekonomike, ktoré sú rovné celkovému výstupu.

Základné vzťahy medzi hodnotami v tabuľke možno vyjadriť troma rovnosťami. (van der Ploeg F. (1986))

1.2 3 rovnosti

Rovnosť kvantity. Z riadku produkcie odvetví vidíme že

$$\mathbf{q} = \mathbf{W}\mathbf{i} + \mathbf{e} \tag{1.1}$$

kde $\mathbf{i}$ znamená vektor $(1, 1, ..., 1)$. Takže celá produkcia sa spotrebúvava buď na ďalšiu produkciu alebo domácnosťou. Z tohto môžme vytvoriť obyčajnú maticu input-output koeficientov $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\hat{\mathbf{q}}^{-1}, \tag{1.2}$$

kde $\hat{\mathbf{q}}^{-1}$ znamena inverznú maticu k diagónalnej matici $diag(\mathbf{q})$. Dosadením vzťahu (1.1) do (1.2) dostávame

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{e} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{e}. \tag{1.3}$$

Rovnica cien. Tak isto ako riadky, môžeme sčítať aj stĺpce a musí platiť

$$\mathbf{q} = \mathbf{W}'\mathbf{i} + \mathbf{y} \tag{1.4}$$

Ak vektor primárneho vstupu na jednotku výstupu jednotlivých výrobných odvetví označíme $\mathbf{f}$, potom

$$\mathbf{f} = \hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{y}, \tag{1.5}$$

dosadením (1.2) a (1.5) do (1.4) a prenásobením výsledku maticou $\hat{\mathbf{q}}^{-1}$ dostávame

$$\mathbf{i} = \mathbf{A}'\mathbf{i} + \mathbf{f} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{p}, \tag{1.6}$$

kde $\mathbf{p}$ znamená vektor cien produktov. Prirodzene nám vyplýva,že ak si za jednotku množstva určíme množstvo jednotkovej ceny, potom všetky ceny sú 1.

Základná rovnosť. Keď dáme do kopy (1.3) a (1.6) môžeme vidieť, že

$$\mathbf{f}'\mathbf{q} = \mathbf{p}'(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{p}'\mathbf{e}, \tag{1.7}$$

t.j. celkový vstup primárneho faktora do ekonomiky sa rovná jej konečnému výstupu

2 Mikroekonomická teória

V predchádzajúcej kapitole sme si odvodili vzťahy, ktoré by mali platiť medzi hodnotami v input-output tabuľke. Uvedomme si, že čísla, ktoré vystupujú v tejto tabuľke vyjadrujú správanie sa jednotlivých subjektov (domácnosť a výrobcovia) na trhu (ich spotrebu jednotlivých statkov, výrobu, primárne vstupy, ...). Predpokladajme, že všetci hráči sa snažia správať racionálne (to znamená, že sa všetci snažia maximalizovať svoj zisk, prípadne úžitok) a na celom trhu je rovnováha. Dopyt sa rovná ponuke.

2.1 Teória firmy

Výrobcovia sú charakterizovaní pomocou technológie reprezentovanej pomocou produkčných funkcií, napríklad Cobb-Douglasových. [1] Takže produkcia výrobcov je:

$$X_i = z_i L_i^{\beta_i} \prod_j (x_{ji}^{\alpha_{ji}}); \beta_i + \sum_j (\alpha_{ji}) = 1. \tag{2.1}$$

Potom zisk i-teho výrobcu je:

$$\Pi(X_i, (L_i, x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni})) = p_i X_i - C_i, \tag{2.2}$$

kde

- X_i - celkový výstup i - tej komodity,
- x_{ji} - množstvo j - tej komodity domácej výroby použitej pri výrobe i - teho priemyslu,
- L_i - množstvo primárneho vstupu (práce) v i - tom priemysle,
- z_i - škálovacia konštanta,
- p_i - cena i-teho výrobku,

[1]Príklady iných produkčných funkcií, viď prílohu.

- ω - cena primárneho vstupu,
- $C_i = \omega L_i + \sum_j (p_j x_{ji})$ - nákladová funkcia i-teho výrobcu.

Racionálny výrobca sa podľa mikroekonomickej teórie snaží maximalizovať zisk. Je teda postavený pred problém, ktorý sa dá vyjadriť:

$$\max_{(L_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})} \Pi(X_i, (L_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})). \tag{2.3}$$

Úlohu maximalizácie zisku možno rozdeliť na dva stupne

- úlohu minimalizácie nákladov pri danej hladine výroby
- určenie hladiny, pri ktorej je príjem mínus náklady najväčší.

V prvom stupni hľadá výrobca pre dané X_i a $\mathbf{p}$ taký vstupný vektor $(L_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})$ aby mal čo najmenšie náklady. Rieši úlohu

$$arg \min_{(L_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})} C_i \tag{2.4}$$

pri ohraničení (2.1). Riešením tejto úlohy dostávame podmienenú dopytovú funkciu po vstupoch a primárnom faktore

$$l_i(\omega, \mathbf{p}) = \frac{L_i}{X_i} = (\frac{\beta_i}{\omega}) h_i(\omega, \mathbf{p}), \tag{2.5}$$

$$\frac{x_{ji}}{X_i} = \frac{\alpha_{ji}}{p_j} h_i(\omega, \mathbf{p}), \tag{2.6}$$

kde

$$h_i(\omega, \mathbf{p}) = z_i^{-1} (\frac{\omega}{\beta_i})^{\beta_i} \prod_j \{ (\frac{p_j}{\alpha_{ji}})^{\alpha_{ji}} \}. \tag{2.7}$$

V druhom stupni sa výrobca snaží nájsť taký objem výroby, aby bol zisk čo najväčší. Rieši úlohu

$$\arg \max_{X_i} (p_i X_i - X_i \omega \frac{\beta_i}{\omega} h_i - \sum_j p_j X_i \frac{\alpha_{ji} h_i}{p_j}) \tag{2.8}$$

Všimnime si teraz, že pri vyššie uvedenej C-B produkčnej funkcii sú dopytové funkcie po vstupoch lineárne závislé od objemu výroby.[2] Z tejto skutočnosti vyplýva aj lineárna

[2] Túto vlastnosť majú aj CES a Leontiefova produkčná funkcia, ako aj ich kombinácie vo forme vnorených produkčných funkcií

závislosť zisku od veľkosti výroby. A preto, keď sa ho snažíme maximalizovať v závislosti od veľkosti výroby, nastávajú tri prípady veľkosti zisku

$$\Pi_i = \begin{cases} 0 & \text{ak } \frac{\partial \Pi}{\partial X_i} < 0 \quad \text{a nevyrába nič,} \\ \infty & \text{ak } \frac{\partial \Pi_i}{\partial X_i} > 0 \quad \text{a vyrába nekonečne veľa,} \\ 0 & \text{ak } \frac{\partial \Pi_i}{\partial X_i} = 0 \quad \text{a vyrába ľubovoľné} X_i. \end{cases} \tag{2.9}$$

Ak teda má byť podmienka maxima zisku splnená pri konečnom nenulovom objeme produkcie X_i, musí platiť $\frac{\partial \Pi_i}{\partial X_i} = 0$, z čoho vyplýva

$$p_i = h_i, \tag{2.10}$$

čo súčasne značí nulový zisk.

Dajme si dokopy rovnice (2.6) a (2.10) a dostaneme optimálne vstupné koeficienty pre tovary používané v jednotlivých výrobách.

$$\bar{a}_{ji}(p_j, p_i) = \frac{x_{ji}}{X_i} = \frac{\alpha_{ji}}{p_j} p_i \tag{2.11}$$

2.2 Teória spotrebiteľa

Ďalej sa pozrime na racionálne správanie sa domácnosti. Tá spotrebúva jednotlivé tovary, ktoré sa nachádzajú na trhu tak, aby dosiahla pri danom rozpočtovom ohraničení najväčší úžitok. Uvažujme napríklad úžitkovú funkciu [3]

$$U = \prod_i D_i^{\varepsilon_i}, \qquad \sum_i \varepsilon_i = 1, \tag{2.12}$$

kde D_i je spotreba i-teho tovaru domácnosťou. Domácnosť nemôže pri nakupovaní tovarov prekročiť svoje rozpočtové ohraničenie. Takže ak jej príjem je Y, tak musí dodržať

$$Y = \mathbf{p}'\mathbf{D} \tag{2.13}$$

Riešením problému domácnosti dostávame dopyt domácnosti po i-tom tovare

$$D_i(\mathbf{p}, Y) = \frac{\epsilon_i Y}{p_i}. \tag{2.14}$$

Pozrime sa na mikroekonomickú teóriu a input-out put model a veličiny, ktoré v nich vystupujú. Môžeme si všimnúť, že e_i predstavuje to isté ako $D_i p_i$, W_{ij} sa zhoduje s $p_i x_{ij}$. y_i je rovné ωL_i a q_i je $p_i X_i$. Príjem domácnosti sa rovná súčtu miezd, ktoré domácnosť obdrží z jednotlivých produkcií. Takže Y je to isté ako μ z tabuľky.

[3] Pre príklad iných úžitkových funkcií, viď prílohu.

3 Zjednodušený CGE model

Rovnice (1.3),(1.6),(1.7) z input-output tabuľky nám vysvetľovali toky tovarov v ekonomike podľa input-output modelu. Tieto toky však vznikli až ako dôsledok racionálneho sa správania hráčov na trhu (maximalizovanie úžitku, minimalizácia nákladov).

3.1 Tri rovnice po novom

Prepíšme rovnice input-output modelu pomocou veličín z mikroekonomickej teórie. Rovnica (1.3) nadobúda formu

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{p}))^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{p}, Y), \tag{3.1}$$

kde matica $\bar{\mathbf{A}}$ pozostáva z koeficientov $\bar{a}_{ij}$. Vzťah medzi elementami matice A nám známej z input-output modelov a matice $\bar{A}$ môžeme vyjadriť využitím vzťahu (2.11) ako

$$a_{ji} = \frac{\bar{a}_{ji}(p_j, p_i)p_j}{p_i}. \tag{3.2}$$

Takže pokiaľ máme jednotkové ceny, tak tieto matice sú zhodné. Rovnicu (3.1) sa dá jednoducho interpretovať ako fakt, že celá výroba sa použije buď na ďalšiu výrobu alebo na pokrytie spotreby domácnosti.

Rovnica cien vyjadruje fakt, že výrobcovia vyrábajú s nulovým ziskom. [4] Celý výstup sa rovná nákladom na primárny faktor a nákladom na vstupy. V predchádzajúcej kapitole sme si odvodili, že v našom prípade sa pri C-B produkčnej funkcii zisk-maximalizujúcim správaním dosahuje nulový zisk a platí (2.10).

Rovnica (1.7) vraví, že výdavky domácnosti na konečnú spotrebu sa rovnajú ich príjmom, ktoré pochádzajú z poskytovania primárneho faktora pre výrobu. Táto skutočnosť

[4] Túto skutočnosť podporuje aj predpoklad dokonalej konkurencie na trhu, a tým pádom nulové náklady na vstup na trh. Keby výrobca dosahoval kladný zisk, na trh by vstupovali noví a noví vyrobcovia a zisk z tohto trhu by sa medzi nich delil, až by napokon každý z nich vyrábal s nulovým ziskom.

sa dá napísať ako

$$\omega\bar{L} = Y. \tag{3.3}$$

Ešte však musíme upresniť množstvo primárneho faktora (práce), ktoré môžu producenti použiť pri výrobe. Pri predpoklade plnej zamestnanosti je toto množstvo rovné celkovému primárnemu faktoru vo vlastníctve domácnosti. Preto musí platiť

$$\bar{L} = \mathbf{l}(\omega, \mathbf{p})\mathbf{X}, \tag{3.4}$$

kde $\bar{L}$ je fixné množstvo primárneho faktoru vlastneného domácnosťou.

Pôvodné rovnice z input-output modelu sme nahradili rovnicami (3.1), (2.10),(3.3) a pribudla nám rovnica (3.4), ktorá definuje rovnováhu na trhu práce. Takže sme z troch závislostí v input-output tabuľke dostali systém 2n+2 rovníc. Premenné sú v tomto prípade $\mathbf{X}$, $\mathbf{p}$, ω, Y a všetky ostatné veličiny sú závislé od týchto premenných alebo od parametrov vstupných rovníc. Môžeme si všimnúť, že medzi premennými je aj Y, ktorého hodnota nie je daná tak ako hodnota μ pri input-output modeloch, ale je závislá od ceny primárneho faktora. Za pozornosť ešte stojí fakt, že vzniknutý systém je homogénny stupňa nula v cenách a preto môže určiť iba relatívne ceny. [5] To znamená, že jeden tovar sa určí ako numeraire (jeho cena sa určí ako 1) a ostatné ceny sa vyjadria v pomere k jeho cene. Toto nám redukuje množstvo premenných o jednu. Na druhej strane, Walrasovo pravidlo vraví, že ak je rovnováha na n-1 trhoch, tak táto musí byť aj na n-tom trhu. To vraví o závislosti systému rovníc, a preto jedna z rovníc (3.1) alebo (3.3) je nadbytočná.

[5] Systém je homgénny stupňa nula v cenách, ak pre $\forall$ k $\in \mathbf{R}$ platí: $\mathbf{p}$ je riešením systému $\Leftrightarrow$ k$\mathbf{p}$ je riešením systému

4 Kalibrácia

Dostali sme systém 2n+2 rovníc o 2n+2 neznámych. Ďalej sa v tomto systéme vyskytujú parametre $z_i, \beta_i, \alpha_{ij}$ a ϵ_i, ktoré boli zavedené ako dôsledok faktu, že produkčné funkcie a spotrebné funkcie patrili do istých parametrických tried rovníc. O týchto parametroch sme zatiaľ nevedeli nič. Ak by sme poznali tieto parametre, mali by sme presne definovaný systém 2n+2 rovníc (3.1), (2.10),(3.3),(3.4) o neznámych $\mathbf{X}$, $\mathbf{p}$, ω a Y. Po riešení tohto systému by sme sa už ľahko dopracovali k input-output tabuľke. Postavme si teraz opačný problém. Za predpokladu, že poznáme input-output tabuľku, vedeli by sme vyrátať parametre rovníc? Keby sme poznali neznáme $\mathbf{X}$, $\mathbf{p}$, ω a Y, tak môžeme postaviť nový systém rovníc, v ktorom by ako neznáme vystupovali parametre $z_i, \beta_i, \alpha_{ij}$. V input-output tabuľke sa však ceny môžu brať ako jednotkové a množstvo je množstvo jednotkovej ceny. Teda z input-output tabuľky poznáme neznáme $\mathbf{X}$, $\mathbf{p}$, ω, Y a z modelu systém rovníc, v ktorých nepoznáme parametre $z_i, \beta_i, \alpha_{ij}$. Skúsime z týchto informácií vypočítať ich hodnoty a tým určiť presnú formu rovníc.

4.1 Výpočet parametrov rovníc

Z rovníc (2.11) a (3.2) si vyjadríme α_{ij}. β_i dostaneme z rovníc (2.5) a (2.10), ϵ_i z (2.14) a z_i získame priamo z rovnice (2.1). Zosumarizujme si to a vyjadrime si paremetre konkrétne pomocou hodnôt nachádzajúcich sa v input-output tabuľke.

$$\alpha_{ij} = a_{ij}, \tag{4.1}$$

$$\epsilon = \frac{e_i}{\mu}, \tag{4.2}$$

$$\beta_i = \frac{y_i}{q_i}, \tag{4.3}$$

$$z_i = \frac{q_i}{p_i}(\frac{\omega}{y_i})^{\beta_i} \prod_j (\frac{p_j}{a_{ji}})^{\alpha_{ji}}, \tag{4.4}$$

Môžeme si všimnúť,že všetky parametre sú nezávislé od voľby veľkosti jednotky tovaru a jeho ceny, okrem z_i, ktoré je škálovacou konštantou produkčných funkcií.

5 Rozšírenie modelu o zahraničie, kapitál, investície a vládu

Doteraz sme počítali s uzavretou ekonomikou, v ktorej vystupuje iba jeden konečný spotrebiteľ a iba jeden primárny faktor. Tento CGE model sa dá však ďalej upravovať podľa požiadaviek modelovanej situácie. A to napr. disagregáciou primárneho faktora (napr. prácu a kapitál), rozpoznávaním viacerých druhov konečného spotrebiteľa (napr. mestská domácnosť, domácnosť na vidieku, vláda, ...) alebo otvorením ekonomiky svetovému trhu. Uvažujme o otvorenej ekonomike, v ktorej vystupuje n výrobcov, z ktorých každý vyrába jeden, pre neho charakteristický, produkt. Ďalej jednu agregovanú domácnosť, ktorá je jediným vlastníkom primárnych faktorov a to práce a kapitálu. Z časti svojich príjmov z vlastníctva prímárnych faktorov financuje svoj dopyt po tovaroch a z časti tvorí úspory. Na strane spotrebiteľa ešte pribudne štát, ktorého príjmi sú tvorené z daní a z príjmu domácnosti a uspokojuje nimi svoju spotrebu a rovnako sa podieľa na tvorbe úspor, ktoré spolu s úsporami domácnosti financujú dopyt po investičných statkoch. Kedže ide o otvorenú ekonomiku, treba počítať aj s exportom doma-vyrobených tovarov a zároveň s importom tovarov vyrobených zvyškom sveta. Budeme predpokladať, že zahraničie vyrába tie isté druhy tovarov ako domáca ekonomika a spotrebitelia vedia rozlíšiť dovezený a doma-vyrobený tovar. Preto tieto vystupujú na trhu ako dva rozdielne statky[6]. Dátovú základňu pre CGE modely tvorí SAM matica. Jej základ tvori input-output tabuľka. Neexistuje pre ňu striktná definícia a jej forma závisí predovšetkým od cieľu modelu. Avšak pri jej tvorbe treba zohľadniť dva princípy:

- princíp input-out tabuľky, tj. výdavky peňažných prodstriedkov jedného subjektu sú zároveň príjmami iného subjektu,
- princíp národného účtovníctva, tj. suma dôchodkov určitého subjektu sa vždy rovná

[6]model založený na príklade vo Willenbockel D. (1994)

jeho výdavkom.

Poďme sa pozrieť ako budú vyzerať rovnice.

5.1 Produkcia a dopyt po faktoroch

Rozšírme produkciu (2.1) o dovezené tovary. Dostávame novú produkčnú funkciu

$$X_i = z_i L_i^{\beta_i} K_i^{\gamma_i} \{\prod_j x_{ji}^{\alpha_{ji}} m_{ji}^{\phi_{ji}}\}, \qquad \beta_i + \gamma_i + \sum_j \{\alpha_{ji} + \phi_{ji}\} = 1; \qquad i \in I, \tag{5.1}$$

kde

- m_{ji} - množstvo j - tej komodity zahraničného pôvodu použitej pri výrobe i - teho priemyslu,
- I - indexová množina priemyslu (množina tovarov).

Nákladová funkcia priemyslu má tvar:

$$C_i = \omega L_i + r K_i + \{\sum_j p_j x_{ji} + q_j m_{ji}\} \qquad i \in I, \tag{5.2}$$

kde

- r - úroková miera,
- q_j - cena j - tej komodity zahraničného pôvodu.

Ak minimalizujeme (5.2) na ohraničení (5.1) podľa premenných x_{ji}, m_{ji}, L_j, K_j, dostaneme jednotkové dopytové funkcie po primárnych faktoroch.

$$l_i(\omega, r, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{L_i}{X_i} = (\frac{\beta_i}{\omega}) h_i(\omega, r, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \tag{5.3}$$

$$k_i(\omega, r, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{K_i}{X_i} = (\frac{\gamma_i}{r}) h_i(\omega, r, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \qquad i \in I, \tag{5.4}$$

kde

$$h_i(\omega, r, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = z_i^{-1} (\frac{\omega}{\beta_i})^{\beta_i} (\frac{r}{\gamma_i})^{\gamma_i} \{\prod_j (\frac{p_j}{\alpha_{ji}})^{\alpha_{ji}} (\frac{q_j}{\phi_{ji}})^{\phi_{ji}}\} \qquad i \in I \tag{5.5}$$

a taktiež minimalizovaním dostaneme dopytové funkcie medzivstupov

$$\frac{x_{ji}}{X_i} = \frac{\alpha_{ji}}{p_j} h_i(\omega, r, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \tag{5.6}$$

$$\frac{m_{ji}}{X_i} = \frac{\phi_{ji}}{q_j} h_i(\omega, r, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \qquad i \in I, j \in I \tag{5.7}$$

a zároveň zo zisk maximalizujúceho správania vyplýva

$$p_i = h_i(\omega, r, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \qquad i \in I, \tag{5.8}$$

z toho nám vyplýva že koeficienty pre optimálne vstupy medzivstupov domáceho a zahraničného pôvodu sú

$$a_{ij}(p_i, p_j) = \alpha_{ij} \frac{p_j}{p_i}, \tag{5.9}$$

$$b_{ij}(q_i, p_j) = \phi_{ij} \frac{p_j}{q_i} \qquad i \in I, j \in I. \tag{5.10}$$

Z rovnice (5.8) môžeme dostať explicitné vyjadrenie pre vektor domácich cien.

$$\ln \mathbf{p} = [\mathbf{I} - \Omega']^{-1} [\ln \mathbf{d}(\omega, r, \mathbf{q}) - diag(\Omega' \ln \Omega)], \tag{5.11}$$

kde

$$d_i(\omega, r, \mathbf{q}) = z_i^{-1} (\frac{\omega}{\beta_i})^{\beta_i} (\frac{r}{\gamma_i})^{\gamma_i} \{\prod_j (\frac{q_j}{\phi_{ji}})^{\phi_{ji}}\} \qquad i \in I, \tag{5.12}$$

- ln$\mathbf{p}$ - stĺpcový vektor s prvkami ln p_i,
- ln$\mathbf{d}$ - stľpcový vektor s prvkami ln d_i,
- Ω - matica s prvkami α_{ij},
- $\ln \Omega$ - matica s prvkami lnα_{ij},
- $diag(\Omega' \ln \Omega)$ - stĺpcový vektor pozostávajúci z diagonálnych prvkov matice $\Omega' \ln \Omega$ $= \sum_j \alpha_{ji} \ln \alpha_{ji}$.

V tomto modeli bola použitá Cobb-Duoglasova forma produkčnej funkcie. Zvyknú sa používať aj iné, napríklad: CES-funkcia, Leontiefova alebo ich kombinácie vo forme vnorených funkcií.

5.2 Dopyt spotrebiteľa

Použitie CGE modelov je napríklad v predpovedaní dopadu zmeny daňovej politiky. Jedna z úloh môže byť analýza distribučného efektu medzi niekoľkými rozdielnymi domácnosťami. Avšak väčšinou sa v týchto modeloch vyskytuje iba jedna agregovaná domácnosť. Takisto budeme uvažovať aj teraz. Domácnosť rozlišuje medzi dovezenými a domácimi tovarmi, takže tieto tvoria nedokonalé substitúty. Z príjmov odvádza dane. Budeme predpokladať jednotnú daň z príjmu vlastníctva kapitálu a z príjmu práce. Použime vnorenú formu úžitkovej funkcie.

$$U = \prod_i v_i(D_i, M_i)^{\varepsilon_i}, \qquad \sum_i \varepsilon_i = 1, \tag{5.13}$$

kde

$$v_i = [\delta_i D_i^{s_i} + (1-\delta_i) M_i^{s_i}]^{\frac{1}{s_i}}, \qquad 0 < s_i < 1, \qquad i \in I. \tag{5.14}$$

Ohraničenie s_i nám zaručuje, že elasticita substitúcie $\sigma_i = \frac{1}{(1-s_j)}$ je z intervalu $(1, \infty)$. To nám vlastne vylučuje možnosť, že by tovary mimo skupín boli bližšie substitúty ako dovezený a domáci tovar z jednej skupiny. Domácnosť disponuje príjmami, ktorých časť použije na pokrytie investičných výdavkov (úspory) a časť na financovanie vlastnej spotreby. Pre konečnú spotrebu domácnosti musí platiť rozpočtové ohraničenie

$$(1-\tau)(1-s)Y = \mathbf{p}'\mathbf{D} + \mathbf{q}'\mathbf{M}, \tag{5.15}$$

kde

- s - miera úspor domácnosti,
- τ - daň z príjmu.

Miera je pre model exogénna. Určiť ju je možné z SAM matice ako podieľ úspor domácnosti a jej čistých príjmov. Domácnosť maximalizuje svoj úžitok (5.13) na rozpočtovom ohraničení (5.15) a tak vzniká jeho dopyt po dovezených a domácich statkoch. V našom prípade sú to dopytové funkcie

$$D_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}, Y) = \delta_i^{\sigma_i} \Theta_i^{(\sigma_i - 1)} p_i^{-\sigma_i} \varepsilon_i (1-\tau)(1-s)Y, \tag{5.16}$$

$$M_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}, Y) = (1-\delta_i)^{\sigma_i} \Theta_i^{(\sigma_i - 1)} q_i^{-\sigma_i} \varepsilon_i (1-\tau)(1-s)Y, \qquad i \in I, \tag{5.17}$$

kde

$$\Theta_i = [\delta_i^{\sigma_i} p_i^{(1-\sigma_i)} + (1-\delta_i)^{\sigma_i} q_i^{(1-\sigma_i)}]^{\frac{1}{(1-\sigma_i)}} \qquad i \in I. \tag{5.18}$$

5.3 Dopyt štátu

Ďalším spotrebiteľom v tomto modeli bude štát. Ten sa správa podobne ako domácnosť a jeho spotreba je definovaná prostredníctvom funkcie užitočnosti, ktorú sa snaží maximalizovať na svojom rozpočtovom ohraničení. V našom prípade sme štátne príjmy zjednodušili a ponechali sme len daň z príjmu domácnosti. Časť z týchto príjmov je ponechaná ako úspory a zvyšná sa použije na pokrytie dopytu odvodeného z funkcie užitočnosti. Pre zjednodušenie použijeme rovnakú formu funkcie užitočnosti ako pri domácnosti (5.13) (tj. CES formu vnorenú do C-B formy). Označme

- χ, κ, ϑ - koeficienty prislúchajúce funkcie užitočnosti vlády,
- Γ - príjmy vlády,
- $\mathbf{G}$ a $\mathbf{G}^m$ - dopytové vektory vlády po domácich výrobkoch, respektíve po dovezených výrobkoch,
- $S^G = s^G\Gamma$ - úspory vlády a s^G jej fixná miera úspor.

Maximalizáciou na rozpočtovom ohraničení

$$\Gamma - S^G = \mathbf{p}'\mathbf{G} + \mathbf{q}'\mathbf{G}^m \tag{5.19}$$

dostaneme dopytové funkcie štátu

$$G_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \Gamma) = \chi_i^{\kappa_i}\Theta_i^{(\kappa_i-1)}p_i^{-\kappa_i}\vartheta_i(\Gamma - S^G), \qquad i \in I, \tag{5.20}$$

$$G_i^m(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \Gamma) = (1-\chi_i)^{\kappa_i}\Theta_i^{(\kappa_i-1)}q_i^{-\kappa_i}\vartheta_i(\Gamma - S^G) \qquad i \in I, \tag{5.21}$$

$$\Theta_i = [\chi_i^{\kappa_i}p_i^{(1-\kappa_i)} + (1-\chi_i)^{\kappa_i}q_i^{(1-\kappa_i)}]^{\frac{1}{(1-\kappa_i)}} \qquad i \in I. \tag{5.22}$$

V mnohých prácach sa však nepredpokladá užitkovo-maximalizujúce správanie vlády. Reálne výdavky vlády, vrátane transferov, sa považujú za fixné a jej príjmy sú určené daňami. Vládne úspory sú potom stanovené ako rozdiel jej príjmov a výdavkov.

5.4 Import a export

Zahraničný obchod sa dá modelovať dvoma spôsobmi. Jeden prístup je pomocou Armingtonovho kompozitu, kedy spotrebitelia nerozlišujú medzi dovezenými a domácimi tovarmi. Tie akoby sa na trhu zmiešali a vytvorili akýsi miešaný tovar, ktorého cena sa určí ako vážený priemer cien dovezeného a domáceho tovaru. Spotrebiteľ si vlastne kupuje tento zmiešaný tovar.

Import je v tomto prípade modelovaný pomocou druhého prístupu, ktorý vychádza z predpokladu, že krajina je malá v porovnaní so zvyškom sveta a jej dopyt na svetovom trhu nemôžu ovplyvniť ceny na ňom. Konzument rozlišuje medzi tovarmi rôzneho pôvodu, ktoré majú rôznu cenu. Výška dovozu je určená výškou dopytu po dovezených tovaroch. Ceny dovezených komodít sú určené cenami na svetovom trhu pomocou vzťahu

$$q_i = ep_{\omega,i}, \qquad i \in I, \tag{5.23}$$

kde

- $p_{\omega,i}$ sú ceny fixované svetovým trhom,
- e je výmenný kurz.

Výmenný kurz je premenná označujúca počet jednotiek domácej meny potrebných na kúpu jednej jednotky zahraničnej meny. Kedže v CGE modeloch nehrajú žiadnu rolu peniaze ani iné aktíva menu nechápeme ako peniaze, ale iba ako definíciu jednotiek domácich a svetových cien. Zmeny výmenného kurzu chápeme v zmysle (5.23) iba ako zmeny v pomere domácich a svetových cien komodít. Výmenný kurz sa môže stanoviť ako endogénna premenná a saldo zahraničného obchodu sa stanoví ako pre model exogénne. Ak je saldo zahraničného obchodu pod exogénnou hladinou, zníženie reálneho výmenného kurzu napravý túto situáciu znížením cien dovezených tovarov a nárastom objemu vývozu. Alternatívou je, že výmenný kurz sa určí ako exogénna (pre model fixná) premenná a saldo zahraničného obchodu ako endogénna. V našom prípade budeme v rovnováhe počítať s vyrovnanými platbami so zahraničím (s nulovým saldom zahraničného obchodu), a tým bude výmenný kurz endogénny.

Pri exporte sa nedá v plnom zmysle predpokladať, že krajina je malá v porovnaní so zvyškom sveta. Keby to tak bolo, dopyt po exporte domácej krajny by bol dokonale elastický a ceny domácich výrobkov by sa nestotožňovali s cenami na svetovom trhu.

A preto by výrobcovia buď všetko čo vyrobia vyvážali alebo by nevyvážali vôbec nič. Treba teda predpokladať konečnú elasticitu, aj napriek tomu, že modelovaná krajina je v porovnaní so zvyškom sveta malá. V tomto modeli je export i-tej komodity opísaný rovnicou

$$E_i = g_i(\frac{p_i}{e})^{\eta_i}, -\infty < \eta < 0, \qquad i \in I. \tag{5.24}$$

5.5 Investície

Na pokrytie investícií sa použijú úspory domácnosti a štátu. Dopyt po investíciách je riešený pomocou fiktívneho investičného subjektu, ktorý sa správa podobne ako domácnosť. Má svoju vlastnú úžitkovú funkciu rovnakú ako domácnosť odlišnú iba v parametroch δ_i', σ_i', ε_i'. Predpokladá sa, že investičný agent sa tiež správa racionálne a maximalizuje svoj úžitok na rozpočtovom ohraničení, ktoré je charakterizované rovnicou

$$(1-\tau)sY + S^G = \mathbf{p}'\mathbf{I} + \mathbf{q}'\mathbf{I}^m, \tag{5.25}$$

kde $\mathbf{I}$ a $\mathbf{I}^m$ je spotrebný vektor investičných tovarov doma-vyrobených, resp. dovezených. Z tohto správania sa vyplýva dopyt po investičných statkoch.

$$I_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}, Y) = \delta_i'^{\sigma_i'} \Theta_i'^{(\sigma_i'-1)} p_i^{-\sigma_i'} \varepsilon_i'(sY + S^G), \tag{5.26}$$

$$I_i^m(\mathbf{p}, \mathbf{q}, Y) = (1-\delta_i')^{\sigma_i'} \Theta_i'^{(\sigma_i'-1)} q_i^{-\sigma_i'} \varepsilon_i'(sY + S^G) \qquad i \in I, \tag{5.27}$$

5.6 Podmienky rovnováhy

V predchádzajúcich častiach sme odvodili dopytovú a produkčnú stránku modelu. Teraz potrebujeme zostaviť systém rovníc, ktorý platí ak je trh v rovnovážnom stave. S neprítomnosťou času v modeli, nemajú žiaden význam ani peniaze ani iné aktíva. Uveďme rovnice rovnováh na trhoch.

- rovnováha na trhu s primárnymi faktormi:

$$\bar{K} = \mathbf{k}(\omega, r, \mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{x}, \tag{5.28}$$

$$\bar{L} = \mathbf{l}(\omega, r, \mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{x}, \tag{5.29}$$

- rovnováha na trhu so statkami

$$\mathbf{X} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{p})]^{-1}[\mathbf{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, Y) + \mathbf{E}(\mathbf{p}, e) + \mathbf{I}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, Y) + \mathbf{G}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \Gamma)], \tag{5.30}$$

- rovnováha v príjmoch a výdavkoch zahraničia

$$\mathbf{p}'\mathbf{E} - \mathbf{q}'[\mathbf{I}^m(\mathbf{p}, \mathbf{q}, Y) + \mathbf{B}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{x} + \mathbf{G}^m(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \Gamma) + \mathbf{M}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, Y)] = 0, \tag{5.31}$$

- rovnováha v príjmoch a výdavkoch domácnosti

$$Y = \omega \bar{L} + r\bar{K} \tag{5.32}$$

- rovnováhe v príjmoch a výdavkoch vlády

$$\Gamma = tY, \tag{5.33}$$

kde $\mathbf{q}\tau$ je vektor s prvkami $q_i\tau_i$, $\bar{L}$ a $\bar{K}$ sú primárne faktory vlastnené domácnosťou. Teraz máme systém $3n + 5$ rovníc (5.28)-(5.33),(5.23) a (5.11) s $3n + 5$ premennými $\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega, r, e, Y, \Gamma$. Exogénne zadané (fixované) sú:

- Ľavé strany rovníc (5.28) a (5.29) (vzhľadom na predpoklad plného využitia faktorov),
- Výška daní,
- Miera úspor domácnosti a miera úspor štátu,
- jedna z cien ako numeraire a tak ako v predchádzajúcej kapitole aj tu platí Walrasovo pravidlo, a preto sa jedna z rovníc rovnováh na trhu vynechá.

Všeobecný príklad SAM matice prislúchajúcej k modelu je na ďalšej strane.

SAM matica prislúchajúca k modelu:

		Produkcia			Primárne faktory		Domácnosť	Úspory	Vláda	Zahraničie
		1	j	n	Práca	Kapitál				
Produkcia	1	p_1x_{11}	p_1x_{1j}	p_1x_{1n}			p_1D_1	p_1I_1	p_1G_1	E_1p_1
	i	p_ix_{i1}	p_ix_{ij}	p_ix_{in}			p_iD_i	p_iI_i	p_iG_i	E_ip_i
	n	p_nx_{n1}	p_nx_{nj}	p_nx_{nn}			p_nD_n	p_nI_n	p_nG_n	E_np_n
Primárne faktory	Práca	ωL_1	ωL_j	ωL_n						
	Kapitál	rK_1	rK_j	rK_n						
Domácnosť					$\sum_i^n \omega L_i$	$\sum_i^n rK_i$				
Úspory							$s(1-\tau)Y$		$s^G\Gamma$	
Vláda							τY			
Zahraničie	1	q_1m_{11}	q_1m_{1j}	q_1m_{1n}			M_1q_1	$I_1^mq_1$	$G_1^mq_1$	
	i	q_im_{i1}	q_im_{ij}	q_im_{in}			M_iq_i	$I_i^mq_i$	$G_i^mq_i$	
	n	q_nm_{n1}	q_nm_{nj}	$q_n)m_{nn}$			M_nq_n	$I_n^mq_n$	$G_n^mq_n$	

6 Model pomocou Armingtonovho prístupu

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli model, v ktorom si spotrebitelia určili zvlášť dopyt po dovezenom tovare a po tovare doma vyrobenom. Taktiež tovary toho istého druhu, ale s rôznym pôvodom vstupovali do produkčných a dopytových funkcií ako rozdielne tovary. Uvažujme teraz ten istý model, ale zahraničný obchod vyriešime pomocou Armingtonovho prístupu. Ten modeluje import tak, že pre každú triedu tovarov, ponuka na domácom trhu A je tvorená z domácej produkcie D a z dovozov Im pomocou CES funkcie.

$$A = a\left(\delta D^{\rho} + (1-\delta)Im^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{6.1}$$

Domáca ponuka následne uspokojuje domáci dopyt (tj. dopyt domácnosti, výrobcov a dopyt po investíciách). Domáca produkcia a importy vstupujú do tvorby ponuky na domácom trhu podobne ako vstupy pri výrobných sektoroch. Riešenie problému spočíva v nájdení pomeru domácich tovarov a importov, ako ich funkcie cien. Pri tvorbe armingtonovho agregátu sú minimalizované náklady

$$\min_{D,Im} p_D D + p_{Im} Im \tag{6.2}$$

pri ohraničení (6.1), kde

- p_D - cena domácej výroby,
- p_{Im} - cena importov.

Riešenie tejto úlohy je

$$\frac{D}{Im} = \left(\frac{p_{Im}}{p_D}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}. \tag{6.3}$$

Zlomok v exponente je elasticita substitúcie importu a domácej produkcie. Cena zmiešaného statku sa určí tak, aby bol zachovaný nulový zisk pri tvorbe zmiešaného statku.

$$Ap_A = p_D D + p_{Im} Im \tag{6.4}$$

Export je modelovaný podobne. Rozdelenie domácej produkcie tovaru X_i medzi domáci trh D_i a export E_i je určené pomocou CET funkcie

$$X = a\left(\delta E^\rho + (1-\delta)D^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{6.5}$$

Výrobca si potom na základe cien na domácom trhu a svetovom trhu určí množstvo produkcie pre domáci trh a svetový trh. Rieši úlohu

$$\max_{D,E} p_D D + p_E E, \tag{6.6}$$

pri ohraničení (6.5) kde p_i^E je cena exportu. Riešením tohoto prblému dostávame vyjadrenie pomeru produkcie určenej na domáci trh a produkcie na export ako funkcie ich cien

$$\frac{E}{D} = \left(\frac{p_D}{p_E}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}. \tag{6.7}$$

Cena produkcie sa určí ako vážený priemer ceny exportu a ceny pre domáci trh. Poďme sa pozrieť na samotný model a správanie sa jednotlivých subjektov.

Domáca výroba bude, tak isto ako v predchádzajúcom prípade, charakterizovaná Cobb-Douglasovou produkčnou funkciou. Vstupy bude tvoriť Armingtonov statok, práca a kapitál. Teda produkčná funkcia je

$$X_i = z_i L_i^{\beta_i} K_i^{\gamma_i} \prod_i^n x_{ji}^{\alpha_{ji}}, \qquad \sum_j \alpha_{ji} = 1, \qquad i, j \in I, \tag{6.8}$$

kde x_{ji} je spotreba j-teho Armingtonovho statku s cenou p_{Aj}. Výrobca minimalizuje náklady

$$C_i = \omega L_i + r K_i + \left(\sum_j p_{Aj} x_{ji}\right) \qquad i \in I, \tag{6.9}$$

a tak určuje svoj dopyt po Armingtonovom statku, práci a kapitále

$$\frac{x_{ji}}{X_i} = \frac{\alpha_{ji}}{p_{Aj}} h_i(\omega, r, \mathbf{p}_A), \tag{6.10}$$

$$l_i(\omega, r, \mathbf{p}_A) = \frac{L_i}{X_i} = \frac{\beta_i}{\omega} h_i(\omega, r, \mathbf{p}_A), \tag{6.11}$$

$$k_i(\omega, r, \mathbf{p}_A) = \frac{K_i}{X_i} = \frac{\gamma_i}{r} h_i(\omega, r, \mathbf{p}_A), \qquad i, j \in I, \tag{6.12}$$

kde $h_i(\omega, r, \mathbf{p}_A)$ je definovaná vzťahom (2.7). Ďalej nebudeme maximalizovať zisk, ale využijeme fakt, že výrobca maximalizuje svoj zisk, a tak vyrába s nulovým ziskom, teda jeho náklady sa rovnajú jeho príjmom. Rovnice (5.8) sa dajú tiež prepísať na tvar, ktorý vyjadruje nulový zisk výrobcov. Takže dostávame rovnice

$$E_i p_{Ei} + p_i(X_i - E_i) = \omega L_i + rK_i + \sum_j p_{Aj} x_{ji}, \qquad i \in I. \tag{6.13}$$

Tvorba Armingtonovho statku pracuje vlastne na fiktívnej produkcii, ktorá ako vstupy používa domácu výrobu a importy, a jej výstup je Armingtonov statok, ktorý reprezentuje celú ponuku na domácom trhu. Na charakterizovanie výroby Armingtonovho statku použijeme CES formu produkčnej funkcie. Táto fiktívna výroba musí tiež pracovať s nulovým ziskom. A preto minimalizovaním jej nákladov

$$p_i(X_i - E_i) + p_{Imi} Im_i, \qquad i \in I \tag{6.14}$$

na produkčnom ohraničení dostaneme nákladovú funkciu, ktorá sa musí rovnať príjmom tejto výroby.

$$a^{-1} A_i \left[p_i \left(\frac{p_i}{\delta_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i - 1}} \Theta_i^{\frac{-1}{\rho_i}} + p_{Imi} \left(\frac{p_{Imi}}{1 - \delta_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i - 1}} \Theta_i^{\frac{-1}{\rho_i}} \right] = p_{Ai} A_i, \qquad i \in I, \tag{6.15}$$

kde parametre δ_i, ρ_i a Θ_i (závislá od p_{Imi} a p_i) sú prislúchajúce k danej produkčnej funkcii. Dopytové funkcie výrobcu Armingtonovho statku po domácich produktoch

$$(X_i - E_i) = a^{-1} A_i \left(\frac{p_i}{\delta_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i - 1}} \Theta_i^{\frac{-1}{\rho_i}} \qquad i \in I \tag{6.16}$$

a dopytové funkcie po importoch jednotlivých tovarov

$$Im_i(p_{Imi}, p_i, A_i) = a^{-1} A_i \left(\frac{p_{Imi}}{1 - \delta_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i - 1}} \Theta_i^{\frac{-1}{\rho_i}} \qquad i \in I \tag{6.17}$$

Agregovaná domácnosť maximalizuje svoj úžitok charakterizovaný C-B funkciou. Pritom však nespotrebuje všetky príjmy, ale istou časťou pokrýva aj investície a odvádza daň z príjmu. Preto rozpočtové ohraničenie je vo forme

$$Y(1 - s)(1 - t) = \sum_i^n p_{Ai} D_{Ai}, \tag{6.18}$$

kde

- Y - príjem domácnosti,

- s - jej miera úspor,
- t - miera daní.

Riešením tejto úlohy dostávame dopytové funkcie domácnosti po Armingtonovom statku

$$D_{Ai}(p_{Ai}, Y) = \frac{\xi_i}{p_{Ai}} Y(1-s)(1-t). \tag{6.19}$$

Štát nebude vytvárať dopyt priamo po Armingtonovom statku, ale dopyt po agregáte štátnej spotreby, ktorý bude produktom fiktívneho sektora, ktorého medzispotreba bude štátna spotreba. Tento fiktívny výrobca má Leontiefovu produkčnú funkciu a minimalizuje svoje náklady

$$\sum_i^n p_{Ai} G_{Ai}, \tag{6.20}$$

na produkčnom ohraničení

$$Gov = a \min \left\{ \frac{G_{Ai}}{\eta_i} \right\}. \tag{6.21}$$

Z toho vznikne nákladová funkcia. Tá sa musí rovnať ziskom tohto výrobcu

$$p_{Govi} Gov = \sum_i^n p_{Ai} \frac{Gov}{\eta_i}. \tag{6.22}$$

Investície nebudeme riešiť prostredníctvom fiktívneho investičného agenta, ktorý maximalizuje svoj úžitok, ale rovnako ako u štátnej spotreby, pomocou fiktívneho výrobcu, ktorého medzispotreba je spotreba investičných statkov a vytvára agregované investície. Výrobca minimalizuje svoje náklady

$$\sum_i^n p_{Ai} Inv_{Ai}, \qquad i \in I. \tag{6.23}$$

na výrobnom ohraničení C-B formy. Riešením tejto úlohy dostávame dopytové funkcie výrobcu investičného agregátu

$$Inv_{Ai}(\mathbf{p}_A, INV) = \frac{INV}{b} \frac{\epsilon_j}{p_{Aj}} \prod_i^n \left(\frac{p_{Ai}}{\epsilon_i} \right)^{\epsilon_i}, \tag{6.24}$$

a takisto aj jeho nákladovú funkciu, ktorá musí byť rovná jeho príjmom z predaja tohto agregátu

$$\frac{INV}{b} \sum_j^n \left\{ p_{Aj} \frac{\epsilon_j}{p_{Aj}} \prod_i^n \left(\frac{p_{Ai}}{\epsilon_i} \right)^{\epsilon_i} \right\} = p_{INV} INV, \tag{6.25}$$

kde je

- Inv_{Ai} - dopyt po i-tom investičnom tovare,
- INV - investičný agregát,
- p_{INV} - cenový index investícií,
- ϵ_j, - parametre prislúchajúce k produkčnej funkcii.

Dopyt po agregovaných investíciách vytvára domácnosť a štát.

$$sY + S^G = p_{INV} INV, \tag{6.26}$$

kde S^G sú štátne úspory.

Ďalej treba určiť rovnováhu na trhu s Armingtonovým statkom. Jeho ponuka sa musí rovnať súčtu dopytu výrobných sektorov, dopytu výrobcu investičného agregátu a dopytu domácnosti. Vyjadrené rovnicou:

$$A_i = \sum_j^n x_{ij}(\omega, r, \mathbf{p}_A, X_i) + Inv_{Ai}(\mathbf{p}_A, INV) + D_{Ai}(p_{Ai}, Y) + G_{Ai}(p_{Ai}, Gov), \qquad i \in I. \tag{6.27}$$

Rovnosť musí byť aj na trhu s domácou výrobov, kde celá výroba určená pre domáci trh spotrebovaná sektorom vyrábajúcim Armingtonov statok, a preto sa musí rovnať jeho dopytu. Túto skutočnosť vyjadruje rovnica (6.16). To isté platí aj pre import, ktorý je celý spotrebovaný pri výrobe Armingtonovho statku, a preto sa jeho ponuka IMP_i musí rovnať jeho dopytu.

$$IMP_i = Im_i(p_{Imi}, p_i, A_i), \qquad i \in I. \tag{6.28}$$

Ponuka exportov sa vypočíta z vyššie uvedenej CET funkcie a musí sa rovnať dopytu po exportoch.

$$E_i = c_i^{-1} X_i \left(\frac{p_{Ei}}{\delta_i}\right)^{\frac{1}{\rho_i - 1}} \left[(1-\delta_i)\left(\frac{1-\delta_i}{p_i}\right)^{\frac{\rho_i}{1-\rho_i}} + \delta_i \left(\frac{\delta_i}{p_{Ei}}\right)^{\frac{\rho_i}{1-\rho_i}}\right]^{\frac{-1}{\rho}} = EXP_i \qquad i \in I, \tag{6.29}$$

kde je

- c_i, δ, ρ_i - parametre príslušnej CET funkcie,

- p_{Ei} cena i-teho exportu,
- EXP_i - dopyt po i-tom exporte.

Dopyt po práci, tvorený výrobcami sa musí v rovnováhe rovnať jeho ponuke

$$\bar{L} = \mathbf{l}(\omega, r, \mathbf{p}_A)\mathbf{X}, \tag{6.30}$$

a to platí aj pre kaptál

$$\bar{K} = \mathbf{k}(\omega, r, \mathbf{p}_A)\mathbf{X}. \tag{6.31}$$

Domácnosť je jediným vlastníkom primárnych faktorov, a preto všetky príjmy z ich vlastníctva idú práve domácnosti.

$$Y = r\bar{K} + \bar{L}\omega \tag{6.32}$$

Štátne príjmy sú tvorené daňou z príjmu domácnosti. Časť z nich tvorí štátne úspory a za časť nakupuje agregovanú štátnu spotrebu.

$$p_{Gov}Gov = tY - S^G \tag{6.33}$$

Ceny exportov a importov nemôžu byť určované domácou ekonomikou, pretože tá je v porovnaní so zvyškom sveta malá. Preto sú závislé od cien na svetovom trhu.

$$p_{Ei} = ep_{Wi} \tag{6.34}$$

$$p_{Imi} = ep_{Wi}, \tag{6.35}$$

kde e je výmenný kurz. V rovnováhe musia byť aj platby so zahraničím.

$$\sum_{i}^{n} (p'_{Ei}E_i - p_{Imi}Im_i) = 0 \tag{6.36}$$

Rovnice (6.13), (6.15), (6.16), (6.25), (6.26), (6.27), (6.28), (6.29), (6.30), (6.31), (6.32), (6.34), (6.35), (6.36),(6.22),(6.33) tvoria sytém $8n + 8$ rovníc a v tabuľke 2 sú vypísané premenné.

Tabuľka 2

Označenie premennej	**Názov premennej**
$\mathbf{X}$	Domáca produkcia
$\mathbf{A}$	Armingtonova produkcia
EXP	Export
IMP	Import
$\mathbf{p}$	Ceny domácej produkcie
$\mathbf{p}_A$	Ceny Armingtonovej produkcie
$\mathbf{p}_E$	Ceny exportov
$\mathbf{p}_{Im}$	Ceny importov
INV	Agregované investície
Y	Príjem domácnosti
ω	Cena práce
r	Cena kapitálu
p_{INV}	Cenový index investícií
e	Výmenný kurz
p_{Gov}	Cenový index štátnej spotreby
Gov	Agregovaná štátna spotreba

SAM matica prislúchajúca k modelu s Armingtonovým kompozitom:

		Produkcia			Tovary			Primárne faktory		Domácnosť	Úspory a investície	Vláda	Zahraničie
		1	j	n	1	i	n	Práca	Kapitál				
Produkcia	1				$p_1(X_1 - E_1)$								$E_1 p_{E1}$
	i					$p_i(X_i - E_i)$							$E_i p_{Ei}$
	n						$p_n(X_n - E_n)$						$E_n p_{En}$
Tovary	1	$p_{A1} x_{11}$	$p_{A1} x_{1j}$	$p_{A1} x_{1n}$						$p_{A1} D_{A1}$	$p_{A1} Inv_{A1}$	$p_{A1} G_{A1}$	
	i	$p_{Ai} x_{i1}$	$p_{Ai} x_{ij}$	$p_{Ai} x_{in}$						$p_{Ai} D_{Ai}$	$p_{Ai} Inv_{Ai}$	$p_{Ai} G_{Ai}$	
	n	$p_{An} x_{n1}$	$p_{An} x_{nj}$	$p_{An} x_{nn}$						$p_{An} D_{An}$	$p_{An} Inv_{An}$	$p_{An} G_{An}$	
Primárne faktory	Práca	ωL_1	ωL_j	ωL_n									
	Kapitál	$r K_1$	$r K_j$	$r K_n$									
Domácnosť								$\sum_i^n \omega L_i$	$\sum_i^n r K_i$				
Úspory a investície										$s(1-\tau)Y$		S^G	S^F
Vláda										τY			
Zahraničie					$p_{Im1} Im_1$	$p_{Imi} Im_i$	$p_{Imn} Im_n$						

7 Makroekonomické uzávery CGE modelu

Model v šiestej kapitole pozostával z 8n+8 rovníc pre rovnaký počet (endogénych) neznámych. Okrem v rovniciach vystupovali ďalšie parametre, ktoré sme určili ako pre model exogénne premenné, čím sme model uzavreli. V tejto kapitole podrobme proces uzáveru modelu podrobnejšiemu skúmaniu. Výberom exogénnych a endogénnych premenných v predchádzajúcich modeloch sme totiž implicitne vychádzali z neo-klasickej teórie. Tento uzáver však nie je jediný a v praxi sa stretávame aj s ďalšími variantami. Ale poďme pekne po poriadku. Uvažujme model z predchádzajúcej kapitoly, v ktorom sme urobili jednu zmenu. Saldo zahraničného obchodu už nemusí byť nulové, ale rozdiel medzi finančným objemom dovozu a vývozu tvorí úspory zahraničia S^F, ktoré potom spolu domácnosťami a štátom vytvárajú dopyt po investíciách. Možnosť nenulového salda zahraničného obchodu, a tým aj zahraničných úspor, je podporená aj tým faktom, že v realite sa vyskytuje iba výnimočne nulové saldo zahraničného obchodu.

Neznáme v tomto systéme sú:

$\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{EXP}, \mathbf{IMP}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_A, \mathbf{p}_E, \mathbf{p}_{IMP}, INV, p_{INV}, Y, \omega, r, e, \tau, S^G, s, S^F, \bar{L}, \bar{K}, \mathbf{p}_{w,i}, Gov, p_{Gov}$

Čo je 9n+14 premenných na 8n+8 rovníc. Treba teda vybrať z pomedzi premenných 8n+7 endogénnych, jednu numeraire a n+6 exogénnych. Z predpokladu malej krajiny môžeme už teraz povedať, že ceny na svetovom trhu budú pre náš model exogénne. Tým pádom nám ostáva fixovať už len 6 premenných.

Johansen (1960) demonštroval tri spôsoby uzavretia na jednosektorovom modeli.[7] Pokúsime sa teraz nimi motivovať a takto uzavrieť aj náš model. Všetky uzávery mali spoločne fixovaný export, mieru úspor domácnosti, dopyt vlády, cenu dovozov a mzdu. V našom modeli však vládny dopyt po jednotlivých statkoch nevystupuje ako samostatná premenná a jeho fixácia by znamela, že by nám pribudlo ďalších n rovníc. Budeme preto namiesto toho fixovať agregovaný dopyt vlády. Podobne keby sme chceli vektor exportov

[7] pozri prílohu 4

stanoviť ako exogénny, fixovali by sme vlastne n premenných, avšak mi ich môžme fixovať už len 6. Na druhej strane sa v Johansenovom modeli nevyskytuje ani výmenný kurz, ani fixované svetové ceny. Kedže vo všetkých jeho uzáveroch vystupuje saldo zahraničného obchodu ako endogénna premenná, (v CGE modeloch, v ktorých je zahrnuté zahraničie, sa výmenný kurz určí ako endogénna premenná a saldo zahraničného obchodu ako exogénna alebo naopak) môžeme za exogénnu premennú namiesto fixovaného exportu v Johansenovom modeli určiť výmenný kurz. Keď sa pozrieme na rovnice (7.51) z prílohy 3, vidíme, že ceny importov sú určené výmenným kurzom a cenami na svetovom trhu, ktoré sú pre model exogénne. Tým sme vlastne nahradili exogénnosť cien importov z jeho modelu. Johansen nikde neuvádza zavedenie numeraire, aj keď jeho model je tiež homogénny stupňa nula v cenách. Preto stanovíme mzdu ako numeraire, čo vlastne zodpovedá určeniu mzdy ako exogénnej premennej pre systém rovníc. Ďalej Johansen rozoberá nasledujúce spôsoby uzavretia jeho modelu.[8]

Johansenovým uzavretím modelu nazývame uzavretie, v ktorom Johansen zvolil ešte za ďalšie exogénne premenné investície, kapitál a prácu. Tento uzáver ako jediný ponecháva výšku daní ako endogénnu premennú. Tým dosiahol, že výstup výroby v jeho modeli je plne určený výrobnou stranou modelu. V našom prípade, je však situácia trošku zložitejšia. Keby sme mohli fixovať export a využili fakt, že ceny importov a exportov sú určené cenami na svetovom trhu, tak objemy výrob dostaneme riešením rovníc (7.37)-(7.41) nezávisle od ostatných rovníc. Poznamenajme, že rovnice (7.37)-(7.41) sa týkajú len výrobnej stránky ekonomiky. Dane v tomto prípade ošetrujú disponibilný príjem domácnosti, aby bol dostatočne veľký na vytvorenie dopytu potrebného na motivovanie výroby. Nemôžeme však fixovať vektor dopytu po investíciách, pretože by nám vznikol rovnaký problém ako pri fixovaní vektora dopytu vlády (zostalo by nám málo rovníc). Preto namiesto toho za exogénnu premennú stanovíme agregovaný dopyt po investíciách.

Neoklasické uzavretie modelu Johansen dosiahol keď za ďalšie exogénne stanovil premenné prácu, kapitál a výšku daní. Týmto je výroba stále na výrobnej stránke modelu. Výška agregovaných investícií je určená veľkosťou úspor (7.44). Z rovnice (7.46) vidíme,

[8] pre podrobnejši opis viď Rattsø(1982)

že aj disponibilný príjem domácnosti je určený iba výrobnou stránkou ekonomiky.

Keynesov uzáver modelu sa dosiahol fixovaním investícií, kapitálu a výšky daní. V tomto uzavretí je povolená nezamestnanosť. Tým strácame separáciu produkčnej stránky modelu od spotrebnej. V Johansenovom modeli pri fixácii nominálnej mzdy, sa reálna mzda upravuje pomocou cenovej hladiny a popri tom sa mení aj výmenný kurz. Nárast cenovej hladiny spôsobí pokles reálnej mzdy, následný nárast zamestnanosti (7.40), a tým aj nárast príjmu domácnosti a zároveň aj jej úspor. Zároveň rast cien posilňuje reálny výmenný kurz, ktorý podporuje rast importov a pokles exportov. To sa prejavuje na zvýšení úspor zahraničia. Oba procesy pracujú v prospech zvýšenia investícií. V našom modeli je z formulácie rovníc zrejmý len prvý jav, nárast zahraničných úspor nie je až taký zrejmý z tvaru rovníc modelu.

Keby sme chceli v neoklasickom modeli stanoviť ako numeraire cenu jednej z komodít, tak cenu práce určíme ako endogénnu premennú, ale v Keynesovom uzávere sa v tomto prípade určuje cena práce ako exogénna. CGE modely s neoklasickým uzáverom sa správajú skôr ako klasické CGE modely, v ktorých sú všetky trhy "vyčistené" a vedú v rovnováhe k plnej zamestnanosti, kým CGE modely s Keynesovým uzáverom stelesnujú prvky krátkodobých makroekonomických modelov s rovnováhou zahrňujúcou aj nezamestnanosť a nehybnosť mzdy a cien (Robinson (2003)). Rekapituláciu týchto uzavretí si môžeme prezrieť v tabuľke 3. Alternatívy týchto uzáverov môžu vzniknúť prostredníctvom zámeny exogénnosti výmenného kurzu a salda zahraničného obchodu.

Tabuľka 3

premenné	Keynesov uzáver	Neoklasický uzáver	Johansenov uzáver
$\mathbf{X}$			
$\mathbf{A}$			
$\mathbf{EXP}$			
$\mathbf{IMP}$			
$\mathbf{p}$			
$\mathbf{p}_A$			
$\mathbf{p}_E$			
$\mathbf{p}_{IMP}$			
INV	fix		fix
p_{INV}			
Y			
ω	num	num	num
r			
e	fix	fix	fix
t	fix	fix	
S^G			
s	fix	fix	fix
S^F			
$\bar{L}$		fix	fix
$\bar{K}$	fix	fix	fix
$\mathbf{p}_{wi}$	fix	fix	fix
Gov	fix	fix	fix
p_{Gov}			

Záver

Cieľom uvedenej práce bolo uviesť čitateľa do problematiky CGE modelov a ich konštrukcie. Na jednoduchom príklade vstupno-výstupného modelu sme si ukázali jeho analógiu s CGE modelom. Keďže tento model bol príliš zjednodušený, aby mala jeho aplikácia nejaký zmysel v praxi, tak sme ho následne rozšírili o zahraničie, vládu, kapitál a investície. Pre jednoduchosť modelu sme uviedli len jednu daň, a to daň z príjmu domácnosti. Rozšírenie modelu o ďalšie dane alebo transfery do modelu by už nemalo byť náročné. Dovezené a doma vyrobené tovary vstupovali na trh ako rozdielne komodity a boli spotrebúvané separovane. Táto skutočnosť kladie veľké nároky na dátovú základňu modelu. Treba poznať u každej výroby jej spotrebu doma vyrobenej a dovezenej komodity. Ukázali sme postup pri zostavovaní CGE modelu pomocou Armingtonovho kompozitu. V tomto prípade doma vyrobený a dovezený tovar vytvárajú na domácom trhu zmiešaný tovar (Armingtonov kompozit). Na záver sme ukázali rozličné možnosti makroekonomických uzavretí modelu. Od nich práve v dosť veľkej miere závisí, ako sa daný model bude správať.

Prínos tejto diplomovej práce vidím najmä v predstavení stacionárnych CGE modelov a úvodu do ich konštrukcie. Mala by plniť úlohu krátkej učebnice.

Literatúra

[1] Brunovský P., Páleník V., Kotov M., Mráz M. (2002): *Simulácie vplyvov zmien vybraných daňových parametrov s využitím CGE modelov,* Združenie pre ekonomické modelovanie, prognózy a analýzy

[2] Collange G.M.: *Modélisation macro- économique, Une application aux pays d'Afrique sub-sahariene,* Economie-finances publiques-enterprises publiques, Cycle court, Modelisation macro at micro-economique, Paris

[3] Johansen L.(1960): *A multisectoral study of economic growth,* Amsterdam: North Holland (Second edition (1974))

[4] Kotov M. (2002): *Modely všeobecnej ekonomickej rovnováhy,* Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, SR

[5] Lofgren H., Lee Harris R., Robinson S., Thomas M., El-Said M. (2002): *A Standart Computable General Equilibrium (CGE) Model in GASM,* International Food Policy Research Institute (IFPRI)

[6] Páleník V., Kotov M. (2003): *Konštrukcia modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy,* Združenie pre ekonomické modelovanie, prognózy a analýzy

[7] RattsøJ. (1982): *Different Macroclosures of the Original Johansen Model and Their Impact on Policy Evalution,* Journal of Policy Modeling 4(1):85-97

[8] Robinson S. (2003): *Macro Models and Multipliers: Leontief, Stone, Keynes, and CGE Models,* International Food Policy Research Institute (IFPRI)

[9] van der Ploeg F. (1986): *Mathematical Methods in Economics,* New York: John Wiley and Sons

[10] Willenbockel D. (1994): *Applied General Equilibirum,* Middlesex University, UK

Príloha 1

Produkčné funkcie

V CGE modeloch sa na modelovanie výrobného sektora používajú tri typy produkčných funkcií:

- Produkčná funkcia s konštantnou elasticitou substitúcie (CES),
- Cobb-Douglasova produkčná funkcia (C-B),
- Leontieffova produkčná funkcia (L).

Ukážeme, že spoločným rysom týchto produkčných funkcií je, že ich podmienené dopytové funkcie sú lineárne v objeme produkcie. Ešte si pripomenme, že základný rozdiel medzi týmito produkčnými funkciami je v ich elasticite substitúcie. U produkčnej funkcie s dvoma vstupmi nám elasticita substitúcie určuje o koľko percent sa musí zvýšiť množstvo jedného vstupu, ak množstvo druhého pokleslo o jedno percento tak, aby sa veľkosť produkcie zachovala.

CES forma produkčnej funkcie: Tvar CES produkčnej funkcie s n vstupmi je:

$$Y = a\left(\sum_i^n \alpha_i D_i^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}, \qquad \sum_i^n \alpha_i = 1, \tag{7.1}$$

kde je

- Y - výstup výrobcu,
- D_i - množstvo i-teho výrobku použitého ako vstup do výroby,
- a, ρ, α_i - parametre.

Elasticita substitúcie je

$$\sigma = \frac{1}{(1-\rho)}. \tag{7.2}$$

Minimalizovaním nádkladov na výrobnom ohraničení dostaneme podmienenú dopytovú funkciu výrobcu po vstupoch. Riešime úlohu

$$\min_{D_i} \sum_i^n p_i D_i, \tag{7.3}$$

na ohraničení

$$Y = a\left(\sum_i^n \alpha_i D_i^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}, \qquad \sum_i^n \alpha_i = 1. \tag{7.4}$$

Lagrangeova funkcia je

$$\ell(D_i, \lambda) = \sum_i^n p_i D_i + \lambda\left\{Y - a\left(\sum_i^n \alpha_i D_i^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}\right\}. \tag{7.5}$$

Jej parciálne derivácie položíme rovné nule a dostávame systém rovníc

$$\frac{\partial \ell(D_i, \lambda)}{\partial D_i} = p_i - \lambda a\left(\sum_i^n \alpha_i D_i^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} \alpha_i D_i^{\rho-1} = 0, \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial \ell(D_i, \lambda)}{\partial \lambda} = Y - a\left(\sum_i^n \alpha_i D_i^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = 0. \tag{7.7}$$

Z rovnice (7.6) dostávame

$$D_j = D_i\left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}. \tag{7.8}$$

Umocnením tejto rovnice ρ, vynásobením α_j, sčítaním cez j, umocnením $\frac{1}{\rho}$ a vynásobením 'a' dostaneme podmienenú dopytovú funkciu po i-tom vstupe

$$D_i = a^{-1}\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\left\{\sum_j^n \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \alpha_j\right\}^{\frac{-1}{\rho}} Y. \tag{7.9}$$

Cobb-Douglasova produkčná funkcia: Tvar Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie je

$$Y = a\prod_i^n D_i^{\alpha_i}, \qquad \sum_i \alpha_i = 1, \tag{7.10}$$

s elasticitou substitúcie

$$\sigma = \sum_i^n \alpha_i = 1. \tag{7.11}$$

Podmienenú dopytovú funkciu dostaneme podobne ako u CES formy produkčnej funkcie, a to minimalizovaným nákladov na produkčnom ohraničení. Zostrojíme Lagrangeho funkciu tejto minimalizačnej úlohy a položíme jej parciálne derivácie rovné nule. Dostávame systém rovníc

$$\frac{\partial \ell(D_i, \lambda)}{\partial D_i} = p_i - \lambda \frac{Y}{D_i}\alpha_i = 0, \tag{7.12}$$

$$\frac{\partial \ell(D_i, \lambda)}{\partial \lambda} = Y - a \prod_i^n D_i^{\alpha_i} = 0. \qquad (7.13)$$

Z rovníc (7.12) dostaneme

$$D_i = \frac{p_j}{\alpha_j} D_j \frac{\alpha_i}{p_i}. \qquad (7.14)$$

Dosadením tohto vzťahu do rovnice (7.13) a upravením, dostaneme dopyt po j-tom vstupe

$$D_j = \frac{Y}{a} \frac{\alpha_j}{p_j} \prod_i^n \left(\frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i}. \qquad (7.15)$$

Leontieffova produkčná funkcia: Tvar Leontieffovej produkčnej funkcie je

$$Y = a \min \left\{ \frac{D_i}{\alpha_i} \right\} \qquad (7.16)$$

a jej elasticita substitúcie sa rovná 0. Pre nákladovú funkciu platí

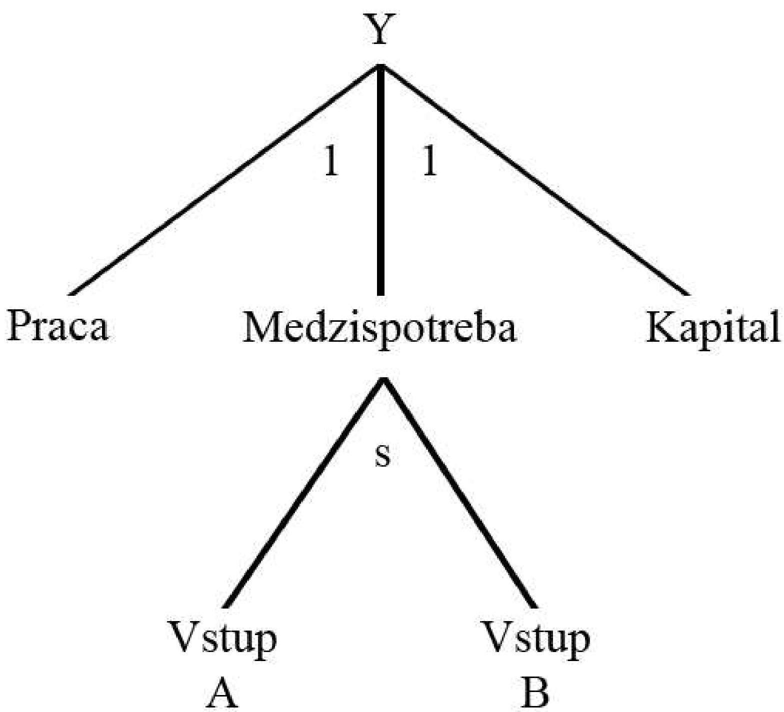
$$\sum_i^n p_i D_i = \begin{cases} Y\alpha_1 p_i + D_2 p_2 + ... + D_n p_n & \text{ak} \quad \frac{D_1}{\alpha_1} \leq \frac{D_i}{\alpha_i} \quad \text{pre} \quad \forall i \\ \vdots & \\ D_1 p_1 + ... + Y\alpha_j p_j + ... + D_n p_n & \text{ak} \quad \frac{D_j}{\alpha_j} \leq \frac{D_i}{\alpha_i} \quad \text{pre} \quad \forall i \\ \vdots & \\ D_1 p_1 + ... + D_{n-1} p_{n-1} + Y\alpha_n p_n & \text{ak} \quad \frac{D_n}{\alpha_n} \leq \frac{D_i}{\alpha_i} \quad \text{pre} \quad \forall i \end{cases} \qquad (7.17)$$

Minimálne nálady sa pri pevne zvolenom objeme výroby dosahujú pre

$D_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} D_i = Y\alpha_j$, ak $D_i p_i \leq D_j p_j$ pre $\forall$ j $\neq$ i. Teda minimum sa dosahuje pre $D_i = Y\alpha_i$, čo je vlastne podmienená dopytová funkcia po vstupných tovaroch.

Produkčná funkcia vo vnorenej forme: Na modelovanie výroby sa používajú aj produkčné funkcie, ktoré vznikli kombináciou dvoch alebo aj troch druhov produkčných funkcií, ktoré sú vhodne vnorené do viacerých úrovní. Tým je možné zaviesť rôznu elasticitu substitúcie medzi jednotlivými vstupmi. Príklad takého "vnorenia" je ilustrovaný na obrázku 1.

Obrázok 1



Vstup A a Vstup B tvoria spoločný agregát, ktorý je modelovaný CES produkčnou funkciou s elasticitou substitúcie s a ten na ďalšej úrovni vytvára produkciu spolu s Kapitálom a Prácou za pomoci C-B produkčnej funkcie. Podmienené dopytové funkcie po vstupoch sa odvodia pomocou kombinácie vyššie uvedených postupov.

Príloha 2

Úžitkové funkcie

V CGE modeloch sa prevažne používajú taktiež tri typy úžitkových funkcií. A to CES, C-B a L forma úžitkovej funkcie.

CES forma úžitkovej funkcie: Tvar CES funkcie je

$$U = \left(\sum_{i}^{n} \alpha_i D_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}, sum_i^n \alpha_i = 1. \tag{7.18}$$

Maximalizovaním úžitku na rozpočtovom ohraničení

$$Y = \sum_{i}^{n} p_i D_i, \tag{7.19}$$

kde Y je príjem spotrebiteľa, dostávame Marshallovské dopytové funkcie spotrebiteľa. Z Lagrangeovej funkcie dostávame sústavu rovníc

$$\frac{U}{\sum_i^n \alpha_i D_i^\rho} \alpha_i D_i^\rho + \lambda p_i D_i = 0, \tag{7.20}$$

a

$$Y - \sum_i^n p_i D_i = 0. \tag{7.21}$$

Z rovníc (7.20) dostaneme podiel dopytov po j-tom a i-tom tovare

$$\frac{D_i}{D_j} = \left(\frac{\alpha_j p_i}{\alpha_i p_j} \right)^{\frac{1}{\rho-1}}. \tag{7.22}$$

Vyjadríme si D_i, dosadíme do rovnice rozpočtového ohraničenia a dostaneme Marshallovskú dopytovú funkciu po j-tom tovare

$$D_j = \left(\frac{p_j}{\alpha_j} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left[\sum_i^n p_i \left(\frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \right]^{-1} Y. \tag{7.23}$$

Cobb-Douglasova úžitková funkcia:

$$U = \prod_i^n D_i^{\alpha_i}, \qquad \sum_i^n \alpha_i = 1. \tag{7.24}$$

Rovnako ako aj u CES dostávame sústavu

$$\frac{U}{D_i} \alpha_i - \lambda p_i = 0, \tag{7.25}$$

a

$$Y - \sum_i^n p_i D_i = 0. \tag{7.26}$$

Po sčítaní rovníc (7.25) cez i a dosadením rovnice (7.26) si vyjadríme λ

$$\lambda = \frac{U}{Y}. \tag{7.27}$$

Dosadíme do rovnice (7.25) a dostaneme Marshallovský dopyt po i-tom tovare pri C-B úžitkovej funkcii

$$D_i = \frac{\alpha_i}{p_i} Y. \tag{7.28}$$

Leontieffova úžitková funkcia:

$$U = a \min \left\{ \frac{D_i}{\alpha_i} \right\} \tag{7.29}$$

Maximálny úžitok sa dosahuje na rozpočtovom ohraničení (7.19), keď spotreba tovarov spĺňa

$$\frac{D_i}{\alpha_i} = \frac{D_j}{\alpha_j}. \tag{7.30}$$

Dosadením (7.38) do rozpočtového ohraničenia dostávame Marshallovskú dopytovú funkciu po i-tom statku.

$$D_i = \frac{Y\alpha_i}{\sum_j^n p_j \alpha_j} \tag{7.31}$$

Vnorená úžitková funkcia z kapitoly 5.2: Maximalizujeme úžitkovú funkciu (5.13) na rozpočtovom ohraničení (5.15). Z parciálnych derivácií Lagrangeho funkcie dostávame systém rovníc

$$\frac{UD_i^{s_i}\varepsilon_i\delta_i}{[\delta_i D_i^{s_i} + (1-\delta_i)M_i^{s_i}]} - \lambda p_i D_i = 0, \tag{7.32}$$

$$\frac{UM_i^{s_i}\varepsilon_i(1-\delta_i)}{[\delta_i D_i^{s_i} + (1-\delta_i)M_i^{s_i}]} - \lambda q_i M_i = 0, \tag{7.33}$$

$$\mathbf{p}'\mathbf{D} + \mathbf{q}'\mathbf{M} = Y(1-s)(1-\tau) \qquad i \in I \tag{7.34}$$

Sčítame rovnice (7.32) a (7.33) a výsledok sčítame cez i. Dostávame, že pomer úžitku a disponibilného príjmu domácnosti sa rovná Lagrangeovmu multiplikátoru.

$$\lambda = \frac{U}{Y(1-s)(1-\tau)}. \tag{7.35}$$

Dosadením tejto rovnosti do rovníc (7.32) a (7.33) dostávame závislosť medzi spotrebou doma-vyrobeného tovaru a importu

$$D_i = \left(\frac{p_i(1-\delta_i)}{q_i\delta_i} \right)^{\frac{1}{(s_i-1)}} M_i \qquad i \in I, \tag{7.36}$$

a po jej spätnom dosadení do (7.33), dostaneme rovnicu dopytu domácnosti po dovezenom tovare (5.17). Podobným postupom dojdeme aj k rovnici (5.16).

Príloha 3

Rovnice modelu k 7. kapitole

$$E_i(p_{Ei},p_i,A_i)p_{Ei}+p_i(X_i-E_i(p_{Ei},p_i,A_i)=\omega L_i(\omega,r,\mathbf{p}_A,\mathbf{X})+ \\ +rK_i(\omega,r,\mathbf{p}_A,\mathbf{X})+\sum_j p_{Aj}x_{ji}(\omega,r,\mathbf{p}_A,\mathbf{X}), \qquad i\in I \tag{7.37}$$

$$a^{-1}A_i\left[p_i\left(\frac{p_i}{\delta_i}\right)^{\frac{1}{\rho_i-1}}\Theta_i^{\frac{-1}{\rho_i}}+p_{Imi}\left(\frac{p_{Imi}}{1-\delta_i}\right)^{\frac{1}{\rho_i-1}}\Theta_i^{\frac{-1}{\rho_i}}\right]=p_{Ai}A_i, \qquad i\in I \tag{7.38}$$

$$(X_i-E_i(p_{Ei},p_i,A_i)=a^{-1}A_i\left(\frac{p_i}{1-\delta_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho_i}}\Theta_i^{\frac{-1}{\rho_i}} \qquad i\in I \tag{7.39}$$

$$\bar{L}=\mathbf{l}(\omega,r,\mathbf{p}_A)\mathbf{X} \tag{7.40}$$

$$\bar{K}=\mathbf{k}(\omega,r,\mathbf{p}_A)\mathbf{X} \tag{7.41}$$

$$p_{Gov}Gov=\sum_i^n\frac{p_{Ai}Gov}{\eta_i} \tag{7.42}$$

$$\frac{INV}{b}\sum_j^n\left\{p_{Aj}\frac{\epsilon_j}{p_{Aj}}\prod_i^n\left(\frac{p_{Ai}}{\epsilon_i}\right)^{\epsilon_i}\right\}=p_{INV}INV \tag{7.43}$$

$$S^F+sY+S^G=p_{INV}INV \tag{7.44}$$

$$p_{Gov}Gov=tY-S^G \tag{7.45}$$

$$Y=rK+L\omega \tag{7.46}$$

$$A_i=\sum_j^n x_{ij}(\omega,r,\mathbf{p}_A,\mathbf{X})+Inv_{Ai}(\mathbf{p}_A,INV)+D_{Ai}(p_{Ai},Y)+G_{Ai}(p_{Ai},Gov), \qquad i\in I \tag{7.47}$$

$$IMP_i=Im_i(p_{Imi},p_i,A_i), \qquad i\in I \tag{7.48}$$

$$E_i(p_{Ei},p_i,A_i)=EXP_i \qquad i\in I \tag{7.49}$$

$$p_{Ei}=ep_{Wi}, \qquad i\in I \tag{7.50}$$

$$p_{Imi}=ep_{Wi}, \qquad i\in I \tag{7.51}$$

$$\sum_i^n\left(p_{Imi}Im_i(p_{Imi},p_i,A_i)-p'_{Ei}E_i(p_{Ei},p_i,A_i)\right)=S^F \tag{7.52}$$

Príloha 4

Johansenov jednosektorový model

$$X = f(L, K), \tag{7.53}$$

$$(P_X - bP_0)\frac{\partial f(L, K)}{L} = \omega, \tag{7.54}$$

$$(P_X - bP_0)\frac{\partial f(L, K)}{K} = P_X r, \tag{7.55}$$

$$Y* = (\omega L + rP_X K - P_0 bX)(1 - \tau)(1 - s), \tag{7.56}$$

$$F = t(\omega L + rP_X K - P_0 bX) - P_X G, \tag{7.57}$$

$$C_0 = \theta_0 + (\frac{c_0}{P_0})[Y * -(P_0\theta_0 + P_X\theta_1)], \tag{7.58}$$

$$C_1 = \theta_1 + (\frac{c_1}{P_X})[Y * -(P_0\theta_0 + P_X\theta_1)], \tag{7.59}$$

$$X = C_1 + I + G + E, \tag{7.60}$$

$$D = P_X E - P_0 C_0 - P_0 bX, \tag{7.61}$$

kde X-Výroba, L-Práca, K-Kapitál, P_X-Cena doma, vyrobeného tovaru,P_0-Cena dovezeného tovaru, E-Export, b-Koeficient dovezeného tovaru, r-Úroková miera, Y*-Disponibilný príjem domácnosti, τ-Priame dane, s-Miera úspor, F-Prebytok vlády, C_0-Spotreba dovozu, C_1-Spotreba domáceho tovaru, θ_0-Reálna fixná spotreba dovozu, θ_1-Reálna fixná spotreba domácich tovarov, c_0-Hraničný sklon k spotrebe dovozu, c_1-Hraničný sklon k spotrebe domácich tovarov, G-Spotreba vlády, I-Investície, D-Prebytok exportu.