

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE



DIPLOMOVÁ PRÁCA

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave
Ekonomická a finančná matematika

Analýza modelov úrokovej miery s využitím explicitných riešení

Diplomová práca

Diplomant: Viktor Vajdička

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2005

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 3 |
| 1 Deriváty úrokovej miery | 4 |
| 1.1 Prehľad najpoužívanějších derivátov | 4 |
| 1.2 Hlavné veličiny finančného trhu | 6 |
| 2 Modely úrokových mier | 10 |
| 2.1 Modely časovej štruktúry úrokovej miery | 11 |
| 2.2 Jednofaktorové modely okamžitej úrokovej miery | 12 |
| 2.2.1 Najznámejšie typy jednofaktorových modelov | 14 |
| 2.3 Dvojfaktorové modely | 15 |
| 2.3.1 Rôzne typy dvojfaktorových modelov | 17 |
| 3 Explicitné tvary riešení v jednofaktorových modeloch | 19 |
| 3.1 Odvodenie všeobecnej parciálnej diferenciálnej rovnice pre jed- nofaktorový model | 19 |
| 3.1.1 Interpretácia trhovej ceny rizika | 21 |
| 3.2 Využitie explicitných tvarov riešení v jednofaktorových mode- loch | 22 |
| 4 Explicitné tvary riešení v dvojfaktorových modeloch | 28 |

| | | |
|-------|---|-----------|
| 4.1 | Odvodenie všeobecnej parciálnej diferenciálnej rovnice pre dvoj- faktorový model | 28 |
| 4.1.1 | Interpretácia trhových cien rizík | 31 |
| 4.2 | Explicitný tvar riešenia v dvojfaktorovom modeli so stochas- tickou volatilitou | 32 |
| 4.3 | Spriemernenie volatility v dvojfaktorovom modeli | 38 |
| | Záver | 42 |
| | Literatúra | 43 |
| | Príloha | 46 |

Úvod

Modely vývoja úrokovej miery používané na oceňovanie finančných derivátov sú v súčasnosti predmetom záujmu ako teoretikov na akademickej pôde univerzít, tak i praktikov v rôznych finančných inštitúciách. Najčastejšie používanými sú modely okamžitej úrokovej miery formulované pomocou stochastických diferenciálnych rovníc. Týmito modelmi a ich analýzou s využitím explicitných riešení sa budeme zaoberať v nasledujúcich stranách tejto práce.

Konkrétnejšie, v prvej kapitole ponúkneme prehľad najpoužívanejších derivátov úrokovej miery spolu s vysvetlením základnej terminológie, ktorá sa objavuje v celej práci. Druhá kapitola obsahuje prehľad najznámejších jedno a dvojfaktorových modelov. Takisto sa tu zaoberáme kritikou jednofaktorových modelov ako aj hlavnými dôvodmi, ktoré viedli k zavedeniu ďalších faktorov neistoty. Tretia kapitola obsahuje odvodenie oceňovacej parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom modeli, spolu s grafickými analýzami už existujúcich explicitných riešení. Vo štvrtej kapitole sa popri odvodení už spomínanej oceňovacej rovnice tentoraz však pre dvojfaktorový model, zaoberáme i možnosťami využitia explicitných riešení v modeli so stochastickou volatilitou. Ukážeme, že tento postup vedie k systému rovníc ktorého riešenie je potrebné hľadať pomocou numerických metód. Ďalej sa zaujíame o priemernenie cien dlhopisov a k nim príslušných výnosov vzhľadom na volatilitu, keďže tento parameter nie je možné odpozorovať z reálnych trhových dát.

Ďakujem svojmu vedúcemu diplomovej práce Doc. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za množstvo venovaného času, odborné vedenie a cenné rady, ktorými mi pomohol k napísaniu tejto práce.

Kapitola 1

Deriváty úrokovej miery

V posledných dvoch desaťročiach sme mohli byť svedkami mohutného nárastu v objeme transakcií s derivátmi úrokovej miery. Dá sa povedať, že v súčasnosti tieto deriváty patria medzi najobchodovanejšie artikly finančného trhu. Bolo navrhnutých mnoho nových produktov, ktorých vznik bol podnietený najmä manager – mi rôznych portfólií, ktorý sa pomocou nových produktov snažili čo najoptimálnejšie zabezpečiť svoje pozície voči výkyvom.

Vo všeobecnosti môžeme povedať, že deriváty úrokovej miery sú kontrakty, ktorých cena je citlivo závislá od úrokovej miery. Táto neplní len funkciu akéhosi diskontného faktora, ale v mnohých prípadoch slúži i na definovanie samotného *payoff* – *u*, čiže *výplaty*.

1.1 Prehľad najpoužívanějších derivátov

Bezкупónový dlhopis (zero coupon bond): je to najjednoduchší obchodovateľný kontrakt, ktorý predstavuje dohodu zaplatiť určitú čiastku v súčasnosti oproti príslubu obdržania (zvyčajne) vyššej sumy o nejaký čas.

Kupónový dlhopis (coupon bond): v porovnaní s bezкупónovým dlho-

pisom je to častejšie využívaný derivát. Jediný rozdiel medzi týmito dvoma kontraktami nájdeme v tom, že kupónový dlhopis, okrem na konci jeho platnosti vyplácanej čiastky, vypláca v dohodnutých intervaloch ďalšie (s pravidla menšie) čiastky (tzv. *kupóny*).

Pozn.: Kupónový dlhopis sa dá skonštruovať ako portfólio bezkupónových dlhopisov.

Európska Call (Put) opcia na dlhopis: poskytuje držiteľovi právo (nie však povinnosť) kúpiť (predať) zmieneny dlhopis za vopred dohodnutú cenu¹ vo vopred stanovenom čase².

Forward: je kontrakt v ktorom sa dve strany zaväzujú, že po uplynutí vopred dohodnutej doby jedna strana kúpi od druhej dohodnuté aktívum za presne stanovenú cenu.

Future: je kontrakt, ktorý svojim obsahom je takmer totožný s forwardom. Rozdiel by sme našli jedine v tom, že tento typ derivátu je na rozdiel od forwardu obchodovateľný výlučne na burze, ktorá aj ručí za splnenie záväzkov.

Cap: tento derivát jeho vlastníčkovi zhora ohraničuje výšku splátok pôžičky, ktorá bola poskytnutá na premenlivý (plávajúci) úrok. To je dosiahnuté tým, že vypisovateľ cap – u sa zaväzuje jeho majiteľovi finančne kompenzovať zvýšené výdavky vyplývajúce z aktuálnej hodnoty úrokovej miery, v prípade, že tá prevýši zmluvne stanovenú mieru (tzv. *Cap rate*).

Floor: tento derivát môžeme definovať analogicky ako cap. Floor poskytuje poistenie sa voči zníženiu úrokovej miery pod zmluvne stanovenú hranicu (tzv. *Floor rate*).

¹tzv. Strike price

²tzv. Expiračná doba

Posledné dva kontrakty sú v hojnej miere využívané zo strany veriteľov a dlžníkov v prípade poskytnutia alebo zaviazania sa splácať finančné prostriedky pri plávajúcej úrokovej miere. Veritelia na zaistenie svojich pozícií využívajú najmä nákup floor – ov a predaj cap–ov. Naopak dlžníci nakupujú cap – y a predávajú floor – y.

Swap: predstavuje kontrakt pri, ktorom dochádza k výmene platieb v presne stanovenej výške za platby premenlivej výšky.

To je docielené tým, že v zmluvných podmienkach swap – u sa strana *A* zaväzuje platiť strane *B* počas vopred dohodnutej doby platby prislúchajúce pevne stanovenej úrokovej miere r^* (tzv. *swap rate*). Na oplátku strana *B* sa zaväzuje platiť strane *A* počas tej istej doby platby prislúchajúce premenlivej úrokovej miere r .

Výška r sa zvyčajne stanovuje ako nejaká medzibanková úroková miera napr. *Libor*³, ak transakcie prebiehajú v dolároch, alebo môže to byť i *Bri-bor*⁴, v prípade ak by sa transakcie realizovali v korunách.

Swap umožňuje pretransformovanie pôžičky s premenlivo platiacim úrokom na pôžičku s konštantnou úrokovou splátkou alebo i naopak.

Swaption: je to v podstate opcia na úrokový swap. Svojmu majiteľovi poskytuje právo (nie však povinnosť) vstúpiť v presne stanovenom čase do swap – kontraktu.

1.2 Hlavné veličiny finančného trhu

Je všeobecne známe, že samotná úroková miera alebo úrok nie je obchodovateľný artikel. Na finančnom trhu sa iba obchoduje s produktami, ktorých

³London Inter - Bank Offer Rate

⁴Bratislava Inter - Bank Offer Rate

hodnota je závislá od úrokovej miery. Za základný kontrakt od ktorého ceny sú odvodené úrokové miery sa považuje bezkupónový dlhopis. Pre jednoduchosť predpokladajme, že suma vyplatená v dobe vypršania (*maturity date* alebo *expiration time*) tohto dlhopisu je 1 (napr. 1 \$k), potom takýto kontrakt nazveme diskontný dlhopis (*discount bond*). Jeho hodnotu v ľubovľnom čase t menšom ako T označíme $P(t, T)$, kde T označuje dobu vypršania. *Pozn.:* Platí, že $P(T, T) = 1$.

Označme ďalej $R(t, T)$ spojitú úrokovú mieru platnú v čase t s dobou splatnosti v T . Potom na základe trhovej ceny dlhopisu $P(t, T)$ je táto úroková miera určená nasledovným vzťahom:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}, \quad (1.1)$$

z ktorého ekvivalentnými úpravami vieme odvodiť aj závislosť ceny dlhopisu $P(t, T)$ od úrokovej miery:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}.$$

Vzťah (1.1) vo finančnej terminológii predstavuje tzv. *výnos do splatnosti* (*yield to maturity*). Závislosť úrokových mier v danom čase t od doby do splatnosti T nám dáva *časovú štruktúru úrokových mier* (*term structure of interest rates*), alebo inak povedané *výnosovú krivku* (*yield curve*).

Začiatok tejto výnosovej krivky nám označuje bod reprezentujúci úrokovú mieru platnú na veľmi krátke obdobie, ktorú nazveme *spot rate* alebo *short time interest rate* a zapíšeme ako $r(t)$. Teda:

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) = R(t, t).$$

Na rozdiel od spravidla klesajúceho charakteru závislosti medzi cenou dlhopisu a jeho maturitou, môže mať graf závislosti $R(t, T)$ od T rastúci, klesajúci, alebo i zmiešaný priebeh. Tento variabilný tvar výnosovej krivky odzrkadľuje priemernú návratnosť z dlhopisov.

V minulosti boli na vysvetlenie tvaru krivky term structure navrhnuté mnohé teórie. Najznámejšie z nich sú:

1. **Teória očakávaní (Expectation theory)**
2. **Teória preferencie likvidity (Liquidity preference theory)**
3. **Teória rozdelenia trhu (Market segmentation theory)**

S podrobnejším popisom horeuvedených teórií sa môžeme stretnúť napríklad v článku [1].

Ďalšími dôležitými veličinami finančného trhu sú *forwardové úrokové miery*. Hodnoty týchto úrokov sú na trhu určené bezarbitrážnymi cenami forwardových kontraktov. Tieto kontrakty predstavujú dohodu dvoch strán uskutočnenú v čase t , v ktorej sa jedna strana zaviazá, že v čase $T_1 > t$ kúpi za sumu K dlhopis splatný v čase $T_2 > T_1$. Aby nemohla na trhu nastať arbitrážna príležitosť musí platiť podmienka:

$$-e^{-R(t,T_1)(T_1-t)}K + e^{-R(t,T_1)(T_1-t)}P(T_1, T_2) = 0$$

vyjadrujúca tú skutočnosť, že hodnota kontraktu v čase jeho uzavretia musí byť rovná 0. Z tejto podmienky dostávame, že $K = \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}$ je jediná možná správna cena forwardového kontraktu. Pomocou tejto ceny vieme určiť vzťah

$$K = e^{-f(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)}$$

pre forwardovú úrokovú mieru $f(t, T_1, T_2)$ platnú v čase t na obdobie (T_1, T_2) . Teda

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{1}{T_2 - T_1} \ln K = -\frac{1}{T_2 - T_1} \ln \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}.$$

Opäť analogicky ako pri short rate ak uvažujeme, že $T_1 \rightarrow T_2$ dostávame okamžitú forwardovú úrokovú mieru $f(t, T)$:

$$\begin{aligned} f(t, T) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t, T, T + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, T + \Delta t) - \ln P(t, T)}{\Delta t} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Pozn. : Zintegrovaním rovnice (1.2) podľa premennej T dostávame:

$\int_t^T f(t, s) ds = -\ln P(t, T) + \ln P(t, t)$. Keďže druhý sčítanec na pravej strane je rovný 0 (lebo $P(t, t) = 1$), môžeme z tejto rovnice vyjadriť väzbu

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds} \quad (1.3)$$

medzi cenou dlhopisu a okamžitou forwardovou úrokovou mierou.

Dosadením vyjadrenia $P(t, T)$ v tvare $P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$ do (1.3) a po vykonaní následných úprav dostávame:

$$\begin{aligned} e^{-R(t, T)(T-t)} &= e^{-\int_t^T f(t, s) ds} \quad / \ln \\ R(t, T)(T-t) &= \int_t^T f(t, s) ds \quad / \frac{1}{T-t} \\ R(t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds \end{aligned} \quad (1.4)$$

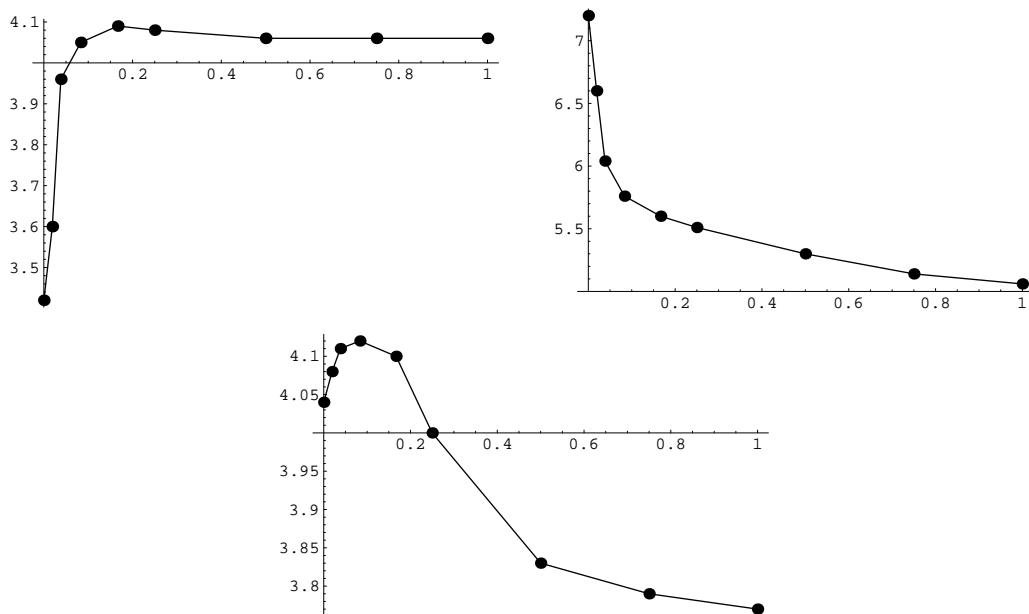
Tieto posledné dve rovnice (1.3) a (1.4) nám umožňujú získať úplné informácie o výnosoch $R(t, T)$ a cenách dlhopisov $P(t, T)$ za predpokladu, že časová štruktúra okamžitej forwardovej úrokovej miery $f(t, T)$ je známa pre ľubovoľný čas do splatnosti T .

Kapitola 2

Modely úrokových mier

Banky, poisťovne, správcovské spoločnosti penzijných fondov a iné finančné inštitúcie nezaujíma len aktuálna trhovú hodnotu nimi spravovaných portfólií, ale je pre ne dôležité vedieť (alebo aspoň vedieť seriózne predpovedať) i to ako sa táto hodnota bude vyvíjať v budúcnosti. V mnohých prípadoch sú v týchto portfóliách zastúpené i cenné papiere, z ktorých nezanedbateľná časť môže byť emitovaná na veľmi dlhé obdobia. Napríklad v prípade štátnych dlhopisov bežná doba splatnosti je desať rokov. Je preto nereálne predpokladať, že počas takej dlhej doby zostanú všetky úrokové miery s rôznymi dobami splatnosti vytvárajúce súčasnú trhovú term structure nezmenené. Faktorov, ktoré ovplyvňujú výšku úrokov na term structure a tým i jej samotný tvar je mnoho: jednak sú to intervencie centrálnych bánk, ale výška úrokových sadzieb je závislá aj od stále meniacej sa hladiny ponuky a dopytu po jej rôznych derivátoch.

Nasledujúce príklady rôznych tvarov reálnej (trhovej) výnosovej krivky sú odpozorované z práce [15]. Jedná sa o krivky term structure získané z Bid hodnôt Bratislavského BRIBORu, ktoré boli platné v dátumoch uvedených pod obrázkom.



Obr. 2.1: Term structure platná v dňoch: 9. júna, 4. februára a 20. októbra 2004 (po riadkoch).

Kľúčovou otázkou sa teda stáva ako modelovať vývoj úrokových mier. Jeden druh modelov snažiaci sa popísať správanie úrokových mier je v literatúre známy ako *modely časovej štruktúry úrokovej miery* (*term structure of interest rate models*) alebo ako *modely výnosovej krivky* (*yield curve models*).

2.1 Modely časovej štruktúry úrokovej miery

Teoretické modely term structure používané pri oceňovaní rôznych derivátov úrokovej miery sú v súčasnosti spoločným predmetom záujmu finančných praktikov ako i teoretikov na akademickej pôde. Tradičným prístupom k modelovaniu term structure je snaha zachytenia jej tvaru pomocou dynamiky krátkodobej úrokovej miery (short rate). Short rate je hlavným určujúcim faktorom v týchto modeloch. Inou alternatívou je miesto použitia short rate

zobrať forwardovú úrokovú mieru, dlhodobú úrokovú mieru (long rate) alebo akúkoľvek inú sadzbu, ktorá je priamo pozorovateľná na finančnom trhu. V literatúre nachádzame dva hlavné typy term structure modelov:

- 1. Rovnovážne (equilibrium) modely:** pri týchto modeloch je počiatočná trhová term structure výstupom z modelu. Najviac kritizovaným nedostatkom týchto modelov býva skutočnosť, že len málokedy úplne presne vystihnú súčasnú výnosovú krivku. Tento nedostatok sa dá do značnej miery eliminovať vhodným nastavením (kalibráciou) parametrov.
- 2. Bezarbitrážne (noarbitrage) modely:** pri týchto modeloch je počiatočná trhová term structure vstupom do modelu. Tento výsledok je dosiahnutý umožnením výskytu časovo závislých parametrov vo vnútri modelu, ktoré nám automaticky zabezpečia vystihnutie súčasného stavu.

2.2 Jednofaktorové modely okamžitej úrokovej miery

Samotný názov "jednofaktorové modely" vychádza zo skutočnosti, že za jediný zdroj neistoty je považovaná short rate. Základným predpokladom je, že dynamika short rate r sleduje spojitý Markovovský stochastický proces¹, ktorý je popísaný nasledovnou stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw. \quad (2.1)$$

Koeficient $\mu(r, t)$ označuje drift a $\sigma(r, t)$ je volatilita. Náhodnosť je v tejto poslednej rovnici zastúpená prostredníctvom prírastkov dw Wienerovho

¹Náhodný proces v ktorom pravdepodobnostné rozdelenie $r_{t'}$ v ľubovolnom čase $t' > t$ závisí len od aktuálnej hodnoty r_t .

procesu w . Keďže jedna z vlastností prírastkov dw je normalita ich rozdelenia, tak táto skutočnosť nám implikuje, že rozdelenie short rate r generované rovnicou (2.1) bude takisto normálne.

V praxi však gaussovskosť rozdelenia trhových dát nie je automaticky zaručená. Okrajovo sa touto skutočnosťou zaoberali i autori článku [2], ktorí normalitu rozdelenia a s ňou spojené problémy skúmali na skutočných hodnotách úrokových sadzieb. Svojej analýze podrobili denné výnosy z amerických T – Bill s rôznymi dobami splatnosti. Prvotné testy, skúmajúce empirické rozdelenie dát, správnosť predpokladu o normalite rozdelenia nepotvrdzovali. Avšak keď sa autori podrobnejšie pozreli na štruktúru dát a odfiltrovali niekoľko málo extrémnych hodnôt, ktoré boli zjavne zapríčinené monetárnou politikou federálnej banky a vplyvom umelých fluktuácií, predpoklad o gaussovskom rozdelení bol už celkom oprávnený.

Pri určovaní presného tvaru jednofaktorového modelu treba do stochastického procesu pre premennú r dodať konkrétne tvary funkcií $\mu(r, t)$ a $\sigma(r, t)$. Tie sa určujú tak aby výsledný difúzny proces pre riadiacu premennú r spĺňal niektoré základné vlastnosti odpozorované z reálnych dát. Sú to najmä:

- úroková miera by nemala nadobúdať záporné a ani príliš vysoké hodnoty
- *Mean – reversion*, vlastnosť priťahovania úrokovej miery k akejsi dlhohodobej rovnovážnej hodnote. Zapríčiňuje to skutočnosť, že vysoké hodnoty úroku zvyknú mať negatívny drift tzn. častejšie sú nasledované poklesom než ďalším rastom. Opak platí pre nízke hodnoty úroku.
- rozdielnosť volatility úrokov na rôzne obdobia. Úrokové sadzby s kratšou dobou platnosti zvyknú byť volatilnejšie, než tie s dlhou dobou platnosti.

- meniaci sa hodnota volatility s meniacou sa hodnotou short rate

2.2.1 Najznámejšie typy jednofaktorových modelov

Jedným z prvých, ktorý do svojho modelu zahrnul vlastnosť mean – reversion bol Vašíček [3], ktorý navrhol stochastický difúzny proces pre premennú r v tvare:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw. \quad (\text{Vašíčkov model})$$

Ekonomická interpretácia koeficientov: κ predstavuje silu, ktorou je úroková miera r priťahovaná k svojej dlhodobej rovnovážnej hodnote θ .

Medzi najviac kritizované nedostatky tohto modelu sa radí:

- možnosť úrokovej miery nadobudnúť i záporné hodnoty
- nezávislosť volatility od hodnoty úrokovej miery r

Tieto nedostatky sa snažili odstrániť autori článku [1] navrhnutím stochastického procesu v tvare:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw. \quad (\text{CIR model})$$

V tomto modeli z počiatočného kladného úroku r_0 , úroková miera r_t už nemôže nadobudnúť záporné hodnoty. Toto je zabezpečené dvomi skutočnosťami:

- 1.) kladnou hodnotou dlhodobej rovnovážnej hodnoty θ ,
- 2.) klesajúcou volatilitou $\sigma\sqrt{r}$ pre r idúce k nule.

Za povšimnutie takisto stojí fakt, že volatilita $\sigma\sqrt{r}$ tohto procesu už nie je konštantná pre všetky hodnoty úroku r . Pre vyššie úroky sa predpokladá vyššia volatilita (tzv. vlastnosť *level effect-u*).

Tvary ďalších modelov ako napríklad Dothanov [4], Brennan and Schwartzov [5], a Mertonov [6] model môžeme spoločne vyjadriť rovnicou:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw .$$

Odhadovať koeficienty tohto, vo všeobecnom tvare zapísaného jednofaktorového modelu, sa podujali autori článku [7]. Zovšeobecnenou metódou momentov uskutočnenou na reálnych jednomesačných výnosoch z amerických Treasury bill zistili, že najlepšie zachytávali dynamiku short rate tie modely, v ktorých bola volatilita veľmi citlivo závislá od výšky samotnej hodnoty short rate. Konkrétne nimi empiricky odhadnutá hodnota koeficientu γ , udávajúca silu level effectu, bola $\frac{3}{2}$. Ďalším zistením bolo, že tie modely, ktoré predpokladali hodnoty parametra $\gamma > 1$ umožňovali rozmanitejšie tvary výnosových kriviek než tie s koeficientom $\gamma \leq 1$.

Všetky doteraz spomenuté modely patrili do triedy rovnovážnych term structure modelov. Medzi najznámejších predstaviteľov z triedy bezarbitrážnych modelov patria:

- $dr = \kappa(t)dt + \sigma_r dw$ (Ho – Lee model)
- $dr = [\kappa(t) - \alpha(t)r]dt + \sigma_r(t)r^\beta dw$ (Hull – White model)
- $d \ln r = [\kappa(t) - \frac{\sigma_r'(t)}{\sigma_r(t)} \ln r]dt + \sigma_r(t)dw$ (Black – Derman – Toy model)

S podrobnejšou analýzou predchádzajúcich troch modelov sa môžeme stretnúť napríklad v publikácii [8].

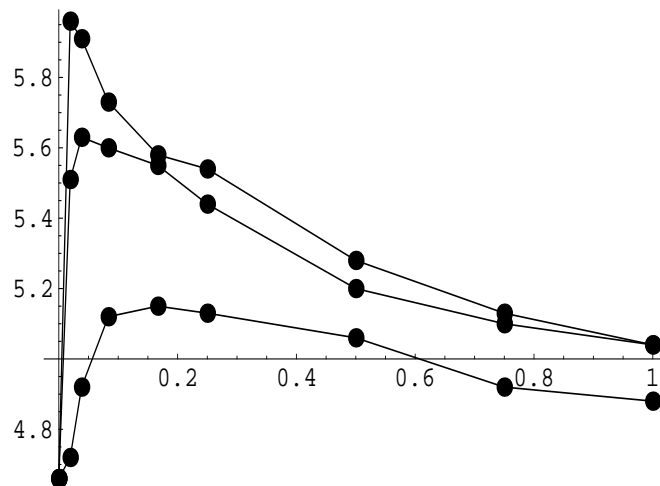
2.3 Dvojfaktorové modely

V súčasnosti panuje všeobecné presvedčenie, že vývoj úrokových mier ovplyvňuje viacero rôznych faktorov. Tomuto faktoru nasvedčuje i to, že reálne výnosy

z dlhopisov rôznych maturít nie sú perfektne korelované ako to implikoval jednofaktorový model².

Všeobecne môžeme povedať, že viacfaktorové modely oceňovania derivátov úrokových mier, ktorých vznik bol podnietený snahou odstrániť nereálne črty jednofaktorových modelov ako aj ich možnosťami zachytiť rozmanitejšie podoby výnosových kriviek, predpokladajú existenciu viacerých stavových premenných ovplyvňujúcich tvar term structure. Výlučne z praktických dôvodov počet faktorov je zvyčajne obmedzený na dva kvôli zachovaniu väčšej analytickej traktability daných modelov.

Ďalšiu motiváciu pre vznik viacfaktorových modelov priniesla možnosť získania rôznych tvarov výnosových kriviek pri rovnakej počiatočnej hodnote úrokovej miery v závislosti od zmeny hodnoty ostatných faktorov. Na nasledujúcom obrázku (Obr. : (2.2)) vidíme ilustráciu troch výnosových kriviek platných v dňoch 23. januára, 18. februára a 14. apríla 2004.



Obr. 2.2: Tri rôzne výnosové krivky vychádzajúce zo spoločného počiatku.

²V jednofaktorovom svete, akonáhle r zdefinujeme ako Itôov proces určený jediným Brownovým pohybom, celá výnosová krivka je tým pádom určená.

Všimnime si, že všetky tri krivky vychádzajú zo spoločného počiatku reprezentujúceho jednodňovú (overnight) úrokovú mieru. Pri jednofaktorovom modeli, kde z počiatočnej hodnoty overnight vychádza len jedna krivka by sme takúto situáciu bez akýchkoľvek zásahov do parametrov modelu nevytvorili. Naopak pri viacfaktorových modeloch zmenou hodnoty niektorého faktora získame inú podobu výnosovej krivky pri rovnakej počiatočnej hodnote overnight.

2.3.1 Rôzne typy dvojfaktorových modelov

V oblasti problematiky týkajúcej sa dvojfaktorových modelov bolo napísaných mnoho prác, kde môžeme nájsť aj konkrétne návrhy modelov spolu s ich empirickými štúdiami.

Prvé prístupy k výberu druhého faktora viedli k zvoleniu nejakej, priamo na trhu pozorovateľnej ekonomickej veličiny. Tohto príkladom môže byť model uvažovaný autormi v práci [1], kde ku short rate je ako druhý faktor pridaná očakávaná krátkodobá miera inflácie π^e .

Do tejto triedy môžeme zaradiť i model *Brennan and Schwartz* [5] s voľbou faktorov short rate r a *long-rate* l (dlhodobá úroková miera):

$$\bullet \quad \begin{aligned} dr &= \mu_r(r, l, t)dt + \sigma_r(r, l, t)dw_1 \\ dl &= \mu_l(r, l, t)dt + \sigma_l(r, l, t)dw_2, \end{aligned} \quad (\text{Brennan and Schwartz model})$$

kde dw_1 a dw_2 sú prírastky Wienerovho procesu s mierou korelácie ρ .

Veľmi častou modifikáciou ich modelu sú modely, kde namiesto faktora long rate l , vystupuje *úrokový spread* s definovaný ako rozdiel medzi dlhodobou úrokovou mierou l a short rate r . Model s takto zvolenými stavovými premennými s a r ako prvý navrhli *Schaefer and Schwartz* [11]. Takýto výber faktorov umožňuje použitie predpokladu o ich vzájomnej ortogonalite. Empirické štúdie potvrdzujúce túto skutočnosť môžeme nájsť v prácach [9] a [10]. Napríklad v práci [9] autori skúmajú predpoklad, že miera korelácie ρ

medzi prírastkami long rate l a úrokovým spreadom s je 0. Túto skutočnosť sa im následne podarí i empiricky preukázať na reálnych dátach. Výber takých faktorov do modelu, ktorých prírastky sú navzájom nekorelovné značne zvyšuje traktabilitu modelu a zvyšuje možnosti získania explicitných riešení pre ceny dlhopisov.

Úplne inú triedu dvojfaktorových modelov predstavujú tie, kde ako druhý faktor sa zoberie jeden parameter z jednofaktorového modelu. Do tejto skupiny môžeme zaradiť model CIR – dvojfaktorový model [12]:

$$\bullet \quad \begin{aligned} dr &= \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw_1 \\ d\theta &= \bar{\kappa}(\theta^* - \theta)dt + \bar{\sigma}\sqrt{\theta}dw_2, \end{aligned} \quad (\text{CIR – dvojfaktorový model})$$

kde ako druhá stavová premenná je uvažovaná dlhodobá rovnovážna hodnota θ stochastického procesu pre r .

V poslednej dobe, medzi teoretikmi ale i praktikmi, sa stali veľmi populárne tzv. *modely so stochastickou volatilitou*. Medzi najznámejšie patria:

$$\bullet \quad \begin{aligned} dr &= \alpha(\bar{r} - r)dt + \sqrt{v}dw_1 \\ dv &= \gamma(\bar{v} - v)dt + \xi\sqrt{v}dw_2, \end{aligned} \quad (\text{Fong and Vašíček model [13]})$$

ako aj

$$\bullet \quad \begin{aligned} dr &= \kappa_1(\bar{r} - r)dt + \sigma r^\gamma dw_1 \\ d(\ln \sigma^2) &= \kappa_2(\alpha - \ln \sigma^2)dt + \rho dw_2. \end{aligned} \quad (\text{Anderson and Lund model [14]})$$

Podnet na zahrnutie volatility, ako druhý faktor neistoty, dali najmä mnohé empirické štúdie, ktorým sa podarilo potvrdiť jej stochastický charakter na reálnych dátach.

Kapitola 3

Explicitné tvary riešení v jednofaktorových modeloch

Samotný stochastický proces pre okamžitú úrokovú mieru r nám ešte nič nehovorí o cenách dlhopisov rôznych maturít. Teraz však predpokladajme, že cena bezkupónového dlhopisu P , je okrem okamžitého času t a maturity T závislá i od hodnoty short rate r . Použitie *Itôovej lemy*, jedného z pilierov modernej finančnej analýzy, nám umožňuje získať parciálnu diferenciálnu rovnicu popisujúcu časový vývoj cien dlhopisov všetkých maturít. Odvodenie tejto rovnice je bezprostredným krokom pred využitím explicitných tvarov riešení pre ceny dlhopisov.

3.1 Odvodenie všeobecnej parciálnej diferenciálnej rovnice pre jednofaktorový model

Nami demonštrovaný postup odvodenia oceňovacej rovnice bol inšpirovaný publikáciou [8]. Predpokladajme, že prírastky okamžitej úrokovej miery r

vyhovujú stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw .$$

Nech cena bezkupónového dlhopisu so splatnosťou v čase T je funkciou okamžitého času t a úrokovej miery r . Potom funkcia $P = P(r, t, T)$ vyhovuje predpokladom jednorozmernej Itôovej lemy a jej diferenciál môžeme napísať v tvare:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw ,$$

ktorý môžeme zjednodušiť vyjadriť ako:

$$dP = \bar{\mu}(r, t, T)dt + \bar{\sigma}(r, t, T)dw , \quad (3.1)$$

kde drift $\bar{\mu}(r, t, T) = \frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$ a volatilita $\bar{\sigma} = \sigma \frac{\partial P}{\partial r}$. V ďalšom kroku, s cieľom skonštruovania bezrizikového portfólia, zostavíme portfólio pozostávajúce z jedného dlhopisu s dobou splatnosti T_1 a Δ dlhopisov s dobou splatnosti T_2 :

$$\pi = P(T_1) + \Delta P(T_2) ,$$

ktorého zmenu za časový prírastok dt napíšeme ako:

$$d\pi = dP(T_1) + \Delta dP(T_2) . \quad (3.2)$$

Dosadením vyjadrenia dynamiky ceny dlhopisu danej rovnicou (3.1) do rovnice (3.2) dostaneme:

$$d\pi = (\bar{\mu}(T_1) + \Delta \bar{\mu}(T_2)) dt + (\bar{\sigma}(T_1) + \Delta \bar{\sigma}(T_2)) dw .$$

Voľbou $\Delta = -\frac{\bar{\sigma}(T_1)}{\bar{\sigma}(T_2)}$ dôjde k vynulovaniu stochastických častí a teda dostaneme portfólio, ktorého zmena za časový okamih dt bude už deterministická. Keď chceme zabezpečiť aby na trhu nebola možnosť arbitráže, musí platiť, že návratnosť $\frac{d\pi}{\pi}$ tohto portfólia za časový okamih dt sa musí rovnať bezrizikovému výnosu r , ktorý by sme dostali v banke. Teda musí platiť:

$$\frac{d\pi}{\pi} = r dt .$$

Čiže dostávame:

$$\left(\bar{\mu}(T_1) - \frac{\bar{\sigma}(T_1)}{\bar{\sigma}(T_2)} \bar{\mu}(T_2) \right) dt = r \left(P(T_1) - \frac{\bar{\sigma}(T_1)}{\bar{\sigma}(T_2)} P(T_2) \right) dt.$$

Jednoduchými úpravami posledného vzťahu dospejeme až k rovnosti:

$$\frac{\bar{\mu}(T_1) - rP(T_1)}{\bar{\sigma}(T_1)} = \frac{\bar{\mu}(T_2) - rP(T_2)}{\bar{\sigma}(T_2)}.$$

Všimnime si, že ľavá strana tejto rovnosti je funkciou premennej T_1 (nie aj T_2) a pravá strana zase funkciou iba T_2 (nie aj T_1). A keďže doby do splatnosti T_1 a T_2 boli ľubovoľné, jediný možný spôsob pre platnosť tejto rovnosti nastane vtedy, keď výrazy na oboch stranách rovnice budú nezávislé od T . Teda existuje funkcia $\lambda(r, t)$ daná väzbou:

$$\lambda(r, t) = \frac{\bar{\mu}(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\bar{\sigma}(r, t, T)}, \quad t < T; \quad (3.3)$$

ktorú nazveme *trhová cena rizika*.

Nakoniec dosadením do výrazov $\bar{\mu}(r, t, T)$ a $\bar{\sigma}(r, t, T)$ vo vyjadrení (3.3) dostávame výslednú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(r, t, T)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad t < T; \quad (3.4)$$

s koncovou podmienkou $P(r, T, T) = 1$.

3.1.1 Interpretácia trhovej ceny rizika

K úplnému popisu jednofaktorového modelu okrem určenia stochastického procesu pre short rate r , neoddeliteľne patrí i dodanie neznámej funkcie trhovej ceny rizika $\lambda(r, t)$. Táto má pomerne elegantnú ekonomickú interpretáciu.

Uvažujme opäť vyjadrenie pre zmenu v cene dlhopisu za časový okamih dt :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw.$$

S využitím oceňovacej rovnice (3.4) môžeme predchádzajúci vzťah upraviť do nasledovného tvaru:

$$dP = \left(\sigma \lambda \frac{\partial P}{\partial t} + rP \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw,$$

alebo

$$dP = rPdt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} (dw + \lambda dt).$$

Prítomnosť náhodného prírastku dw Wienerovho procesu w poukazuje na to, že zmena ceny dlhopisu nie je bezriziková. Deterministický člen λdt môžeme chápať ako nejaký výnos navyše oproti bezrizikovej miere r (člen $rPdt$ môžeme chápať ako istý výnos ponúkaný bankou), ktorý investor požaduje ako kompenzáciu za akceptovanie určitej miery neistoty dw . Z tohto dôvodu sa $\lambda(r, t)$ zvykne nazývať trhovú cenu rizika. Keďže platí $\frac{\partial P}{\partial r} < 0$ (ceny dlhopisov sú klesajúcimi funkciami úrokovej miery) zvykne sa $\lambda(r, t)$ definovať ako nejaká záporná funkcia.

3.2 Využitie explicitných tvarov riešení v jednofaktorových modeloch

Existujú dva spôsoby ako sa od parciálnej diferenciálnej rovnice (3.4) pre cenu dlhopisu dostať i ku samotným hodnotám cien dlhopisov:

1. numerické schémy
2. explicitné tvary riešení pre ceny dlhopisov $P(r, t, T)$.

Veľmi pekná analýza modelov vývoja úrokových mier, ako aj nimi implikovaných cien dlhopisov a výnosových kriviek z pohľadu numeriky, môže byť nájdená v [15]. V tejto predkladanej diplomovej práci sa inšpirujeme niektorými postupmi z [15] avšak analýzu vybraných modelov prevedieme

s využitím explicitných tvarov riešení. Oproti numerickým schémam použitie explicitného riešenia má tú nevýhodu, že sa do značnej miery zredukuje množina modelov, u ktorých môže byť tento postup úspešne aplikovaný. Túto skutočnosť demonštrujeme neskôr. Nami použitý prístup má však i niekoľko výhod: vedie k uľahčeniu a skráteniu procesu na získanie konkrétnych hodnôt cien dlhopisov a nimi určených výnosových kriviek, ako i k jednoduchšiemu overovaniu analytických vlastností daného modelu.

Uvažujme všeobecný tvar jednofaktorového modelu:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw,$$

pre ktorý príslušnú oceňovaciu rovnicu (3.4) môžeme prepísať do tvaru:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa(\theta - r) - \lambda \sigma r^\gamma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 r^{2\gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad t < T; \quad (3.5)$$

s koncovou podmienkou $P(T, T) = 1$ a ešte so stále bližšie nešpecifikovanou funkciou $\lambda = \lambda(r, t)$.

Použime predpoklad: Nech riešenie rovnice (3.5) je tvaru:

$$P(r, t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r}, \quad \forall t < T, \quad (3.6)$$

ktorý môžeme nájsť napríklad i v publikácii [8].

Koncová podmienka $P(T, T) = 1$ nám implikuje, že musí platiť:

$$A(T, T) = 1, \quad B(T, T) = 0.$$

Zavedenie tohto predpokladu nám umožní pretransformovať problém hľadania funkcie $P(r, t, T)$ spĺňajúcej (3.5) na úlohu nájdenia vhodných funkcií $A(t, T)$ a $B(t, T)$ vyhovujúcich systému diferenciálnych rovníc. Postup odvodenia tohto systému ukážeme v nasledujúcich riadkoch.

Dosadenie tohto tvaru riešenia (3.6) do rovnosti (3.5) a následná úprava vedie k rovnici:

$$\frac{\dot{A}}{A} - \dot{B}r - \kappa\theta B + \kappa r B + \lambda \sigma r^\gamma B + \frac{1}{2} \sigma^2 r^{2\gamma} B^2 - r = 0. \quad (3.7)$$

Na to aby exponent pri premennej r vo výraze $\frac{1}{2}\sigma^2 r^{2\gamma} B^2$ bol rozmerovo konzistentný s tými členmi v rovnici, v ktorých vystupuje r umocnené na nultú resp. na prvú musí platiť, že:

$$2\gamma = 0, \quad \text{alebo} \quad 2\gamma = 1 \implies \gamma = 0, \quad \text{alebo} \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Voľby $\gamma = 0$ resp. $\gamma = \frac{1}{2}$ sú doposiaľ jediné dve známe možnosti pri jednofaktorových modeloch, kedy explicitný tvar riešenia (3.6) vedie k riešiteľnému systému diferenciálnych rovníc. Výber všeobecného jednofaktorového modelu, v ktorom bude $\gamma = 0$ zodpovedá už spomínanému Vašíčkovmu modelu, ktorého autor bližšie určil i funkciu λ ako $\lambda(r, t) = \bar{\lambda}$, kde $\bar{\lambda} =$ konštanta. Model s hodnotou $\gamma = \frac{1}{2}$ ako aj s funkciou $\lambda(r, t) = \bar{\lambda}\sqrt{r}$ zodpovedá CIR modelu. Dosadenie hodnoty $\gamma = 0$ resp. $\gamma = \frac{1}{2}$ spolu s príslušnými funkciami trhovej ceny rizika do rovnice (3.7) vedie k nasledovným dvom systémom diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie $A(t, T)$ a $B(t, T)$:

$$(*) \begin{cases} \dot{A} + (\bar{\lambda}\sigma - \kappa\theta)B + \frac{1}{2}\sigma^2 B = 0 \\ \dot{B} - \kappa B + 1 = 0 \end{cases} \quad (**) \begin{cases} \dot{A} - \kappa\theta B = 0 \\ \dot{B} - (\kappa + \bar{\lambda}\sigma)B - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Pričom (*) je príslušný systém pre Vašíčkov model a (**) pre CIR model. V publikácii [8] môžeme nájsť konkrétne tvary riešení pre funkcie $A(t, T)$ a $B(t, T)$, týchto sústav, pre oba uvažované modely:

$$\text{Vašíček: } B(t, T) = \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)})$$

$$A(t, T) = \exp \left[R_\infty (B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (B(t, T))^2 \right], \quad t < T;$$

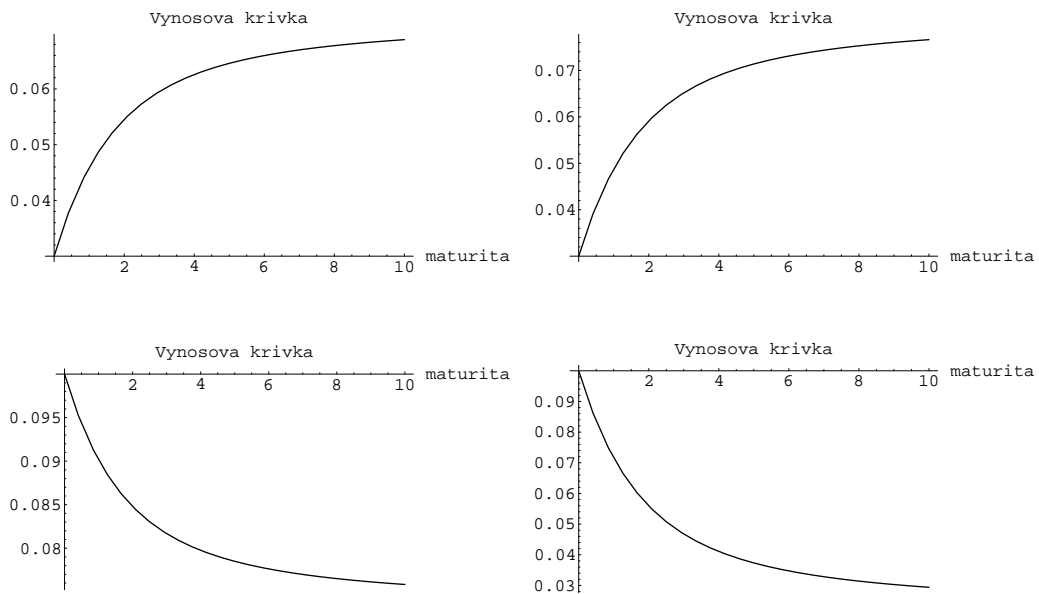
$$\text{kde } R_\infty = \theta - \frac{\bar{\lambda}\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}.$$

$$\text{CIR: } B(t, T) = \frac{2 [e^{\varphi(T-t)} - 1]}{(\varphi + \psi) [e^{\varphi(T-t)} - 1] + 2\varphi}$$

$$A(t, T) = \left\{ \frac{2\varphi e^{(\varphi+\psi)(T-t)/2}}{(\varphi + \psi) [e^{\varphi(T-t)} - 1] + 2\varphi} \right\}^{2\kappa\theta/\sigma^2}, \quad t < T;$$

kde $\psi = \kappa + \bar{\lambda}\sigma$ a $\varphi = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2}$.

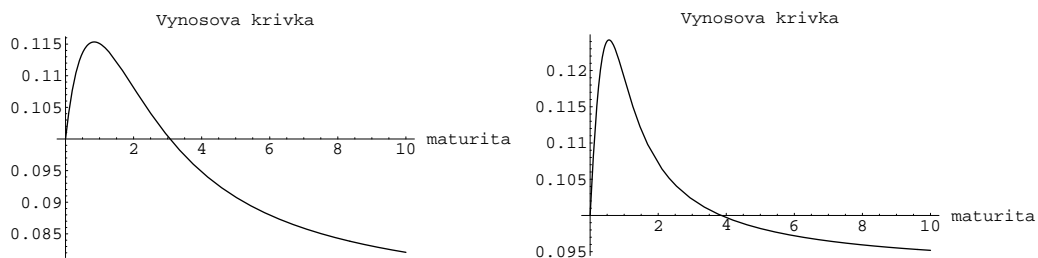
Ukážky niekoľkých grafov cien dlhopisov a nimi implikovaných výnosových kriviek určených týmito modelmi môžeme vidieť na nasledovných obrázkoch:



Obr. 3.1: Vašíček(vľavo): $\kappa = 1$, $\theta = 0,06$, $\sigma = 0,02$, $\lambda = -0,667$; CIR(vpravo): $\kappa = 1$, $\theta = 0,08$, $\sigma = 0,05$, $\lambda = -0,667$.

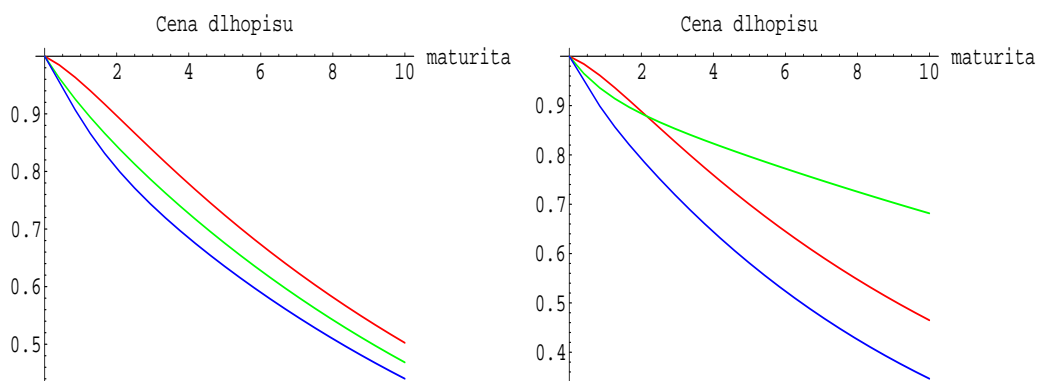
Ako vidieť podľa počiatkov zobrazených výnosových kriviek, pre dvojicu v prvom riadku je short rate $r = 0,03$ (rastúce výnosové krivky), pre dvojicu v druhom $r = 0,1$ (klesajúce výnosové krivky).

Úplne iný tvar výnosovej krivky dosiahneme takisto pre short rate $r = 0,1$. Pričom zmeníme hodnoty ostatných parametrov tak ako ich vidíme pod obrázkom:



Obr. 3.2: Vašíček(vľavo): $\kappa = 1$, $\theta = 0,12$, $\sigma = 0,5$, $\lambda = -0,667$;
CIR(vpravo): $\kappa = 1$, $\theta = 0,13$, $\sigma = 2$, $\lambda = -0,667$.

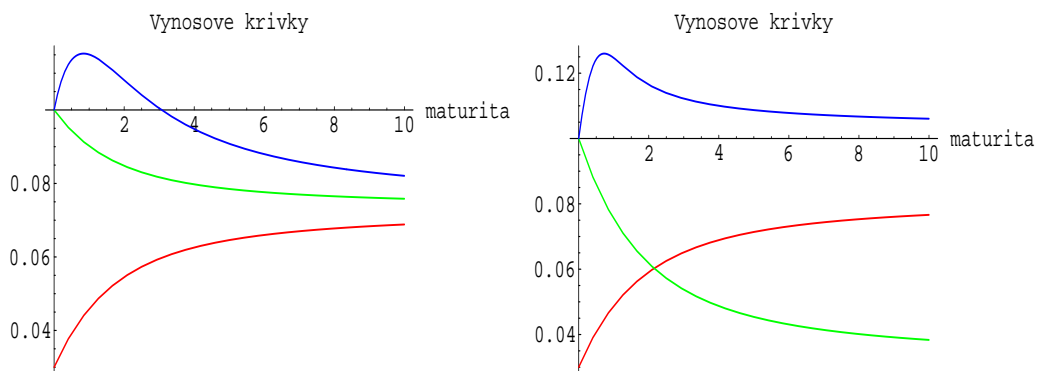
Na ďalšom obrázku (Obr. : 3.3) vidíme spoločné grafy cien dlhopisov. Červená krivka zodpovedá prvej dvojici výnosových kriviek, zelená druhej a modrá tretej dvojici (po riadkoch).



Obr. 3.3: Spoločný obrázok pre ceny dlhopisov vo všetkých troch prípadoch(Vašíček(vľavo), CIR(vpravo)).

Ceny dlhopisov pre rôzne hodnoty parametrov vo Vašíčkovom modeli sa nepretínajú v žiadnom bode. Teda ani k nim príslušné výnosové krivky by sa nemali nikde pretínať. Na spoločnom grafe cien dlhopisov implikovaných

CIR modelom si môžeme všimnúť jeden priesečník. Tento by sa mal prejavíť tým, že v rovnakej dobe "maturita", by sa mali križovať i k nim príslušné výnosové krivky. Túto skutočnosť ilustrujeme na poslednom obrázku v tejto kapitole (Obr. : 3.4).



Obr. 3.4: Spoločný obrázok výnosových kriviek pre všetky tri prípady (Vašíček(vľavo), CIR(vpravo)).

Zosumarizovaním predchádzajúcich obrázkov môžeme povedať, že pomocou Vašíčkovho a CIR modelu sa nám podarilo nasimulovať tri hlavné typy výnosovej krivky:

1. rastúci (Obr. : 3.1 prvý riadok)
2. klesajúci (Obr. : 3.1 druhý riadok)
3. stlačený (Obr. : 3.2).

Tieto tri hlavné typy výnosových kriviek, ako to ilustrujú obrázky z úvodu druhej kapitoly, môžu byť skutočne odpozorované i z reálnych trhových dát.

Kapitola 4

Explicitné tvary riešení v dvojfaktorových modeloch

V tejto kapitole k už spomínanému procesu pre okamžitú úrokovú mieru r pridáme druhý faktor neistoty, stochastický proces riadiaci volatilitu y . Oba procesy pre tieto dve stavové premenné r a y budú sledovať spojitý gaussovsko – markovovský náhodný proces. Cena bezkupónového dlhopisu P , bude už okrem premenných t , T a r závislá aj od volatility y . Podobne ako pri jednofaktorovom modeli aplikovanie Itôvej lemy, tentoraz však už pre vektorové náhodné premenné, nám umožní odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice popisujúcej časový vývoj cien dlhopisov všetkých maturít.

4.1 Odvodenie všeobecnej parciálnej diferenciálnej rovnice pre dvojfaktorový model

Podobne ako to bolo u jednofaktorového modelu, tu demonštrovaný postup odvodenia oceňovacej rovnice bol inšpirovaný z [8]. Predpokladajme, že obi-

dve stavové premenné sú riadené nasledovnými difúznymi procesmi:

$$\begin{aligned} dr &= \mu_r(t, r, y)dt + \sigma_r(t, r, y)dw_1 \\ dy &= \mu_y(t, r, y)dt + \sigma_y(t, r, y)dw_2, \end{aligned}$$

kde r je okamžitá úroková miera a y je zatiaľ bližšie neurčený druhý faktor. Prírastky dw_1 a dw_2 Wienerových procesov w_1 a w_2 sú navzájom korelované s mierou ρ .

Nech cena bezkupónového dlhopisu P so splatnosťou v čase T je funkciou okamžitého času t , short rate r a premennej y . Potom funkcia $P = P(t, T, r, y)$ vyhovuje predpokladom viacrozmernej Itôovej lemy a jej diferenciál môžeme vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned} dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho \sigma_r \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} \right) dt + \\ &\quad + \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} dw_1 + \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y} dw_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

ktorý môžeme skrátene zapísať ako:

$$dP = \bar{\mu}(t, T, r, y)dt + \bar{\sigma}_r(t, T, r, y)dw_1 + \bar{\sigma}_y(t, T, r, y)dw_2, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{kde } \bar{\mu} &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho \sigma_r \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y}, \\ \bar{\sigma}_r &= \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} dw_1 \text{ a } \bar{\sigma}_y = \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y} dw_2. \end{aligned}$$

Keďže teraz sme vo svete s dvoma faktormi neistoty, za účelom skonštruovania bezrizikového portfólia, musíme zvoliť investičnú stratégiu nakombinovanú z troch dlhopisov rôznych maturít. Nech Δ_1 , Δ_2 a Δ_3 sú množstvá dlhopisov $P(T_1)$, $P(T_2)$ a $P(T_3)$. Potom máme portfólio:

$$\pi = \Delta_1 P(T_1) + \Delta_2 P(T_2) + \Delta_3 P(T_3),$$

ktorého zmenu za časový prírastok dt napíšeme ako:

$$d\pi = \Delta_1 dP(T_1) + \Delta_2 dP(T_2) + \Delta_3 dP(T_3).$$

Dosadením vyjadrenia (4.2) do výrazov $dP(T_i)$ dostaneme:

$$\begin{aligned} d\pi &= (\Delta_1\bar{\mu}(T_1) + \Delta_2\bar{\mu}(T_2) + \Delta_3\bar{\mu}(T_3))dt + \\ &\quad + (\Delta_1\bar{\sigma}_r(T_1) + \Delta_2\bar{\sigma}_r(T_2) + \Delta_3\bar{\sigma}_r(T_3))dw_1 + \\ &\quad + (\Delta_1\bar{\sigma}_y(T_1) + \Delta_2\bar{\sigma}_y(T_2) + \Delta_3\bar{\sigma}_y(T_3))dw_2. \end{aligned}$$

Teraz zvolíme množstvá Δ_1 , Δ_2 a Δ_3 jednotlivých dlhopisov tak, že odstránime všetkú neistotu v zmene hodnoty portfólia $d\pi$. To dosiahneme ak pre výrazy pri členoch dw_1 a dw_2 bude platiť:

$$\begin{aligned} \Delta_1\bar{\sigma}_r(T_1) + \Delta_2\bar{\sigma}_r(T_2) + \Delta_3\bar{\sigma}_r(T_3) &= 0 \\ \Delta_1\bar{\sigma}_y(T_1) + \Delta_2\bar{\sigma}_y(T_2) + \Delta_3\bar{\sigma}_y(T_3) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Splnením predchádzajúceho systému eliminujeme stochastické členy a dostaneme:

$$d\pi = (\Delta_1\bar{\mu}(T_1) + \Delta_2\bar{\mu}(T_2) + \Delta_3\bar{\mu}(T_3))dt.$$

Uplatnením bezarbitrážneho princípu musíme zabezpečiť aby sa očakávaná miera návratnosti $\frac{d\pi}{\pi}$, tohto teraz už bezrizikového portfólia, zhodovala s výnosom r , ktorý by sme získali v banke na dobu dt . Čiže musí platiť:

$$\frac{d\pi}{\pi} = rdt \implies d\pi = r\pi dt,$$

alebo po dosadení:

$$\begin{aligned} (\Delta_1\bar{\mu}(T_1) + \Delta_2\bar{\mu}(T_2) + \Delta_3\bar{\mu}(T_3))dt &= r(\Delta_1P(T_1) + \Delta_2P(T_2) + \Delta_3P(T_3))dt \\ \Delta_1(\bar{\mu}(T_1) - rP(T_1)) + \Delta_2(\bar{\mu}(T_2) - rP(T_2)) + \Delta_3(\bar{\mu}(T_3) - rP(T_3)) &= 0. \end{aligned}$$

Spojením sústavy rovníc (4.3) s touto poslednou rovnosťou dostávame pre neznáme množstvá Δ_1 , Δ_2 a Δ_3 systém podmienok:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_r(T_1) & \bar{\sigma}_r(T_2) & \bar{\sigma}_r(T_3) \\ \bar{\sigma}_y(T_1) & \bar{\sigma}_y(T_2) & \bar{\sigma}_y(T_3) \\ \bar{\mu}(T_1) - rP(T_1) & \bar{\mu}(T_2) - rP(T_2) & \bar{\mu}(T_3) - rP(T_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tento systém má netriviálne riešenie vtedy a len vtedy ak matica systému bude singulárna. Z tohto dôvodu musí platiť, že riadky v matici sú lineárne závislé a teda:

$$\begin{aligned} &(\bar{\mu}(T_1) - rP(T_1), \bar{\mu}(T_2) - rP(T_2), \bar{\mu}(T_3) - rP(T_3)) = \\ &= \lambda_1(\bar{\sigma}_r(T_1), \bar{\sigma}_r(T_2), \bar{\sigma}_r(T_3)) + \lambda_2(\bar{\sigma}_y(T_1), \bar{\sigma}_y(T_2), \bar{\sigma}_y(T_3)). \end{aligned}$$

Kedže na začiatku postupu odvodenia sme zobrali ľubovoľné doby splatnosti T_1 , T_2 a T_3 musia byť koeficienty λ_1 a λ_2 tejto lineárnej kombinácie nezávislé od maturity T . Z toho nám vyplýva, že musí platiť:

$$\bar{\mu}(T) - rP(T) = \lambda_1\bar{\sigma}_r(T) + \lambda_2\bar{\sigma}_y(T).$$

Spätným dosadením do $\bar{\sigma}_r(T)$, $\bar{\sigma}_y(T)$ a $\bar{\mu}(T)$ dostávame výslednú všeobecnú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(t, T, r, y)$ v dvojfaktorovom modeli:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r - \lambda_1\sigma_r)\frac{\partial P}{\partial r} + (\mu_y - \lambda_2\sigma_y)\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_y^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \\ &+ \rho\sigma_r\sigma_y\frac{\partial^2 P}{\partial r\partial y} - rP = 0, \quad t < T; \end{aligned} \quad (4.4)$$

spolu s koncovou podmienkou $P(T, T, r, y) = 1$ a okrajovými podmienkami

$$P(t, T, 0, y) = 1$$

$$P(t, T, \infty, y) = 0 \quad \text{pre } \forall y \in \mathbb{R}.$$

Podobne ako to bolo u jednofaktorového modelu, zatiaľ bližšie neurčené funkcie $\lambda_1(t, r, y)$ a $\lambda_2(t, r, y)$ majú takisto svoju ekonomickú interpretáciu.

4.1.1 Interpretácia trhových cien rizík

Oceňovaciu rovnicu (4.4) môžeme prepísať do tvaru:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r\frac{\partial P}{\partial r} + \mu_y\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_y^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho\sigma_r\sigma_y\frac{\partial^2 P}{\partial r\partial y} = \\ &= \lambda_1\sigma_r\frac{\partial P}{\partial r} + \lambda_2\sigma_y\frac{\partial P}{\partial y} + rP. \end{aligned}$$

Všimneme si, že rovnaký výraz ako je v tejto poslednej rovnosti na ľavej strane sa nachádza i vo vzťahu (4.2). Následne ich vzájomnou kombináciou dostávame:

$$dP = \left(\lambda_1 \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} + \lambda_2 \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y} + rP \right) dt + \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} dw_1 + \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y} dw_2,$$

alebo

$$dP = rPdt + \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} (dw_1 + \lambda_1 dt) + \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y} (dw_2 + \lambda_2 dt).$$

Pomocou rovnakej argumentácie ako to bolo v časti (3.1.1) získavame ekonomický význam trhovej ceny rizika $\lambda_1(t, r, y)$ okamžitej úrokovej miery r a trhovej ceny rizika $\lambda_2(t, r, y)$ premennej y .

4.2 Explicitný tvar riešenia v dvojfaktorovom modeli so stochastickou volatilitou

Nech prírastky dvoch stavových premenných r a y reprezentujúcich okamžitú úrokovú mieru, resp. volatilitu sú riadené nasledovnými dvomi stochastickými diferenciálnymi rovnicami:

$$\begin{aligned} dr &= \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sqrt{y}r^\gamma dw_1 \\ dy &= \kappa_2(\theta_2 - y)dt + vy^\delta dw_2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde $\gamma \geq 0$ a $\delta \geq 0$. Potom oceňovacia rovnica (4.4) nadobudne tvar:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 \sqrt{y}r^\gamma) \frac{\partial P}{\partial r} + (\kappa_2(\theta_2 - y) - \lambda_2 vy^\delta) \frac{\partial P}{\partial y} + \\ &+ \frac{1}{2}(\sqrt{y}r^\gamma)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}(vy^\delta)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho(\sqrt{y}r^\gamma)(vy^\delta) \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} - \\ &- rP = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

V ďalších krokoch tejto časti sa inšpirujeme explicitným tvarom riešenia z jednofaktorového modelu. Pridaním stochastickej volatility, druhého faktora neistoty, získame všeobecný tvar explicitného riešenia, ktorý však už teraz bude musieť vyhovovať oceňovacej parciálnej diferenciálnej rovnici (4.6) odvodenej pre dvojfaktorový model so stochastickou volatilitou.

Zaveďme predpoklady: **1.)** Nech hodnota v čase t bezkupónového dlhopisu vyplácajúceho $1SK$ v čase T je daná:

$$P(\tau, r, y) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}D(\tau, y), \text{ kde } \tau = T - t.$$

(Všeobecný tvar explicitného riešenia pre dvojfaktorový model)

2.) Pre úplnosť modelu je ešte potrebné dodať konkrétne tvary zatiaľ bližšie nešpecifikovaných funkcií $\lambda_1(r, y)$ a $\lambda_2(r, y)$ predstavujúcich trhovú cenu rizika short rate r resp. volatility y . Kvôli akejsi ekonomickej prirodzenosti hovoriacej, že s rastúcou hodnotou volatility y by trhovú cenu rizika $\lambda_1(r, y)$ a $\lambda_2(r, y)$ mali takisto rásť, zvolíme $\lambda_1(r, y) = \bar{\lambda}_1\sqrt{y}$ a $\lambda_2(r, y) = \bar{\lambda}_2\sqrt{y}$ kde $\bar{\lambda}_i =$ konštanta, pre $i = 1, 2$.

Dosadením explicitného tvaru riešenia spolu s funkciami trhových cien rizika do oceňovacej rovnice (4.6) a následnej úprave dostávame:

$$\begin{aligned} & - \frac{\dot{A}}{A} + \dot{B}r - \frac{\dot{D}}{D} - (\kappa_1(\theta_1 - r) - \bar{\lambda}_1 yr^\gamma)B + (\kappa_2(\theta_2 - y) - \bar{\lambda}_2 vy^{\delta+\frac{1}{2}})\frac{D'}{D} + \\ & + \frac{1}{2}(\sqrt{y}r^\gamma)^2 B^2 + \frac{1}{2}(vy^\delta)^2 \frac{D''}{D} - (\sqrt{y}r^\gamma)(vy^\delta)\rho B \frac{D'}{D} - r = 0, \quad \forall \tau > 0. \end{aligned}$$

Symbody $(\dot{})$ resp. $()'$ predstavujú:

$$(\dot{}) = \frac{\partial}{\partial \tau}(), \quad ()' = \frac{\partial}{\partial y}().$$

Na to aby sme od tejto rovnice prešli k systému obyčajných diferenciálnych rovníc, ako to bolo u jednofaktorového modelu, treba zabezpečiť aby koeficienty pri neznámych funkciách A , B a D boli rozmerovo konzistentné.

Všimnime si nasledovné dva členy: $\frac{1}{2}(\sqrt{y}r^\gamma)^2 B^2$ a $-(\sqrt{y}r^\gamma)(vy^\delta)\rho B \frac{D'}{D}$. Porovnanie hodnoty exponentov pri premennej r nám dáva, že musí platiť:

$$2\gamma = \gamma \implies \gamma = 0.$$

S využitím hodnoty $\gamma = 0$ môžeme príslušnú predchádzajúcu rovnicu upraviť do tvaru:

$$\begin{aligned} & -\frac{\dot{A}}{A} + \dot{B}r - \frac{\dot{D}}{D} - (\kappa_1(\theta_1 - r) - \bar{\lambda}_1 y)B + (\kappa_2(\theta_2 - y) - \bar{\lambda}_2 v y^{\delta+\frac{1}{2}}) \frac{D'}{D} + \\ & + \frac{1}{2}yB^2 + \frac{1}{2}v^2 y^{2\delta} \frac{D''}{D} - v y^{\delta+\frac{1}{2}} \rho B \frac{D'}{D} - r = 0, \quad \forall \tau > 0. \end{aligned}$$

Od tejto rovnice združením výrazov pri premenných r a y , ako aj členov závislých len od času do splatnosti τ môžeme prejsť k nasledovnému systému diferenciálnych rovníc (pričom nesmieme zabúdať, že funkcia $D = D(\tau, y)$, okrem premennej τ , je ešte stále aj zatiaľ bližšie nešpecifikovanou funkciou volatility y):

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\frac{\dot{A}}{A} - \kappa_1 \theta_1 B = 0 \\ (r) \quad & \dot{B} + \kappa_1 B - 1 = 0 \\ (y) \quad & -\dot{D} + \bar{\lambda}_1 y B D + \kappa_2 \theta_2 D' - \kappa_2 y D' - \bar{\lambda}_2 v y^{\delta+\frac{1}{2}} D' + \frac{1}{2}yB^2 D + \\ & + \frac{1}{2}v^2 y^{2\delta} D'' - v y^{\delta+\frac{1}{2}} \rho B D' = 0, \end{aligned}$$

resp. :

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\frac{\dot{A}}{A} - \kappa_1 \theta_1 B = 0 \\ (r) \quad & \dot{B} + \kappa_1 B - 1 = 0 \\ (y) \quad & -\dot{D} + (\kappa_2 \theta_2 - \kappa_2 y - \bar{\lambda}_2 v y^{\delta+\frac{1}{2}} - v y^{\delta+\frac{1}{2}} \rho B) D' + (\bar{\lambda}_1 y B + \\ & + \frac{1}{2}yB^2) D + \frac{1}{2}v^2 y^{2\delta} D'' = 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

kde značky (1), (r) a (y) postupne znamenajú, že prvú rovnicu získame porovnaním výrazov závislých len od τ , druhú od r a tretiu od y . Pre skrátenie

zápisu budeme ďalej tretiu rovnicu uvažovať v tvare:

$$(y) \quad -\dot{D} + p(\tau, y)D' + q(\tau, y)D + a^2(\tau, y)D'' = 0, \quad (4.8)$$

kde

$$\begin{aligned} p(\tau, y) &= \kappa_2\theta_2 - \kappa_2y - \bar{\lambda}_2vy^{\delta+\frac{1}{2}} - vy^{\delta+\frac{1}{2}}\rho B, \\ q(\tau, y) &= \bar{\lambda}_1yB + \frac{1}{2}yB^2, \\ a^2(\tau, y) &= \frac{1}{2}v^2y^{2\delta}. \end{aligned}$$

Ďalej vieme, že pre neznáme funkcie $A(\tau)$, $B(\tau)$ a $D(\tau, y)$ musia byť splnené nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} \text{počiatočné podmienky: } & A(0) = 1, \quad B(0) = 0, \quad D(0, y) = 1, \\ \text{okrajové podmienky: } & D(\tau, 0) = 1, \quad D(\tau, \infty) = 0. \end{aligned}$$

Vyriešením prvých dvoch rovníc z tejto sústavy (4.7) sa vieme ľahko dopátrať ku konkrétnym tvarom funkcií $A(\tau)$ a $B(\tau)$:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1\tau}), \\ A(\tau) &= e^{-\theta_1\left(\tau + \frac{e^{-\kappa_1\tau}}{\kappa_1}\right) + \frac{\theta_1}{\kappa_1}}. \end{aligned}$$

Problémom však zostáva nájsť funkciu $D = D(\tau, y)$ premenných τ a y tak, aby tá vyhovovala tretej, pomerne zložitej nelineárnej parciálnej diferenciálnej rovnici. V tejto situácii si pomôžeme numerikou. Konkrétne použijeme techniku nazvanú *metóda sietí*. Skonstruujeme sieť pozostávajúcu z bodov (uzlov) v ktorých vypočítame numerické hodnoty neznámej funkcie $D(\tau, y)$. Úlohu budeme riešiť pre hodnoty premenných τ a y z nasledovných dvoch intervalov $\tau \in \langle 0, T \rangle$, resp. $y \in \langle 0, y_{max} \rangle$.

Samotnú sieť vytvoríme rovnomerným rozmiestnením deliacich bodov y_i , $i = 0, 1, \dots, n$ v priestorovom intervale $\langle 0, y_{max} \rangle$ a τ_s , $s = 0, 1, \dots, m$ v časovom

intervale $\langle 0, T \rangle$. Označme $h = \frac{y_{max}-0}{n}$ veľkosť kroku s akou sú od seba vzdialené ľubovoľné dva susedné body intervalu $\langle 0, y_{max} \rangle$, $k = \frac{T-0}{m}$ veľkosť kroku v intervale $\langle 0, T \rangle$ a D_i^s aproximáciu riešenia v bode (τ_s, y_i) , čiže $D(\tau_s, y_i) \approx D_i^s$.

Pomocou diferencií aproximujeme parciálne derivácie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial \tau}(\tau_s, y_i) &\approx \frac{D_i^s - D_i^{s-1}}{k} \\ \frac{\partial D}{\partial y}(\tau_s, y_i) &\approx \frac{D_{i+1}^s - D_{i-1}^s}{2h} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}(\tau_s, y_i) &\approx \frac{D_{i+1}^s - 2D_i^s + D_{i-1}^s}{h^2}.\end{aligned}$$

Dosadením týchto diskretných aproximácií do rovnice (4.8) a po následnej úprave dostávame:

$$(b_1)_i^s D_{i-1}^s + (b_2)_i^s D_i^s + (b_3)_i^s D_{i+1}^s = -\frac{1}{k} D_i^{s-1}, \quad (4.9)$$

kde $i = 1, 2, \dots, n-1$, $s = 1, 2, \dots, m$ a

$$\begin{aligned}(b_1)_i^s &= \frac{a^2(\tau_s, y_i)}{h^2} - \frac{p(\tau_s, y_i)}{2h} \\ (b_2)_i^s &= q(\tau_s, y_i) - \frac{1}{k} - \frac{2a^2(\tau_s, y_i)}{h^2} \\ (b_3)_i^s &= \frac{a^2(\tau_s, y_i)}{h^2} + \frac{p(\tau_s, y_i)}{2h}.\end{aligned}$$

Pozn.: Všimnime si, že koeficienty $(b_{1,2,3})_i^s$ sú okrem stavovej premennej y závislé aj od času do splatnosti τ .

Algoritmus výpočtu numerických hodnôt riešenia D_i^s začína použitím počiatočnej podmienky $D(0, y) = 1$ pre nultú časovú vrstvu $s = 0$, čiže $D_i^0 = 0$, pre $i = 1, 2, \dots, n-1$. Na ďalších časových vrstvách $s = 1, 2, \dots, m$ nám vzťah (4.9) pre $i = 1, 2, \dots, n-1$ generuje sústavu $n-1$ rovníc s $n+1$ neznámymi $D_0^s, D_1^s, \dots, D_n^s$. Aplikáciou okrajovej podmienky $D(\tau, 0) = 0$ a modifikovanej druhej podmienky¹ $D(\tau, \infty) = 0$ v tvare $\frac{\partial D}{\partial y}(\tau, y_{max}) = 0$ dostaneme, že musí

¹Numerické výsledky ukazujú, že miesto pôvodnej dirichletovej podmienky je správnejšie uvažovať neumannovu okrajovú podmienku $\frac{\partial D}{\partial y}(\tau, y_{max}) = 0$.

platiť:

$$D_0^s = 0 \quad \text{a} \quad \frac{D_n^s - D_{n-1}^s}{h} = 0.$$

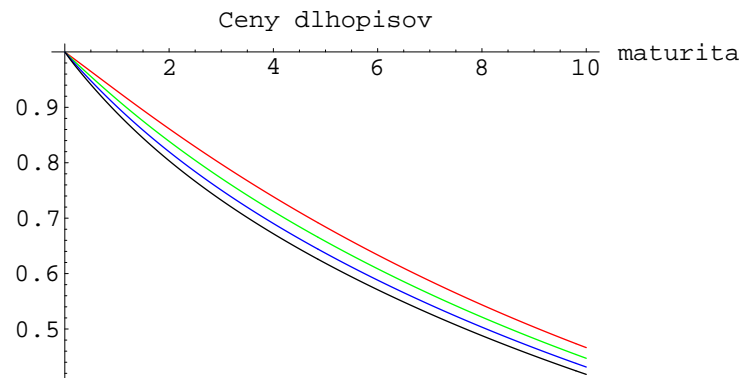
Celkovo tak na nájdenie neznámych hodnôt riešenia $D_1^s, D_2^s, \dots, D_{n-1}^s$ na s -tej časovej vrstve máme potrebný počet počet $n - 1$ rovníc.

Na nasledovných obrázkoch sú znázornené ceny dlhopisov a nimi implikovaných výnosových kriviek vyplývajúce z využitia explicitného riešenia

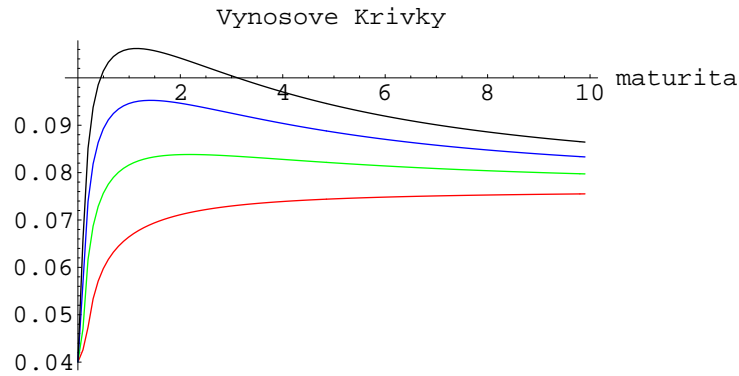
$$P(\tau_s, r, y_i) = A(\tau_s) e^{-B(\tau_s)r} D(\tau_s, y_i),$$

tak ako nám ich po naprogramovaní vyššie uvedenej procedúry ponúkne software Mathematica. Výpočet bol realizovaný pre short rate $r = 0.04$, $\gamma = 0$, $\delta = 1.25$ a pre nasledovné hodnoty ostatných parametrov vystupujúcich v explicitnom riešení:

$$\begin{aligned} \kappa_1 = 1.5, \quad \kappa_2 = 0.5, \quad \theta_1 = 0.06, \quad \theta_2 = 0.15, \\ v = 0.2, \quad \rho = 0.5, \quad \bar{\lambda}_1 = -0.3, \quad \bar{\lambda}_2 = -0.5. \end{aligned}$$



Obr. 4.1: Ceny dlhopisov pre hodnoty volatility: $y = 0.15$ (červený graf), $y = 0.35$ (zelený graf), $y = 0.5$ (modrý graf), $y = 0.7$ (čierny graf).



Obr. 4.2: Výnosové krivky pre hodnoty volatility: $y = 0.15$ (červený graf), $y = 0.35$ (zelený graf), $y = 0.5$ (modrý graf), $y = 0.7$ (čierny graf).

4.3 Spriemernenie volatility v dvojfaktorovom modeli

Pri počítaní a vykresľovaní grafov pre ceny dlhopisov a nimi určených výnosových kriviek v predchádzajúcej časti sme predpokladali, že v každom čase vieme pozorovať hodnoty ako okamžitej úrokovej miery r , tak aj volatility y . V praxi však na rozdiel od short rate, ktorá je priamo pozorovateľná z trhových dát, volatilitu je potrebné odhadovať na základe historických vývojov pomocou náročných metód. Z tohto dôvodu spriemernenie hodnôt volatility môže mať kľúčový význam pre aplikáciu vybraného modelu so stochastickou volatilitou v praxi.

Konkrétnejšie, v ďalších riadkoch sa budeme zaujímať o spriemernenie cien dlhopisov $P(\tau, r, y)$ vzhľadom na stochastickú premennú y , ktorej roz-

delenie aproximujeme limitnou hustotou $g(y)$. Teda vypočítame:

$$\langle P(\tau, r, y) \rangle = \int_0^\infty g(y) P(\tau, r, y) dy.$$

Nasledovný tvar výslednej funkcie $g(y)$ pre hodnotu parametra $\delta = 1,25$ spolu s jeho odvodením nájdeme v práci [15]:

$$g(y) = c \frac{1}{y^{2\delta}} e^{\frac{2\kappa_2\theta_2}{v^2} \frac{1}{1-2\delta} y^{1-2\delta}} e^{-\frac{2\kappa_2}{v^2} \frac{1}{2-2\delta} y^{2-2\delta}}, \quad \text{kde}$$

$$\frac{1}{c} = \int_0^\infty \frac{1}{s^{2\delta}} e^{\frac{2\kappa_2\theta_2}{v^2} \frac{1}{1-2\delta} s^{1-2\delta}} e^{-\frac{2\kappa_2}{v^2} \frac{1}{2-2\delta} s^{2-2\delta}} ds.$$

Najprv uzlovým bodom siete y_1, y_2, \dots, y_{n-1} , priestorovej premennej y , z predchádzajúcej časti priradíme pravdepodobnosti podľa nasledovných vzťahov:

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_0^{\frac{h}{2}} g(x) dx \quad \text{a} \\ p_i &= \int_{y_i - \frac{h}{2}}^{y_i + \frac{h}{2}} g(x) dx, \quad \text{pre } i = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Potom na základe týchto pravdepodobností môžeme vypočítať, pre danú počiatočnú short rate r a danú dobu do splatnosti τ_s , priemernú cenu dlhopisu a priemerný výnos do splatnosti prislúchajúci týmto dvom fixovaným premenným:

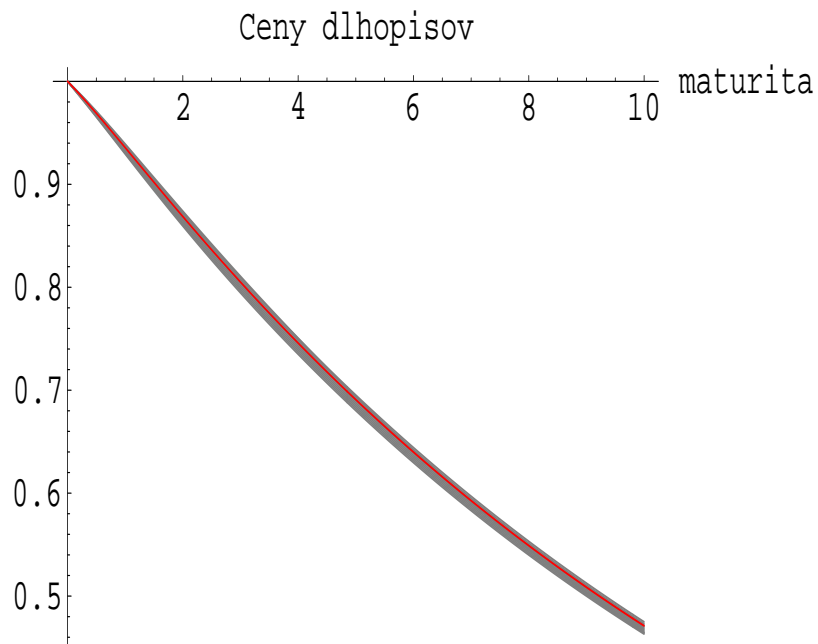
$$\langle P_s \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} p_i P(\tau_s, r, y_i) \quad \text{a} \quad \langle R_s \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} p_i R(\tau_s, r, y_i),$$

kde

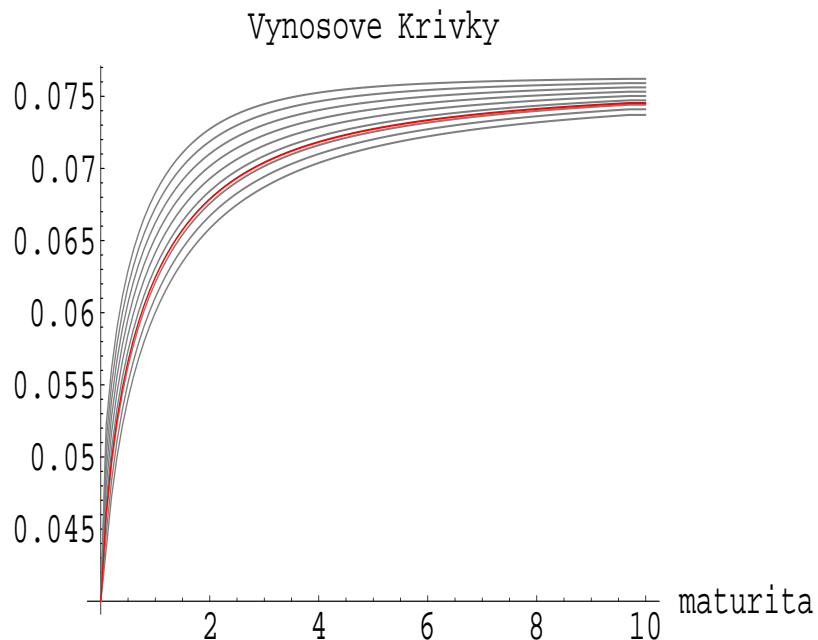
$$\begin{aligned} P(\tau_s, r, y_i) &= A(\tau_s) e^{-rB(\tau_s)} D(\tau_s, y_i) \quad \text{a} \\ R(\tau_s, r, y_i) &= -\frac{1}{\tau_s} \ln P(\tau_s, r, y_i) \end{aligned}$$

sú príslušné numerické hodnoty riešení cien dlhopisov a k nim prislúchajúce výnosy v uzlových bodoch siete (τ_s, y_i) . Pospájaním bodov $\langle P_s \rangle$ a $\langle R_s \rangle$ pre $s = 1, \dots, m$ získame jediné spriemernenú krivku cien dlhopisov a jediné spriemernenú krivku k nim patriacim výnosom.

Nasledujúce grafické analýzy pochádzajú z modelu (4.5), ktorým sme sa zaoberali v predchádzajúcej časti. Pri numerických simuláciách boli použité hodnoty koeficientov uvedené nad obrázkami (Obr. : 4.1) a (Obr. : 4.2).



Obr. 4.3: Ceny dlhopisov: červená krivka – spriemernené ceny.



Obr. 4.4: Výnosové krivky: červená krivka – priemerná výnosová krivka.

Šedé krivky cien dlhopisov a výnosov prislúchajú deviatim hodnotám volatilit, ktorým na základe vzťahu (4.10) bola pridelená najväčšia pravdepodobnosť. Túto pravdepodobnosť p_i môžeme interpretovať aj ako váhu s akou daná cena dlhopisu $P(\tau_s, r, y_i)$ pre danú dobu do splatnosti s prispieva do priemernenej hodnoty cien dlhopisov.

Pre ilustráciu uvedieme hodnoty p_{16} najnižšej a p_{10} najvyššej pravdepodobnosti vykreslených kriviek cien dlhopisov. Teda $p_{16} = 0.2\%$ a $p_{10} = 29.5\%$. Celkovo všetkých deväť zobrazených šedých kriviek prislúcha hodnotám volatilit z intervalu $\langle 0.12, 0.24 \rangle$ a ich celková váha vo výslednej priemernenej cenovej a výnosovej krivke je 99.3%.

Záver

Modely vývoja úrokových mier a nimi implikované ceny dlhopisov a výnosové krivky pre rôzne finančné deriváty môžeme analyzovať numerickým vyriešením oceňovacej parciálnej diferenciálnej rovnice alebo pomocou hľadania explicitných riešení. Na predchádzajúcich stranách sme sa zaoberali práve touto druhou možnosťou.

Napriek tomu, že jednofaktorové modely bývajú často kritizované kvôli jednotvárnosti nimi implikovaných výnosových kriviek, nám sa pomocou známych riešení Vašíčkovho a CIR modelu podarilo nasimulovať tri hlavné typy výnosových kriviek. Tieto sa nachádzali v tretej kapitole.

V grafických analýzach z kapitoly venovanej dvojfaktorovým modelom bolo vidieť, že zavedenie druhého faktora neistoty umožňuje získanie viacerých výnosových kriviek vychádzajúcich zo spoločného počiatku. Taktiež sme tu pomocou limitnej hustoty $g(y)$ premennej y získanej z práce [15] vypočítali priemerné ceny dlhopisov a k nim príslušnú priemernú výnosovú krivku.

Žiaľ nepodarilo sa nám priamo získať explicitné riešenie modelu (4.5), ale pri týchto predchádzajúcich spomínaných výsledkoch sme si museli vypomôcť i s troškou numeriky. V tejto súvislosti by bolo zaujímavé ďalej študovať či by prípadné ďalšie reštrikcie na parametre tohto modelu neumožňovali získanie systému rovníc (4.7), ktorý by už bol priamo riešiteľný pre neznáme funkcie $A(\tau)$, $B(\tau)$ a $D(\tau, y)$.

Literatúra

- [1] John C. Cox; Jonathan E. Ingersoll, Jr.; Stephen A. Ross: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates.*; *Econometrica*, Vol. 53, No. 2 (Mar., 1985), 385-408.
- [2] Jacob Boudoukh; Matthew Richardson; Richard Stanton and Robert F. Whitelaw: *The Stochastic Behavior of interest Rates: Implications From a Multifactor, Nonlinear Continuous – Time Model.*; February 23, 1998
- [3] Vasicek, O. A.: *Equilibrium Characterization of the Term Structure.*; *Journal of Financial Economics*, Volume 5, 1977, 177-188.
- [4] Dothan, L.U.: *On the Term Structure of Interest Rates.*; *Journal of Financial Economics* 6:59-69.
- [5] Brennan, M. J. And Schwartz, E.S.: *A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds.*; *Journal of Banking and Finance* 3:133-155, 1979.
- [6] Merton, R.C.: *A Dynamic Equilibrium Model of the Asset Markets and its Application to the Pricing of the Capital Structure of the Firm.*; working paper, Massachusetts Institute of Technology.
- [7] Chan, K. C.; Karolyi, G. A.; Longstaff, F. A.; Sanders, A. B.: *An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate.*; *The Journal of Finance*, Volume 47, 1992, 1209-1227.

- [8] Kwok, Y. K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives.*; Springer-Verlag, 1998.
- [9] Ayers, H. R. and J. Y. Barry (1980): *A Theory of the U.S. Treasury Market Equilibrium.*; Management Science, 26, 6, 539-569.
- [10] Nelson, J. and S.M. Schaefer (1983): *The Dynamics of the Term Structure and Alternative Portfolio Immunization Strategies.*; Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization, eds. G.O. Bierwag, G. G. Kaufman, and A. Toevs, Greenwich, CT: JAI Press.
- [11] Schaefer, S. and E. S. Schwartz (1984): *A Two Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution.*; Journal of Financial and Quantitative Analysis, 19, 4, 413-424.
- [12] Griselda Deelstra, ENSAE, CREST and VUB: *Long-Term Returns in Stochastic Interest Rate Models: Applications.*; the Second International Congress on Insurance: Mathematics and Economics Yor M (1992) On some Exponential Functionals of Brownian motion. Advances in Applied Probability 24, 509-531.
- [13] Fong, H. G., Vasicek, O. A.: *Fixed-Income Volatility Management.*; Journal of Portfolio Management, Summer 1991, 41-42.
- [14] Anderson, T. G., Lund, J.: *The Short Rate Diffusion Revisited: A Tour Guided by the Efficient Method of Moments.*; Working paper, J. L. Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, 1996.
- [15] Stehlíková Beáta: *Analýza dvojfaktorového modelu vývoja úrokovej miery so stochastickou volatilitou.*; Diplomová práca. FMFI UK Bratislava, 2004
- [16] Lucová, M: *Numerické oceňovanie derivátov úrokovej miery.*; Diplomová práca. FMFI UK Bratislava, 2002

- [17] Alexová, L: *Dvojfaktorové modely derivátov úrokových mier so stochastickou volatilitou.*; Diplomová práca. FMFI UK Bratislava, 2002

Príloha

Program na výpočet neznámej funkcie $D(\tau, y)$ vystupujúcej v explicitnom riešení pre dvojfaktorový model:

```
kapa1=1.5;kapa2=0.5;v=0.2;ro=0.5;
lambda1=(-0.5);lambda2=(-0.3);theta1=0.06; theta2=0.15;delta=1.25;

yMin=0.01; yMax=0.7; T=10;

n= 51; m=101;

h=(yMax-yMin)/n; k=T/m; (*priestorova a casova diskretizacia*)

y[i_]:=yMin+i*h;

(* Vypocet neznamych funkcii vystupujucich v explicitnom rieseni
   P(tau,r,y)=AA(tau)Exp[-r*B(tau)]*D(tau,y)*)
AA[tau_]:=Exp[-theta1*(tau+(1/kapa1)*Exp[-kapa1*tau])+(theta1/kapa1)];
B[tau_]:=N[(1/kapa1)*(1-Exp[-kapa1*tau])];

A[tau_,y_]:=N[(1/2)v^2*y^(2*delta)]; p[tau_,y_]:=
  N[kapa2*theta2-kapa2*y-lambda2*v*y^(delta+(1/2))-
    v*y^(delta+(1/2))*ro*B[tau]];
q[tau_,y_]:=N[lambda1*y*B[tau]+(1/2)*y*B[tau]^2];

b1[tau_,y_]:=N[A[tau,y]/h^2-p[tau,y]/(2*h)];
b2[tau_,y_]:=N[q[tau,y]-1/k-(2*A[tau,y])/(h^2)];
b3[tau_,y_]:=N[A[tau,y]/(h^2)+p[tau,y]/(2*h)];
```



```

(*pociatocna podmienka*) d0[y_]:=1;
d[0]=Table[d0[y[i]],{i,1,n-1}];

(*matica*) For[s=1,s<=m,s++,{
  Do[
    Do[
      a[i,j]=
        If[i==j!= n-1,b2[s,y[i]],
          If[i==j==n-1,b2[s,y[i]]+b3[s,y[i]],
            If[i==j-1,b3[s,y[i]],
              If[i==j+1,b1[s,y[i]],0]]],
      {j,1,n-1}},
    {i,1,n-1}];

M[s]=Table[Table[a[i,j],{j,1,n-1}],{i,1,n-1}];

(*vektor pravej strany B*)
B[s]=Join[{{-(1/k)*d[s-1][[1]]-b1[s,y[1]]}},
  Table[-(1/k)*d[s-1][[i]],{i,2,n-1}]];

(*vypocet*) d[s]=LinearSolve[M[s],B[s]];

Do[grafd[y[j]]=Table[{i*k,d[i][[j]]},{i,0,m}],{j,1,n-1}];

```