FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika

ROVNICA DYNAMICKÉHO PROGRAMOVANIA A JEJ RIEŠENIE METÓDOU POSTUPNÝCH APROXIMÁCIÍ

Diplomová práca

Diplomant : Michal Zákopčan

Vedúci diplomovej práce : Doc. RNDr. Margaréta Halická CSc. Bratislava 2005

Prehlasujem, že som túto prácu vypracoval samostatne
a uviedol som všetku použitú literatúru.

Ďakujem svojej diplomovej vedúcej
doc. RNDr. Margaréte Halickej CSc.
za pomoc a cenné rady.

OBSAH

1. ÚVOD

Prvotným podnetom na napísanie tejto diplomovej práce bola kniha od autorov Nancy L. Stokey-ovej, Robert E. Lucas-a juniora a ich spolupracovníka Edward C. Prescott-a s názvom „Recursive Methods in Economic Dynamics". Presnejšie išlo o jednu jej časť, v ktorej sa autori venovali deterministickému modelu optimálneho rastu (uvádzaný v nasledujúcej kapitole). Prepracovali sa až k úlohe, ktorá je v kapitole 2 označená ako (U3) a ďalej sa ňou zaoberali v jej všeobecnejšom znení ako úlohou maximalizácie, resp. hľadania supréma na množine nekonečných postupností.

Táto práca sa pokúša matematickú teóriu z tejto knihy prerobiť a aplikovať na úlohy optimálneho riadenia. Jej snahou je poskytnúť podrobný teoretický prehľad o tejto problematike a teóriu zo spomínanej publikácie prepracovať tak, aby bola použiteľná pre autonómne úlohy na nekonečnom časovom horizonte ako hlavného nástroja na riešenie niektorých ekonomických modelov, či príkladov. Ide predovšetkým o úpravu znenia a dôkazov viet spojenú so zakomponovaním niektorých nových prvkov, najmä nových predpokladov, a zadefinovaním ďalších pojmov.

Hlavný rozdiel medzi úlohami v knihe a v tejto diplomovej práci je v tom, že v úlohách optimálneho riadenia vystupuje tak ako stavová aj riadiaca premenná, práve voľbou ktorej sa snažíme účelovú funkciu maximalizovať (resp. nájsť jej suprémum) a navyše stavová premenná v každej perióde závisí nielen od stavu systému v predchádzajúcej perióde, ale aj od výberu riadiacej premennej v predchádzajúcej perióde. Vyjadrené je to pomocou nejakej funkcie F (viď. vzťah (1) v úlohe $P(x_0)$ na začiatku kapitoly 3). Pre túto funkciu bolo treba zaviesť nové predpoklady a pre naše potreby niektoré iné predpoklady upraviť. Výskyt tejto funkcie si pochopiteľne vyžiadal aj zmeny vo formulácií niektorých viet a tiež v ich dôkazoch. Pozreli sme sa i na to, ako niektoré predpoklady zabezpečiť vyžadovaním nejakých vlastností priamo v pôvodnom zadaní úlohy (veta 5.4).

2. DETERMINISTICKÝ MODEL OPTIMÁLNEHO RASTU

V tejto časti sa budeme zaoberať prerozdelením zdrojov v ekonomike pozostávajúcej z mnoho (nekonečne veľa) identických, nekonečne dlho žijúcich domácností (viac v lit. [3]). V každej perióde t máme len jediný tovar y_t (ide o jednosektorový model rastu), ktorý produkujeme s využitím dvoch vstupov : kapitálu k_t (dodávaného na začiatku periódy) a práce n_t. Produkčnú funkciu označíme F a potom platí :

$$y_t = F\left(k_t, n_t\right) \tag{1}$$

kde $F : \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}_+$ je spojite diferencovateľná, rastúca, homogénna 1.stupňa a rýdzo kvázi-konkávna, pričom :

$$F\left(0,n\right) = 0,\ F_k\left(k,n\right) > 0, F_n\left(k,n\right) > 0 \qquad \forall k > 0,\ \forall n > 0$$
$$\lim_{k\to 0} F_k\left(k,1\right) = \infty,\ \lim_{k\to\infty} F_k\left(k,1\right) = 0$$

Predpokladajme, že veľkosť populácie je konštantná v čase a normalizujme veľkosť dostupnej pracovnej sily na jednotku. Potom platí :

$$0 \le n_t \le 1 \quad t = 0,1,... \tag{2}$$

V každej perióde je výstup rozdelený medzi bežnú spotrebu c_t a hrubé investície i_t, t.j. musí platiť :

$$c_t + i_t \le y_t = F\left(k_t, n_t\right) \quad t = 0,1,... \tag{3}$$

Kapitál amortizuje konštantnou mierou $0 < \delta < 1$, takže platí :

$$k_{t+1} = \left(1-\delta\right)k_t + i_t \quad t = 0,1,... \tag{4}$$

Z predchádzajúcich dvoch vzťahov vyplýva :

$$c_t + k_{t+1} - \left(1-\delta\right)k_t \le y_t = F\left(k_t, n_t\right) \quad t = 0,1,... \tag{5}$$

Všetky domácnosti majú rovnaké preferencie spotrebovávať, vyjadrené v tvare :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(c_t\right) \tag{6}$$

kde $0 < \beta < 1$ je diskontný faktor a $U : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ je funkcia užitočnosti. Je spojite diferencovateľná, rastúca a rýdzo konkávna, pričom

$$\lim_{c\to 0}\frac{d\mathrm{U}(\mathrm{c})}{d\mathrm{c}}=\infty$$

Funkcia užitočnosti môže byť i ohraničená, presnejšie ohraničená zhora, ako je príklad funkcie užitočnosti $U(x)=-Ax^{1-C}+B$, kde $A>0$ a $C>1$ (podrobnejšie informácie sa nachádzajú v literatúre [5] a [6]). Vidíme, že v tomto prípade je konštanta B horným ohraničením funkcie $U(x)$.

Uvažujme o tomto probléme ako o probléme sociálneho plánovača, ktorého cieľom je maximalizovať úžitok zo spotreby domácností diskontovaný do nultého času, t.j. maximalizovať (6) tak, aby platili (2) a (5) pri danej počiatočnej úrovni kapitálu k_0. Takže dostávame úlohu :

(U1)
$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(c_t)$$

$$c_t+k_{t+1}-(1-\delta)k_t\le F(k_t,n_t)\qquad t=0,1,...$$

$$0\le n_t\le 1\qquad t=0,1,...$$

$$0\le k_{t+1}\qquad t=0,1,...$$

$$k_0>0-\text{počiatný kapitál}$$

Dve vlastnosti optima tejto úlohy sú zrejmé :

1. Je jasné, že výstupom nemožno plytvať a teda pre všetky $t=0,1,...$ platí vo vzťahu (5) rovnosť.
2. Pretože voľný čas nie je ohodnotený a hraničný produkt práce $(F_n(k,n))$ je vždy kladný, bude zrejme $n_t=1$ pre všetky $t=0,1,...$

Zadefinujme teraz funkciu $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ ako $f(k)=F(k,1)+(1-\delta)k$. Potom z vlastností produkčnej funkcie F vyplýva, že f je spojite diferencovateľná, rastúca a rýdzo konkávna, pričom platí :

$$f(0)=0 \text{ a } \forall k\ge 0:\ \frac{df(k)}{dk}>0,\ \lim_{k\to 0}\frac{df(k)}{dk}=\infty \text{ a } \lim_{k\to\infty}\frac{df(k)}{dk}=1-\delta\ .$$

Takže úlohu centrálneho plánovača môžeme prepísať do tvaru :

(U2)
$$\underset{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

$$k_{t+1} = f(k_t) - c_t \qquad t = 0,1,... \tag{7}$$

$$0 \le k_{t+1} \qquad t = 0,1,...$$

$k_0 > 0$ – počiatný kapitál

kde kapitál vystupuje ako stavová premenná a spotreba ako riadiaca premenná.

Takáto úloha je tzv. autonómnou úlohou optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte (jej všeobecné vyjadrenie sa nachádza hneď v úvode nasledujúcej kapitoly).

Vyjadrením spotreby zo vzťahu (7) a jej nahradením v účelovej funkcii prechádzame od úlohy optimálneho riadenia k úlohe maximalizácie na množine nekonečných postupností. Teda úlohu (U2) ešte možno upraviť :

(U3)
$$\underset{\{k_t\}_{t=0}^{\infty}}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(f(k_t) - k_{t+1})$$

$$0 \le k_{t+1} \le f(k_t) \qquad t = 0,1,...$$

$k_0 > 0$ – počiatný kapitál

Otázkou zostáva, ako túto úlohu riešiť. V nasledujúcich kapitolách sa pozrieme na metodiku riešenia takýchto úloh bližšie. Budeme však všeobecnejší, ako je príklad deterministického modelu hore.

3. ROVNICA DYNAMICKÉHO PROGRAMOVANIA PRE AUTONÓMNU ÚLOHU NA NEKONEČNOM ČASOVOM HORIZONTE

V tejto časti sa teda budeme zaoberať autonómnou úlohou na nekonečnom časovom horizonte, kde zovšeobecnením oproti úlohe z predchádzajúcej kapitoly bude nahradenie maxima v účelovej funkcii suprémom. Takže máme úlohu v tvare :

$$\left(P\left(x_0\right)\right) \qquad \underset{\{u_i\}_{i=0}^{\infty}}{Sup} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f^0\left(x_i,u_i\right) \qquad 0<\beta<1 \tag{5}$$

$$x_{i+1}=F\left(x_i,u_i\right) \qquad i=0,1,... \tag{1}$$

$$x_i \in X \subseteq \mathbf{R}^l \tag{2}$$

$$u_i \in U \subseteq \mathbf{R}^k \tag{3}$$

$$x_0 \in X - dané \tag{4}$$

kde $f^0:\mathbf{R}^l\times\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}$ a $F:\mathbf{R}^l\times\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^l$ sú dané funkcie.

Ľubovoľná postupnosť $\{\overline{u}_i\}_{i=0}^{\infty}$ v $\mathbf{R}^k$ sa nazýva riadenie. Pod odozvou na riadenie $\{\overline{u}_i\}_{i=0}^{\infty}$ a počiatočný stav x_0 rozumieme postupnosť $\{\overline{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$ v $\mathbf{R}^l$ takú, že $\overline{x}_0=x_0$ a $\overline{x}_{i+1}=F\left(\overline{x}_i,\overline{u}_i\right)$ pre $i=0,1,...$ Riadenie $\omega=\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ a jeho odozva $\chi=\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, ktoré spĺňajú podmienky (2), (3) a (4), sa nazývajú prípustné riadenie a jeho odozva pre úlohu $\left(P\left(x_0\right)\right)$. Ak navyše prípustné riadenie ω spĺňa (5), nazýva sa optimálne riadenie pre túto úlohu.

Zadefinujme teraz pre každé $x\in X$:

$$\Gamma\left(x\right):=\left\{u\in U \middle| F\left(x,u\right)\in X\right\}$$

Nech $\omega=\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ je riadenie a $\chi=\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ je jeho odozva. Potom je zrejmé, že podmienky (2) a (3) sa dajú ekvivalentne prepísať ako : $u_i\in\Gamma\left(x_i\right)$ pre všetky $i=0,1,...$ a teda môžeme povedať, že $\omega=\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ je prípustné riadenie pre úlohu $\left(P\left(x_0\right)\right)$ práve vtedy, keď so svojou odozvou $\chi=\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ spĺňa :

$$u_i\in\Gamma\left(x_i\right) \text{ pre všetky } i=0,1,...$$

kde samozrejme $x_{i+1}=F\left(x_i,u_i\right)$ pre $i=0,1,...$ a $x_0\in X$ je dané .

Pre daný počiatočný stav $x_0 \in X$ môžeme tiež definovať $\pi(x_0)$ ako množinu riadení prípustných zo stavu x_0, t.j. :

$$\pi(x_0) := \left\{ \{u_i\}_{i=0}^{\infty} \,\middle|\, u_i \in \Gamma(x_i) \text{ a } x_{i+1} = F(x_i, u_i) \text{ pre } i = 0,1,2,... \right\}$$

Teraz zavedieme predpoklad, ktorý nám zabezpečí, aby : $\pi(x_0) \neq \emptyset \ \ \forall x_0 \in X$. Nech je teda splnený predpoklad P1 :

Predpoklad P1 : $\Gamma(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in X$

Skutočne je potom splnené, že $\pi(x_0) \neq \emptyset \ \ \forall x_0 \in X$. Pretože vieme pri danom $x_0 \in X$ skonštruovať prípustné riadenie podľa nasledujúcej schémy : Množina $\Gamma(x_0) \neq \emptyset$ (lebo platí predpoklad P1), vyberme preto jedno $u \in \Gamma(x_0)$ a označme ho u_0. Položme $x_1 := F(x_0, u_0)$. Podľa definície množiny Γ je zrejme $u_0 \in U$ a $x_1 \in X$. Ďalej podľa predpokladu P1 je opäť $\Gamma(x_1) \neq \emptyset$ a teda môžeme vybrať $u_1 \in \Gamma(x_1)$ a položiť $x_2 := F(x_1, u_1)$ atď.

Budeme ešte vyžadovať, aby aj limita v účelovej funkcii skutočne existovala. Zavedieme ďalší predpoklad :

Predpoklad P2 : $\forall x_0 \in X$ a $\forall \omega \in \pi(x_0) \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \beta^i f^0(x_i, u_i)$

Poznamenajme, že predpoklad P2 sa dá zabezpečiť napr. podmienkou ohraničenosti funkcie f^0 a požiadavkou, aby $\beta \in (0,1)$ (tá však je splnená, lebo vystupuje už v zadaní úlohy).

Pre každé $n = 0,1,2,...$ definujme funkciu $J_n : X \times \pi(x_0) \to \mathbf{R}$ ako :

$$J_n(x_0, \omega) := \sum_{i=0}^{n} \beta^i f^0(x_i, u_i)$$

S využitím predpokladu P2 môžeme tiež definovať funkciu $J : X \times \pi(x_0) \to \mathbf{R}_{-\infty}^{+\infty}$ nasledovne :

$$J(x_0, \omega) := \lim_{n\to\infty} J_n(x_0, \omega)$$

Takže za platnosti predpokladov P1 a P2 je $\pi(x_0)$- množina prípustných riadení pre počiatočný stav x_0 neprázdna $\forall\, x_0 \in X$ a účelová funkcia v $(P(x_0))$ je dobre definovaná $\forall\, \omega \in \pi(x_0)$.

Napokon zadefinujme hodnotovú funkciu $V^* : X \to \mathbf{R}_{-\infty}^{+\infty}$ ako :

$$V^*(x_0) := \sup_{\omega \in \pi(x_0)} J(x_0, \omega)$$

Teda $V^*(x_0)$ je suprémum v úlohe $(P(x_0))$ a vyplývajúc z jej definície V^* je jediná funkcia spĺňajúca nasledujúce tri podmienky :

1. ak $|V^*(x_0)| < \infty$, potom $V^*(x_0) \geq J(x_0, \omega) \quad \forall \omega \in \pi(x_0)$ (6)

   a pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí :

   $V^*(x_0) \leq J(x_0, \omega) + \varepsilon \qquad$ pre nejaké $\omega \in \pi(x_0)$ (7)

2. ak $V^*(x_0) = +\infty$, potom existuje postupnosť $\{\omega^k\}$ v $\pi(x_0)$ taká, že

   $\lim_{k\to\infty} J(x_0, \omega^k) = +\infty$

3. ak $V^*(x_0) = -\infty$, potom $J(x_0, \omega) = -\infty \quad \forall \omega \in \pi(x_0)$

Uvažujme funkcionálnu rovnicu v nasledujúcom tvare :

(FR) $$V(x) = \sup_{u \in \Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta\, V(F(x,u)) \right] \qquad \forall x \in X$$

kde $\Gamma(x)$ je definované ako v predchádzajúcom a $V : X \to \mathbf{R}_{-\infty}^{+\infty}$ je neznáma funkcia.
Povieme, že V spĺňa rovnicu (FR) pre nejaké $x_0 \in X$, ak sú splnené tri podmienky :

1. ak $|V(x_0)| < \infty$, potom $V(x_0) \geq f^0(x_0,u) + \beta\, V(F(x_0,u)) \;\; \forall u \in \Gamma(x_0)$ (8)

   a pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí :

   $V(x_0) \leq f^0(x_0,u) + \beta\, V(F(x_0,u)) + \varepsilon$ pre nejaké $u \in \Gamma(x_0)$ (9)

2. ak $V(x_0) = +\infty$, potom existuje postupnosť $\{u^k\}$ v $\Gamma(x_0)$ taká, že

   $\lim_{k\to\infty} \left[f^0(x_0,u^k) + \beta\, V(F(x_0,u^k)) \right] = +\infty$ (10)

3. ak $V(x_0) = -\infty$, potom $f^0(x_0,u) + \beta\, V(F(x_0,u)) = -\infty \qquad \forall u \in \Gamma(x_0)$ (11)

Pre neskoršie dokazovanie si teraz uvedieme užitočný medzivýsledok.

Lema 3.1 :

Nech je splnený predpoklad P2, potom pre ľubovoľné $x_0 \in X$ a ľubovoľné riadenie $\omega = (u_0, u_1, u_{2,} ...) \in \pi(x_0)$ platí :

$$J(x_0, \omega) = f^0(x_0, u_0) + \beta\, J(x_1, \omega')$$

kde $\omega' = (u_1, u_{2,} ...) \in \pi(x_1)$ a $x_1 = F(x_0, u_0)$.

Dôkaz :

Za platnosti P2 pre ľubovoľné $x_0 \in X$ a ľubovoľné $\omega = (u_0, u_1, u_{2,} ...) \in \pi(x_0)$ platí :

$$J(x_0, \omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \beta^i f^0(x_i, u_i) = f^0(x_0, u_0) + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \beta^i f^0(x_{i+1}, u_{i+1}) =$$

$$= f^0(x_0, u_0) + \beta\, J(x_1, \omega') \square$$

Nasledujúce vety nás oboznámia s tým, za akých podmienok spĺňa hodnotová funkcia funkcionálnu rovnicu (FR) a naopak, kedy je riešenie rovnice (FR) hodnotovou funkciou. Túto rovnicu tiež nazývame rovnicou dynamického programovania (ďalej RDP).

Veta 3.1 :

Nech sú splnené predpoklady P1 a P2, potom hodnotová funkcia V^* spĺňa (FR).

Dôkaz :

Zvoľme $x_0 \in X$. Nech $V^*(x_0)$ je konečná, t.j. $V^*(x_0) \geq J(x_0, \omega)$ $\forall \omega \in \pi(x_0)$ a pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí : $V^*(x_0) \leq J(x_0, \omega) + \varepsilon$ pre nejaké $\omega \in \pi(x_0)$

Keďže $V^*(x_0) \geq J(x_0, \omega)$ $\forall \omega \in \pi(x_0)$, kde $\omega = (u_0, u_1, u_{2,} ...)$, potom z lemy 1 dostávame :

$$V^*(x_0) \geq f^0(x_0, u_0) + \beta\, J(x_1, \omega')$$

kde $u_0 \in \Gamma(x_0)$, $\omega' = (u_1, u_{2,} ...)$a $x_1 = F(x_0, u_0)$.

Nech $u_0 \in \Gamma(x_0)$ a $\varepsilon > 0$ sú dané, potom podľa (7) existuje $\omega' \in \pi(x_1)$ také, že platí :

$$J(x_1,\omega') \geq V^*(x_1) - \varepsilon$$

Teda

$$V^*(x_0) \geq f^0(x_0,u_0) + \beta\, J(x_1,\omega') \geq f^0(x_0,u_0) + \beta\, V^*(F(x_0,u_0)) - \beta\varepsilon$$

a keďže $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľné, z toho vyplýva, že (8) je splnená.

Zvoľme teraz $x_0 \in X$ a $\varepsilon > 0$. Ďalej zo (7) (keďže $|V^*(x_0)| < \infty$) vyplýva, že :

$$V^*(x_0) \leq J(x_0,\omega) + \varepsilon = f^0(x_0,u_0) + \beta\, J(x_1,\omega') + \varepsilon \quad \text{pre nejaké } \omega \in \pi(x_0)$$

a zo (6) dostávame :

$$V^*(x_0) \leq f^0(x_0,u_0) + \beta\, V^*(F(x_0,u_0)) + \varepsilon$$

Pretože $u_0 \in \Gamma(x_0)$, máme splnenú (9).

Ak $V^*(x_0) = +\infty$, potom existuje postupnosť $\{\omega^k\}$ v $\pi(x_0)$ taká, že :

$$\lim_{k\to\infty} J(x_0,\omega^k) = +\infty .$$

Pretože $\forall k$ $\qquad u_0^k \in \Gamma(x_0)$

a $\forall k$ $\qquad J(x_0,\omega^k) = f^0(x_0,u_0^k) + \beta\, J(x_1^k,\omega'^k) \leq f^0(x_0,u_0^k) + \beta\, V^*(F(x_0,u_0^k))$,

z toho vyplýva, že (10) je splnená pre postupnosť $\{u_0^k\}$ v $\Gamma(x_0)$.

Ak $V^*(x_0) = -\infty$, potom :

$$J(x_0,\omega) = f^0(x_0,u_0) + \beta\, J(x_1,\omega') = -\infty \qquad \forall \omega \in \pi(x_0)$$

kde $\omega' = (u_1, u_2, \ldots)$.

Pretože f^0 nenadobúda nekonečné hodnoty, z toho dostávame :

$$J(x_1,\omega') = -\infty \quad \forall u_0 \in \Gamma(x_0), \forall \omega' \in \pi(x_1)$$

a teda

$$V^*(x_1) = -\infty \quad \forall u_0 \in \Gamma(x_0)$$

Odtiaľ priamo vyplýva (11). □

Veta 3.2 :

Nech sú splnené predpoklady P1 a P2. Ak V je riešením (FR) a spĺňa :

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n V(x_n) = 0 \qquad \forall \omega = (u_0, u_1, \ldots) \in \pi(x_0), \forall x_0 \in X \tag{12}$$

kde $x_n = F(x_{n-1}, u_{n-1})$ pre $n = 1, 2, \ldots$ Potom $V = V^*$, t.j. V je hodnotovou funkciou.

Dôkaz :

Ak je splnená (12), potom V nenadobúda nekonečné hodnoty. Teda V spĺňa (8) a (9) a stačí ukázať, že spĺňa (6) a (7). Ak V spĺňa (FR), potom z (8) vyplýva, že $\forall x_0 \in X$ a $\forall \omega \in \pi(x_0)$ platí : $V(x_0) \geq f^0(x_0, u_0) + \beta V(F(x_0, u_0))$

$$\geq f^0(x_0, u_0) + \beta f^0(x_1, u_1) + \beta^2 V(F(x_1, u_1))$$

$$\vdots$$

$$\geq J_n(x_0, \omega) + \beta^{n+1} V(F(x_n, u_n)) =$$

$$= J_n(x_0, \omega) + \beta^{n+1} V(x_{n+1})$$

Prejdúc k limite pre $n \to \infty$ a použitím (12) dostávame, že V spĺňa (6).

Nech teraz $x_0 \in X$ a $\varepsilon > 0$ sú dané. Zvoľme si postupnosť $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbf{R}_+$ takú, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} \delta_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Z (9) vyplýva, že môžeme zvoliť $u_0 \in \Gamma(x_0)$ tak, že

$$V(x_0) \leq f^0(x_0, u_0) + \beta V(F(x_0, u_0)) + \delta_1 \tag{13}$$

a zvoliť $u_1 \in \Gamma(x_1)$ tak, že

$$V(x_1) \leq f^0(x_1, u_1) + \beta V(F(x_1, u_1)) + \delta_2 \tag{14}$$

Z (13) a (14) dostávame :

$$V(x_0) \leq f^0(x_0, u_0) + \beta f^0(x_1, u_1) + \beta V(x_2) + \delta_1 + \beta \delta_2$$

Máme teda :

$$V(x_0) \leq f^0(x_0, u_0) + \beta f^0(x_1, u_1) + \beta V(x_2) + \delta_1 + \beta \delta_2$$

a indukciou :

$$V(x_0) \leq J_n(x_0, \omega) + \beta^{n+1} V(x_{n+1}) + (\delta_1 + \beta \delta_2 + \ldots.. + \beta^n \delta_{n+1})$$

$$V(x_0) \leq J_n(x_0, \omega) + \beta^{n+1} V(x_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Pretože z (12) vyplýva, že pre n dostatočne veľké je $\beta^{n+1} V(x_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ dostávame, že

$$V(x_0) \le J_n(x_0,\omega) + \varepsilon \qquad \forall n - \text{dostatočne veľké}$$

Keďže $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľné, z toho vyplýva, že (7) je splnená. □

Ďalšie dve vety pojednávajú o optimalite prípustných riadení.

Veta 3.3 :

Nech sú splnené predpoklady P1 a P2. Nech $\omega^* \in \pi(x_0)$ je optimálne riadenie pre počiatočný stav x_0. Potom platí :

$$V^*(x_i^*) = f^0(x_i^*, u_i^*) + \beta\, V^*\left(F(x_i^*, u_i^*)\right) \qquad i = 0,1,2,... \tag{15}$$

Dôkaz :

(V ďalšom $x_0 = x_0^*$.)

Pretože ω^* dosahuje suprémum :

$$V^*(x_0^*) = J(x_0^*, \omega^*) = f^0(x_0^*, u_0^*) + \beta\, J(x_1^*, \omega'^*) \tag{16}$$

kde $\omega'^* = (u_1^*, u_2^*, ...)$ a druhú rovnosť v (16) dostávame z lemy 1.

Ďalej $\forall \omega \in \pi(x_0^*)$ platí :

$$V^*(x_0^*) = J(x_0^*, \omega^*) = f^0(x_0^*, u_0^*) + \beta\, J(x_1^*, \omega'^*) \ge J(x_0^*, \omega) = f^0(x_0^*, u_0) + \beta\, J(x_1, \omega')$$

kde $\omega' = (u_1, u_{2,}...)$ a $x_1 = F(x_0^*, u_0)$.

Rovnako platí táto nerovnosť i pre všetky riadenia s $u_0 = u_0^*$ (resp. $x_1 = x_1^*$). Je to preto, lebo ak $(u_1, u_2, ...) \in \pi(x_1^*)$, potom $(u_0^*, u_1, u_2, ...) \in \pi(x_0^*)$, kde $x_1^* = F(x_0^*, u_0^*)$. Takže máme :

$$J(x_1^*, \omega'^*) \ge J(x_1, \omega') \;\; \forall \omega \in \pi(x_1^*)$$

a teda :

$$J(x_1^*, \omega'^*) = V^*(x_1^*) \tag{17}$$

Dosadením (17) do (16) :

$$V^*(x_0^*) = f^0(x_0^*, u_0^*) + \beta\, V^*(x_1^*) = f^0(x_0^*, u_0^*) + \beta\, V^*\left(F(x_0^*, u_0^*)\right)$$

Takže sme vetu dokázali pre $i=0$. S využitím vzťahu (17) a zopakovaním tohto postupu by sme vetu dokázali aj pre $i=1$, takže indukciou sa dá veta dokázať pre všetky i. □

Veta 3.4 :

Nech sú splnené predpoklady P1 a P2. Nech $\omega^* \in \pi(x_0)$ je prípustné riadenie z počiatočného stavu x_0 spĺňajúce vzťah (15) a s

$$\limsup_{i\to\infty} \beta^i V^*(x_i^*) \le 0 \tag{18}$$

kde V^* je hodnotová funkcia. Potom ω^* je optimálne riadenie pre úlohu $(P(x_0))$ s počiatočným stavom x_0.

Dôkaz :

Nech $\omega^* \in \pi(x_0)$ spĺňa (15) i (18), potom indukciou z (15) dostávame :

$$V^*(x_0) = J_n(x_0, \omega^*) + \beta^{n+1} V^*(x_{n+1}^*) \quad n = 1, 2, \ldots$$

Použijeme (18) :

$$V^*(x_0) \le J(x_0, \omega^*)$$

Pretože $\omega^* \in \pi(x_0)$ a V^* je hodnotová funkcia, ω^* je optimálne riadenie pre úlohu $(P(x_0))$. □

V predchádzajúcom sme definovali $\forall x \in X$: $\Gamma(x) = \{u \in U \mid F(x,u) \in X\}$. Ďalej však môžeme definovať ešte i $\Gamma^*(x) \subseteq \Gamma(x)$ ako :

$$\Gamma^*(x) := \left\{u \in \Gamma(x) \,\middle|\, V^*(x) = f^0(x,u) + \beta V^*(F(x,u))\right\}$$

Potom veta 3.3 hovorí, že každé optimálne riadenie je generované z Γ^*, t.j. $u_i \in \Gamma^*(x_i)$ pre $i = 0,1,\ldots$ a veta 3.4 vraví, že ľubovoľné riadenie generované z Γ^* a spĺňajúce (18) je optimálne.

4. METÓDA POSTUPNÝCH APROXIMÁCIÍ, VETA O KONTRAKTÍVNOM ZOBRAZENÍ A VETA O MAXIME

4.1 Metóda postupných aproximácii

V predchádzajúcej kapitole sme si odvodili nutné a postačujúce podmienky pre hodnotovú funkciu. V tejto sa pozrieme na to, ako riešiť RDP (v predošlom sme ju označili (FR)) pre autonómnu úlohu na nekonečnom časovom horizonte. Venujme sa teda opäť úlohe $\left(P\left(x_0\right)\right)$:

$$\left(P\left(x_0\right)\right) \qquad \underset{\{u_i\}_{i=0}^{\infty}}{Sup} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f^0\left(x_i,u_i\right) \qquad 0<\beta<1 \tag{5}$$

$$x_{i+1}=F\left(x_i,u_i\right) \qquad i=0,1,... \tag{1}$$

$$x_i \in X \subseteq \mathbf{R}^l \tag{2}$$

$$u_i \in U \subseteq \mathbf{R}^k \tag{3}$$

$$x_0 \in X - dané \tag{4}$$

a k nej prislúchajúcej RDP :

$$\text{(FR)} \qquad V\left(x\right)=\sup_{u\in\Gamma(x)}\left[f^0\left(x,u\right)+\beta\, V\left(F\left(x,u\right)\right)\right]$$

(FR) je funkcionálna rovnica, v ktorej sú funkcie f^0 a F dané a hodnotová funkcia V neznáma. Našou úlohou je dokázať existenciu a jednoznačnosť funkcie V vyhovujúcej (FR). Klasický prístup (19. storočie) k tomuto problému je metóda postupných aproximácií. Začneme tak, že si vezmeme počiatočnú voľbu, špecifickú funkciu, nazvanú V_0. Potom zadefinujeme novú funkciu V_1 danú :

$$V_1\left(x\right)=\sup_{u\in\Gamma(x)}\left[f^0\left(x,u\right)+\beta\, V_0\left(F\left(x,u\right)\right)\right]$$

Pokiaľ $V_1\left(x\right)=V_0\left(x\right) \ \ \forall x\in X$, potom je V_0 riešením (FR).

Predpokladajme, že $V_1\left(x\right)\neq V_0\left(x\right)$, potom použijeme V_1 ako novú voľbu a zadefinujeme ďalšiu funkciu V_2 danú :

$$V_2(x) = \sup_{u\in\Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta V_1(F(x,u)) \right]$$

Takto môžeme zadefinovať postupnosť $\{V_n\}$ rekurentne danú :

$$V_{n+1}(x) = \sup_{u\in\Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta V_n(F(x,u)) \right] \quad n = 0,1,2,...$$

o ktorej môžeme dúfať, že konverguje k V vyhovujúcej (FR). Ak by sme ukázali, že $\lim_{n\to\infty} V_n$ je rovnaká pre všetky počiatočné V_0, bola by jedinou funkciou spĺňajúcou (FR).

Definujme teda pre každú funkciu $V : X \to \mathbf{R}$ novú funkciu $TV : X \to \mathbf{R}$ ako :

$$TV(x) := \sup_{u\in\Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta V(F(x,u)) \right] \tag{6}$$

Potom rekurentný vzťah môžeme prepísať do tvaru :

$$V_{n+1}(x) = TV_n(x) \quad n = 0,1,2,...$$

kde by T bol operátor $T : C \to C$ a C bola nejaká množina funkcií.

Keď to máme takto zapísané, vidíme, že riešiť (FR) je ekvivalentné nájdeniu pevného bodu zobrazenia T, t.j. nájsť $V \in C$ také, že $V = TV$. Metóda postupných aproximácií je spôsob, ako konštruovať tento pevný bod.

4.2 Úplné normované vektorové priestory a veta o kontraktívnom zobrazení

Kapitola 4.2 bude predstavovať len akési zhrnutie poznatkov o normovaných (metrických) vektorových priestoroch, resp. úplných vektorových priestoroch (bližšie informácie poskytne lit. [2]). V tejto časti sa zameriame najmä na tie skutočnosti, ktoré bezprostredne súvisia s našou diplomovou prácou.

Definícia 4.1 :

Metrický priestor (S, ρ) sa nazýva úplný, ak každá cauchyovská postupnosť v S konverguje k bodu z S.

Veta 4.1 :

Nech $X \subseteq \mathbf{R}^l$ a nech $C(X)$ je množina ohraničených spojitých funkcií $f : X \to \mathbf{R}$ so suprémovou normou :

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Potom $C(X)$ je úplný normovaný vektorový priestor. (Ak X je kompakt, potom každá spojitá funkcia je na X ohraničená. Inak musíme ohraničenie zahrnúť.)

Definícia 4.2 :

Nech (S, ρ) je metrický priestor a $T : S \to S$ je funkcia zobrazujúca S do seba. T je kontraktívne zobrazenie, ak pre nejaké $\alpha \in (0,1)$ a $\forall V, W \in S$ platí :

$$\rho(TV, TW) \leq \alpha\, \rho(V, W)$$

Veta 4.2 (Veta o kontraktívnom zobrazení):

Ak (S, ρ) je úplný metrický priestor a $T : S \to S$ je kontraktívne zobrazenie, potom :

1. T má práve jeden pevný bod v S
2. $\forall V_0 \in S, n = 0,1,... : \rho(T^n V_0, V) \leq \alpha^n\, \rho(V_0, V)$, kde V je pevný bod zobrazenia T.

Dôsledok 4.2.1 :

Nech (S, ρ) je úplný metrický priestor a nech $T : S \to S$ je kontraktívne zobrazenie s pevným bodom $V \in S$. Ak S' je uzavretá podmnožina v S a $T(S') \subseteq S'$, potom $V \in S'$. Taktiež ak $T(S') \subseteq S'' \subseteq S'$, potom $V \in S''$.

Dôsledok 4.2.2 :

Nech (S, ρ)je úplný metrický priestor, nech $T : S \to S$ a nech pre nejaké celé číslo N platí, že $T^{\mathrm{N}} : S \to S$ je kontraktívne zobrazenie. Potom :

1. T má jediný pevný bod v S
2. $\forall V_0 \in S, \mathrm{k} = 0,1,... : \rho(T^{\mathrm{kN}} V_0, V) \leq \alpha^{\mathrm{k}}\, \rho(V_0, V)$, kde V je pevný bod zobrazenia T.

Veta 4.3 :

Nech $X \subseteq \mathbf{R}^l$ a nech $B(X)$ je priestor ohraničených funkcií $f: X \to \mathbf{R}$ so suprémovou normou. Nech $T: B(X) \to B(X)$ je operátor, ktorý spĺňa :

1. Ak $f, g \in B(X)$ a $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$, potom $Tf(x) \leq Tg(x)\ \forall x \in X$
2. $\exists\ \beta \in (0,1)$ také, že : $[T(f+a)](x) \leq Tf(x) + \beta a \quad \forall f \in B(X), a \geq 0, x \in X$

   kde $(f+a)(x) = f(x) + a$.

Potom T je kontraktívne zobrazenie.

Veta 4.3 sa tiež nazýva Blackwellovými postačujúcimi podmienkami pre kontraktívne zobrazenie (bližšie v lit. [3]).

Zadefinujme teraz nový predpoklad P3, ktorý využijeme v dôkaze ďalšej vety.

Predpoklad P3 : Funkcia f^0 je ohraničená.

Navyše tento predpoklad spolu s požiadavkou, aby $\beta \in (0,1)$, zabezpečujú, že je splnený i predpoklad P2.

Veta 4.4 :

Nech platí predpoklad P3 a nech $B(X)$ je priestor ohraničených funkcií $f: X \to \mathbf{R}$ so suprémovou normou. Potom operátor T definovaný v (6) je kontraktívne zobrazenie z $B(X)$ do $B(X)$.

Dôkaz :

Najprv ukážeme, že T je zobrazenie z $B(X)$ do $B(X)$. Vezmime ľubovoľnú funkciu $V \in B(X)$. Operátor T bol definovaný ako :

$$TV(x) = \sup_{u \in \Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta\, V(F(x,u)) \right]$$

Podľa predpokladu P3 je f^0 ohraničená funkcia a $\beta \in (0,1)$, z toho vyplýva, že suprémum súčtu dvoch ohraničených funkcií bude konečné číslo. Odtiaľ dostávame, že $TV \in B(X)$ a teda $T: B(X) \to B(X)$.

Ešte treba dokázať, že T je kontraktívne zobrazenie na $B(X)$. Na to stačí, ukázať, že T spĺňa Blackwellove postačujúce podmienky pre kontraktívne zobrazenie, t.j. predpoklady vety 4.3 :

1. Ak $\forall x \in X : V(x) \leq W(x)$, kde $V, W \in B(X)$. Potom $\forall x \in X$:

   $$TV(x) = \sup_{u\in\Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta\, V\big(F(x,u)\big)\right] \leq \sup_{u\in\Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta\, W\big(F(x,u)\big)\right] = TW(x)$$

   t.j. bod 1 je splnený.

2. Ak $V(x) \in B(X), a \geq 0, x \in X$, potom :

   $$T(V+a)(x) = \sup_{u\in\Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta \left[V\big(F(x,u)\big) + a \right]\right] =$$

   $$= \sup_{u\in\Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta\, V\big(F(x,u)\big)\right] + \beta a =$$

   $$= TV(x) + \beta a$$

   a to znamená, že i bod 2 je splnený.

Podľa vety 4.3 je T kontraktívne zobrazenie. □

Teda pre metódu postupných aproximácií stačí zvoliť počiatočnú funkciu $V_0 \in B(X)$ a keďže hodnotová funkcia bola zadefinovaná ako :

$$V^*(x_0) = \sup_{\omega\in\pi(x_0)} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f^0(x_i, u_i),$$

z predpokladu P3 vyplýva, že aj $V^*(x_0) \in B(X)$. Vo vete 4.1 sme si však ukázali, že až $C(X)$- množina ohraničených spojitých funkcií $f : X \to \mathbf{R}$ so suprémovou normou je úplný normovaný vektorový priestor. Správne by sme teda mali vyžadovať, aby f^0 bola nielen ohraničená, ale aj spojitá a rovnako, aby tiež $V_0 \in C(X)$ miesto $V_0 \in B(X)$. Potom by bolo $T : C(X) \to C(X)$ kontraktívne zobrazenie na úplnom normovanom vektorovom priestore a podľa vety 4.2 by malo jediný pevný bod. Najprv však treba zabezpečiť, aby operátor T zobrazoval priestor $C(X)$ do seba. Za akých podmienok sa tak deje, sa dozvieme z vety o maxime.

V kapitole 3 sme si pre každé $x \in X$ definovali Γ i Γ^*. Sú to relácie (korešpondencie), ktoré každému $x \in X$ priradia množinu $\Gamma(x) \subseteq U$, resp. $\Gamma^*(x) \subseteq U$.

Teda ide vlastne o multifunkcie. V nasledujúcich riadkoch si povieme niečo viac o multifunkciách a dokážeme vetu o maxime (viď. lit. [3]).

4.3 Multifunkcie a veta o maxime

Nech $X \subseteq \mathbf{R}^l$ a $U \subseteq \mathbf{R}^k$, nech $f : X \times U \to \mathbf{R}$ a nech $\Gamma : X \to U$ je korešpondencia. Ak $\forall x \in X$ je funkcia $f(x,\cdot)$ spojitá v u a množina $\Gamma(x)$ je neprázdna a kompaktná v U, potom $\forall x \in X$ nadobúda funkcia f na $\Gamma(x)$ maximum a v tomto prípade bude funkcia :

$$h(x) := \max_{u \in \Gamma(x)} f(x,u) \tag{7}$$

dobre definovaná a množina :

$$G(x) := \{u \in \Gamma(x) \mid f(x,u) = h(x)\} \tag{8}$$

hodnôt u, v ktorých nadobúda $f(x,u)$ maximum, neprázdna.

Definícia 4.3 :

Korešpondencia $\Gamma : X \to U$ sa nazýva kompaktná (alebo kompaktne-hodnotová), ak $\forall\ x \in X$ je $\Gamma(x) \subseteq U$ kompaktná množina. Korešpondencia $\Gamma : X \to U$ sa nazýva konvexná (alebo konvexne-hodnotová), ak $\forall\ x \in X$ je $\Gamma(x) \subseteq U$ konvexná množina.

Definícia 4.4 :

Korešpondencia $\Gamma : X \to U$ je hemi-spojitá zdola v $x \in X$, ak $\Gamma(x)$ je neprázdna a ak $\forall u \in \Gamma(x)$ a každú postupnosť $x_n \to x$ v X $\exists\ N \geq 1$ a postupnosť $\{u_n\}_{n=N}^{\infty}$ taká, že $u_n \to u$ a $u_n \in \Gamma(x_n)$ $\forall n \geq N$. (Ak $\Gamma(z)$ je neprázdna $\forall\, z \in X$, potom je vždy možné vziať $N = 1$.)

Definícia 4.5 :

Kompaktná korešpondencia $\Gamma : X \to U$ je hemi-spojitá zhora v $x \in X$, ak $\Gamma(x)$ je neprázdna a pre každú postupnosť $x_n \to x$ v X a pre každú postupnosť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $u_n \in \Gamma(x_n)\ \forall n$ $\exists$ konvergentná podpostupnosť postupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej limita u je z $\Gamma(x)$.

Definícia 4.6 :

Korešpondencia $\Gamma : X \to U$ je spojitá v $x \in X$, ak je hemi-spojitá zhora i hemi-spojitá zdola v x. Korešpondencia $\Gamma : X \to U$ sa nazýva spojitá na X, ak je spojitá v každom $x \in X$.

Veta 4.5 (Veta o maxime) :

Nech $X \subseteq \mathbf{R}^l$ a $U \subseteq \mathbf{R}^k$, nech $f : X \times U \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a nech $\Gamma : X \to U$ je kompaktná a spojitá korešpondencia. Potom funkcia $h : X \to \mathbf{R}$ definovaná v (7) je spojitá a korešpondencia $G : X \to U$ definovaná v (8) je neprázdna, kompaktná a hemi-spojitá zhora.

Dôkaz :

Fixujme $x \in X$. Množina $\Gamma(x)$ je neprázdna a kompaktná a $f(x,\cdot)$ je spojitá. Teda f dosahuje na $\Gamma(x)$ maximum a množina $G(x)$ je neprázdna. Pretože $G(x) \subseteq \Gamma(x)$ a $\Gamma(x)$ je kompakt, z toho vyplýva, že $G(x)$ je ohraničená. Uvažujme postupnosť $u_n \to u$ a $u_n \in G(x)\ \forall n$. Keďže $\Gamma(x)$ je uzavretá, tak $u \in \Gamma(x)$. Taktiež, pretože $h(x) = f(x, u_n)\ \forall n$ a f je spojitá, tak $f(x,u) = h(x)$. Teda $u \in G(x)$. Z toho vyplýva, že $G(x)$ je uzavretá. Čiže $G(x)$ je neprázdna a kompaktná pre každé x, keďže x bolo ľubovoľné.

Teraz ukážeme, že $G(x)$ je hemi-spojitá zhora. Fixujme $x \in X$ a nech $\{x_n\}$je postupnosť v X konvergujúca k x. Vyberme $u_n \in G(x_n)\ \forall n$. Pretože Γ je hemi-spojitá zhora, tak v $\Gamma(x)$ existuje konvergentná podpostupnosť $\{u_{n_k}\}$, ktorej limita $u \in \Gamma(x)$. Nech $z \in \Gamma(x)$. Keďže Γ je tiež hemi-spojitá zdola, v $\Gamma(x)$ existuje postupnosť $z_{n_k} \to z$, kde $z_{n_k} \in \Gamma(x_{n_k})\ \forall k$ a $\{x_{n_k}\}$ je vybraná podpostupnosť z postupnosti $\{x_n\}$, kde koeficienty n_k pri u_{n_k} a x_{n_k} sa zhodujú. Z toho, že $f\left(x_{n_k}, u_{n_k}\right) \geq f\left(x_{n_k}, z_{n_k}\right) \forall k$ a f je spojitá, vyplýva, že : $f(x,u) \geq f(x,z)$. Pretože $z \in \Gamma(x)$ bolo ľubovoľné, tak platí, že $u \in G(x)$. Z čoho dostávame, že G je hemi-spojitá zhora.

Ešte treba dokázať, že h je spojitá. Fixujme $x \in X$ a nech $\{x_n\}$je nejaká postupnosť v X konvergujúca k x. Označme $\overline{h} = \limsup h(x_n)$ a $\underline{h} = \liminf h(x_n)$. Vyberme $u_n \in G(x_n)$ $\forall n$. Potom v X existuje podpostupnosť $\{x_{n_k}\}$ taká, že $\overline{h} = \lim f\left(x_{n_k}, u_{n_k}\right)$ a keďže G je hemi-spojitá zhora, tak existuje podpostupnosť z $\{u_{n_k}\}$, nazvime ju $\{u'_j\}$, konvergujúca k $u \in G(x)$. Platí :

$$\overline{h} = \lim f\left(x_{n_k}, u'_j\right) = f(x,u) = h(x).$$

Analogicky sa dá ukázať, že $\underline{h} = h(x)$. Teda $\{h(x_n)\}$ konverguje a jej limita je $h(x)$. Z čoho vyplýva, že h je spojitá. □

5. ĎALŠIE TEORETICKÉ ODVODENIA

V tejto kapitole sa budeme zaoberať funkcionálnou rovnicou typu :

$$V(x) = \max_{u \in \Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta V\left(F(x,u)\right) \right] \tag{1}$$

Budeme k tomu potrebovať tri nové predpoklady. Nech platí :

Predpoklad P4 : $X \subseteq \mathbf{R}^l$ je konvexná a $\Gamma : X \to U$ je neprázdna, kompaktná a spojitá.

Predpoklad P5 : Funkcia f^0 je ohraničená a spojitá.

Predpoklad P6 : Funkcia F je spojitá.

Je zrejmé, že za platnosti predpokladov P4 a P5 platia i predpoklady P1 a P2, resp. P3. Vieme, že za predpokladov P1 a P2 platia vety 4.1, 4.2, 4.3 a 4.4 z predchádzajúcej časti. Predpoklad P5 nám zaručí, že hodnotová funkcia definovaná v predošlom bude z $C(X)$- množiny spojitých a ohraničených funkcií na X a predpoklad P6 nám zaručí, že i zložená funkcia $V\left(F(x,u)\right)$ bude spojitá. Množina $C(X)$ je úplným metrickým priestorom a teda ak by bolo riešenie (1) z $C(X)$, potom by podľa vety o kontraktívnom zobrazení (veta 4.2) bolo jediné a bola by ním práve hodnotová funkcia. Veta 5.1 pojednáva práve o tejto situácii. Značme preto ďalej hodnotovú funkciu a riešenie (1) rovnako a totiž ako V. Zadefinujme tiež operátor T na $C(X)$ ako :

$$Tf(x) := \max_{u \in \Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta f\left(F(x,u)\right) \right] \tag{2}$$

kde $f \in C(X)$ a pri danom riešení V rovnice (1) definujme optimálnu korešpondenciu $\Gamma^* : X \to U$ ako :

$$\Gamma^*(x) := \left\{ u \in \Gamma(x) \,\middle|\, V(x) = f^0(x,u) + \beta V\left(F(x,u)\right) \right\} \tag{3}$$

Veta 5.1 :

Nech sú splnené predpoklady P4, P5 a P6 a nech $C(X)$ je priestor spojitých ohraničených funkcií $f : X \to \mathbf{R}$ so suprémovou normou. Potom operátor T zobrazuje

$C(X)$ do seba, t.j. $T: C(X) \to C(X)$, T má jediný pevný bod $V \in C(X)$ a $\forall\, V_0 \in C(X)$:

$$\|T^n V_0 - V\| \le \beta^n \|V_0 - V\| \qquad n = 0,1,... \tag{4}$$

kde $\|\cdot\|$ označuje normu. Naviac pri danom V je optimálna korešpondencia $\Gamma^*: X \to U$ kompaktná a hemi-spojitá zhora.

Dôkaz :

Za predpokladov P4, P5 a P6 je vzťah (2) $\forall\, f \in C(X)$ a $\forall\, x \in X$ úlohou maximalizovať spojitú funkciu $\left[f^0(x,\cdot) + \beta f(\cdot)\right]$ na kompaktnej množine $\Gamma(x)$. Teda maximum sa dosahuje. Pretože f i f^0 sú ohraničené, je jasné, že aj Tf bude ohraničená. A keďže f, F a f^0 sú tiež spojité a Γ je kompaktná a spojitá, tak z vety o maxime (veta 4.5) vyplýva, že Tf je spojitá. Takže $T: C(X) \to C(X)$.

Ale T spĺňa i predpoklady vety 4.3 a preto je kontraktívnym zobrazením na množine $C(X)$, o ktorej vieme, že je úplným metrickým priestorom. Preto podľa vety o kontraktívnom zobrazení (veta 4.2) má T jediný pevný bod $V \in C(X)$ a platí vzťah (4). Rovnako vlastnosti optimálnej korešpondencie Γ^* vyplývajú z vety o maxime. □

Pre precíznejšiu charakterizáciu V a Γ^* budeme potrebovať ešte viac informácií o f^0 a Γ. Zavedieme preto predpoklady P7, P8 a P9, ktoré spolu s dôsledkom 4.2.1 vety o kontraktívnom zobrazení poskytnú ďalšie závery o V a Γ^*.

Predpoklad P7 : $U \subseteq \mathbf{R}^k$ je konvexná a f^0 je rýdzo konkávna, t.j.

$$f^0\left[\theta(x,u) + (1-\theta)(x',u')\right] > \theta f^0(x,u) + (1-\theta) f^0(x',u')$$

$$\forall (x,u),(x',u') \in X \times U \text{ a } \forall \theta \in (0,1)$$

Predpoklad P8 : Γ je konvexná v zmysle, že pre nejaké $0 \le \theta \le 1$ a $x, x' \in X$:

$$\text{Ak } u \in \Gamma(x) \text{ a } u' \in \Gamma(x'), \text{ potom } \theta u + (1-\theta)u' \in \Gamma\left[\theta x + (1-\theta)x'\right].$$

Predpoklad P9 : F je lineárne zobrazenie a teda $\forall (x,u),(x',u') \in X \times U$

$$\text{a } \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}: F\left[\alpha(x,u) + \beta(x',u')\right] = \alpha F(x,u) + \beta F(x',u')$$

Veta 5.2 :

Nech sú splnené predpoklady P4, P5, P6 ako i P7, P8, P9. Nech V spĺňa (1) a Γ^* spĺňa (3). Potom V je rýdzo konkávna a Γ^* je spojitá jedno-hodnotová funkcia.

Dôkaz :

Nech $C'(X) \subset C(X)$ je množina ohraničených, spojitých, konkávnych funkcií na X a nech $C''(X) \subset C'(X)$ je množina rýdzo konkávnych, ohraničených, spojitých funkcií na X. Pretože $C'(X)$ je uzavretá podmnožina úplneho metrického priestoru, potom podľa vety 5.1 a dôsledku 4.2.1 vety o kontraktívnom zobrazení stačí ukázať, že $T\left[C'(X)\right] \subseteq C''(X)$. Overme to.

Nech $f \in C'(X)$ a nech :

$$x_0 \neq x_1,\ \theta \in (0,1) \ \text{ a } \ x_\theta = \theta x_0 + (1-\theta) x_1$$

Nech pre $u_i \in \Gamma(x_i)$ je dosiahnutá hodnota $Tf(x_i)$ pre $i = 0,1$. Potom podľa predpokladu P8 $u_\theta = \theta u_0 + (1-\theta) u_1 \in \Gamma(x_\theta)$. Z čoho :

$$\begin{aligned}
Tf(x_\theta) &\geq f^0(x_\theta, u_\theta) + \beta f\left(F(x_\theta, u_\theta)\right) \\
&= f^0(x_\theta, u_\theta) + \beta f\left[F\left(\theta (x_0, u_0) + (1-\theta)(x_1, u_1)\right)\right] \\
&> \theta f^0(x_0, u_0) + (1-\theta) f^0(x_1, u_1) + \beta \left[\theta f\left(F(x_0, u_0)\right) + (1-\theta) f\left(F(x_1, u_1)\right)\right] \\
&= \theta \left[f^0(x_0, u_0) + \beta f\left(F(x_0, u_0)\right)\right] + (1-\theta)\left[f^0(x_1, u_1) + \beta f\left(F(x_1, u_1)\right)\right] \\
&= \theta\, Tf(x_0) + (1-\theta) Tf(x_1)
\end{aligned}$$

kde prvá nerovnosť vyplýva z definície (2) operátora T a z toho, že $u_0 \in \Gamma(x_0)$, tretí riadok využíva fakt, že $f \in C'(X)$, predpoklady P7 a P9. Pretože x_0 a x_1 boli ľubovoľné, tak Tf je rýdzo konkávna a keďže f bola ľubovoľná, tak $T\left[C'(X)\right] \subseteq C''(X)$. Takže jediný pevný bod operátora T funkcia V je rýdzo konkávna. Pretože f^0 je tiež rýdzo konkávna a $\forall x \in X$ je $\Gamma(x)$ konvexná, tak maximum v (2) sa dosahuje v len jednom bode u. Z čoho vyplýva, že Γ^* je jedno-hodnotová funkcia (nie je multifunkcia). Podľa vety 5.1 je Γ^* hemi-spojitá zhora. Keďže je však jedno-hodnotová, tak je spojitá. □

Teda sme si ukázali, že ak navyše platia aj predpoklady P7, P8 a P9, tak optimálna korešpondencia Γ^* je vlastne obyčajnou (jedno-hodnotovou) funkciou, ktorú budeme v ďalšom pre rozlíšenie označovať γ^*. Ide o tzv. riadiacu funkciu alebo sa tiež nazýva optimálnou spätnou väzbou. Súčasne vidíme, že hodnotová funkcia je charakterizovaná tým, že operátor T zachováva určité vlastnosti. Ak má funkcia V_0 napríklad vlastnosť P a T túto vlastnosť zachováva, tak môžeme očakávať, že každá funkcia z postupnosti $\{T^n V_0\}$ má vlastnosť P. Ak by táto vlastnosť bola zachovaná rovnomernou konvergenciou, potom môžeme očakávať, že i V ju bude mať. Túto všeobecnú myšlienku sa pokúsime odvodiť vo vete 5.3. Najprv si však dokážeme dva užitočné medzivýsledky (viď. lit. [3]).

Lema 5.1 :

Nech $X \subseteq \mathbf{R}^l$ a $U \subseteq \mathbf{R}^k$. Predpokladajme, že korešpondencia $\Gamma : X \to U$ je nejaká neprázdna, kompaktne- a konvexne-hodnotová a spojitá. Nech A je graf Γ, t.j.

$$A := \{(x,u) \in X \times U \mid u \in \Gamma(x)\}$$

Ďalej nech funkcia $f : A \to \mathbf{R}$ je spojitá a $\forall\, x \in X$ je $f(x,\cdot)$ rýdzo konkávna. Definujme funkciu $g : X \to U$ ako :

$$g(x) := \arg\max_{u \in \Gamma(x)} f(x,u)$$

Potom $\forall \varepsilon > 0$ a $\forall x \in X$ $\exists\, \delta_x > 0$ také, že platí :

$$\text{Ak } u \in \Gamma(x) \text{ a ak } \left| f\left[x, g(x)\right] - f(x,u) \right| < \delta_x, \text{ potom } \left\| g(x) - u \right\| < \varepsilon.$$

Ak X je kompakt, potom je možné vziať $\delta > 0$ nezávislé na x.

Dôkaz :

Poznamenajme, že za týchto predpokladov je g dobre definovaná, spojitá, jedno-hodnotová funkcia. Dokážme túto lemu najprv pre prípad, že X je kompakt. Potom aj A je kompakt. Pre každé $\varepsilon > 0$ definujme :

$$A_\varepsilon := \{(x,u) \in A \mid \left\| g(x) - u \right\| \geq \varepsilon\}$$

Ak $A_\varepsilon = \emptyset$ pre všetky ε, tak Γ je jedno-hodnotová a veta platí triviálne. V opačnom prípade $\exists\, \hat{\varepsilon} > 0$ dostatočne malé, také, že pre všetky $0 < \varepsilon < \hat{\varepsilon}$ je množina A_ε neprázdna a kompaktná. Pre nejaké také ε nech :

$$\delta = \min_{(x,u)\in A_\varepsilon} \left| f\left[x, g(x)\right] - f(x,u) \right|$$

Pretože funkcia, ktorú minimalizujeme, je spojitá a A_ε je kompakt, tak minimum sa dosahuje. Keďže $\left[x, g(x)\right] \notin A_\varepsilon$ pre všetky $x \in X$, tak $\delta > 0$. Čiže :

$$\text{Ak } u \in \Gamma(x) \text{ a ak } \left\| g(x) - u \right\| \geq \varepsilon, \text{ potom } \left| f\left[x, g(x)\right] - f(x,u) \right| \geq \delta .$$

Teda vetu máme pre prípad, že X je kompakt, dokázanú.

Ak X nie je kompakt, potom len predchádzajúci argument aplikujeme pre každé fixované $x \in X$ zvlášť. □

Lema 5.2 :

Nech X, U, Γ a A sú definované ako v leme 5.1. Nech $\{f_n\}$ je postupnosť spojitých reálnych funkcií na A. Nech pre každé n a pre každé $x \in X$ je $f_n(x,\cdot)$ rýdzo konkávna. Nech funkcia f má tie isté vlastnosti a nech $f_n \to f$ rovnomerne (v suprémovej norme). Definujme funkcie g_n a g ako :

$$g_n(x) := \arg\max_{u\in\Gamma(x)} f_n(x,u) \quad \text{pre } n = 1,2,... \text{ a}$$

$$g(x) := \arg\max_{u\in\Gamma(x)} f(x,u)$$

Potom $g_n \to g$ bodovo. Ak X je kompakt, tak $g_n \to g$ rovnomerne.

Dôkaz :

Najprv poznamenajme, že funkcia $g_n(x)$ je jediná funkcia, ktorá maximalizuje $f_n(x,\cdot)$ na $\Gamma(x)$ a g je jediná funkcia, ktorá maximalizuje $f(x,\cdot)$ na $\Gamma(x)$. Z toho vyplýva, že :

$$\begin{aligned}
0 &\leq f\left[x, g(x)\right] - f\left[x, g_n(x)\right] \\
&\leq f\left[x, g(x)\right] - f_n\left[x, g(x)\right] + f_n\left[x, g_n(x)\right] - f\left[x, g_n(x)\right] \\
&\leq 2\left\| f - f_n \right\| \qquad \text{pre všetky } x \in X
\end{aligned}$$

Z toho, že $f_n \to f$ rovnomerne, dostávame, že pre nejaké $\delta > 0$ $\exists\, M_\delta \geq 1$ také, že platí :

$0 \le f\left[x, g(x)\right] - f\left[x, g_n(x)\right] \le 2\|f - f_n\| < \delta$ pre všetky $x \in X$ a pre všetky $n \ge M_\delta$ (5)

Na to, aby sme ukázali, že $g_n \to g$ bodovo, treba dokázať, že pre každé $\varepsilon > 0$ a pre každé $x \in X$ $\exists N_x \ge 1$ také, že :

$$\|g(x) - g_n(x)\| < \varepsilon \quad \text{pre všetky } n \ge N_x \tag{6}$$

Podľa lemy 5.1 stačí potom ukázať, že pre nejaké $\delta_x > 0$ a $x \in X$ $\exists N_x \ge 1$ také, že platí :

$$\left|f\left[x, g(x)\right] - f\left[x, g_n(x)\right]\right| < \delta_x \quad \text{pre všetky } n \ge N_x \tag{7}$$

Z (5) vyplýva, že ľubovoľné $N_x \ge M_{\delta_x}$ má túto vlastnosť.

Ak je X kompakt, potom na to, aby sme dokázali, že $g_n \to g$ rovnomerne, je potrebné ukázať, že pre každé $\varepsilon > 0$ $\exists N \ge 1$ také, že platí (6) pre všetky $x \in X$. Podľa lemy 5.1 stačí, aby pre nejaké $\delta > 0$ $\exists N \ge 1$ také, že platí (7) pre všetky $x \in X$. Z (5) vyplýva, že ľubovoľné $N \ge M_\delta$ má túto vlastnosť. □

Veta 5.3 :

Nech sú splnené predpoklady P4, P5, P6 ako i P7, P8 a P9. Nech V spĺňa (1) a γ^* spĺňa (3). Nech $C'(X)$ je množina ohraničených, spojitých, konkávnych funkcií $f : X \to \mathbf{R}$ a nech $V_0 \in C'(X)$. Nech V_n a γ_n sú definované ako :

$$V_{n+1} := TV_n \qquad n = 0,1,\dots \qquad \text{a}$$
$$\gamma_n(x) := \arg\max_{u \in \Gamma(x)} \left[f^0(x,u) + \beta V_n\left(F(x,u)\right)\right] \qquad n = 0,1,\dots$$

Potom $\gamma_n \to \gamma^*$ bodovo. Ak X je kompakt, tak $\gamma_n \to \gamma^*$ rovnomerne.

Dôkaz :

Nech $C''(X) \subset C'(X)$ je množina rýdzo konkávnych, ohraničených a spojitých funkcií $f : X \to \mathbf{R}$. Potom podľa vety 5.2 $V \in C''(X)$, navyše tiež platí $T\left[C'(X)\right] \subset C''(X)$. Keďže $V_0 \in C'(X)$, tak $V_n \in C''(X)$ pre každé $n = 1,2,\dots$ Definujme funkcie f_n a f ako :

$$f_n(x,u) := f^0(x,u) + \beta V_n\left(F(x,u)\right) \quad n = 1,2,\dots$$
$$f(x,u) := f^0(x,u) + \beta V\left(F(x,u)\right)$$

Z toho, že f^0 je podľa predpokladov rýdzo konkávna, vyplýva, že každá funkcia f_n pre $n = 1, 2, ...$ je rýdzo konkávna. Tak isto to platí i pre funkciu f. Aplikujme lemu 5.2 na funkcie f_n, f a dôkaz je hotový. □

Ešte sa pozrieme na to, ako zabezpečiť kompaktnosť a spojitosť korešpondencie Γ v predpoklade P4, teda na to, čo musí platiť pre množiny X a U, resp. pre graf korešpondencie Γ, aby boli spomínané vlastnosti Γ splnené. Začneme kompaktnosťou. Predpokladajme, že naďalej platí : $\Gamma(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in X$ (tento predpoklad sme v predchádzajúcom označovali ako predpoklad P1). Pýtame sa, kedy je pre všetky $x \in X$ množina $\Gamma(x)$ kompaktná.

Veta 5.4 :

Nech $X \subseteq \mathbf{R}^l$ je uzavretá množina, nech $U \subseteq \mathbf{R}^k$ je kompaktná množina a nech funkcia F je spojitá (teda nech je splnený predpoklad P6). Nech pre korešpondenciu $\Gamma : X \to U$ platí predpoklad P1. Potom je Γ kompaktná (kompaktne-hodnotová).

Dôkaz :

Zoberme ľubovoľné $x \in X$. Keďže $\Gamma(x) \subseteq U$ a množina U je kompaktná, tak $\Gamma(x)$ bude kompaktná práve vtedy, keď bude uzavretá. Pretože podľa predpokladu P1 je $\Gamma(x) \neq \emptyset$, vezmime ľubovoľnú konvergentnú postupnosť $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ z $\Gamma(x)$, t.j. pre všetky $i = 1, 2, ...$ bude $u_i \in U$ také, že $F(x, u_i) \in X$. Na to, aby bola množina $\Gamma(x)$ uzavretá, potrebujeme, aby limita tejto postupnosti bola tak isto z $\Gamma(x)$. Teda ak označíme $u := \lim_{i \to \infty} u_i$, tak chceme, aby $u \in U$ (to platí, pretože $\Gamma(x) \subseteq U$ a množina U je kompaktná) bolo také, že $F(x, u) \in X$. Upravme $F(x, u)$:

$$F(x, u) = F\left(x, \lim_{i \to \infty} u_i\right) = \lim_{i \to \infty} F(x, u_i)$$

kde druhá rovnosť vyplýva zo spojitosti funkcie F. Keďže $F(x, u_i) \in X$ pre všetky $i = 1, 2, ...$ a množina X je uzavretá, tak $F(x, u) \in X$. Odtiaľ dostávame, že $\Gamma(x)$ je uzavretá v U a teda je kompaktná v U. Pretože $x \in X$ bolo ľubovoľné, platí to pre všetky $x \in X$. □

Poznamenajme, že táto veta platí aj bez predpokladu P1, pretože i prázdna množina je kompakt.

V ďalšom sa podívame na spojitosť korešpondencie Γ (bližšie lit. [3]). Bude nás zaujímať za akých predpokladov je Γ hemi-spojitá zhora a zdola. Na to využijeme nejaké vlastnosti jej grafu, teda množiny :

$$A := \{(x,u) \in X \times U \mid u \in \Gamma(x)\}$$

Veta 5.5 :

Nech platí predpoklad P1 a nech A je graf korešpondencie Γ. Nech A je uzavretá množina a nech pre ľubovoľnú ohraničenú množinu $\hat{X} \subset X$ je množina $\Gamma(\hat{X})$ tiež ohraničená. Potom je korešpondencia Γ kompaktná a hemi-spojitá zhora.

Dôkaz :

Pre každé $x \in X$ je $\Gamma(x)$ uzavretá (pretože A je uzavretá) a ohraničená (podľa predpokladu). Teda Γ je kompaktne-hodnotová.

Nech $\hat{x} \in X$ je ľubovoľné a nech $\{x_i\}$ je postupnosť v X taká, že $x_i \to \hat{x}$. Keďže Γ je neprázdna, môžeme pre všetky $i = 1,2,...$ vybrať $u_i \in \Gamma(x_i)$. Pretože $x_i \to \hat{x}$, tak v X existuje ohraničená podmnožina $\hat{X} \subset X$ obsahujúca postupnosť $\{x_i\}$ a bod $\hat{x}$. Potom podľa predpokladu je i $\Gamma(\hat{X})$ ohraničená. Z čoho vyplýva, že postupnosť $\{u_i\}$ z $\Gamma(\hat{X})$ obsahuje konvergentnú podpostupnosť, nazvime ju $\{u_{i_k}\}$. Označme $\hat{u}$ limitný bod tejto podpostupnosti. Takže $\{(x_{i_k}, u_{i_k})\}$ je postupnosť v A konvergujúca k bodu $(\hat{x}, \hat{u})$. Lenže A je uzavretá a preto $(\hat{x}, \hat{u}) \in A$. Odtiaľ vyplýva, že $\hat{u} \in \Gamma(\hat{x})$ a teda Γ je hemi-spojitá zhora v $\hat{x}$. Γ je však hemi-spojitá zhora v každom bode $\hat{x} \in X$, pretože $\hat{x}$ bolo ľubovoľné. □

Ako sme si v predchádzajúcom ukázali pre kompaktnosť korešpondencie Γ postačia aj slabšie predpoklady ako vo vete 5.5, ale pre jej spojitosť (ako uvidíme i z ďalšej vety) postačujúce už nie sú.

Poznamenajme, že predchádzajúca veta (rovnako ako aj veta 5.6) sa dá použiť nielen pre nami zadefinovanú korešpondenciu Γ, ktorú sme definovali ako :

$$\Gamma(x) := \{u \in U \mid F(x,u) \in X\}$$

ale pre ľubovoľnú korešpondenciu.

Nasledujúca veta bude pojednávať o hemi-spojitosti zdola. Pre jej formuláciu poznamenajme, že pre dané $x \in \mathbf{R}^l$ a dané $\varepsilon > 0$ bude $B(x,\varepsilon)$ označovať uzavretú guľu so stredom v bode x a polomerom ε, t.j.

$$B(x,\varepsilon) := \{x' \in X \mid \|x - x'\| \leq \varepsilon\}$$

Veta 5.6 :

Nech platí predpoklad P1 a nech A je graf korešpondencie Γ. Nech A je konvexná množina, nech pre ľubovoľnú ohraničenú množinu $\hat{X} \subseteq X$ existuje ohraničená množina $\hat{U} \subseteq U$ taká, že $\Gamma(x) \bigcap \hat{U} \neq \emptyset$ pre všetky $x \in \hat{X}$ a nech pre každé $x \in X$ existuje $\varepsilon > 0$ také, že množina $B(x,\varepsilon) \bigcap X$ je uzavretá a konvexná. Potom je korešpondencia Γ hemi-spojitá zdola.

Dôkaz :

Vyberme $\hat{x} \in X$, $\hat{u} \in \Gamma(\hat{x})$ a postupnosť $\{x_i\}$ z X konvergujúcu k $\hat{x}$. Zvoľme ďalej také $\varepsilon > 0$, že $\hat{X} := B(x,\varepsilon) \bigcap X$ je uzavretá a konvexná množina. Poznamenajme, že pre nejaké $N \geq 1$ je postupnosť $\{x_i\}_{i=N}^{\infty}$ v $\hat{X}$. Bez straty na všeobecnosti predpokladajme, že $N = 1$.

Nech D označuje hranicu množiny $\hat{X}$. Každý bod x_i má aspoň jedno vyjadrenie v tvare konvexnej kombinácie bodu $\hat{x}$ a nejakého bodu hranice D. Pre každé i zvoľme $\alpha_i \in [0,1]$ a $d_i \in D$ tak, že platí :

$$x_i = \alpha_i d_i + (1 - \alpha_i)\hat{x}$$

Z toho, že D je ohraničená množina a $x_i \to \hat{x}$, vyplýva, že $\alpha_i \to 0$. Vyberme $\hat{U}$ také, že $\Gamma(x) \bigcap \hat{U} \neq \emptyset$ pre všetky $x \in \hat{X}$. Potom pre každé i vyberme $\hat{u}_i \in \Gamma(d_i) \bigcap \hat{U}$ a definujme :

$$u_i := \alpha_i \hat{u}_i + (1 - \alpha_i)\hat{u}$$

Keďže $(d_i, \hat{u}_i) \in A$ pre všetky i, $(\hat{x}, \hat{u}) \in A$ a A je konvexná, tak pre všetky i : $(x_i, u_i) \in A$. Pretože $\alpha_i \to 0$ a všetky $\hat{u}_i$ ležia v ohraničenej množine $\hat{U}$, tak i $u_i \to \hat{u}$. Teda postupnosť $\{(x_i, u_i)\}$ leží v A a konverguje k $(\hat{x}, \hat{u})$, čím je hemi-spojitosť zdola dokázaná. $\square$

6. ZÁVER

V tejto diplomovej práci sme sa venovali autonómnym úlohám optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte. Našli sme pre ne rovnicu dynamického programovania a v metóde postupných aproximácií spôsob, ako ich riešiť. Využili sme na to poznatky z knihy „Recursive Methods in Economic Dynamics“ od autorského kolektívu, pozostávajúceho z dua Nancy L. Stokey, Robert E. Lucas a ich spolupracovníka Edward C. Prescott-a. Vedomosti z tejto publikácie boli prepracované a upravené pre naše potreby, pretože autori sa v spomínanej knižke venovali iba úlohám maximalizácie (resp. hľadania supréma) na množine nekonečných postupností. My sme prešli k úlohám optimálneho riadenia, v ktorých okrem stavovej premennej, vystupuje ešte i riadiaca premenná. Bolo teda potrebné zadefinovať nové pojmy, príp. predefinovať pôvodné, zaviesť doplňujúce predpoklady, preformulovať vety, doplniť teóriu ďalšími vetami, či poznatkami (vety 4.4 a 5.4), prerobiť dôkazy. Súčasne sme využili deterministický model optimálneho rastu ako príklad ekonomicky vhodný na demonštráciu toho, prečo sa problematikou autonómnych úloh optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte zaoberať. Snažili sme sa poskytnúť podrobný všeobecný teoretický prehľad a zdôvodnenie toho, za akých podmienok, či predpokladov majú tieto úlohy riešenie, aké sú vlastnosti týchto riešení a aká metóda sa dá na ich získanie použiť (v našom prípade to bola metóda postupných aproximácií), prípadne čo všetko možno o takýchto úlohách povedať. Kapitolu 3 sme vyčlenili pre zadefinovanie a utvrdenie si základných pojmov, zaviedli sme prvé predpoklady a formulovali vo vetách nutné a postačujúce podmienky pre hodnotovú funkciu a optimálne riadenie pre spomínané úlohy. Ďalšia kapitola sa v troch podkapitolách venovala metóde postupných aproximácií ako spôsobu riešenia autonómnych úloh na nekonečnom časovom horizonte. Pripomenula nám, čo už vieme o úplných metrických priestoroch a tiež bola akousi exkurziou do sveta multifunkcií. Napokon predposledná časť tejto práce logicky zakončovala predchádzajúce dve využívajúc pritom z nich získané výsledky. Pohrávali sme sa v nej s predpokladmi, aby sme si úlohu trochu zjednodušili, či aby sme vedeli povedať niečo viac o riešeniach rovnice dynamického programovania a ich vlastnostiach.

LITERATÚRA

[1] Doc. RNDr. Margaréta Halická CSc. : *Optimálne riadenie I* (Učebné texty), Bratislava, 1999

[2] Doc. RNDr. Jaroslav Jaroš CSc. : *Prednášky z matematickej analýzy 2*

[3] Nancy L. Stokey a Robert E. Lucas jr. v spolupráci s Edward C. Prescott-tom : *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1989

[4] Kenneth L. Judd : *Numerical Methods in Economics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1998

[5] H. Peyton Young : *Progressive Taxation and Equal Sacrifice*, The American Economic Review, Volume 80, No. 1, vydávaný American Economic Association, marec 1990

[6] Irwin Friend, Marshall E. Blume : *The Demand for Risky Assets*, The American Economic Review, Volume 65, No. 5, vydávaný American Economic Association, december 1975