

Analýza jedno a dvojfaktorových modelov derivátov úrokových mier

2006

Miroslav Antol

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Ekonomická a finančná matematika

Analýza jedno a dvojfaktorových modelov
derivátov úrokových mier

Diplomová práca

Diplomant: Miroslav Antol
Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Bratislava 2006

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, 27. 4. 2006

Tento priestor by som zároveň chcel využiť na poďakovanie sa vedúcemu mojej diplomovej práce Doc. RNDr Danielovi Ševčovičovi, CSc za jeho pripomienky, návrhy, odborné rady a množstvo trpezlivosti a času, ktoré mi pri zostavovaní a písaní mojej diplomovej práce venoval.

Abstrakt

Dôležitou otázkou sporiteľní, bánk, či rôznych iných finančných inštitúcií sa najmä v období posledných dvoch desaťročí stáva potreba modelovania vývoja úrokovej miery. Deriváty úrokovej miery sú v súčasnosti jednou z najdôležitejších foriem finančných derivátov a preto je veľmi dôležité vedieť ich správne oceniť. V našej práci sme sa preto zaoberali práve modelmi derivátov úrokovej miery, ktoré sme sa snažili analyzovať.

Prvá časť práce poskytuje stručný prehľad o najznámejších derivátoch úrokovej miery, spomíname v nej rôzne príklady jedno či dvojfaktorových modelov. Druhá časť pojednáva o kalibrácii jednofaktorového modelu a minimalizácii „stratovej“ funkcie, pomocou ktorej zistíme konkrétne tvary výnosových kriviek. Tretia časť sa zameriava na rovnakú problematiku skúmanú v druhej fáze, tentokrát však v súvislosti s dvojfaktorovými modelmi, ktoré vzniknú z jednofaktorových modelov pridaním druhého faktora neistoty. Nakoniec sa snažíme porovnávať výsledky oboch typov modelov a zistiť, ktorý z nich nám poskytuje efektívnejšie výsledky.

Obsah

Zoznam najdôležitejších pojmov	2
Predhovor	4
1 Deriváty úrokovej miery	5
1.1 Najpoužívanéjšie deriváty - prehľad	5
1.2 Základné pojmy	6
2 Modely úrokovej miery	9
2.1 Jednofaktorové term-structure modely	10
2.1.1 Vašíčkov model	11
2.1.2 CIR-model	11
2.2 Viacfaktorové term-structure modely	12
2.2.1 Stručný prehľad niektorých dvojfaktorových modelov .	12
3 Kalibrácia jednofaktorového modelu derivátov úrokovej miery	14
3.1 Odvodenie všeobecnej PDR pre jednofaktorový model	14
3.2 Explicitný tvar riešenia všeobecnej PDR	17
3.3 Redukcia parametrov	19
3.4 Minimalizácia stratovej funkcie	20
4 Kalibrácia dvojfaktorového modelu derivátov úrokovej miery	27
4.1 Všeobecná PDR pre dvojfaktorový model	27
4.2 Explicitný tvar riešenia všeobecnej PDR	29
4.3 Minimalizácia stratovej funkcie pre dvojfaktorový model	31
Záver	36
Literatúra	37

Zoznam najdôležitejších pojmov

V práci budeme používať niekoľko známych pojmov z ekonómie, preto uvádzam ich stručný prehľad:

BRIBOR - Bratislava Inter-Bank Offer Rate: denná skupina úrokov pre rôzne maturity

Brownov pohyb: stochastický proces odvodený od Wienerovho procesu.

Derivát: cenný papier, ktorého hodnota je závislá (odvodená) od už existujúcich cenných papierov na trhu.

Dlhopis: cenný papier, v ktorom sa dlžník zaväzuje, že v stanovenej lehote vyplatí nominálnu hodnotu a ak hovoríme o kupónovom dlhopise, že navyše bude v stanovených lehotách vyplácať pravidelný úrok (kupón).

Drift: koeficient pri člene dt v rámci stochastického procesu.

EURIBOR - European Inter-Bank Offer Rate: denná skupina úrokov pre rozličné meny a maturity.

Forwardová miera: budúca úroková miera, pomocou ktorej sa oceňujú forwardy.

Kontrakt: zákonne platná dohoda medzi dvoma stranami.

Kupón: pravidelná platba vyplácaná dlhopisom.

Market price of risk - trhová cena rizika: miera navyše výnosu oproti bezrizikovému vzhľadom na jednotku rizika.

Maturita - doba splatnosti: dĺžka trvania dlhopisu, ktorá určuje, kedy ziskame neskoršiu platbu.

Mean reversion: vlastnosť procesu, ktorá zaručuje jeho opakovaný návrat k dlhodobému priemeru.

Nominálna hodnota: hodnota dlhopisu v čase maturity.

Okamžitá úroková miera - overnight - short rate: úrok platený na veľmi krátku pôžičku.

Payoff: výplata derivátu definovaná ako nominálna hodnota mínus strike price.

PRIBOR - Prague Inter-Bank Offer Rate: denná skupina úrokov pre rozličné maturity.

Stochastický proces: spojitý proces, ktorý môže byť rozložený na driftovú časť a časť s Brownovým pohybom, tzv. stochastickú alebo náhodnú časť a jeho tvar je $dX = \mu dt + \sigma dw_t$.

Strike price: pevne dohodnutá cena, za ktorú môže byť cenný papier predaný alebo kúpený vo vopred stanovenom čase.

Term structure - časová štruktúra úrokových mier: graf závislosti výnosovej krivky na čase do maturity.

Úroková miera: miera, v ktorej je platený úrok.

Volatilita: koeficient pri člene dw_t v rámci stochastického procesu.

Výnos: priemerná hodnota úroku ponúkaná dlhopisom.

Výnosová krivka - yield curve: graf závislosti výnosu dlhopisu oproti jeho dobe splatnosti.

Predhovor

Pojem derivátov úrokovej miery sa stal nielen v súčasnosti, ale už aj v minulých dvoch desiatkach rokov diskutovaným vo viacerých smeroch. Medzi najčastejšie používané modely derivátov úrokových mier patria tie, ktoré sú formulované pomocou stochastických diferenciálnych rovníc. Práve analýzou takýchto typov modelov sa budeme zaoberať v tejto práci.

V prvej kapitole poskytneme stručný úvod do spomínanej problematiky, v krátkosti predstavíme prehľad najpoužívanejších derivátov na trhu a uvedieme základnú terminológiu, ktorú budeme neskôr používať v celej práci. Druhá kapitola sa snaží zachytiť najzákladnejšie jedno a dvojfaktorové modely, pričom snahu kladieme najmä na predstavenie Vašíčkovho a CIR modelu, ktoré nás v ďalších častiach práce zaujímajú najviac. V tretej časti najskôr odvodíme všeobecnú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre jednofaktorový dlhopis, ktorú potom využijeme v neskoršom postupe. V ďalšej časti tejto kapitoly sa budeme zaoberať minimalizáciou akejsi stratovej funkcie, pomocou ktorej na rôznych dátach rozanalyzujeme Vašíčkov a CIR model.

Záverečná kapitola pojednáva rovnako o minimalizácii stratovej funkcie, tentokrát však v súvislosti s dvojfaktorovým modelom, kde za druhý zdroj neistoty berieme volatilitu z jednofaktorového modelu. Následne sa venujeme zhodnoteniu dosiahnutých výsledkov kalibrácie, porovnaniu efektívnosti oboch druhov modelov a zisteniu, či lepšie fitovacie výsledky na dostupných dátach dáva jedno, alebo dvojfaktorový model.

Kapitola 1

Deriváty úrokovej miery

Deriváty úrokovej miery sú v súčasnosti jednou z najfrekvencovanejších a najpoužívanejších foriem finančných derivátov a je preto veľmi dôležité vedieť ich správne oceniť. Zároveň môžeme povedať, že deriváty úrokovej miery patria vo finančnom svete v posledných rokoch medzi najobchodovanejšie artikly. Deriváty úrokovej miery sú kontrakty, ktorých výplata, čiže *payoff* je veľmi citlivo závislá od úrokovej miery, ktorá je používaná na jej diskotovanie, vo viacerých prípadoch aj na jej definovanie.

1.1 Najpoužívanejšie deriváty - prehľad

Bezкупónový dlhopis - zero coupon bond: predstavuje najjednoduchší obchodovateľný kontrakt, ktorý vyjadruje dohodu zaplatiť určitú čiastku v súčasnosti oproti prísľubu obdržania zvyčajne vyššej sumy o nejaký (presne určený) čas.

Kupónový dlhopis - coupon bond: je to bežnejšie používaný derivát ako vyššie uvedený bezкупónový dlhopis. Rozdiel medzi oboma derivátmi spočíva v tom, že *coupon bond* vypláca, okrem dohodnutej čiastky na konci jeho platnosti, v pravidelných vopred stanovených intervaloch aj ďalšie (zvyčajne menšie) čiastky (tzv. *kupóny*). Keďže купónový dlhopis sa dá zostrojiť ako portfólio bezкупónových dlhopisov, v ďalšom priebehu sa budeme zaoberať len bezкупónovými dlhopismi.

Európska Call (Put) opcia na dlhopis: je právo (nie však povinnosť) kúpiť (predať) dlhopis za vopred dohodnutú cenu (tzv. *Strike Price*) vo vopred stanovenom čase (tzv. *Expiračná doba*).

Forward: je kontrakt, v ktorom sa dve strany dohodnú, že po uplynutí vopred stanoveného času kúpi jedna strana od druhej dohodnuté aktívum za vopred pevne stanovenú cenu.

Future: je dohoda, ktorá je takmer totožná s forwardom. Rozdiel je v tom, že s týmto typom derivátu sa dá obchodovať len burze, ktorá zároveň ručí sa splnenie všetkých jeho záväzkov

Caplet: je kontrakt používaný prevažne v medzibankovom styku. Vypisovateľ je povinný zaplatiť kupcovi v čase t_2 rozdiel medzi aktuálnou hodnotou úroku a hodnotou úroku pevne zvolenou v čase t_1 ($t_1 < t_2$) plus pevne stanovenú čiastku (*strike price*), vynásobenú dĺžkou príslušného obdobia. Dany derivát sa používa najmä pri dlhoch či pôžičkách s voľným úrokom, pri ktorých sa kupec zaistí voči plateniu vyššieho úroku ako si sám určil.

Cap: je súbor capletov

Floor: je derivát, ktorý môžeme charakterizovať ako protiklad capletu, pretože floor limituje pre zmenu platený úrok zdola, teda poskytuje akési poistenie voči zníženiu úrokovej miery pod vopred stanovenú hranicu

Swap: je kontrakt, pri ktorom dochádza k výmene premenlivých platieb za platby v presne stanovenej výške. To znamená, že jedna strana sa zaväzuje platiť druhej strane počas celej vopred stanovenej doby platby prislúchajúce pevne stanovenej úrokovej miere r_1 (tzv. *swap rate*). Naopak, druhá strana vypláca tej prvej počas rovnakej doby platby zodpovedajúce premenlivej úrokovej miere r_2 . Swap teda umožňuje pretransformovanie pôžičky s konštantnou úrokovou mierou na pôžičku s premenlivou úrokovou mierou, prípadne naopak.

Swaption: je opcia na úrokový swap. Jej majiteľovi poskytuje právo (nie však povinnosť) vstúpiť do kontraktu (*swapu*) vo vopred stanovenom čase.

1.2 Základné pojmy

Hlavným a základným kontraktom týkajúcim sa derivátov úrokovej miery je dohoda uskutočnená v súčasnosti oproti vyplateniu zvyčajne vyššej čiastky v budúcnosti (o nejaký čas). Na opísanie takéhoto kontraktu sú postačujúce dva údaje - dĺžka trvania (tzv. *maturita*) a pomer budúcej veľkosti platby k veľkosti v prítomnosti. Maturitu označujeme písmenom T a hodnotu veľkosti dnešnej platby k budúcej označujeme $P(0, T)$. Ak by sme mali uviesť príklad, tak jednu korunu v čase T si v súčasnosti, teda v čase 0, môžeme kúpiť za $P(0, T)$ korún. Ak by sme túto korunu zobrali ako derivát, ktorý má hodnotu

v ľubovoľnom čase t menšom ako T , môžeme ju nazvať bezkupónovým dlhopisom. $P(t, T)$ je potom jeho hodnota v ľubovoľnom čase t . Za nominálnu hodnotu bezkupónového dlhopisu potom berieme jeho hodnotu v čase expirácie T , pričom platí, že $P(T, T) = 1$.

Pri spojitom úročení je cena dlhopisu $P(t, T)$ v ľubovoľnom čase t daná nasledovným vzťahom:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (1.1)$$

kde $R(t, T)$ je spojitá úročená úroková miera v čase t a s dobou splatnosti T . Z toho vyplýva:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}. \quad (1.2)$$

Závislosť $R(t, T)$ od doby splatnosti T nám určuje tzv. *yield curve*, teda *výnosovú krivku* a závislosť výnosovej krivky od doby do splatnosti $T - t$ nám dáva *časovú štruktúru úrokových mier* alebo aj *term structure of interest rates*. V literatúre sa však môžeme stretnúť s častým zamieňaním si oboch pojmov výnosovej krivky a časovej štruktúry úrokových mier.

Začiatok *term structure* označujeme pojmom *short-time interest rate* alebo *overnight*, čo je vlastne úrok na veľmi krátku dobu. Zapisujeme ho $r(t)$ a je definovaný ako:

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Z minulosti poznáme mnohé teórie, ktoré boli navrhnuté na vysvetlenie tvaru výnosovej krivky. S ich podrobnejším opisom sa môžeme napríklad stretnúť v práci [4]. Medzi najznámejšie teórie určite patria:

- Teória očakávaní (Expectation theory)
- Teória rozdelenia trhu (Market segmentation theory)
- Teória preferencie likvidity (Liquidity preference theory)

Okrem dlhopisov patria k najzákladnejším a najdôležitejším finančným derivátom aj *forwardy*, na ktorých oceňovanie sa používa *forwardová úroková miera* (*forward rate*). Je to vlastne spojitá úročená budúca úroková miera v čase t na obdobie $(T, T + \Delta t)$ a označujeme ju $f(t, T, T + \Delta t)$. Aby na trhu nemohla nastať arbitrážna príležitosť musí platiť nasledovná podmienka:

$$-e^{-f(t,T,T+\Delta t)(\Delta t)} P(t, T) + e^{-f(T,T,T+\Delta t)(\Delta t)} P(T, T + \Delta t) = 0,$$

ktorá vyjadruje, že hodnota kontraktu v čase jeho uzavretia musí byť rovná 0. Z toho dostávame, že pomer cien dlhopisov s maturitou T a $T + \Delta t$ musí byť daný vzťahom:

$$\frac{P(t, T + \Delta t)}{P(t, T)} = e^{-f(t,T,T+\Delta t)(\Delta t)}.$$

Z toho vyplýva, že *forward rate* je určená vzťahom:

$$f(t, T, T + \Delta t) = -\frac{\ln P(t, T + \Delta t) - \ln P(t, T)}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Rovnako a analogicky ako pri short rate, môžeme teda aj pre *okamžitú forward rate* písať :

$$f(t, T) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[-\frac{\ln P(t, T + \Delta t) - \ln P(t, T)}{\Delta t} \right] = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}.$$

Kapitola 2

Modely úrokovej miery

Priebeh úrokovej miery v čase je vo všeobecnosti ovplyvňovaný rôznymi faktormi. Jedným z týchto faktorov, ktoré výraznou mierou vplyvajú na výšku úrokových mier pri derivátoch, je už spomínaná *doba do splatnosti*, čiže *maturita*. Rovnako už bolo uvedené, že závislosť medzi *maturitou* a výnosom bezkupónového dlhopisu modeluje tzv. *term structure* alebo inak povedané *výnosová krivka*. Kľúčovou otázkou teda ostáva, ako modelovať vývoj úrokových mier. Budeme potrebovať modely, ktoré opisujú pravdepodobnostné správanie sa úrokových mier a sú navyše spojené s pohybmi celej krivky. Takéto modely sa v literatúre vyskytujú pod názvom *modely časovej štruktúry úrokových mier* (*term structure of interest rates models*) alebo aj ako *modely výnosovej krivky* (*yield curve models*).

Vo všeobecnosti rozlišujeme dva typy modelov:

- **Rovnovážne (equilibrium) modely:** pri týchto modeloch je počiatočná term structure výstupom z modelu. Za ich nedostatok môžeme považovať to, že nie vždy úplne presne vystihujú tvar súčasnej výnosovej krivky. Práve pre túto skutočnosť sa rovnovážne modely stretávajú s častou kritikou, dá sa však tomu predísť vhodným prednastavením parametrov.
- **No-arbitrage (term structure consistent) modely:** základným rozdielom týchto modelov v porovnaní s rovnovážnymi je fakt, že pôvodná term structure je tu vstupom do modelu, ktorý tak presne vystihuje tvar súčasnej výnosovej krivky.

V ďalšom priebehu sa budeme zaoberať len rovnovážnymi modelmi.

2.1 Jednofaktorové term-structure modely

Hlavnou a základnou skupinou opisujúcou deriváty úrokovej miery sú jednofaktorové modely. Ako už samotný názov napovedá, ide o modely, kde vystupuje len jediný zdroj neistoty, ktorým je *short-rate* r . Uvažujme, že *short-rate* sleduje spojitý Markovov stochastický proces - to znamená, že pravdepodobnostné rozdelenie r je v ľubovoľne zvolenom čase v budúcnosti závislé len od hodnoty v súčasnosti. Markovovský proces je popísaný nasledovnou stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr = \mu_r(r, t)dt + \sigma_r(r, t)dw, \quad (2.1)$$

kde $\mu_r(r, t)$ označuje drift a $\sigma_r(r, t)$ volatilitu. Ďalej dr znamená zmenu úroku za časový okamih dt . Náhodnosť je v rovnici (2.1) zastúpená prírastkami dw Wienerovho procesu w .

Definícia 2.1.1. *Štandardný Wienerov proces $\{w(t), t \geq 0\}$ je t - parametrický systém náhodných veličín. Platí:*

- $w(0) = 0$
- prírastky dw sú navzájom nekorelované v čase
- $E(dw) = 0$, teda stredná hodnota je nulová
- $var(dw) = dt$, teda variancia je lineárnou funkciou času, čiže môžeme povedať, že platí: $dw \approx \varepsilon\sqrt{dt}$, kde ε je náhodná premenná s normálnym rozdelením.

Pri zostrojovaní presného tvaru jednofaktorového modelu je potrebné poznať presné tvary funkcií $\mu_r(r, t)$ a $\sigma_r(r, t)$, vďaka ktorým musí výsledný proces pre premennú r spĺňať nasledovné podmienky:

- Úroková miera by nemala byť záporná a tiež ani veľmi vysoká.
- *Mean-reversion* - proces, vďaka ktorému je dlhodobá úroková miera prítahovaná k akejsi dlhodobej úrokovej miere. Je to najmä kvôli faktu, že vysoké hodnoty úroku mávajú prevažne negatívny drift, čo spôsobuje častejšie pokles ako ďalší rast. Opačná situácia nastáva pri nízkych hodnotách úrokov, ktoré sprevádza prevažne rast a menej pokles.

- Rozdielnosť volatility úrokov na rôzne obdobia. Úrokové miery s dlhšou dobou splatnosti majú nižšiu volatilitu, naproti tomu úrokové sadzby na kratšie obdobia sú rizikovejšie
- Meniaca sa hodnota volatility s meniacou sa hodnotou short-rate.

Žiaden z jednofaktorových modelov však nedokáže zachytiť všetky spomínané vlastnosti. Preto treba k jednotlivým derivátom pristupovať individuálne a vždy v danej konkrétnej situácii zobrať do úvahy tie vlastnosti, ktoré najviac vystihujú spomínaný derivát.

Ako príklady niektorých jednofaktorových modelov derivátov úrokovej miery môžeme uviesť Vašíčkov model; Cox, Ingersoll, Ross model; Dothanov model ([5]) alebo Brennan - Schwarz model ([3]). Na ďalších stranách práce sa budeme zaoberať prvými dvoma spomenutými modelmi a preto si ich aj teraz bližšie predstavíme.

2.1.1 Vašíčkov model

Vašíček bol vôbec jedným z prvých, ktorý do svojho modelu zahrnul vlastnosť Mean - reversion. Stochastický proces pre r má v tomto prípade tvar:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw,$$

kde κ predstavuje silu, ktorou je úroková miera r priťahovaná k dlhodobej úrokovej sadzbe θ a σ predstavuje volatilitu. Nedostatkom tohto modelu predovšetkým je, že úroková miera môže nadobúdať aj záporné hodnoty a takisto aj skutočnosť, že volatilita a hodnota úrokovej miery sú nezávislé.

2.1.2 CIR-model

Spomínané nedostatky Vašíčkovho modelu sa snažili odstrániť autori Cox, Ingersoll a Ross, ktorí svoje výsledky publikovali v práci [4]. Ich navrhnutý stochastický proces má tvar:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw.$$

V tomto prípade je odstránený prvý nedostatok Vašíčkovho modelu, pretože pre kladnú počiatočnú hodnotu úroku r_0 už hodnoty úrokovej miery r_t v každom ďalšom čase t už nemôžu nadobudnúť záporné hodnoty.

Môžeme si tiež všimnúť, že je porušená nezávislosť volatility od hodnoty úrokovej miery. Pre vyššie úroky dostávame aj vyššiu volatilitu.

Vo všeobecnosti by sme aj pre iné jednofaktorové modely, ako napríklad Dothanov alebo Brennan - Schwarzov model mohli napísať spoločnú rovnicu, kde stochastický proces pre r bude mať tvar:

$$dr = \kappa(\theta - r(t))dt + \varsigma r^\eta dw.$$

V tomto prípade je však veľmi ťažké správne odhadnúť hodnoty parametrov, aby boli splnené všetky požiadavky na jednofaktorové modely. Empirickými pozorovaniami sa zistilo, že vývoj *short rate* najlepšie zachytávajú tie modely, ktorých volatilita veľmi citlivo závisí od hodnoty samotnej úrokovej miere. Ako najlepšou sa ukazuje hodnota koeficientu $\eta = \frac{3}{2}$. Vo všeobecnosti sú pre tvar výnosovej krivky lepšie hodnoty parametra $\eta > 1$ než hodnoty $\eta < 1$.

2.2 Viacfaktorové term-structure modely

Už v minulosti bolo všetkým jasné, že vývoj úrokovej miery určuje viac ako len jeden faktor. To podnietilo vznik viacfaktorových modelov, ktoré už v sebe zahŕňajú aj fakt, že reálne výnosy z "rôznomaturitných" dlhopisov nie sú perfektne korelované (jednofaktorový model práve implikoval túto perfektnú koreláciu, čo však podľa empirických pozorovaní nie je pravda). Z praktických dôvodov sa počet faktorov zvyčajne redukuje na dva, aby sa zachovala riešiteľnosť týchto modelov.

2.2.1 Stručný prehľad niektorých dvojfaktorových modelov

Dvojfaktorové modely ako jedna z prvých vniesla na svetlo sveta dvojica autorov Brennan a Schwartz v roku 1979 (viď [3]), pričom za dva faktory brali dlhodobý (*long-rate* l) a krátkodobý (*short-rate* r) priebeh úrokových mier.

$$\begin{aligned} dr &= \mu_r dt + \sigma_r dw_1 \\ dl &= \mu_l dt + \sigma_l dw_2, \end{aligned} \quad (\text{Brennan a Schwartz model})$$

kde dw_1 a dw_2 sú prírastky Wienerových procesov navzájom korelované s hodnotou korelácie ρ . V roku 1984 tentokrát dvojica autorov Schaefer a Brennan

vzala krátkodobú úrokovú mieru a nahradila ju tzv. *úrokovým spreadom*, teda rozdielom medzi dlhodobou a krátkodobou úrokovou mierou.

Úplne inými typmi dvojfaktorových modelov sú tie, kde za druhý faktor sa berie jeden parameter z rovnice v jednofaktorovom modeli. V tejto skupine môžeme napríklad nájsť dvojfaktorový CIR model:

$$\begin{aligned} dr &= \kappa_1(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw_1 \\ d\theta &= \kappa_2(\theta^* - \theta)dt + \sigma_2\sqrt{\theta}dw_2, \end{aligned} \quad (\text{CIR - dvojfaktorový model})$$

kde za druhú stavovú premennú autori vzali dlhodobú rovnovážnu hodnotu úrokovej miery θ stochastického procesu pre r .

Ďalším príkladom dvojfaktorových modelov sú *modely so stochastickou volatilitou*, kde sa za druhý zdroj neistoty berie volatilita vystupujúca v jednofaktorovom modeli. Medzi najznámejšie z takýchto modelov môžeme zaradiť model Fonga a Vašíčka [6] a model Andersona a Lunda [2]:

$$\begin{aligned} dr &= \alpha(r^* - r)dt + \sqrt{y}dw_1 \\ dy &= \gamma(y^* - y)dt + \delta\sqrt{y}dw_2, \end{aligned} \quad (\text{Fong a Vašíček model})$$

a tiež

$$\begin{aligned} dr &= \kappa_1(r^* - r)dt + \sigma r^\gamma dw_1 \\ d(\ln\sigma^2) &= \kappa_2(\epsilon - \ln\sigma^2)dt + \rho dw_2, \end{aligned} \quad (\text{Anderson a Lund model}).$$

Kapitola 3

Kalibrácia jednofaktorového modelu derivátov úrokovej miery

Prvým krokom pri matematickom modelovaní alebo kalibrovaní jednofaktorového modelu je odvodenie všeobecnej parciálnej diferenciálnej rovnice práve pre tento model. Po získaní spomínanej rovnice je druhým krokom nájdenie funkcie P (ceny dlhopisu), ktorá by vyhovovala tejto rovnici (pri splnení konkrétnych počiatočných a okrajových podmienok). Oba tieto kroky sú akousi predprípravou na kvalitatívnu a kvantitatívnu analýzu jednofaktorového modelu, o ktorú sa pokúšame.

3.1 Odvodenie všeobecnej PDR pre jednofaktorový model

K postupu odvodenia všeobecnej parciálnej diferenciálnej rovnice sme sa inšpirovali v publikácii [7]. Základným kameňom, o ktorý sa budeme pri odvodení opierať, je Itôova lema, ktorá je jedným z najdôležitejších pilierov modernej finančnej analýzy.

Lema 3.1.1. (*Itôova lema*) *Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia premenných x, t , pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde dw je diferenciál Wienerovho procesu. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný

vzťahom:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw.$$

Predpokladajme, že *short-rate* r vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici:

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw,$$

a ďalej predpokladajme, že cena dlhopisu P je závislá od doby splatnosti T , od času t , v ktorom sa nachádzame a od úrokovej miery r . Potom máme funkciu troch premenných $P = P(T, t, r)$, ktorá vyhovuje predpokladom Itôovej lemy a teda pre diferenciál P platí:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw. \quad (3.1)$$

Tento vzťah môžeme zjednodušiť po označení driftu $\tilde{\mu}$ a volatility $\tilde{\sigma}$ prepísať do tvaru:

$$dP = \tilde{\mu}(t, T)dt + \tilde{\sigma}(t, T)dw. \quad (3.2)$$

Ďalším krokom v postupe odvodenia PDR pre cenu dlhopisu je zostavenie portfólia, ktoré by bolo zabezpečené tak, že investor (averzný k riziku) by vďaka nemu minimalizoval svoje riziko. Toto portfólio bude pozostávať z jedného dlhopisu s dobou splatnosti T_1 a Δ dlhopisov s maturitou T_2 :

$$\pi = P(t, T_1, r) + \Delta P(t, T_2, r), \quad (3.3)$$

ktorého zmenu za časový prírastok dt môžeme napísať v tvare:

$$d\pi = dP(T_1) + \Delta dP(T_2). \quad (3.4)$$

Dosadením rovnice (3.2) do rovnice (3.4) dostávame:

$$d\pi = (\tilde{\mu}(T_1) + \Delta \tilde{\mu}(T_2))dt + (\tilde{\sigma}(T_1) + \Delta \tilde{\sigma}(T_2))dw. \quad (3.5)$$

Stále musíme mať na pamäti princíp averzie k riziku, z čoho dostávame, že volatilita (člen pri dw) musí byť nulová. Z toho nám potom jednoznačne vyplýva, že $\Delta = -\frac{\tilde{\sigma}(T_1)}{\tilde{\sigma}(T_2)}$. Takouto voľbou Δ teda už dostávame zmenu hodnoty portfólia bez stochastickej časti.

Nesmieme tiež zabudnúť na vylúčenie arbitráže na trhu, a teda vieme, že hodnota portfólia sa musí rovnať hodnote výnosu, ktorý by sme obdržali v

banke pri spojitom úročení za rovnaký čas, akým je doba splatnosti dlhopisov v našom portfóliu. Teda musí platiť:

$$d\pi = r\pi dt = r \left(P(T_1) - \frac{\tilde{\sigma}(T_1)}{\tilde{\sigma}(T_2)} P(T_2) \right) dt, \quad (3.6)$$

pričom vieme, že $d\pi$ (už bez stochastickej časti) má tvar:

$$d\pi = \left(\tilde{\mu}(T_1) - \frac{\tilde{\sigma}(T_1)}{\tilde{\sigma}(T_2)} \tilde{\mu}(T_2) \right) dt. \quad (3.7)$$

Jednoduchou úpravou posledných dvoch vzťahov (3.6) a (3.7) dostávame:

$$\frac{\tilde{\mu}(T_1) - rP(T_1)}{\tilde{\sigma}(T_1)} = \frac{\tilde{\mu}(T_2) - rP(T_2)}{\tilde{\sigma}(T_2)}.$$

Vidíme, že ľavá strana rovnice je závislá od času do splatnosti T_1 a naopak, pravá strana je zase funkciou T_2 . Keďže pri našom budovaní portfólia sme uvažovali maturity dlhopisov vo všeobecnosti, jedinou možnosť, ako nastane v tomto výraze rovnosť je, že výrazy na oboch stranách budú nezávislé od hodnoty doby splatnosti T . V tom prípade ale môžeme hovoriť o existencii funkcie $\lambda(r, t)$ v tvare:

$$\lambda(t, r) = \frac{\tilde{\mu}(r, t, T) - r(t)P(r, t, T)}{\tilde{\sigma}(r, t, T)}, \quad t < T; \quad (3.8)$$

ktorú nazývame *trhová cena rizika* (*market price of risk*) a ktorá vyjadruje dodatočnú mieru výnosu (vzhľadom na bezrizikový), vyjadrenú na jednotku rizika.

Kombináciou vzťahov (3.1), (3.2) a (3.8) nakoniec dostávame hľadanú všeobecnú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(r, t, T)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (3.9)$$

3.2 Explicitný tvar riešenia všeobecnej PDR

Ku konkrétnemu riešeniu pre ceny dlhopisov sa od rovnice (3.9), ktorú sme odvodili v predchádzajúcej sekcii, môžeme prepracovať dvoma spôsobmi:

1. explicitný tvar riešenia pre ceny dlhopisov
2. numerický prístup

Využitie explicitného tvaru riešenia má oproti numerickému prístupu tú nevýhodu, že týmto spôsobom môžeme pristupovať len k malému počtu modelov. Nepochybnou výhodou nášho uvádzaného postupu inšpirovaného prácou [12] je určite skrátenie a uľahčenie procesu hľadania konkrétnych hodnôt pre ceny dlhopisov, rovnako ako aj výnosových kriviek.

Nech všeobecný tvar uvažovaného jednofaktorového modelu je:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw.$$

Rovnicu (3.9) potom môžeme prepísať do tvaru:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma r^\gamma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r^{2\gamma}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad t < T; \quad (3.10)$$

pričom koncová podmienka je $P(r, T, T) = 1$.

Explicitné riešenie rovnice (3.10) budeme ďalej hľadať v tvare:

$$P(t, T, r) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad \forall t < T$$

Našou úlohou je teda nájsť vhodné tvary funkcií $A(t, T)$ a $B(t, T)$, ktoré budú vyhovovať systému diferenciálnych rovníc, z ktorých potom dostaneme konkrétne vyjadrenia oboch funkcií.

Dosadením explicitného riešenia $P(t, T, r) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$ do rovnice (3.10) a po vykonaní viacerých úprav dostávame diferenciálnu rovnicu v tvare:

$$\frac{\dot{A}}{A} - \dot{B}r - \kappa\theta B + \kappa r B + \lambda\sigma r^\gamma B + \frac{1}{2}\sigma^2 r^{2\gamma} B^2 - r = 0. \quad (3.11)$$

V tomto bode je dôležitá voľba funkcie trhovej ceny rizika $\lambda(r, t)$, ako aj voľba parametru γ . V prípade γ sú doposiaľ známe len dve hodnoty, pre ktoré explicitný tvar riešenia vedie k riešiteľnému systému diferenciálnych rovníc.

V prípade *Vašíčkovo* modelu je $\gamma = 0$ a v prípade *CIR modelu* je $\gamma = \frac{1}{2}$. Ako sme už spomínali, dôležitý je tiež výber funkcie $\lambda(r, t)$. V prípade *Vašíčka* je $\lambda(r, t) = \bar{\lambda}$, kde $\bar{\lambda}$ je konštanta, v prípade *CIR modelu* je $\lambda(r, t) = \bar{\lambda}\sqrt{r}$. Dosadením spomínaných hodnôt do rovnice (3.11) dostávame dva systémy diferenciálnych rovníc (pre každý z modelov jeden), ktoré napokon vedú ku konkrétnym hodnotám hľadaných funkcií $A(t, T)$ a $B(t, T)$:

Vašíček:

$$B(t, T) = \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)})$$

$$A(t, T) = \exp \left[(B(t, T) - T + t) \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa} \right) - \frac{\sigma^2 B^2}{4\kappa} \right]$$

CIR:

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\eta(T-t)} - 1)}{(\kappa + \lambda + \eta)(e^{\eta(T-t)} - 1) + 2\eta}$$

$$A(t, T) = \left(\frac{\eta e^{(\kappa + \lambda + \eta)(T-t)/2}}{e^{\eta(T-t)} - 1} B \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}},$$

kde $\eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$ a $B = B(t, T)$.

3.3 Redukcia parametrov

V oboch prípadoch, či už *Vašíčkovo* alebo *CIR-modelu*, je možná a teda aj vhodná redukcia parametrov z pôvodných štyroch na tri. K tejto redukcii parametrov sme sa inšpirovali v článku [10].

V prípade *CIR modelu* vyzerá prevedenie zo "starých" do "nových" premenných nasledovne:

$$\beta = e^{-\eta}, \quad \xi = \frac{\kappa + \lambda + \eta}{2\eta}, \quad \varrho = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2},$$

kde $\eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$. Návrat k pôvodným premenným by bol v tvare:

$$\kappa = \eta(2\xi - 1) - \lambda, \quad \sigma = \eta\sqrt{2\xi(1 - \xi)}, \quad \theta = \frac{\varrho\sigma^2}{2\kappa},$$

za predpokladu, že $\eta = -\ln \beta$. Hľadané funkcie $A(t, T)$ a $B(t, T)$ majú potom vo vyjadrení nových premenných nasledovný tvar:

$$B(t, T) = -\frac{1}{\ln \beta} \frac{1 - \beta^{(T-t)}}{\xi(1 - \beta^{(T-t)}) + \beta^{(T-t)}}$$

$$A(t, T) = \left(\frac{\beta^{(1-\xi)(T-t)}}{\xi(1 - \beta^{(T-t)}) + \beta^{(T-t)}} \right)^\varrho.$$

Ako sme už spomínali, rovnaká redukcia je možná aj v prípade *Vašíčkovo modelu*. Tu by prevedenie do "nových" premenných vyzeralo nasledovne:

$$\beta = e^{-\kappa}, \quad \xi = \theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa}, \quad \varrho = \frac{\sigma^2}{4\kappa}.$$

Návrat k pôvodným premenným by teda bol v tvare:

$$\kappa = -\ln \beta, \quad \sigma = 2\sqrt{\varrho\kappa}, \quad \theta = \xi + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} + \frac{\sigma\lambda}{\kappa},$$

Hľadané funkcie $A(t, T)$ a $B(t, T)$ v prípade *Vašíčka* vo vyjadrení nových premenných by teda mali nasledovný tvar:

$$B(t, T) = -\frac{1 - \beta^{(T-t)}}{\ln \beta}$$

$$A(t, T) = \exp(\xi(B(t, T) - (T - t)) - \varrho B^2(t, T)).$$

Na nasledujúcich stranách tak budeme pracovať už len s novou trojicou parametrov β, ξ, ϱ , ktoré môžeme neskôr podľa uvedených vzťahov pretransformovať do pôvodných premenných.

3.4 Minimalizácia stratovej funkcie

Jednou z možných metód kalibrácie jednofaktorového modelu je zostrojenie tzv. *stratovej* funkcie (pozri článok [10]), ktorá v podstate meria kvalitu reálnych trhových výnosových kriviek pomocou počítania výnosových kriviek v jednotlivých modeloch. Ako sme už uviedli, v našej práci sa zameriame na kalibráciu *Vašíčkovo* a *CIR* modelu.

Stratovú funkciu môžeme teda definovať ako:

$$U(\beta, \xi, \varrho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_j^i - \bar{R}_j^i)^2 \tau_j^2, \quad (3.12)$$

kde $\tau = T - t \in [0, T]$ je čas do maturity a $\{R_j^i, j = 1, \dots, m\}$ sú reálne trhové výnosové krivky. Množina nakalkulovaných výnosových kriviek $\{\bar{R}_j^i, j = 1, \dots, m\}$ ($i = 1, \dots, n$) je určená z nasledovného vzťahu:

$$A_j e^{-B_j R_0^i} = e^{-\bar{R}_j^i \tau_j}. \quad (3.13)$$

kde $r^i = R_0^i$ je úroková miera na veľmi krátku dobu (tzv. *over-night*) v jednotlivých časových okamihoch $i = 1, \dots, n$. Ďalej označme $A_j = A(\tau_j)$ a $B_j = B(\tau_j)$, kde $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ sú vzostupne zoradené časy do splatnosti jednotlivých dlhopisov určujúcich tvar výnosovej krivky.

Teraz položíme $\tau_0 = 0$. Výraz (3.12) môžeme potom prepísať do nasledovného tvaru:

$$U(\beta, \xi, \varrho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m ((\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0) + \ln A_j)^2 + D(\tau_j R_j - B_j R_0)), \quad (3.14)$$

pričom $E(X_j)$ a $D(X_j)$ označujú strednú hodnotu a disperziu vektora $X_j = \{X_j^i, i = 1, \dots, n\}$.

V ďalšom kroku je našou úlohou hľadať minimum danej *stratovej funkcie* podľa parametrov β, ξ a ϱ , pričom výsledkom bude okrem nájdeného minima aj vektor (β, ξ, ϱ) optimálnych hodnôt daných parametrov.

Tu treba pripomenúť, že redukciou parametrov zo štyroch na tri a ich spätnou transformáciou do pôvodných premenných obdržíme parametrickú sústavu troch premenných (napríklad κ , θ a σ), ktoré budú závislé od štvrtého parametra (napríklad trhovej ceny rizika λ). Ak teda zafixujeme jednu z týchto premenných (prípadne ju obmedzíme na určitý interval), napríklad dlhodobú úrokovú mieru θ , môžeme pomocou vypočítaných optimálnych hodnôt trojice parametrov β , ξ a ρ nakalibrovať napríklad trhovú cenu rizika λ (prípadne nakalibrovať jej interval). Uvedená kalibrácia môže vhodne poslúžiť v praxi, a to v prípade, že budeme vedieť, akú hodnotu dlhodoberú úrokovú mieru (resp. v akom intervale) stanoví napr. NBS, z čoho môžeme potom zistiť, v akých intervaloch sa bude v jednotlivých mesiacoch pohybovať trhovú mieru rizika.

Ak si teda určíme hodnoty θ_{min} a θ_{max} , hodnoty λ_{min} a λ_{max} vypočítame pre *Vašíčkov* model pomocou nasledovného vzťahu:

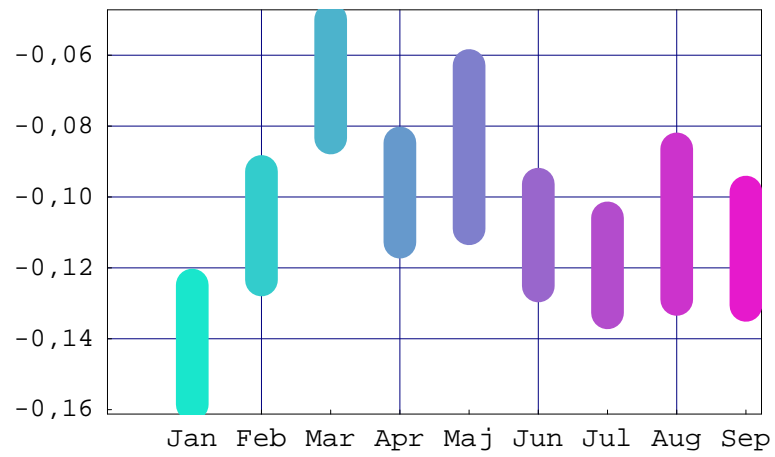
$$\lambda_i = \frac{(\theta_i - \xi - \frac{2\rho}{(-\ln \beta)}) * \sqrt{-\ln \beta}}{2\sqrt{\rho}},$$

kde $i = \{\min, \max\}$. Pre *CIR* model bude pre zmenu platiť nasledovný vzťah:

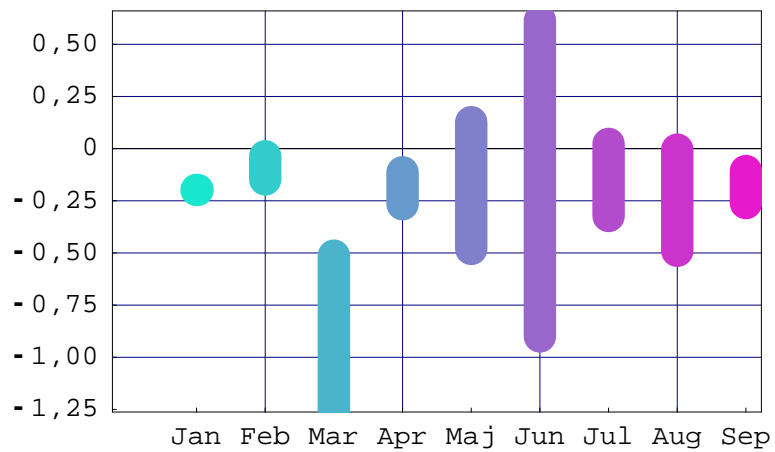
$$\lambda_i = (-\ln \beta) \left((2\xi - 1) + \frac{(\ln \beta)\rho\xi(1 - \rho)}{\theta_i} \right),$$

kde znovu $i = \{\min, \max\}$.

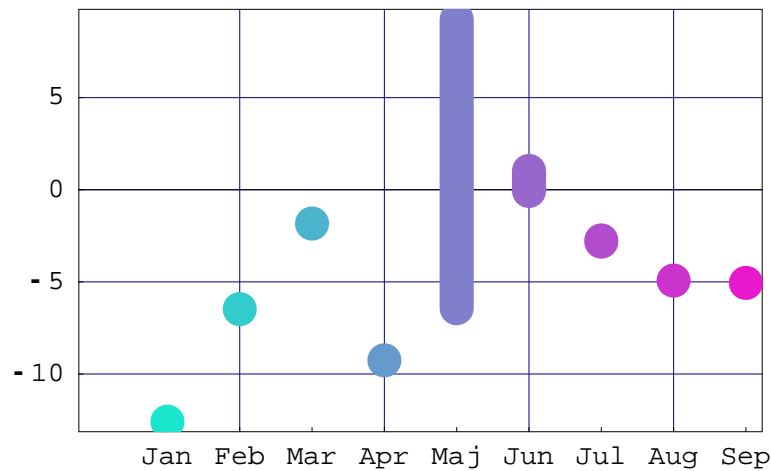
Na uvedených obrázkoch sú teda znázornené intervaly trhovej ceny rizika λ (market price of risk) v prvých deviatich mesiacoch roka 2005. Na Obr. 1 sme uviedli intervaly λ pre úrokovú mieru *BRIBOR* s použitím *Vašíčkovho* modelu, pričom dolnou hranicou pre θ je hodnota 0.02 a tou hornou hranicou je 0.025. V tomto prípade si môžeme všimnúť, že najlepším (teda najzápornejším) je mesiac január. Intervaly λ vo všetkých mesiacoch sa však nachádzajú pod nulovou hranicou, sú teda záporné, čo je dobrý výsledok, pretože našou snahou je dostať práve záporné hodnoty trhovej ceny rizika λ . Obr. 2 pojednáva o úrokovú mieru *PRIBOR* s použitím *CIR* modelu. Tu sa ako najlepší ukazuje mesiac marec, pričom najviac z normálu sa vymyká mesiac jún, v ktorom sa dosahujú najkladnejšie hodnoty λ . Interval pre dlhodobú úrokovú mieru θ bol v tomto prípade $< 0.015, 0.02 >$. V poslednom Obr. 3 sme zachytili intervaly trhovej ceny rizika λ pre úrokovú mieru *EURIBOR* opäť s využitím *Vašíčkovho* modelu. Najlepším je opäť ako v prípade *BRIBOR-u* mesiac január. V mesiaci máj sme zistili veľmi širokú škálu trhovej ceny rizika λ , pričom negatívom je, že výraznou mierou dosahuje kladné hodnoty. Dolnú hranicu pre θ sme tu nastavili na hodnotu 0.02 a hornú na hodnotu je 0.04.



Obr. 1 Intervaly *trhovej ceny rizika* λ pre BRIBOR s použitím *Vašíčkovo* modelu pre dlhodobú úrokovú mieru v rozmedzí od 2 – 2,5 percent



Obr. 2 Intervaly *trhovej ceny rizika* λ pre PRIBOR s použitím *CIR-modelu* pre dlhodobú úrokovú mieru v rozmedzí od 1,5 – 2 percent



Obr. 3 Intervaly trhovej ceny rizika λ pre EURIBOR s použitím Vašíčkovho modelu pre dlhodobú úrokovú mieru v rozmedzí od 2 – 4 percent

V našej analýze sme sa zaoberali dátami *BRIBOR-u*, *PRIBOR-u* a *EURIBOR-u* z prvých deviatich mesiacov roku 2005. Zo všetkých troch úrokových mier sme mali k dispozícii denné dáta s maturitami 1 týždeň, 2 týždne, 1 mesiac, 2 mesiace, 3 mesiace, 6 mesiacov, 9 mesiacov, 1 rok a úrokovú mieru definovanú na veľmi krátke obdobie (tzv. *short-rate*). V nasledujúcich tabuľkách ponúkame nájdené optimálne hodnoty troch kalibrovaných parametrov β , ξ , ϱ , ako aj nájdené minimum stratovej funkcie U pre oba modely (*Vašíčka* a *CIR*). V tabuľkách (3.1) a (3.2) ponúkame napočítané hodnoty spomínaných veličín pre úrokovú mieru *BRIBOR* pomocou oboch modelov. Môžeme vidieť, že najefektívnejšie minimum funkcie U , a teda najlepší fit dostávame v mesiaci marec a v letných mesiacoch júl a august. Takisto si môžeme všimnúť, že lepšie výsledky dostávame použitím *Vašíčkovho* modelu. V tabuľkách (3.3) a (3.4) rovnako s využitím oboch modelov zachytávame úrokovú mieru *PRIBOR*. V tomto prípade sa ako najlepšie ukazujú mesiace apríl, máj a jún, kde dostávame najlepšie fitovacie výsledky. V porovnaní výsledkov medzi použitými modelmi je opäť o niečo lepší a efektívnejší *Vašíčkov* model ako *CIR* model. V poslednej dvojici tabuliek (3.5) a (3.6) sme sa zaoberali úrokovou mierou *EURIBOR*, kde najlepší fit dostávame pri oboch modeloch v mesiacoch máj a august, pričom tentokrát sa ako mierne efektívnejší ukázal *CIR* model, výsledky oboch modelov sú však takmer totožné.

Tabuľka 3.1: Nakalibrované hodnoty trojice parametrov (β, ξ, ρ) spolu s minimálnou hodnotou stratovej funkcie pre úrokovú mieru BRIBOR z prvých deviatich mesiacov v roku 2005 s použitím *Vašíčkovho modelu*

mesiac	β	ξ	ρ	min U
Január	1.00×10^{-7}	0.0325	0.0886	1.60×10^{-7}
Február	0.0571	0.0268	0.0191	7.19×10^{-7}
Marec	0.1446	0.0213	0.0108	7.14×10^{-8}
Apríl	1.00×10^{-7}	0.0242	0.1284	1.04×10^{-7}
Máj	1.00×10^{-7}	0.0259	0.0508	1.35×10^{-7}
Jún	1.00×10^{-7}	0.0266	0.1220	9.70×10^{-8}
Júl	1.00×10^{-7}	0.0274	0.1403	5.66×10^{-8}
August	1.00×10^{-7}	0.0283	0.0558	8.04×10^{-8}
September	1.00×10^{-7}	0.0282	0.0985	1.40×10^{-7}

Tabuľka 3.2: Nakalibrované hodnoty trojice parametrov (β, ξ, ρ) spolu s minimálnou hodnotou stratovej funkcie pre úrokovú mieru BRIBOR z prvých deviatich mesiacov v roku 2005 s použitím *CIR modelu*

mesiac	β	ξ	ρ	min U
Január	1.00×10^{-7}	0.9967	0.6176	1.83×10^{-7}
Február	0.0114	0.6915	0.0200	7.23×10^{-7}
Marec	0.0449	0.7007	0.0240	7.12×10^{-8}
Apríl	5.67×10^{-6}	0.6154	0.0052	1.11×10^{-7}
Máj	1.00×10^{-7}	0.9980	0.8256	1.42×10^{-7}
Jún	1.00×10^{-7}	0.9979	0.8323	1.39×10^{-7}
Júl	1.00×10^{-7}	0.9618	0.0457	1.09×10^{-7}
August	1.00×10^{-7}	0.9986	1.2693	8.93×10^{-8}
September	1.00×10^{-7}	0.9991	2.0868	1.67×10^{-7}

Tabuľka 3.3: Nakalibrované hodnoty trojice parametrov (β, ξ, ρ) spolu s minimálnou hodnotou stratovej funkcie pre úrokovú mieru PRIBOR z prvých deviatich mesiacov v roku 2005 s použitím *Vašíčkovho modelu*

mesiac	β	ξ	ρ	min U
Január	0.9999	0.0243	0.0025	3.76×10^{-8}
Február	0.6763	0.0224	1.00×10^{-7}	3.12×10^{-8}
Marec	1.00×10^{-7}	0.0207	1.01×10^{-7}	8.92×10^{-8}
Apríl	0.6786	0.0153	0.0020	1.76×10^{-8}
Máj	0.1353	0.0184	0.0002	8.71×10^{-9}
Jún	1.00×10^{-7}	0.0175	5.40×10^{-7}	4.46×10^{-9}
Júl	0.3828	0.0193	0.0002	9.02×10^{-8}
August	0.2231	0.0200	1.00×10^{-7}	3.51×10^{-8}
September	0.6835	0.0240	0.0003	2.41×10^{-8}

Tabuľka 3.4: Nakalibrované hodnoty trojice parametrov (β, ξ, ρ) spolu s minimálnou hodnotou stratovej funkcie pre úrokovú mieru PRIBOR z prvých deviatich mesiacov v roku 2005 s použitím *CIR modelu*

mesiac	β	ξ	ρ	min U
Január	0.6589	0.2478	0.6842	2.77×10^{-8}
Február	0.7588	0.9619	2.0569	3.13×10^{-8}
Marec	2.35×10^{-6}	0.9974	0.6233	9.06×10^{-8}
Apríl	0.5185	0.7636	0.1180	1.76×10^{-8}
Máj	0.1359	0.9852	0.6256	8.71×10^{-9}
Jún	0.0051	0.9946	0.6157	4.63×10^{-9}
Júl	0.3980	0.9642	0.5866	9.02×10^{-8}
August	0.2956	0.9963	4.5189	3.52×10^{-8}
September	0.6240	0.9805	2.5768	2.41×10^{-8}

Tabuľka 3.5: Nakalibrované hodnoty trojice parametrov (β, ξ, ρ) spolu s minimálnou hodnotou stratovej funkcie pre úrokovú mieru EURIBOR z prvých deviatich mesiacov v roku 2005 s použitím *Vašíčkovho modelu*

mesiac	β	ξ	ρ	min U
Január	0.9999	0.0231	0.0020	1.26×10^{-8}
Február	0.9999	-0.0008	0.0021	1.12×10^{-8}
Marec	0.9998	0.1177	0.0023	1.92×10^{-8}
Apríl	0.9998	-0.0040	0.0016	3.00×10^{-8}
Máj	0.7753	0.0282	1.09×10^{-7}	5.08×10^{-9}
Jún	1.00×10^{-7}	0.0210	0.0024	1.42×10^{-8}
Júl	0.9998	-1.4956	0.0008	1.31×10^{-8}
August	0.9999	-0.0288	0.0011	8.20×10^{-9}
September	0.9999	0.0552	0.0011	2.44×10^{-8}

Tabuľka 3.6: Nakalibrované hodnoty trojice parametrov (β, ξ, ρ) spolu s minimálnou hodnotou stratovej funkcie pre úrokovú mieru EURIBOR z prvých deviatich mesiacov v roku 2005 s použitím *CIR modelu*

mesiac	β	ξ	ρ	min U
Január	0.8332	2.65×10^{-7}	0.5071	1.23×10^{-8}
Február	0.8311	1.00×10^{-7}	0.5463	1.09×10^{-8}
Marec	0.8133	2.42×10^{-7}	0.4251	1.75×10^{-8}
Apríl	0.8639	8.87×10^{-7}	0.6008	2.98×10^{-8}
Máj	0.7200	0.9947	0.1521	5.09×10^{-9}
Jún	0.0004	0.9801	0.1361	1.45×10^{-8}
Júl	0.9466	0.0001	0.1356	1.31×10^{-8}
August	0.9009	3.69×10^{-7}	0.6001	8.13×10^{-9}
September	0.9058	1.28×10^{-6}	0.5810	2.42×10^{-8}

Kapitola 4

Kalibrácia dvojfaktorového modelu derivátov úrokovej miery

V tomto prípade dodáme do modelu okrem okamžitej úrokovej miery (*short-rate*) r aj druhý faktor neistoty, ktorým bude volatilita y z jednofaktorového modelu. Cena dlhopisu (bezakupónového) P bude teda okrem pôvodných premenných t, T a r tentokrát závislá aj na spomínanej volatilita y .

4.1 Všeobecná PDR pre dvojfaktorový model

Základným pilierom pre odvodenie všeobecnej parciálnej diferenciálnej rovnice bude rovnako ako pre jednofaktorový model aj v tom dvojfaktorovom Itô-ova lema, tentokrát však pre vektorové náhodné premenné.

Predpokladajme, že obe stavové premenné sú riadené nasledovnými procesmi:

$$\begin{aligned}dr &= \mu_r(r, t, y)dt + \sigma_r(r, t, y)dw_1 \\dy &= \mu_y(r, t, y)dt + \sigma_y(r, t, y)dw_2,\end{aligned}$$

kde r je okamžitá úroková miera a y je druhý faktor, o ktorom zatiaľ nevieme nič povedať. Známym je však fakt, že prírastky dw_1 a dw_2 Wienerových procesov w_1 a w_2 sú navzájom korelované s mierou korelácie ρ .

V tomto prípade máme teda cenu bezkupónového dlhopisu P závislú nielen na dobe splatnosti T , na okamžitom čase t a na *short-rate* r , ale už aj na

premennej y . Funkcia $P = P(t, T, r, y)$ potom vyhovuje predpokladom viac-rozmernej Itôovej lemy a jej diferenciál dP môžeme vyjadriť v tvare:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho \sigma_r \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} \right) dt + \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} dw_1 + \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y} dw_2.$$

Podobne ako v jednofaktorovom svete, aj v tom dvojfaktorovom sa ku všeobecnej parciálnej diferenciálnej rovnici pre cenu dlhopisu $P(t, T, r, y)$ dostaneme rovnakým postupom, aký sme uviedli v tretej kapitole. Tentokrát naše portfólio zostrojíme z troch dlhopisov rôznych maturít a následným uplatnením averzie k riziku a bezarbitrážneho princípu sa dostávame k hľadanej parciálnej diferenciálnej rovnici v dvojfaktorovom modeli:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r - \lambda_1 \sigma_r) \frac{\partial P}{\partial r} + (\mu_y - \lambda_2 \sigma_y) \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ + \rho \sigma_r \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} - rP = 0, \quad t < T; \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde koncová podmienka pre cenu dlhopisu je $P(T, T, r, y) = 1$ a okrajové podmienky sú $P(t, T, 0, y) = 1$ a $P(t, T, \infty, y) = 0$, pre $\forall y \in R$.

Obdobne ako to bolo u jednofaktorového modelu, aj v tomto prípade funkcie $\lambda_1(t, r, y)$ a $\lambda_2(t, r, y)$ nazývame trhovou mierou rizika a sú zatiaľ bližšie nešpecifikované.

4.2 Explicitný tvar riešenia všeobecnej PDR

Nech obe stavové premenné r a y , ktoré predstavujú okamžitú úrokovú mieru a volatilitu, sú riadené nasledujúcimi dvoma procesmi:

$$\begin{aligned} dr &= \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sqrt{y}r^\gamma dw_1 \\ dy &= \kappa_2(\theta_2 - y)dt + vy^\delta dw_2, \end{aligned}$$

kde $\gamma \geq 0$ a $\delta \geq 0$. Rovnicu (4.1) môžeme potom vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \tilde{\lambda}_1\sqrt{y}r^\gamma)\frac{\partial P}{\partial r} + (\kappa_2(\theta_2 - y) - \tilde{\lambda}_2vy^\delta)\frac{\partial P}{\partial y} + \\ \frac{1}{2}(\sqrt{y}r^\gamma)^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}(vy^\delta)^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + (\sqrt{y}r^\gamma)(vy^\delta)\rho\frac{\partial^2 P}{\partial r\partial y} - rP = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

V tomto modeli $\tilde{\lambda}_1$ reprezentuje tzv. *trhovú mieru rizika* (market price of risk) a $\tilde{\lambda}_2$ predstavuje tzv. *trhovú mieru volatility* (market price of volatility).

Ak teraz položíme $\gamma = 0$ a $\delta = \frac{1}{2}$, dostávame *Fong-Vašíček model*, v ktorom sú trhové miery rizika a volatility vyjadrené nasledovne:

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1\sqrt{y} \quad a \quad \tilde{\lambda}_2 = \lambda_2\sqrt{y},$$

kde $\lambda_i = \text{konšt.}$, pre $i = 1, 2$.

Riešenie oceňovacej všeobecnej parciálnej diferenciálnej rovnice (4.2) budeme v prípade dvojfaktorového *Fong-Vašíček modelu* hľadať v nasledovnom tvare:

$$P(\tau, r, y) = A(\tau)e^{-B(\tau)r - C(\tau)y - F(\tau)} \quad (4.3)$$

kde $\tau = T - t$, $\sigma_1 = \sqrt{y}$ a funkcie $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ a $F(\tau)$ vyhovujú nasledovnému systému obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -A \left[(\lambda_1\sigma_1 - \kappa_1\theta_1)B + \frac{1}{2}\theta_2B^2 \right], \\ \dot{B} &= -\kappa_1B + 1, \\ \dot{C} &= -\lambda_1B - \kappa_2C - \lambda_2vC - \frac{B^2}{2} - \frac{v^2C^2}{2} - v\rho BC, \\ \dot{F} &= \lambda_1\sigma_1B + \kappa_2\theta_2C + \frac{1}{2}\theta_2B^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

s počiatočnými podmienkami $A(0) = 1$, $B(0) = 0$, $C(0) = 0$, $F(0) = 0$.

V tomto bode môžeme nájsť analógiu s jednofaktorovým *Vašíčkovým modelom*, pretože funkcie $A(\tau)$ a $B(\tau)$ spĺňajú rovnaké diferenciálne rovnice ako v jednofaktorovom svete. Preto pre tieto dve funkcie môžeme napísať explicitné vyjadrenie:

$$B(\tau) = \frac{1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 \tau})$$

$$A(\tau) = \exp \left[(B - \tau) \left(\theta_1 - \frac{\sigma_1^2}{2\kappa_1^2} - \frac{\sigma_1 \lambda_1}{\kappa_1} \right) - \frac{\sigma_1^2 B^2}{4\kappa_1} \right]$$

Ostáva nám teda vypočítať už len dve obyčajné diferenciálne rovnice pre funkcie $C(\tau)$ a $F(\tau)$:

$$\dot{C} = -\lambda_1 B - \kappa_2 C - \lambda_2 v C - \frac{B^2}{2} - \frac{v^2 C^2}{2} - v \rho B C,$$

$$\dot{F} = \lambda_1 \sigma_1 B + \kappa_2 \theta_2 C + \frac{1}{2} \theta_2 B^2.$$

Na výpočet týchto dvoch funkcií použijeme rovnako ako v prípade jednofaktorového modelu softvér Mathematica, ktorý nám efektne a rýchlo vypočíta tvary riešení oboch funkcií. Ďalej ešte využijeme predpoklad, že v limitnom prípade je $\theta_2 = \sigma_1^2$.

4.3 Minimalizácia stratovej funkcie pre dvojfaktorový model

Rovnako ako v jednofaktorovom svete zostrojíme aj tentokrát tzv. *stratovú* funkciu, ktorá meria kvalitu reálnych trhových výnosových kriviek pomocou počítania výnosových kriviek v jednotlivých modeloch. V našej analýze sa budeme v tomto prípade zaoberať modelom *Fong-Vašíček*.

Stratovú funkciu môžeme teda v dvojfaktorovom prípade (inšpirovali sme sa prácou [11]) definovať ako:

$$U^{2f}(\beta, \xi, \varrho, \lambda_1, \kappa_2, \lambda_2, \nu, \rho, y) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_j^i - \bar{R}_j^i)^2 \tau_j^2. \quad (4.5)$$

kde $\tau = T - t \in [0, T]$ je čas do maturity a $\{R_j^i, j = 1, \dots, m\}$ sú reálne trhové výnosové krivky. Množina nakalkulovaných výnosových kriviek $\{\bar{R}_j^i, j = 1, \dots, m\}$ ($i = 1, \dots, n$) je určená z nasledovného vzťahu:

$$A_j e^{-B_j R_0^i - C_j y - F_j} = e^{-\bar{R}_j^i \tau_j} \quad (4.6)$$

kde $r^i = R_0^i$ je úroková miera na veľmi krátku dobu (tzv. *over-night*) v jednotlivých časových okamihoch $i = 1, \dots, n$. Ďalej označme $A_j = A(\tau_j)$, $B_j = B(\tau_j)$, $C_j = C(\tau_j)$ a $F_j = F(\tau_j)$, kde $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ sú vzostupne zoradené časy do splatnosti jednotlivých dlhopisov určujúcich tvar výnosovej krivky. Funkcie $A(\tau)$ a $B(\tau)$ sú ako sme už uviedli rovnaké ako v prípade jednofaktorového *Vašíčkovho modelu*.

Teraz položíme $\tau_0 = 0$. Funkciu (4.5) môžeme prepísať do nasledovného tvaru:

$$U^{2f} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_j^i \tau_j - B_j R_0^i + \ln A_j - C_j y - F_j)^2, \quad (4.7)$$

ktorý po roznásobení upravíme na výraz:

$$U^{2f} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(R_j^i \tau_j - B_j R_0^i + \ln A_j)^2 - 2(R_j^i \tau_j - B_j R_0^i + \ln A_j) (C_j y + F_j) + (C_j y + F_j)^2]. \quad (4.8)$$

Výraz (4.9) môžeme potom rozdeliť na už známu stratovú funkciu z *Vašíčkovho modelu* a na zvyšnú časť, ktorá reprezentuje dvojfaktorový *Fong-Va-*

šíčkov model (viď [11]):

$$\begin{aligned}
 U^{2F}(\Theta) &= U^v - 2\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (C_j y + F_j) [\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0) + \ln A_j] \\
 &+ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (C_j y + F_j)^2,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

kde $E(X_j)$ a $D(X_j)$ označujú strednú hodnotu a disperziu vektora $X_j = \{X_j^i, i = 1, \dots, n\}$ a U^v predstavuje stratovú funkciu v jednofaktorovom prípade pre *Vašíčkov model*.

Druhým stochastickým faktorom vo *Fong-Vašíčkovom modeli* je volatilita okamžitej úrokovej miery r (*short-rate*). V praxi však o tomto parametri nemáme takmer žiadne informácie, neexistuje žiadna premenná, ktorou by sme mohli volatilitu aproximovať. Jedným z možných riešení tohto problému je spriemernenie daného modelu práve cez druhý stochastický faktor y .

Toto spriemernenie napokon vedie k nasledovnému tvaru stratovej funkcie:

$$\begin{aligned}
 \langle U^{2F}(\Theta) \rangle_y &= U^v \\
 &- 2\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (C_j \langle y \rangle + F_j) [\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0) + \ln A_j] \\
 &+ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (C_j^2 \langle y^2 \rangle + 2C_j F_j \langle y \rangle + F_j^2),
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

kde pre limitný prípad máme $\langle y \rangle = \theta_2$ a $\langle y^2 \rangle = \frac{\theta_2(v^2 + 2\theta_2\kappa_2)}{2\kappa_2}$ (viď [8]).

V ďalšom kroku budeme rovnako ako v prípade jednofaktorového modelu hľadať minimum tejto stratovej funkcie, ktoré následne porovnáme s nájdenými minimálnymi hodnotami *Vašíčkovho* jednofaktorového modelu.

Pri kalibrácii dvojfaktorového modelu sme využili získané optimálne hodnoty trojice parametrov (β, ξ, ϱ) , ktoré sme dosadili do stratovej funkcie pre *Fong-Vašíčkov model*. Parameter σ_1 , ktorý sa vďaka predpokladu rovná $\sqrt{\theta_2}$, sme vyjadrili práve pomocou už napočítaných optimálnych hodnôt β, ξ, ϱ . Ostala nám teda päťica parametrov $\lambda_1, \lambda_2, \kappa_2, v$ a ρ (posledný z nich reprezentuje koreláciu medzi dvoma Wienerovými procesmi dw_1 a dw_2), podľa ktorých urobíme minimalizáciu vyššie uvedenej stratovej funkcie. Napočítané hodnoty potom zapíšeme do tabuľky a porovnáme so získanými minimálnymi hodnotami stratovej funkcie pre jednofaktorový *Vašíčkov model*.

V našej analýze sme sa zaoberali opäť dátami *BRIBOR-u*, *PRIBOR-u* a *EURIBOR-u* z prvých deviatich mesiacov roku 2005. V nasledujúcich tabuľkách uvidíme porovnanie vypočítaných hodnôt minimálnej stratovej funkcie pre oba (*Vašíčkov* aj *Fong-Vašíčkov*) modely. V tomto bode treba zdôrazniť, že použitie optimálnych hodnôt trojice parametrov (β , ξ , ϱ) z jednofaktorového modelu je tu akosi dvojsečnou zbraňou. Na jednej strane, ak v dvojfaktorovom modeli dostávame lepšie rezíduá ako v jednofaktorovom, môžeme zaručiť, že ak by sme nepoužili optimálne hodnoty premenných β , ξ , ϱ nakalibrované použitím jednofaktorového modelu, ale zahrnuli ich do optimalizačného procesu aj v dvojfaktorovom modeli, dostali by sme ešte lepší výsledok. Ak však minimalizáciou stratovej funkcie v dvojfaktorovom modeli dostaneme horší fit ako pre *Vašíčkov* model, to ešte neznamená, že ak by sme nepoužívali optimálne hodnoty parametrov β , ξ , ϱ , ale využili ich na ďalšiu minimalizáciu stratovej "dvojfaktorovej" funkcie, nemohli by sme dostať lepšie výsledky ako v prípade jednofaktorového modelu.

V tabuľke (4.1) sme sa zaoberali úrokovou mierou *PRIBOR-u*, pričom vo všetkých deviatich mesiacoch dostávame lepšiu kalibráciu v prípade zavedenia druhej rovnice do modelu, aj keď rozdiel medzi oboma modelmi je skutočne minimálny. Preto môžeme s istotou tvrdiť, že minimalizáciou stratovej funkcie aj podľa β , ξ , ϱ by sme dostali rovnako dobré, ak nie lepšie rezíduá. Rovnako môžeme zlepšenie vidieť aj v tabuľke (4.2) pre úrokovú mieru *EURIBOR*. V tomto prípade však platí, že v mesiacoch február, apríl a jún vychádzajú nepatrne lepšie fitovacie výsledky pre jednofaktorový model. To, ako sme už spomínali, vyplýva z toho, že globálne minimum stratovej funkcie sa môže nachádzať mimo množiny zadanej optimálnymi hodnotami napočítaných parametrov β , ξ , ϱ . Rovnaký prípad nastáva aj v tabuľke (4.3), v ktorej sme skúmali úrokovú mieru *BRIBOR*. Tu nám dokonca lepšie reziduálne výsledky vychádzajú len v mesiacoch február a marec. Opäť však platí rovnaké odôvodnenie ako v prípade *EURIBOR-u*, a teda, že dosadením optimálnych hodnôt β , ξ , ϱ z jednofaktorového *Vašíčkovho* modelu sme pravdepodobne stratili globálne minimum stratovej funkcie.

Tabuľka 4.1: Porovnanie miním stratovej funkcie pre jednofaktorový *Vašíčkov model* a dvojfaktorový *Fong-Vašíčkov model* pre úrokovú mieru *PRIBOR*

mesiac	PRIBOR	
	min U - <i>Vašíček</i>	min U - <i>Fong-Vašíček</i>
Január	3.75526×10^{-8}	3.75524×10^{-8}
Február	3.12302×10^{-8}	3.12301×10^{-8}
Marec	8.92329×10^{-8}	8.92319×10^{-8}
Apríl	1.75872×10^{-8}	1.75772×10^{-8}
Máj	8.70622×10^{-9}	8.70560×10^{-9}
Jún	4.46682×10^{-9}	4.46677×10^{-9}
Júl	9.01870×10^{-8}	9.01848×10^{-8}
August	3.50795×10^{-8}	3.50785×10^{-8}
September	2.40721×10^{-8}	2.40685×10^{-8}

Tabuľka 4.2: Porovnanie miním stratovej funkcie pre jednofaktorový *Vašíčkov model* a dvojfaktorový *Fong-Vašíčkov model* pre úrokovú mieru *EURIBOR*

mesiac	EURIBOR	
	min U - <i>Vašíček</i>	min U - <i>Fong-Vašíček</i>
Január	1.26154×10^{-8}	1.26129×10^{-8}
Február	1.12407×10^{-8}	1.12409×10^{-8}
Marec	1.91840×10^{-8}	1.91826×10^{-8}
Apríl	3.00402×10^{-8}	3.00407×10^{-8}
Máj	5.07943×10^{-9}	5.07928×10^{-9}
Jún	1.41928×10^{-8}	1.42103×10^{-8}
Júl	1.31023×10^{-8}	1.31023×10^{-8}
August	8.23738×10^{-9}	8.23713×10^{-9}
September	2.47856×10^{-8}	2.47854×10^{-8}

Tabuľka 4.3: Porovnanie miním stratovej funkcie pre jednofaktorový *Vašíčekov model* a dvojfaktorový *Fong-Vašíčekov model* pre úrokovú mieru *BRIBOR*

mesiac	BRIBOR	
	min U - <i>Vašíček</i>	min U - <i>Fong-Vašíček</i>
Január	1.60362×10^{-8}	1.64708×10^{-7}
Február	7.19207×10^{-7}	7.19116×10^{-7}
Marec	7.13758×10^{-8}	7.12627×10^{-8}
Apríl	1.03812×10^{-7}	1.04347×10^{-7}
Máj	1.34660×10^{-7}	1.38593×10^{-7}
Jún	9.70344×10^{-8}	1.00168×10^{-7}
Júl	5.65691×10^{-8}	5.78185×10^{-8}
August	8.03831×10^{-8}	8.32740×10^{-8}
September	1.39749×10^{-7}	1.44607×10^{-7}

Záver

Deriváty úrokovej miery sú, ako sme už v úvode uviedli, jednou z najpoužívanejších foriem finančných derivátov. V tejto práci sme sa snažili ich predstaviť, pričom podrobnejšie sme sa venovali predovšetkým najpoužívanejším rovnovážnym modelom typu *Vašíček* a *CIR*.

V našej práci sme postupne od všeobecných jednofaktorových modelov derivátov úrokovej miery prešli k dvojfaktorovým, kde sme za druhý stochastický faktor (zdroj neistoty) zobrali volatilitu z jednofaktorového modelu. Zostrojili sme tzv. *stratovú* funkciu, pomocou ktorej sme sa snažili merať kvalitu aproximácie množiny reálnych výnosových kriviek napočítaním výnosových kriviek z oboch modelov. Kľúčovou časťou práce je štvrtá kapitola, v ktorej sme minimalizáciu stratovej funkcie rozšírili na dvojfaktorový model. Po napočítaní optimálnych hodnôt sme ich porovnali s hodnotami z jednofaktorového modelu, pričom na povrch vystúpilo niekoľko zaujímavých faktov. Všeobecne sme očakávali, že zavedením druhého faktora neistoty (volatility z jednofaktorového modelu), obdržíme lepšie fitovacie výsledky. To sa potvrdilo pri úrokovej miere *PRIBOR*, kde vo všetkých deviatich mesiacoch dostávame použitím dvojfaktorového modelu o niečo lepšie optimálne riešenia. Naše očakávania sa však nepotvrdili pri zvyšných dvoch skúmaných úrokových mierach *BRIBOR* a *EURIBOR*, kde sme dostali striedavé výsledky, pri niektorých mesiacoch bol efektívnejší jedno, pri zvyšných zase dvojfaktorový model. Spôsobené to bolo použitím optimálnych hodnôt parametrov β , ξ , ϱ z jednofaktorového modelu, vďaka ktorým mohlo dôjsť k "strate" globálneho minima stratovej funkcie.

Jednou z možností odstránenia tohto nedostatku je preto optimalizácia stratovej funkcie v prípade dvojfaktorového modelu aj podľa parametrov β , ξ , ϱ , čím by sme už mali dostávať lepšie fitovacie výsledky pre dvojfaktorový model. Na to je však potrebnější širší priestor, ako poskytuje táto práca.

Literatúra

- [1] Alexová, M., *Dvojfaktorové modely derivátov úrokových mier*, BRATISLAVA, Diplomová práca FMFI UK, 2002
- [2] Anderson, T. G., Lund, J.: *The Short Rate Diffusion Revisited: A Tour Guided by the Efficient Method of Moments.*; Working paper, J. L. Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, 1996.
- [3] Brennan, M. J., Schwartz, E. S.: *A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds.*; *Journal of Banking and Finance* 3:133-155, 1979.
- [4] Cox, J. C., Ingersoll Jr., J. E., Ross, S. A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*; *Econometrica*, Vol. 53, No. 2 (Mar., 1985), 385-408.
- [5] Dothan, L. U.: *On the Term Structure of Interest Rates*; *Journal of Financial Economics* 6:59-69.
- [6] Fong, H. G., Vasicek, O. A.: *Fixed-Income Volatility Management.*; *Journal of Portfolio Management*, Summer 1991, 41-42.
- [7] Kwok, Y. K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Singapore, Springer - Verlag, 1998.
- [8] Stehlíková, B. *Analýza dvojfaktorového modelu vývoja úrokovej miery so stochastickou volatilitou*, BRATISLAVA, Diplomová práca FMFI UK, 2004.
- [9] Stehlíková, B., Ševčovič, D., *On a volatility averaging in a two-factor interest rate model*, *Proceedings in ALGORITMY*, 2005.
- [10] Ševčovič, D., Urbánová-Csajková, A., *Calibration of one factor interest rate models*, *Journal of ELECTRICAL ENGINEERING*, 47 (1992), 46 - 50.

- [11] Urbánová-Csajková, A.: *Calibration term structure models*, BRATISLAVA, Rukopis dizertačnej práce FMFI UK, 2006.
- [12] Vajdička, V., *Analýza modelov úrokovej miery s využitím explicitných riešení*, BRATISLAVA, Diplomová práca FMFI UK, 2005.

Príloha č. 1

Program na výpočet optimálnych hodnôt trojice parametrov β , ξ , ρ a minimalizáciu stratovej funkcie pre jednofaktorový *Vašíčkov* a *CIR* model:

```
tau={1/52, 2/52, 1/12, 2/12, 3/12, 6/12, 9/12, 1.};
m=Length[tau];

ZlomkovaCast[x_]:=x-Floor[x];
g[x_]:=Sqrt[ZlomkovaCast[x]^2+10^(-14)];

MyAbs[x_]:=Sqrt[x^2+10^(-14)];

VASICEK=1;

If[VASICEK==1,
{
(* VASICEK *)

B[x_,beta_,xi_,rho_]:=-((1-g[beta]^x)/Log[g[beta]]);
A[x_,beta_,xi_,rho_]:= Exp[xi*(B[x,beta,xi,rho ]-x)-MyAbs[rho]*(B[x,beta,xi,rho]^2)];
},
{
(* CIR *)
B[x_, beta_, xi_, rho _]:=(-1/Log[g[beta]])*(1-g[beta]^x)/(g[xi]*(1-g[beta]^x)+g[beta]^x);
A[x_, beta_, xi_, rho _]:= (g[beta]^((1-g[xi])*x)/(g[xi]*
(1-g[beta]^x)+g[beta]^x))^MyAbs[rho];
}];

thetadol=0.02;
thetahor=0.025;
Minimum={};Betaopt={};Xiopt={};Rhoopt={};
lambdadol={};lambdahor={};
For[i=1,i<=9,1,
{
R0=ReadList[StringJoin["D:\Miery\Euribor\Euribor-",ToString[i],"-05-
ON.txt"],Number]/100.;
Q=ReadList[StringJoin["D:\Miery\Euribor\Euribor-",ToString[i],"-
05.txt"],Table[Number,{m}]];
R=Transpose[Q]/100.;
n=Length[R[[1]]];

U[beta_,xi_,rho_]:= (1/m)*
Sum[((tau[[i]]*Mean[R[[i]])-(B[tau[[i]],beta,xi,rho]*Mean[R0])+
Log[A[tau[[i]],beta,xi,rho])^2+
Variance[tau[[i]]*R[[i]]-B[tau[[i]],beta,xi,rho]*R0],{i,1,m}];

Umin=10^10;
If[VASICEK[Equal]1, Print["Pocitam VASICEK"], Print["Pocitam CIR"]];
```

```

For[krok=1,krok<100,1,
{
  betastart=Random[];
  xistart=Random[];
  rhostart=20*Random[];

  vystup=
  FindMinimum[U[beta,xi,rho],{beta,betastart},{xi,xistart},{rho,.6}];
  If[Umin>vystup[[1]],{
    Umin=vystup[[1]];
    If[VASICEK[Equal]1,
      {
        betaopt=g[beta/.vystup[[2]]];
        xiopt=xi/.vystup[[2]];
        rhoopt=MyAbs[rho/.vystup[[2]]];
      },
      {
        betaopt=g[beta/.vystup[[2]]];
        xiopt=g[xi/.vystup[[2]]];
        rhoopt=MyAbs[rho/.vystup[[2]]];
      }
    ];

    Print["Umin = ",Umin,"; betaopt = ",betaopt,"; xiopt = ",xiopt,
      "; rhoopt = ",rhoopt];,];
    krok++;}];
Print["Umin = ", Umin, "; betaopt = ", betaopt, "; xiopt = ", xiopt, "; rhoopt = ", rhoopt];
If[VASICEK[Equal]1,
{
  pom00=Umin;
  Minimum=Append[Minimum,pom00];Clear[pom00];
  pom11=betaopt;
  Betaopt=Append[Betaopt,pom11];Clear[pom11];
  pom22=xiopt;
  Xiopt=Append[Xiopt,pom22];Clear[pom22];
  pom33=rhoopt;
  Rhoopt=Append[Rhoopt,pom33];Clear[pom33];
  pom1=((thetadol-xiopt-((2*rhoopt)/(-Log[betaopt])))*
  Sqrt[-Log[betaopt]]/(2*Sqrt[rhoopt]));
  lambdadol=Append[lambdadol,pom1];Clear[pom1];
  pom2=((thetahor-xiopt-((2*rhoopt)/(-Log[betaopt])))*
  Sqrt[-Log[betaopt]]/(2*Sqrt[rhoopt]));
  lambdahor=Append[lambdahor,pom2];Clear[pom2];
},
{
  pom00=Umin;
  Minimum=Append[Minimum,pom00];Clear[pom00];
  pom11=betaopt;
  Betaopt=Append[Betaopt,pom11];Clear[pom11];
  pom22=xiopt;
  Xiopt=Append[Xiopt,pom22];Clear[pom22];
}

```

```

pom33=rhoopt;
Rhoopt=Append[Rhoopt,pom33];Clear[pom33];
pom1=(-Log[betaopt]*((2*xiopt-1)+(1/thetadol)*rhoopt*xiopt*(1-xiopt)*(Log[betaopt]));
lambdadol=Append[lambdadol,pom1];Clear[pom1];
pom2=(-Log[betaopt]*((2*xiopt-1)+(1/thetahor)*rhoopt*xiopt*(1-xiopt)*(Log[betaopt]));
lambdahor=Append[lambdahor,pom2];Clear[pom2];
});
i++;});
TableForm[{Minimum,Betaopt,Xiopt,Rhoopt},
  TableHeadings->{{"Minimum","Betaopt","Xiopt","Rhoopt"},{"januar","februar",
  "marec","april","maj","jun","jul","august","september"}}}
For[i=1,i<=9,1,
  {
  graflambda[i]=
  ListPlot[{ {i,lambdadol[[i]]},{i,lambdahor[[i]]} },
  PlotJoined->True,Frame[Rule]True,
  PlotStyle->{RGBColor[0.1*i,0.1*(10-i),0.8],Thickness[0.05]},
  GridLines->Automatic,
  DisplayFunction->Identity];
  i++;}
]
Show[Table[graflambda[i], {i,1,9}],DisplayFunction->$DisplayFunction]
Display["E:\Mirec\Diplomovka\graf1.eps",%,"EPS"]

```

Príloha č.2

Program na výpočet minimálnej hodnoty stratovej funkcie pre dvojfaktorový *Fong-Vašíček* model (v tomto prípade pre úrokovú mieru *EURIBOR*):

```
tau={1/52,2/52,1/12,2/12,3/12,6/12,9/12,1.};
m=Length[tau];
T=1.;
ZlomkovaCast[x_]:=x-Floor[x];
g[x_]:=Sqrt[ZlomkovaCast[x]^2+10^(-14)];
MyAbs[x_]:=Sqrt[x^2+10^(-14)];

B2F[x_,beta_,xi_,rho_]:=-(1-g[beta]^x)/Log[g[beta]];
A2F[x_,beta_,xi_,rho_]:=Exp[xi*(B2F[x,beta,xi,rho]-x)-
MyAbs[rho]*(B2F[x,beta,xi,rho]^2)];

Betaopt={0.9999,0.9999,0.9998,0.9998,0.7753,1.0*10^(-7),0.9998,0.9999,0.9999};
Rhoopt={0.0020,0.0021,0.0023,0.0016,1.09*10^(-7),0.0024,0.0008,0.0011,0.0011};
Xiopt={0.0231,-0.0008,0.1177,-0.0040,0.0282,0.0210,-1.4956,-0.0288,0.0552};

theta2=sigma1^2;sigma1=2*Sqrt[Rhoopt*(-Log[Betaopt])];
eps=0.0001;
Minimum2F={};
For[j=1,j<=9,1,
{

SpriemernenieY=theta2[[j]];
SpriemernenieY2[sigma2_,kapa2_]=(theta2[[j]]*(sigma2^2+2*theta2[[j]]*kapa2))/(2*kapa2);

R0=ReadList[StringJoin["F:\Miery\Euribor\Euribor-",ToString[j],"-05-ON.txt"],
Number]/100.;
Q=ReadList[StringJoin["F:\Miery\Euribor\Euribor-",ToString[j],"-05.txt"],
Table[Number,{m}]];
R=Transpose[Q]/100.;

Riesenie[lambda1_,lambda2_,sigma2_,kapa2_,rho2_]:=Module[{t},
pom2C=NDSolve[{CC'[t]==(-lambda1*B2F[t,Betaopt[[j]],Xiopt[[j]],Rhoopt[[j]])-
kapa2*CC[t]-lambda2*sigma2*CC[t]-((B2F[t,Betaopt[[j]],Xiopt[[j]],Rhoopt[[j]])^2)/2-
(sigma2^2*(CC[t]^2)/2-sigma2*rho2*B2F[t,Betaopt[[j]],Xiopt[[j]],Rhoopt[[j]])*CC[t]),
CC[0]==0},CC[t],{t,0,T}];

riesC[tt_]:=CC[t]/.pom2C[[1,1]]/.t->tt;
riesC
];
Riesenie2[lambda1_,lambda2_,sigma2_,kapa2_,rho2_]:=Module[{t},
pom2F=NDSolve[{FF'[t]==(lambda1*sigma1[[j]]*B2F[t,Betaopt[[j]],Xiopt[[j]],
Rhoopt[[j]])+kapa2*theta2[[j]]*Riesenie[lambda1,lambda2,sigma2,kapa2,rho2][t]+
(1/2)*theta2[[j]]*(B2F[t,Betaopt[[j]],Xiopt[[j]],Rhoopt[[j]])^2,
FF[0]==0},FF[t],{t,0,T}];
```

```
riesF[tt_]:=FF[t]/.pom2F[[1,1]]/.t->tt;
riesF
];
```

```
U[lambda1_,lambda2_,sigma2_,kapa2_,rho2_]:=
(1/m)*Sum[
((tau[[i]]*Mean[R[[i]])
-(B2F[tau[[i]],Betaopt[[j]],Xiopt[[j]],Rhoopt[[j]]]*Mean[R0])
+Log[A2F[tau[[i]],Betaopt[[j]],Xiopt[[j]],Rhoopt[[j]]])^2+
Variance[tau[[i]]*R[[i]]
-B2F[tau[[i]],Betaopt[[j]],Xiopt[[j]],Rhoopt[[j]]]*R0],
{i,1,m}
+2*(1/m)*Sum[
(Riesenie[lambda1,lambda2,sigma2,kapa2,rho2][tau[[i]]]*
SpriemernenieY
+Riesenie2[lambda1,lambda2,sigma2,kapa2,rho2][tau[[i]]]*
(tau[[i]]*Mean[R[[i]])
-B2F[tau[[i]],Betaopt[[j]],Xiopt[[j]],Rhoopt[[j]]]*Mean[R0]
+Log[A2F[tau[[i]],Betaopt[[j]],Xiopt[[j]],Rhoopt[[j]]])],
{i,1,m}
]+(1/m)
*Sum[
((Riesenie[lambda1,lambda2,sigma2,kapa2,rho2][tau[[i]])^2
*SpriemernenieY2[sigma2,kapa2])
+2*Riesenie[lambda1,lambda2,sigma2,kapa2,rho2][tau[[i]]
*Riesenie2[lambda1,lambda2,sigma2,kapa2,rho2][tau[[i]]]*
SpriemernenieY
+(Riesenie2[lambda1,lambda2,sigma2,kapa2,rho2][tau[[i]])^2
,{i,1,m}
)];
```

```
Pom=FindMinimum[U[pp,qq,rr,ss,yy],{pp,0.1},{qq,0.1},{rr,0.1},
{ss,1},{yy,0.1},
Gradient->{(U[pp+eps,qq,rr,ss,yy]-U[pp-eps,qq,rr,ss,yy])/(2 eps),
(U[pp,qq+eps,rr,ss,yy]-U[pp,qq-eps,rr,ss,yy])/(2 eps),
(U[pp,qq,rr+eps,ss,yy]-U[pp,qq,rr-eps,ss,yy])/(2 eps),
(U[pp,qq,rr,ss+eps,yy]-U[pp,qq,rr,ss-eps,yy])/(2 eps),
(U[pp,qq,rr,ss,yy+eps]-U[pp,qq,rr,ss,yy-eps])/(2 eps)}];
```

```
Minimum2F=Append[Minimum2F,Pom[[1]]];Clear[Pom];
j++;};
Minimum2F
```