

Modelovanie defaultu v portfóliu bondov pomocou copula funkcie

Diplomová práca

Andrej Holík

2006

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

Ekonomická a finančná matematika



**Modelovanie defaultu v portfóliu bondov
pomocou copula funkcie**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Andrej Holík

Vedúci diplomovej práce:

Ing. RNDr. Ján Pataky

BRATISLAVA 2006

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne a použil som len literatúru uvedenú v zozname.

Andrej Holík

Na tomto mieste by som rád poďakoval svojmu diplomovému vedúcemu Ing. RNDr. Jánovi Patakymu za odborné vedenie a cenné rady pri tvorbe tejto práce.

Moje poďakovanie rovnako patrí rodine, ktorá ma obetavo podporovala v štúdiu na vysokej škole, mojím priateľom a láskam.

Abstrakt

Podnikové dlhopisy podliehajúce riziku krachu prinášajú pomerne vysoký výnos, ktorý je kompenzovaný vyšším rizikom. Investori sa preto snažia pomocou diverzifikácie riziko defaultu minimalizovať. Takto vznikajú rôzne typy portfólií kreditných aktív a od nich odvodených produktov. Jedným z nich je aj tzv. CDO, ktorého podstata spočíva v delení portfólia na špeciálne rizikovo-výnosové profily a ich predaji na trhu. Pri oceňovaní týchto produktov je podstatné správne odhadnúť pravdepodobnosť defaultu jednotlivých aktív a citlivo podchytiť korelačnú štruktúru portfólia. V tejto práci porovnáваме štyri modely oceňovania CDO používajúce pri popise korelácií odlišné typy copula funkcií. Detailne sa venujeme predovšetkým modelovaniu pravdepodobnostného rozdelenia počtu defaultov a veľkosti strát v portfóliu. Praktická časť sleduje citlivosť skúmaných modelov na zmeny vstupných parametrov popisujúcich kvalitu portfólia.

Obsah

Zoznam obrázkov a tabuliek	2
Úvod	3
1 CDO, mechanizmus a základné pojmy	5
2 Teoretický základ	10
2.1 Copula funkcie a ich vlastnosti	10
2.2 Kreditné krivky, hazard rate funkcia, Poissonov a Coxov proces	18
3 Modely používajúce Monte Carlo simuláciu	21
4 Jednofaktorové modely	25
5 Praktické výsledky	32
5.1 Testovanie pre rozličné vstupné parametre	32
5.2 Konkrétne portfólio	45
5.3 Zhodnotenie výsledkov	47
Záver	51
Literatúra	52
Prílohy	54

Zoznam obrázkov a tabuliek

Obrázky

Obr. 1.1: Štruktúra CDO	7
Obr. 5.1.1: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, 1-faktorové copuly, $\lambda = 0,01$	34
Obr. 5.1.2: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, všeobecné copuly, $\lambda = 0,01$	34
Obr. 5.1.3: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, 1-faktorové copuly, $\lambda = 0,03$	35
Obr. 5.1.4: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, všeobecné copuly, $\lambda = 0,03$	35
Obr. 5.1.5: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, 1-faktorové copuly, $\lambda = 0,05$	36
Obr. 5.1.6: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, všeobecné copuly, $\lambda = 0,05$	36
Obr. 5.1.7: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, 1-faktorové copuly, $r = 0,2$	39
Obr. 5.1.8: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, všeobecné copuly, $r = 0,2$	39
Obr. 5.1.9: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, 1-faktorové copuly, $r = 0,4$	40
Obr. 5.1.10: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, všeobecné copuly, $r = 0,4$	40
Obr. 5.1.11: Korelácie a rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, Studentova t copula. .	42
Obr. 5.1.12: Recovery rate a rozdelenie pravdepodobnosti strát, Studentova t copula.	43
Obr. 5.2.1: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov v portfóliu.	46
Obr. 5.2.2: Rozdelenie pravdepodobnosti percentuálnej úrovne strát portfólia.	46

Tabuľky

Tab. 5.1.1: Výška strát portfólia pri danom počte defaultujúcich aktív, $RR = 0,3$	33
Tab. 5.1.2: Výsledky pre rôzne hodnoty intenzít defaultu λ	38
Tab. 5.1.3: Výsledky pre rôzne hodnoty párových korelácií aktív r	41
Tab. 5.1.4: Výsledky pre rôzne hodnoty recovery rates RR	44
Tab. 5.2.1: Výsledky – portfólio.	47
Tab. B.1: Kredity tvoriace modelované portfólio SISp.	64

Úvod

Spomedzi rozličných nástrojov na finančnom trhu je možné označiť podnikové dlhopisy a od nich odvodené inštrumenty ako tie, ktoré prinášajú pomerne vysoký výnos. Tento výnos je však kompenzovaný vyšším rizikom. Investor podstupuje nielen riziko spojené s možnými zmenami úrokovej miery, ale tiež riziko, že firma nebude schopná v čase splatnosti dlhopisu splatiť svoje záväzky. Výskyt defaultu môže spôsobiť investorovi značnú stratu, keďže skrachovaná firma zvyčajne vyplatí len malú časť pôvodnej hodnoty dlhopisu. Podnikové dlhopisy patria k najrizikovejším dlhopisom, pretože spoločnosti sú citlivejšie na ekonomické problémy, konkurenciu a chyby manažmentu v porovnaní s vládou. Nevieme s istotou povedať, ktoré firmy skrachujú v nasledujúcom roku, vieme však vypočítať odhad pravdepodobnosti defaultu konkrétnej firmy. Investori sa preto snažia využiť výhody diverzifikácie a minimalizovať riziko defaultu.

Pri portfóliu dlhopisov s rizikom defaultu, či portfóliu iných aktív podliehajúcich riziku defaultu, je potrebné zistiť pravdepodobnosti defaultu jednotlivých aktív a takisto určiť, ako riziká defaultu jednotlivých aktív navzájom súvisia, zistiť korelácie.

V našej práci sa zameriame na špeciálny typ portfólia defaultovateľných aktív, v praxi označovaný ako *CDO (Collateralized Debt Obligations)*. Väčšinou ide o pomerne veľké portfólio (100 a viac aktív), ktoré zakladateľ rozdelí na niekoľko rizikovo-výnosových profilov, tzv. *tranží*, a tie ponúka na trhu. V súčasnosti existuje množstvo modelov, ktorých úlohou je správne podchytiť korelačnú štruktúru portfólia a určiť čo možno najpresnejšie očakávané straty z defaultov aktív a následne férové *prémie* jednotlivých tranží. My sme sa rozhodli modelovať pravdepodobnosti defaultov v portfóliu pomocou tzv. *copula funkcií* a v práci porovnáваме štyri známe a pomerne populárne modely oceňovania CDO tranží.

Naším cieľom bude sledovať vplyv rôznych vstupných parametrov, ako sú veľkosť korelácie aktív, veľkosť pravdepodobnosti defaultu jednotlivých aktív, či veľkosť percenta hodnoty dlhopisu vyplateného v prípade defaultu (tzv. *Recovery Rate*), na hodnoty očakávaných strát. Porovnáme aj vplyv voľby copula funkcie a jednotlivých modelov na pravdepodobnostné

rozloženie počtu defaultov a očakávaných strát v portfóliu a pokúsime sa vybrať najvhodnejší z modelov. Modelovať budeme aj jedno konkrétne portfólio Slovenskej Sporiteľne.

Práca je rozdelená do piatich kapitol. V prvej kapitole podrobnejšie popíšeme, ako funguje CDO a objasníme niektoré základné pojmy. Druhá kapitola sa venuje najmä copula funkciám a ich vlastnostiam; v druhej časti kapitoly budeme hovoriť o pravdepodobnosti defaultu. V tretej kapitole popíšeme model používajúci Monte Carlo simulácie tak, ako ho vo svojej práci navrhol Stefano Galiani [6]. Štvrtá kapitola popisuje jednofaktorový model, my sme si osvojili praktický algoritmus, ktorý ponúkajú John Hull a Alan White [7]. V piatej kapitole už budeme porovnávať navrhnuté metódy pre rôzne vstupné parametre a zameriame sa aj na konkrétne portfólio. V poslednej časti kapitoly vyhodnotíme naše testy a zamyslíme sa nad výberom tej „správnej“ metódy oceňovania CDO tranží.

1 CDO, mechanizmus a základné pojmy

Najprv stručne objasníme základné pojmy:

Podľa definície Moody`s **default** nastáva v týchto troch prípadoch:

- i) ak nastane nesplatenie, alebo omeškanie splatenia úroku alebo kapitálu,
- ii) na emitenta je vyhlásený konkurz, nútená správa, alebo je v likvidácii,
- iii) v prípade reštrukturalizácie, t.j.:
 - (a) emitent ponúkne veriteľom nové cenné papiere, resp. emisie s cieľom znížiť svoje záväzky (výmena za akcie alebo obligácie s nižším kupónom),
 - (b) primárnym zámerom výmeny je pomôcť dlžníkovi vyhnúť sa krachu.

Strata, ktorú utrpí investor kvôli zmeneným podmienkam na trhu sa nepovažuje za default. Takisto sa za default nepovažuje strata spôsobená zmenou ceny v dôsledku zhoršenia ratingového hodnotenia emitenta.¹

Riziko defaultu je neistota vyplývajúca zo schopnosti firmy splatiť svoje dlhy a obligácie. Nevieme vopred odhadnúť, ktoré firmy skrachujú a ktoré nie, ale vieme urobiť odhady pravdepodobností defaultu. Default znamená, že firma nie je schopná splatiť svoje záväzky voči veriteľom a vyhlási bankrot. Riziko defaultu firmy rastie, ak sa hodnota aktív firmy približuje k účtovnej hodnote pasív. Firma skrachuje, keď trhovú hodnotu aktív nie je schopná pokryť záväzky. V skutočnosti firmy neskrachujú hneď, ako ich trhovú hodnotu aktív dosiahne účtovnú hodnotu pasív. Je to spôsobené tým, že niektoré ich záväzky majú dlhodobý charakter. *Bod defaultu* - hodnota aktív firmy, kedy firma skrachuje, sa nachádza niekde medzi celkovými pasívami a krátkodobými pasívami.

Default je v podstate len málo pravdepodobný jav. Priemerná firma defaultuje s pravdepodobnosťou okolo 2% ročne. Pravdepodobnosti defaultu sa samozrejme môžu pri rôznych firmách značne líšiť. Pravdepodobnosť, že skrachuje firma, ktorá má rating Aaa, je len 0,02% za

¹ Pod pojmom *rating* rozumieme ohodnotenie schopnosti emitenta splácať dohodnuté záväzky, a teda relatívne ohodnotenie bezpečnosti investície. Dlhopisy sú hodnotené rôznymi spoločnosťami (napr. Standard & Poor, Moody`s) a dosahovaný rating je v rozsahu od AAA, príp. Aaa (najvyšší) po C, resp. D (skrachujúca spoločnosť).

rok, kým firma s ratingom Caa v spodnej časti ratingovej tabuľky má pravdepodobnosť defaultu 4%.

CDO (Collateralized Debt Obligations) zvyčajne pozostáva z pomerne veľkého diverzifikovaného portfólia málo likvidných aktív podliehajúcich *kreditnému riziku* (riziku defaultu), ako sú výnosné dlhopisy (hovoríme vtedy o **CBO**), pôžičky (**CLO**), ale aj iné, zložitejšie inštrumenty, napríklad *CDS (Credit Default Swaps* – ide o swapy, pri ktorých sa platby odvíjajú od toho, či nastala nejaká vopred určená kreditná udalosť).

Predstavme si takéto portfólio. Straty z hodnoty portfólia spôsobené defaultom firiem závisia predovšetkým od pravdepodobnosti defaultu každej z firiem a od veľkosti strát z tohto ktorého aktíva v prípade jeho defaultu (resp. veľkosti podielu hodnoty aktíva, ktorý bude vyplatený v prípade defaultu – túto hodnotu vyjadruje tzv. *Recovery Rate*). Navyše, veľmi dôležitú úlohu pri modelovaní časov defaultu firiem, a následne aj pravdepodobnostného rozdelenia strát portfólia, hrá aj stupeň závislosti medzi pravdepodobnosťami defaultu jednotlivých firiem – vzájomné korelácie.

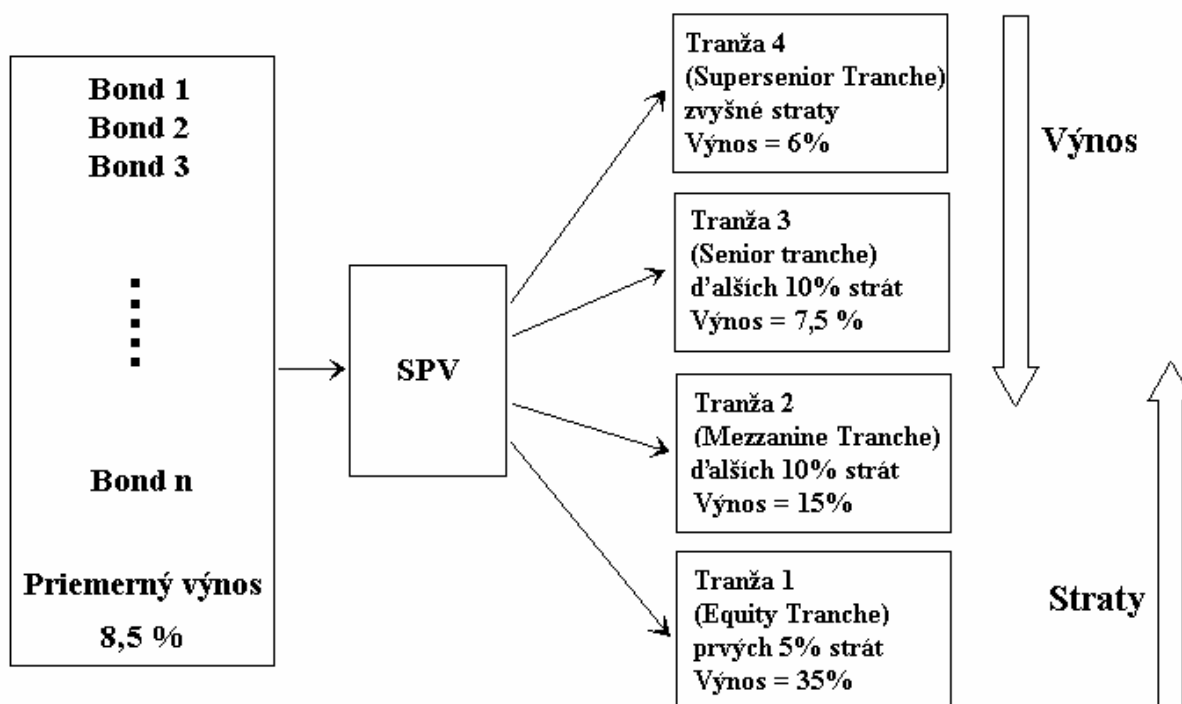
Ako majitelia portfólia sa chceme chrániť pred možnými stratami spôsobenými výskytom defaultov, ale nechceme portfólio predať. CDO umožňuje túto ochranu tak, že portfólio rozložíme na niekoľko rizikovo-výnosových profilov, tranží, a tie predávame. Kreditné riziko portfólia tvoriaceho naše CDO teda predávame v prebalených produktoch na trhu.

Každá tranža je charakterizovaná svojím spodným a vrchným ohraničením. Kupujúci tranže so spodnou hranicou K_S a hornou hranicou K_H budú znášať všetky straty portfólia, ktoré prekročia úroveň $K_S\%$, až do výšky $K_H\%$ celkovej hodnoty portfólia. Čiže držitelia tranže s hraničnými bodmi $[K_S, K_H]$ netrpia žiadnymi stratami, pokiaľ celková strata portfólia nepresiahne úroveň $K_S\%$ celkovej hodnoty portfólia. V prípade, že straty v portfóliu prekročia ľubovoľne vysoko nad hranicu $K_H\%$ hodnoty portfólia, držitelia tranže $[K_S, K_H]$ majú 100%-nú stratu. Spodný hraničný bod K_S každej tranže zodpovedá hornému hraničnému bodu K_H predchádzajúcej - „mladšej“ - tranže. Prvé straty portfólia sú absorbované tzv. *equity* tranžou, ktorej hranica $K_S = 0$ a $K_H > 0$.

Držitelia každej tranže sú, samozrejme, za riziko, ktoré podstupujú, kompenzovaní: dostávajú pravidelné platby až do maturity. Tieto platby predstavujú výnos tranže, nazývame ich *prémie*. Prémia equity tranže je najväčšia, pretože jej držitelia absorbujú prvé straty portfólia.

Aby držiteľia nasledujúcich - „starších“ - tranží utrpeli nejakú stratu, musia držiteľia mladších tranží utrieť 100% straty, ktorej boli vystavení, a teda prémia starších tranží je menšia. Čiže čím je tranža mladšia (zodpovedná za skoršie straty), tým väčšie sú očakávané straty, ktoré utrpia jej držiteľia, a tým väčšia je aj prémia, ktorú dostávajú.

Príklad fiktívneho CDO je znázornený na obrázku 1.1. Z portfólia bondov sme vytvorili tieto štyri tranže: hrúbka prvej tranže predstavuje 5% hodnoty portfólia a absorbuje všetky kreditné straty portfólia (v čase do maturity CDO) do výšky 5% hodnoty portfólia. Druhá tranža predstavuje 10% hodnoty portfólia a absorbuje všetky straty, ktoré prevýšia 5% hodnoty portfólia, až do výšky 15% hodnoty portfólia. Hrúbka tretej tranže predstavuje opäť 10% hodnoty portfólia a je zodpovedná za všetky straty, ktoré prekročia úroveň 15% hodnoty portfólia, až do výšky 25% hodnoty portfólia. Štvrtá tranža má 75% hodnoty portfólia a zodpovedá iba za straty, ktoré presiahnu hranicu 25% hodnoty portfólia.



Obr. 1.1: Štruktúra CDO.

Výnosy naznačené v obrázku 1.1 predstavujú prémie vyplácané držiteľom tranží. Tieto sú vyplácané z takej časti hodnoty tranže, ktorá zostala po odrátaní strát tranže. Vezmime si

napríklad prvú tranžu: pri nulových stratách sľubuje 35%-ný výnos, avšak akonáhle celková strata portfólia dosiahne 1% hodnoty portfólia, držitelia tejto tranže stratia 20% svojich investícií a výnos získajú len z 80% hodnoty, ktorú pôvodne investovali.

Equity tranža predstavuje tranžu najnižšej kvality. Ved' strata portfólia vo výške 2,5% znamená stratu 50% hodnoty tranže. Naopak, posledná (*supersenior*) tranža zvyčajne dosahuje Aaa rating, keďže celková strata portfólia musí presiahnuť v našom prípade 25%, kým sú jej držitelia zodpovední za akékoľvek straty. Pri CDO sa často stáva, že zakladateľ CDO, zvyčajne banka, si ponechá najrizikovejšiu (equity) tranžu a predáva ostatné tranže. Banka pozná lepšie než ktokoľvek iný, aká je kvalita príslušného portfólia, a aby uistila perspektívnych investorov, že nebudú oklamaní, necháva si najrizikovejšiu tranžu ako signál férového obchodu.

Existujú rôzne typy CDO: to, o ktorom sme hovorili doteraz, sa nazýva *cash CDO*, alternatívou je tzv. *synthetic CDO*, ktoré je skonštruované pomocou portfólia CDS kontraktov. Iným typom je CDO, v ktorom sú tranže vytvorené tak, že sú zodpovedné za straty určitého percenta z počtu firiem, ktoré defaultovali, resp. za straty určitého počtu defaultujúcich firiem.

Trh CDO sa vyvíja pomerne rýchle a vznikajú nové produkty, ako je napríklad tzv. CDO², kde príslušné portfólio je zložené z rôznych CDO. V posledných rokoch sa populárnym stáva nový spôsob obchodovania s CDO: obchodovanie so samostatnými tranžami. Pri tomto type obchodovania sa príslušné portfólio nevytvára, ide iba o akési referenčné portfólio, ktoré slúži na výpočet jednotlivých platieb. Tento trh funguje podobne ako trhy s opciami a futures na indexy akcií, ako sú DowJones, S&P, FTSE, Najprv sa vytvorí portfólio, index firiem. CDO tranže sa obchodujú používajúc firmy z indexu tak, akoby tieto tvorili portfólio patriace k CDO. V súčasnosti medzi najobchodovanejšie patria indexy *Dow Jones CDX NA IG* a *Dow Jones iTraxx Europe*, oba zostavené zo 125 firiem s rovnakou váhou. Prvý je tvorený severoamerickými a druhý európskymi firmami.² Podrobnejšie informácie o jednotlivých typoch CDO a nových produktoch na trhu kreditných derivátov je možné nájsť v prácach [4], [8] a [14].

Pod pojmom oceňovania CDO rozumieme správne stanovenie premií pre jednotlivé tranže. Tieto by mali poskytnúť držiteľom tranží kompenzáciu za očakávané straty, ktoré utrpia, a preto závisia na pravdepodobnostnom rozdelení strát portfólia. Ako sme už spomínali, straty

² Viac informácií o indexoch Dow Jones, ich skladbe a vlastnostiach je možné nájsť na oficiálnej webstránke Dow Jones Indexes www.djindexes.com.

portfólia závisia od veľkosti pravdepodobností defaultu jednotlivých firiem, korelačnej matice portfólia a veľkosti straty na aktívach v prípade ich defaultu. My sa v tejto práci zameriame iba na jednu, veríme, že na tú podstatnú časť procesu oceňovania CDO. Budeme sa venovať modelovaniu pravdepodobnostného rozdelenia strát v portfóliu, z ktorého je možné samotné prémie pre jednotlivé tranže odvodiť.

V súčasnosti už existuje veľké množstvo rôznych modelov na oceňovanie CDO. Tieto sa odlišujú predovšetkým prístupom k modelovaniu korelácií pravdepodobností defaultov jednotlivých aktív, výberom rôznych parametrov a predpokladov, alebo rôznym postojom k využívaniu prístupných trhových dát pri výpočte veličín charakterizujúcich portfólio. My sme sa rozhodli pre porovnanie štyroch modelov. Dva z nich využívajú Monte Carlo simuláciu, ďalšie dva sú jednofaktorové modely. Obe dvojice modelov sa navzájom líšia voľbou copula funkcie. Pri copula funkciách budeme vyberať medzi Gaussovou a Studentovou t copulou.

V druhej kapitole sa budeme viac venovať práve popisu copula funkcií a v ďalších dvoch kapitolách sa už zameriame na skúmané modely oceňovania CDO.

2 Teoretický základ

2.1 Copula funkcie a ich vlastnosti

V prvej časti tejto kapitoly si najprv povieme o základných definíciách a vlastnostiach copula funkcií, vychádzame pritom z prác [5] a [6]. V druhej časti už budeme hovoriť podrobnejšie o štyroch konkrétnych typoch copula funkcií, ktoré budeme potrebovať pre naše modelovanie.

Definícia 1: n -rozmernou copulou nazývame funkciu $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ s nasledovnými vlastnosťami:

1. $C(\mathbf{u})$ je rastúca v každej zložke u_k , $k = 1, 2, \dots, n$.
2. Pre každý vektor $[0,1]^n$, $C(\mathbf{u}) = 0$, ak aspoň jedna zložka vektora \mathbf{u} je nulová a $C(\mathbf{u}) = u_k$, ak všetky zložky \mathbf{u} okrem k -tej zložky sú rovné 1.
3. Pre každé $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0,1]^n$, $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ a n -rozmernú kocku $\mathbf{B} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \cdots \times [a_n, b_n]$, ktorej vrcholy ležia v definičnom obore funkcie C , je objem tejto kocky $V_C(\mathbf{B}) \geq 0$.³

Táto definícia naznačuje, že C je vlastne n -rozmerná distribučná funkcia, ktorej marginálne distribučné funkcie sú z rovnakého rozdelenia. Význam definície nám lepšie objasní nasledujúca veta a jej dôsledok.

Veta 1 (Sklar): *Nech G je n -rozmerná distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F_1, F_2, \dots, F_n . Potom existuje n -rozmerná copula C taká, že pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí:*

³ Objem $V_C(\mathbf{B})$ n -rozmernej kocky $\mathbf{B} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ je definovaný takto:

$$V_C(\mathbf{B}) = \sum_{\mathbf{d}} \text{sgn}(\mathbf{d}) C(\mathbf{d}) = \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} C(d_{1i_1}, d_{2i_2}, \dots, d_{ni_n}) \geq 0,$$

kde $d_{j1} = a_j$ a $d_{j2} = b_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)). \quad (1)$$

Navyše, ak F_1, F_2, \dots, F_n sú spojité, C je určená jednoznačne.

Práve Sklarova veta vyjadruje základnú myšlienku modelovania závislosti prostredníctvom copula funkcií, keďže nám hovorí, že v ľubovoľnej distribučnej funkcii náhodného vektora vieme navzájom oddeliť distribučné funkcie zložiek tohto vektora od ich korelačnej štruktúry, pričom túto štruktúru vystihuje copula funkcia.

Dôsledok 1: *Nech G je n -rozmerná distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F_1, F_2, \dots, F_n a C je n -rozmerná copula funkcia. Potom pre každé $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ platí:*

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = G(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)), \quad (2)$$

kde $F_i^{-1}(u_i)$ označuje inverznú (kvantilovú) funkciu ku kumulatívnej distribučnej funkcii F_i , konkrétne pre $u_i \in [0,1]$: $F_i^{-1}(u_i) = \inf \{x : F_i(x) \geq u_i\}$.

Uvažujme vektor náhodných premenných $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ s príslušnými distribučnými funkciami (F_1, F_2, \dots, F_n) a spoločnou n -rozmernou distribučnou funkciou G . Podľa Sklarovej vety ak (F_1, F_2, \dots, F_n) sú spojité funkcie, $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ má copula funkciu jednoznačne určenú nasledovnou reprezentáciou:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Ak náhodné premenné X a Y majú spojité distribučné funkcie F_X a F_Y , potom náhodné premenné $U = F_X(X)$ a $V = F_Y(Y)$ sú rozložené na intervale $[0,1]$, a teda druhá vlastnosť v definícii 1 v dvojrozmernom prípade hovorí:

$$C(u, 1) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq 1) = \mathbb{P}(U \leq u) = u,$$

$$C(u, 0) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq 0) = 0.$$

Tretia vlastnosť definície 1 nás uisťuje, že copula funkcie spĺňajú vlastnosti riadnej distribučnej funkcie a pripisujú nezáporné váhy všetkým podmnožinám v $[0,1]^n$ typu $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Aplikáciou Sklarovej vety a využitím známeho vzťahu medzi distribučnou funkciou a funkciou hustoty môžeme odvodiť tzv. *copula hustotu*.⁴

Definícia 2: Zo Sklarovej vety (1) pre funkciu hustoty $f(x_1, \dots, x_n)$ náhodného vektora a copula funkciu $C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ máme:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n [C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))]}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)} \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i),$$

kde copula hustotu $c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ definujeme ako

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)}. \quad (3)$$

V súvislosti s copula funkciami má veľký význam hovoriť o tzv. *chvostovej závislosti (tail dependence)*. Závislosťou náhodných premenných a konkrétnejšie meraním jej intenzity v oblasti modelovania finančných nástrojov sa zaoberajú okrem množstva iných aj páni Embrechts, Lindskog a McNeil vo svojej práci [5]. Pojem chvostovej závislosti súvisí s meraním závislosti medzi výskytmi extrémnych hodnôt.

Definícia 3: Nech (X_1, X_2) je dvojrozmerný vektor spojitých náhodných premenných s marginálnymi distribučnými funkciami F_1 a F_2 . Koeficienty hornej $\lambda_U \in [0, 1]$ a dolnej $\lambda_L \in [0, 1]$ chvostovej závislosti, za predpokladu, že nižšie uvedené limity existujú, sú definované nasledovne:

$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{-1}(u) | X_1 > F_1^{-1}(u)], \quad (4)$$

$$\lambda_L = \lim_{u \searrow 0} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{-1}(u) | X_1 \leq F_1^{-1}(u)]. \quad (5)$$

⁴ Vieme, že v jednorozmernom prípade môžeme hustotu $f(x)$ rozdelenia náhodnej premennej X určiť pomocou distribučnej funkcie $F(x)$ zo vzťahu $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$.

Ak $\lambda_U \in (0,1]$, hovoríme, že náhodné premenné (X_1, X_2) sú asymptoticky závislé na hornom chvoste. Ak $\lambda_U = 0$, hovoríme, že náhodné premenné (X_1, X_2) sú na hornom chvoste asymptoticky nezávislé. Analogicky, ak $\lambda_L \in (0,1]$, ide o náhodné premenné asymptoticky závislé na dolnom chvoste a asymptoticky nezávislé v prípade, že hodnota λ_L je nulová.

Pri výpočtoch koeficientov chvostovej závislosti pre konkrétne copula funkcie je vhodné rovnice (4), (5) previesť na nejaký použiteľnejší tvar. Na tento účel využijeme definíciu copula funkcie (2), druhú vlastnosť definície 1 a vzťah medzi dvojrozmernou distribučnou a tzv. *survival* funkciou.⁵

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \nearrow 1} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{-1}(u) \mid X_1 > F_1^{-1}(u)] \\ &= \lim_{u \nearrow 1} \frac{\mathbb{P}[X_2 > F_2^{-1}(u), X_1 > F_1^{-1}(u)]}{\mathbb{P}[X_1 > F_1^{-1}(u)]} \\ &= \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - \mathbb{P}[X_1 \leq F_1^{-1}(u)] - \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{-1}(u)] + \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{-1}(u), X_1 \leq F_1^{-1}(u)]}{\mathbb{P}[X_1 > F_1^{-1}(u)]},\end{aligned}$$

a teda
$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}. \quad (6)$$

Analogicky prevedieme rovnicu (5) na tvar

$$\lambda_L = \lim_{u \searrow 0} \frac{C(u, u)}{u}. \quad (7)$$

Pre ďalšie informácie o možných metódach a postupoch pri výpočte koeficientov chvostovej závislosti vo všeobecnosti, ako aj výpočty pre rôzne konkrétne copuly z tzv. *eliptickej* triedy, triedy *archimedovských copúl* a ďalšie typy copúl odporúčame čitateľa na práce [5] a [6].

⁵ Nech $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$ je distribučná funkcia náhodného vektora (X_1, X_2) . Survival funkcia $S_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ je definovaná nasledovne: $S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$. Najprv si všimnime, že udalosť $(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$ môžeme vyjadriť takto:

$$(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \Omega \setminus [(X_2 \leq x_2) \cup (X_1 \leq x_1) \setminus (X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)].$$

Z tohto vyjadrenia už používajúc definície distribučnej a survival funkcií vidíme vzťah:

$$S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1, X_2}(x_1, x_2).$$

Je veľké množstvo možností výberu niektorej zo známych copula funkcií, ktoré umožňujú rôzne prístupy k modelovaniu závislosti medzi danými náhodnými premennými. Ich prehľad aj ich vlastnosti je možné nájsť v prácach [2], [5], [6], príp. [10]. My sme si v súvislosti s voľbou modelov oceňovania CDO vybrali štyri typy *eliptických* copula funkcií, ktoré stručne popíšeme nižšie.⁶ Sú to tieto funkcie:

- i) *Gaussova copula*,
- ii) *Studentova t copula*,
- iii) *jednofaktorová Gaussova copula*,
- iv) *double t copula*.

i) Gaussova copula

Nech \mathbf{R} je kladne definitná symetrická matica, $\text{diag}(\mathbf{R}) = \mathbf{1}$ a $\Phi_{\mathbf{R}}$ je n -rozmerná kumulatívna distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia s korelačnou maticou \mathbf{R} . Gaussova copula je definovaná ako

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n, \mathbf{R}) = \Phi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \quad (8)$$

kde $\Phi^{-1}(u)$ označuje inverznú (kvantilovú) funkciu ku kumulatívnej distribučnej funkcii Φ normovaného normálneho rozdelenia.

Funkciu hustoty ku Gaussovej copule získame použitím vzťahu (3):

$$c(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) = \frac{f^{Gauss}(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f^{Gauss}(x_i)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)}{\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right)},$$

ak fixujeme $u_i = \Phi(x_i)$ a zavedieme označenie $\zeta = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))^T$, dostávame vzťah:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n, \mathbf{R}) = |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \zeta^T (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I}) \zeta\right]. \quad (9)$$

⁶ Podľa definície autorov [5], ak \mathbf{x} je n -rozmerný vektor náhodných premenných a pre nejaké $\mu \in \mathbb{R}^n$ a nejakú $n \times n$ kladne semidefinitnú symetrickú maticu Σ charakteristická funkcia $\varphi_{\mathbf{x}-\mu}(\mathbf{t})$ vektora $\mathbf{x} - \mu$ je funkciou kvadratickej formy $\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}$, $\varphi_{\mathbf{x}-\mu}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t})$, hovoríme, že \mathbf{x} má **eliptické rozdelenie** s parametrami (μ, Σ, ϕ) , píšeme $\mathbf{x} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$.

Obe hodnoty chvostovej závislosti vďaka vlastnosti radiálnej symetrie u eliptických rozdelení sú rovnaké. Výpočty hodnôt chvostovej závislosti pre jednotlivé popisované copuly nie sú triviálne, preto uvedieme iba výsledné hodnoty, postupy výpočtov si čitateľ môže prezrieť v prácach [5] a [6]. U Gaussovej copuly pozorujeme obe hodnoty nulové,

$$\lambda_U = \lambda_L = 0.$$

ii) Studentova t copula

Nech \mathbf{R} je kladne definitná symetrická matica, $\text{diag}(\mathbf{R}) = \mathbf{1}$ a $T_{\mathbf{R}, \nu}$ je n -rozmerná kumulatívna distribučná funkcia normovaného Studentovho t rozdelenia s korelačnou maticou \mathbf{R} a ν stupňami voľnosti. Studentova t copula je definovaná ako

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n, \mathbf{R}, \nu) = T_{\mathbf{R}, \nu}(t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2), \dots, t_\nu^{-1}(u_n)), \quad (10)$$

kde $t_\nu^{-1}(u)$ označuje inverznú (kvantilovú) funkciu ku kumulatívnej distribučnej funkcii t_ν normovaného Studentovho t rozdelenia.

Funkciu hustoty ku Studentovej t copule získame opäť použitím vzťahu (3):

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2, \dots, u_n, \mathbf{R}, \nu) &= \frac{f^{\text{Student}}(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i^{\text{Student}}(x_i)} \\ &= |\mathbf{R}|^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma[(\nu+n)/2]}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma[(\nu+1)/2]} \right)^n \frac{\left(1 + \frac{1}{\nu} \zeta^T \mathbf{R}^{-1} \zeta\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\nu} \zeta_i^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}, \end{aligned} \quad (11)$$

kde $\zeta = (t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2), \dots, t_\nu^{-1}(u_n))^T$.

Koeficienty chvostovej závislosti pre Studentovu t copulu už nie sú nulové; pre dvojrozmernú copulu s korelačným koeficientom premenných r máme

$$\lambda_U = \lambda_L = 2 - 2t_{\nu+1} \left(\sqrt{(\nu+1) \frac{1-r}{1+r}} \right). \quad (12)$$

Ako vidíme zo vzťahu (12), hodnoty chvostovej závislosti sú rastúcou funkciou korelačného koeficientu r a klesajúcou funkciou počtu stupňov voľnosti ν . Navyše vidíme, že ak pre nejaké $r < 1$ počet stupňov voľnosti rastie do nekonečna, koeficienty λ_U a λ_L sa blížia k nule. Tieto vlastnosti sú v súlade s našimi predstavami: rastúca závislosť premenných zvyšuje aj závislosť

ich výskytu na chvostoch pravdepodobnostného rozloženia; o asymptotickom správaní Studentovho t rozdelenia vieme, že v distribúcii konverguje k normálnemu rozdeleniu – to vysvetľuje aj správanie sa hodnôt λ_U a λ_L v závislosti od ν .

iii) jednofaktorová Gaussova copula

Pri faktorových modeloch, ktorým sa budeme viac venovať v kapitole 4, položíme náhodné premenné x_i , $i = 1, 2, \dots, N$

$$x_i = \rho_i M + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i, \quad (13)$$

kde M a Z_i , $i = 1, 2, \dots, N$ sú nezávislé náhodné premenné z normovaného normálneho rozdelenia a $0 \leq \rho_i < 1$. Rovnica (13) definuje korelačnú štruktúru medzi x_i závislými na jednom spoločnom faktore M . Predpokladáme, že podmienené nejakou hodnotou M , x_i sú nezávislé. Korelácia medzi x_i a x_j je rovná $\rho_i \rho_j$. Teda korelačná matica (až na diagonálu) $\mathbf{R} = \rho \rho^T$, kde $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)^T$. Podmienené hodnotou M

$$\mathbb{P}(x_i < x | M) = \Phi\left(\frac{x - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right),$$

kde Φ je kumulatívna distribučná funkcia Z_i (normovaného normálneho rozdelenia). Integrovaním cez hustotovú funkciu ϕ faktora M - hustotu normovaného normálneho rozdelenia - dostávame pre jednofaktorovú Gaussovú copulu takýto vzťah:⁷

$$C_\rho(u_1, \dots, u_N) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_i) - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right) \phi(M) dM. \quad (14)$$

Hodnoty chvostovej závislosti pre jednofaktorovú Gaussovú copulu nezávisle od veľkosti korelácií sú opäť obe nulové,

$$\lambda_U = \lambda_L = 0.$$

iv) double t copula

Podobne ako pri copule v iii), položíme náhodné premenné x_i , $i = 1, 2, \dots, N$

⁷ Postup pri odvádzaní faktorových copúl iii) a iv) a potrebné podrobnosti hlbšie rozoberáme v kapitole 4.

$$x_i = \rho_i \sqrt{(\nu-2)/\nu} M + \sqrt{1-\rho_i^2} \sqrt{(\nu-2)/\nu} Z_i, \quad (15)$$

kde M a Z_i , $i=1,2,\dots,N$ sú nezávislé náhodné premenné z normovaného Studentovho t rozdelenia s ν stupňami voľnosti a $0 \leq \rho_i < 1$. Variancia normovaného Studentovho t rozdelenia s ν stupňami voľnosti je $\frac{\nu}{\nu-2}$, preto náhodné premenné M a Z_i v rovnici (15) škálujeme výrazom $\sqrt{(\nu-2)/\nu}$. Rovnica (15) definuje korelačnú štruktúru medzi x_i závislými na jednom spoločnom faktore M . Predpokladáme, že podmienené nejakou hodnotou M , x_i sú nezávislé. Korelácia medzi x_i a x_j je rovná $\rho_i \rho_j$. Teda korelačná matica (až na diagonálu) $\mathbf{R} = \rho \rho^T$, kde $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)^T$. Podmienené hodnotou M

$$\mathbb{P}(x_i < x | M) = t_\nu \left(\frac{x - \rho_i \sqrt{(\nu-2)/\nu} M}{\sqrt{1-\rho_i^2} \sqrt{(\nu-2)/\nu}} \right),$$

kde t_ν je kumulatívna distribučná funkcia Z_i (Studentovho t rozdelenia). Integrovaním cez hustotovú funkciu l_ν faktora M - hustotu Studentovho t rozdelenia - dostávame pre double t copulu takýto vzťah:

$$C_\rho(u_1, \dots, u_N) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N t_\nu \left(\frac{t_\nu^{-1}(u_i) - \rho_i \sqrt{(\nu-2)/\nu} M}{\sqrt{1-\rho_i^2} \sqrt{(\nu-2)/\nu}} \right) l_\nu(M) dM. \quad (16)$$

Pri double t copule podľa [2] koeficienty chvostovej závislosti medzi dvoma premennými, ktorých koreláciu r určuje číslo ρ , $r = \rho^2$, môžeme určiť ako

$$\lambda_U = \lambda_L = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{1-\rho^2} / \rho \right)^\nu}. \quad (17)$$

Vo vzťahu (17) pozorujeme rovnaké vlastnosti správania sa hodnôt λ_U a λ_L v závislosti od parametrov ρ a ν ako pri obecnej Studentovej t copule vo vzťahu (12), čiže opäť v súlade s našou predstavou.

Keď sme si raz vybrali copula funkciu, ktorú chceme použiť pri modelovaní korelačnej štruktúry náhodných premenných, v našom prípade štruktúry aktív v portfóliu, je vhodné zamyslieť sa nad tým, ako budeme určovať parametre, od ktorých táto copula závisí. Pri vyššie

popísaných copulách máme na mysli korelačnú maticu \mathbf{R} , prípadne počet stupňov voľnosti ν . Je viacero možností, ako odhadnúť spomínané parametre z trhových dát jednotlivých aktív. Veľmi pekný prehľad a porovnanie možných metód kalibrácie parametrov copula funkcií ponúka Stefano Galiani [6]. V našej práci budeme neskôr porovnávať výsledky pre rôzne hodnoty spomínaných parametrov.

2.2 Kreditné krivky, hazard rate funkcia, Poissonov a Coxov proces

Ako sme už spomínali, pri portfóliu kreditných aktív nás okrem závislostí medzi pravdepodobnosťami defaultu jednotlivých aktív, samozrejme, zaujímajú aj samotné hodnoty pravdepodobností defaultu pre každú firmu samostatne. Časovú štruktúru pravdepodobností defaultu aktíva nazývame **kreditnou krivkou**. Tieto pravdepodobnosti jasne popisujú rizikovosť jednotlivých aktív, a tak nám podávajú dôležitú informáciu aj o kvalite zostaveného portfólia.

Existuje viacero metód používaných na odhad pravdepodobností defaultu firiem. Jednou možnosťou je využiť informácie ratingových agentúr, ktoré používajú vlastné metódy na ohodnotenie kvality firmy. Viac informácií o takomto prístupe je možné nájsť v práci Christiana Bluhma [1]. Ďalšou možnosťou je určiť implikované pravdepodobnosti defaultu z voľne pozorovateľných trhových dát danej firmy, z férových cien finančných nástrojov podliehajúcich kreditnému riziku. Touto metódou sa podrobne zaoberá aj Stefano Galiani [6]. Inú metódu ponúkajú páni Madan, Konikov a Marinescu [11], ktorí vychádzajú z určitých predstáv o všeobecnom tvare distribučnej funkcie pravdepodobností defaultu kalibrujú parametre tejto funkcie pomocou dostupných trhových dát firmy.

My sa v našej práci nebudeme venovať výpočtom pravdepodobností defaultu firiem. V praktickej časti zostavíme naše testovacie portfólio pomocou aktív určitej kvality, t.j. priradíme im určité konštantné pravdepodobnosti defaultu, ktoré budeme obmieňať a sledovať ich vplyv na výsledné rozdelenie pravdepodobnosti strát.

V tejto kapitole sa ešte stručne oboznámime s pojmom *hazard rate funkcie* a budeme hovoriť o pravdepodobnosti defaultu a čase defaultu v súvislosti s *Poissonovým* a *Coxovým* stochastickým procesom. Používame definície zavedené v práci [6].

Uvažujme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s filtráciou $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, súvisiacou s časom τ výskytu defaultu. Označme distribučnú funkciu času defaultu $F(t) = \mathbb{P}(\tau \leq t)$ a príslušnú funkciu hustoty $f(t)$. **Hazard rate funkciu** $h(t)$ definujeme nasledovne:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{P}(t < \tau \leq t + \Delta t \mid \tau > t), \quad (18)$$

kde $\mathbb{P}(t < \tau \leq t + \Delta t \mid \tau > t)$ vyjadruje pravdepodobnosť, že default sa vyskytne v časovom intervale $(t, t + \Delta t)$, za predpokladu, že daná firma prežije do času t . Ak sa pozrieme na rovnicu (18) podrobnejšie, vidíme, že

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t < \tau \leq t + \Delta t, \tau > t)}{\mathbb{P}(\tau > t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} f(u) du}{\int_t^\infty f(u) du} \\ &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} F(t)}{1 - F(t)} = -\frac{\partial}{\partial t} \log(1 - F(t)). \end{aligned}$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice dostávame vzťahy medzi distribučnou funkciou, hustotou

a hazard rate funkciou:
$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right), \quad (19)$$

$$f(t) = h(t) \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right). \quad (20)$$

Ďalej uvažujme celočíselný neklesajúci proces $N(t)$ definovaný takto:

$$N(t) := \begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{N}} 1_{\{\tau_i \leq t\}} & \text{pre } t > 0 \\ 0 & \text{pre } t = 0 \end{cases},$$

kde $1_{\{\tau_i \leq t\}}$ je funkcia, ktorá indikuje default do času t , t.j. $1_{\{\tau_i \leq t\}} := \begin{cases} 1 & \text{ak } \tau_i \leq t \\ 0 & \text{ak } \tau_i > t \end{cases}$. Proces $N(t)$

nazveme (nehomogénny) **Poissonov proces** s intenzitou $\lambda(t)$, ak pre ľubovoľné $0 \leq t < T$ sú splnené tieto dve podmienky:⁸

- i) prírastok $N(T) - N(t)$ je nezávislý od σ -algebry \mathcal{F}_t (je nezávislý od všetkých predchádzajúcich prírastkov),

⁸ Predpokladáme, že funkcia $\lambda: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ je nezáporná, integrovateľná a $\int_0^\infty \lambda(u) du = \infty$.

ii) prírastok $N(T) - N(t)$ má Poissonovo rozloženie s parametrom $\Lambda(T) - \Lambda(t) = \int_t^T \lambda(u) du$,

$$\text{čiže: } \mathbb{P}[N_T - N_t = n] = \frac{1}{n!} \left(\int_t^T \lambda(u) du \right)^n \exp \left(- \int_t^T \lambda(u) du \right). \quad (21)$$

Zadefinujme si teraz čas defaultu ako čas prvého skoku procesu $N(t)$, teda

$$\tau = \inf \{ t \in \mathbb{R}^+ \mid N(t) > 0 \}. \quad (22)$$

Ak označíme survival funkciu $S(t) = 1 - F(t) = \mathbb{P}(\tau > t)$, z (19) máme: $S(t) = \exp \left(- \int_0^t h(u) du \right)$.

V zmysle definície (22) môžeme vyjadriť $S(t) = \mathbb{P}[N(t) = 0 \mid \mathcal{F}_0]$ a použitím vzťahu (21) máme

$$S(t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(u) du \right). \quad (23)$$

Tu vidíme, že $h(t) = \lambda(t)$, teda pravdepodobnosť, že v najbližšom okamihu nastane default, je popísaná intenzitou príslušného Poissonovho procesu.

Ak vezmeme do úvahy alternatívu, že intenzita $\lambda(t)$ je nezáporný stochastický proces, potom $N(t)$ predstavuje **Coxov proces** s intenzitou $\lambda(t)$. Presnejšie, $N(t)$ je Coxov proces, ak pri nejakej konkrétnej realizácii $\lambda(\cdot, \omega)$ je $N(t)$ nehomogénny Poissonov proces s intenzitou $\lambda(t, \omega)$. Pre pravdepodobnostné rozloženie prírastkov Coxovho procesu máme vzťah⁹

$$\mathbb{P}[N_T - N_t = n] = \mathbb{E} \left[\frac{1}{n!} \left(\int_t^T \lambda(u) du \right)^n \exp \left(- \int_t^T \lambda(u) du \right) \right],$$

z ktorého môžeme určiť

$$S(t) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^t \lambda(u) du \right) \right]. \quad (24)$$

V našej práci budeme uvažovať intenzitu $\lambda(t)$ iba ako deterministickú funkciu.

Po tomto teoretickom úvode by sme už mali mať dostatočnú vedomostnú základňu na to, aby sme sa mohli pozrieť na samotné modely oceňovania CDO, ktorým sa venujú nasledujúce dve kapitoly.

⁹ Odvodenie tohto vzťahu je možné nájsť v práci Stefana Galianiho [6].

3 Modely používajúce Monte Carlo simuláciu

Ako sa o chvíľku presvedčíme, modely oceňovania CDO používajúce Monte Carlo simulácie sú v porovnaní s inými modelmi veľmi jednoduché a stručné, rovnako ich implementácia do počítača je nenáročná. Jasnou nevýhodou týchto modelov je však dlhý procesorový čas potrebný na výpočty súvisiace s veľkým počtom simulácií. My si teraz popíšeme model, ktorého podstata je znázornená v práci Stefana Galianiho [6]. Predstavíme dve alternatívy líšiace sa voľbou copula funkcie. Použijeme Gaussovu a Studentovu t copulu, s ktorými sme sa oboznámili v kapitole 2.1.

Najprv si zavedieme označenie, ktoré budeme ďalej používať:

- N je počet aktív uvažovaného portfólia,
- A_i je nominálna hodnota i -teho aktíva,
- \mathbf{R} je korelačná matica pravdepodobností defaultu aktív portfólia,
- $\lambda_i(t)$ je intenzita defaultu popisujúca pravdepodobnosť defaultu i -tej firmy,
- RR_i je hodnota recovery rate i -teho aktíva,
- T je maturita kontraktu meraná v rokoch,
- τ_i je čas defaultu i -teho aktíva, ktorý chápeme ako čas prvého skoku Poissonovho, resp. Coxovho procesu s intenzitou $\lambda_i(t)$.

Celý postup výpočtov popisovaného modelu rozdelíme do piatich krokov:

1. Príprava vstupných údajov

Výpočet korelačnej matice \mathbf{R} , ako aj intenzít defaultu $\lambda_i(t)$, je zložitý. My tieto výpočty nebudeme na tomto mieste rozoberať, preto sme ich súhrnne označili ako prípravu vstupných údajov. Predpokladajme, že sme hodnoty \mathbf{R} a $\lambda_i(t)$ určili napríklad z trhových dát.

Z technických príčin si v tomto kroku dopredu vypočítame aj Choleského rozklad \mathbf{A} korelačnej matice \mathbf{R} , t.j. dolnú trojuholníkovú maticu \mathbf{A} takú, že $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$. V druhom kroku uvidíme, na čo nám bude tento rozklad užitočný.

Pre každú simuláciu k budeme teraz opakovať nasledujúce body **2**, **3** a **4**.

2. Generovanie realizácie N -rozmerného vektora korelovaných náhodných premenných

Ako sme spomínali, naše alternatívy sa budú líšiť voľbou copuly, pre ktorú sa na začiatku rozhodneme. V tomto kroku uvádzame, ako postupovať pri generovaní realizácie vektora korelovaných premenných s požadovanými vlastnosťami pri voľbe tej-ktorej copuly s korelačnou maticou \mathbf{R} a ν stupňami voľnosti.

a) Gaussova copula

- i) Vygenerujeme konkrétne hodnoty $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)^T$ N -rozmerného vektora nekorelovaných náhodných premenných z normovaného normálneho rozdelenia; $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.
- ii) Položíme $\mathbf{x} := \mathbf{A}\mathbf{z}$, kde \mathbf{A} je Choleského rozklad korelačnej matice \mathbf{R} , čím vytvoríme požadovaný vektor s korelovanými zložkami.¹⁰
- iii) Zmeníme vektor \mathbf{x} na vektor \mathbf{u} korelovaných náhodných premenných rozložených na intervale $[0,1]$ tak, že položíme $\mathbf{u} := (\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_N))$, kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Máme $\mathbf{u} \sim C_{\mathbf{R}}^{\text{Gauss}}$.

¹⁰ Ukážeme si, že ak máme vektor nekorelovaných náhodných premenných $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, môžeme z neho vytvoriť vektor \mathbf{x} korelovaných náhodných premenných s korelačnou maticou \mathbf{R} pomocou Choleského dekompozície \mathbf{A} matice \mathbf{R} tak, že položíme $\mathbf{x} := \mathbf{A}\mathbf{z}$. Máme

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = \mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{z}(\mathbf{A}\mathbf{z})^T] = \mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{z}\mathbf{z}^T\mathbf{A}^T] = \mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{z}\mathbf{z}^T]\mathbf{A}^T,$$

a keďže \mathbf{z} je vektor nekorelovaných náhodných premenných, teda vieme, že $\mathbb{E}[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] = \mathbf{I}_N$, dostávame z predošlej rovnice: $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Čiže \mathbf{A} je skutočne dolná trojuholníková matica s kladnými prvkami na diagonále, ktorá predstavuje Choleského rozklad matice \mathbf{R} .

b) Studentova t copula

- i) Vygenerujeme konkrétne hodnoty $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)^T$ N -rozmerného vektora nekorelovaných náhodných premenných z normovaného normálneho rozdelenia; $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.
- ii) Položíme $\mathbf{x} := \mathbf{A}\mathbf{z}$, kde \mathbf{A} je Choleského rozklad korelačnej matice \mathbf{R} , čím vytvoríme požadovaný vektor s korelovanými zložkami.
- iii) Vygenerujeme nezávislú náhodnú premennú s z χ^2 rozdelenia s ν stupňami voľnosti; $s \sim \chi_\nu^2$.
- iv) Vytvoríme vektor \mathbf{y} korelovaných náhodných premenných zo Studentovho t rozdelenia s ν stupňami voľnosti tak, že položíme $\mathbf{y} := \mathbf{x} \sqrt{\frac{\nu}{s}}$.
- v) Zmeníme vektor \mathbf{y} na vektor \mathbf{u} korelovaných náhodných premenných rozložených na intervale $[0,1]$ tak, že položíme $\mathbf{u} := (t_\nu(y_1), \dots, t_\nu(y_N))$, kde $t_\nu(y)$ je distribučná funkcia Studentovho t rozdelenia s ν stupňami voľnosti.

Máme $\mathbf{u} \sim C_{\mathbf{R}, \nu}^{Student}$.

3. Priradenie časov defaultu jednotlivých aktív zložkám vygenerovaného vektora \mathbf{u}

Pre každé aktívum i , $i = 1, \dots, N$, uvažujeme Poissonov proces $N_i(t)$ s intenzitou $\lambda_i(t)$, tak, ako sme ho popísali v kapitole 2.2. Pre survival funkciu S_i času defaultu i -teho aktíva (prvého skoku procesu $N_i(t)$) sme si v kapitole 2.2 odvodili vzťah $S_i(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(u) du\right)$.

V tomto kroku spravíme nasledovné:

- i) Pre každé aktívum i zadefinujeme proces $\gamma_i(t) := \ln S_i(t) = -\int_0^t \lambda_i(s) ds$.
- ii) Časy defaultu jednotlivých aktív môžeme použiť zložky vektora $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$ určiť ako $\tau_i := \inf\{t > 0: \gamma_i(t) \leq \ln u_i\}$. Ak dokonca položíme $\tilde{\tau}_i := \inf\{t > 0: \gamma_i(t) = \ln u_i\}$, dá sa ukázať (jednoduchý dôkaz je možné nájsť v práci [6]), že takto zadefinované časy defaultu τ_i a $\tilde{\tau}_i$ majú rovnaké pravdepodobnostné rozdelenie. Simulované časy defaultu jednotlivých aktív teda budeme počítat takto:

$$\tau_i := \inf\{t > 0: \gamma_i(t) = \ln u_i\}. \quad (25)$$

4. Výpočet strát portfólia a následne premenných rovnice oceňovania CDO

Akonáhle sme (v k -tej simulácii) vypočítali vektor τ^k časov defaultu aktív v portfóliu, výpočet strát portfólia, pravdepodobnostného rozdelenia počtu defaultov, ako aj premenných rovnice oceňovania CDO tranží je jednoduchý a priamočiary. Ako sme už spomínali, zaujímajú nás predovšetkým straty v portfóliu a pravdepodobnosti počtu defaultov. Výpočtom prémie pre jednotlivé tranže sa nebudeme venovať. Odvodenie rovnice pre výpočet týchto prémie a jej použitie pri metódach využívajúcich Monte Carlo simulácie je podrobne popísané v práci [6].

V tomto kroku na základe konkrétnej realizácie τ^k spravíme nasledovné:

- i) Z N -rozmerného vektora τ^k vyberieme vektor $\Upsilon^k = (\tau_{p_1}^k, \tau_{p_2}^k, \dots, \tau_{p_{r^k}}^k)$ taký, že $\tau_{p_i}^k < T$ $\forall p_i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $i = 1, 2, \dots, r^k \leq N$, kde p_i sú indexy aktív, ktoré defaultujú pred maturitou kontraktu T . Vytvoríme aj vektor $\mathbf{q}^k = (q_1^k, q_2^k, \dots, q_N^k)$, kde $q_i^k := 1_{\{\tau_i^k < T\}}$, t.j.

$$q_i^k = \begin{cases} 1 & \text{ak } \tau_i^k < T \\ 0 & \text{ak } \tau_i^k \geq T \end{cases}$$

- ii) Keďže sa nevenujeme výpočtom prémie tranží, nebudeme rozoberať ani výpočty strát jednotlivých tranží, pri ktorých je navyše potrebné určiť indexy defaultujúcich aktív, ktoré sú zodpovedné za straty tej-ktorej tranže. Celkovú stratu portfólia (v k -tej simulácii) $L^k(T)$ vypočítame pomocou vzťahu

$$L^k(T) = \sum_{i=1}^N (1 - RR_i) A_i q_i^k. \quad (26)$$

- iii) Evidujeme aj ďalšie ukazovatele, ako napríklad počet defaultov r^k , $(N+1)$ -rozmerný vektor Π^k , ktorý má na $(r^k + 1)$ -vej pozícii jednotku a ostatné zložky má nulové, prípadne aj ďalšie premenné potrebné na výpočet prémie a pod.

5. Finálny výpočet očakávaných strát a prémie

Body 2, 3 a 4 sme opakovali pre každú simuláciu k a „zapisovali“ sme si hodnoty τ^k , Υ^k , \mathbf{q}^k , $L^k(T)$, r^k , Π^k a ďalších premenných. V poslednom kroku aritmetickým priemerom týchto hodnôt získame celkovú očakávanú stratu portfólia ($\overline{L(T)}$), očakávaný počet defaultov (\bar{r}), rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov ($\overline{\Pi}$), a podobne ďalšie veličiny, ktoré nás zaujímajú, ako aj premenné, pomocou ktorých môžeme určiť prémie jednotlivých tranží CDO.

4 Jednofaktorové modely

Cieľom faktorových modelov oceňovania CDO, CDS a ďalších inštrumentov je nájsť jednoduchú formulu - nejaký explicitný vzorec - pre výpočet distribučnej funkcie počtu defaultov v portfóliu, distribučnej funkcie kumulovaných strát, a následne ďalších veličín, ktoré potrebujeme pri výpočte prémie a pod. Modely obsahujú istý malý počet skrytých faktorov, ktoré použijeme na vytvorenie závislostí medzi pravdepodobnosťami defaultu jednotlivých aktív. Rozmer úlohy závisí predovšetkým na počte spomínaných faktorov, počet aktív v portfóliu výrazne nezvyšuje čas potrebný na výpočet. Preto sú tieto modely vhodné na použitie pri CDO s veľkým počtom aktív a v porovnaní s modelmi používajúcimi Monte Carlo simulácie sú veľmi rýchle. Pre jednoduchosť sa budeme v tejto kapitole venovať modelom používajúcim jeden spoločný faktor, ale stručne sa pozrieme aj na všeobecné rozšírenie pre prípad viacerých faktorov. Opäť predstavíme dve známe alternatívy líšiace sa predpokladmi o pravdepodobnostnom rozdelení náhodných premenných vstupujúcich do modelu, využijeme tak Gaussovú jednofaktorovú copulu a double t copulu, s ktorými sme sa oboznámili v kapitole 2.1. Pri popise a zostavovaní našich modelov vychádzame z práce Johna Hulla a Alana Whitea [8]. Použitie celého spektra rozličných copúl v jednofaktorovom modeli a prehľad ďalších možností tvorby faktorových modelov je možné nájsť v prácach [2], [4], [10] a [11].

V tejto kapitole budeme naďalej používať označenie zavedené v úvode tretej kapitoly.

Pri generovaní jednofaktorového modelu položíme skryté náhodné premenné x_i

$$x_i = \rho_i M + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i, \quad (27)$$

$i = 1, 2, \dots, N$, kde M a Z_i sú nezávislé náhodné premenné so strednou hodnotou rovnou nule a varianciou rovnou jednej a koeficienty ρ_i sú z intervalu $[0, 1)$. Vzťah (27) definuje korelačnú štruktúru medzi x_i indukovanú lineárnou závislosťou premenných x_i na jednom spoločnom skrytom faktore M . Korelácia medzi premennými x_i a x_j , $i \neq j$, je rovná hodnote $\rho_i \rho_j$.

Štruktúra, ktorú sme pomocou (27) vytvorili, má teda korelačnú maticu, ktorú môžeme jednoducho zapísať ako $\rho\rho^T$, kde $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)^T$, avšak na diagonále musí mať táto matica, samozrejme, jednotky; $\mathbf{R} = \rho\rho^T$, $\text{diag}(\mathbf{R}) := \mathbf{1}$. Vzťah (27) môžeme interpretovať nasledovne: každú skrytú náhodnú premennú x_i , od realizácie ktorej závisí čas defaultu i -tej firmy, môžeme vyjadriť ako súčet dvoch rizikových faktorov: prvým je spoločný, *systematický* faktor M ovplyvňujúci všetky uvažované firmy a druhým je tzv. *idiosynkratický* faktor Z_i , ktorý má vplyv iba na i -tu firmu.

Označme teraz Q_i kumulatívnu distribučnú funkciu náhodnej premennej x_i a F_i kumulatívnu distribučnú funkciu τ_i . Ďalej označme H_i kumulatívnu distribučnú funkciu náhodnej premennej Z_i . Z rovnice (27) vidíme, že podmienená nejakou hodnotou faktora M

$$\mathbb{P}(x_i < x | M) = H_i \left(\frac{x - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \right). \quad (28)$$

Predpokladáme ďalej, že realizácie $x_i = x$ a $\tau_i = t$ sú zviazané vzťahom $t = F_i^{-1}(Q_i(x))$.

Ak aj $x = Q_i^{-1}(F_i(t))$, platí

$$Q_i(x) = F_i(t),$$

teda

$$\mathbb{P}(x_i < x) = \mathbb{P}(\tau_i < t).$$

Vzťah (28) môžeme následne prepísať takto:

$$\mathbb{P}(\tau_i < t | M) = H_i \left(\frac{Q_i^{-1}[F_i(t)] - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \right).$$

Ak označíme $S_i(T | M)$ podmienenú pravdepodobnosť, že i -ta firma prežije do času T , máme

$$S_i(T | M) = 1 - H_i \left(\frac{Q_i^{-1}[F_i(T)] - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \right). \quad (29)$$

Zatiaľ sme bližšie nešpecifikovali, aké pravdepodobnostné rozdelenie majú náhodné premenne M a Z_i . Práve voľbou rozličných kombinácií rozdelení pravdepodobnosti týchto premenných totiž môžeme vytvoriť rôzne copuly a odlišné modely.¹¹

¹¹ Pri voľbe niektorých rozdelení pravdepodobnosti premenných M a Z_i treba tieto vhodne škálovať, aby bola splnená podmienka nulovej strednej hodnoty a jednotkovej variancie týchto premenných.

Ak predpokladáme, že M a rovnako všetky Z_i majú normované normálne rozdelenie, tak aj všetky x_i majú normované normálne rozdelenie a dostávame model založený na Gaussovej jednofaktorovej copule (14). Vzťah (29) pre takýto model má podobu

$$S_i(T|M) = 1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}[F_i(T)] - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right), \quad (30)$$

kde Φ označuje distribučnú funkciu normovaného normálneho rozdelenia a Φ^{-1} príslušnú kvantilovú funkciu.

Ďalšou skúmanou variantou je, že M a rovnako všetky Z_i majú normované Studentovo t rozdelenie s ν stupňami voľnosti. V tomto prípade je potrebné premenné M a Z_i v rovnici (27) škálovať výrazom $\sqrt{(\nu-2)/\nu}$ (variancia Studentovho t rozdelenia s ν stupňami voľnosti je $\frac{\nu}{\nu-2}$). Rovnica (27) sa teda zmení na (15). Dostávame model založený na double t copule (16).

Vzťah (29) má pre tento model podobu

$$S_i(T|M) = 1 - t_\nu\left(\frac{t_\nu^{-1}[F_i(T)] - \rho_i \sqrt{(\nu-2)/\nu} M}{\sqrt{1 - \rho_i^2} \sqrt{(\nu-2)/\nu}}\right), \quad (31)$$

kde t_ν označuje distribučnú funkciu Studentovho t rozdelenia s ν stupňami voľnosti a t_ν^{-1} príslušnú kvantilovú funkciu.

Označme si teraz $\pi_T(k)$ pravdepodobnosť, že v portfóliu nastane práve k defaultov do času T a $\pi_T(k|M)$ pravdepodobnosť výskytu práve k defaultov podmienenú faktorom M . Platí, že podmienené nejakou realizáciou spoločného, systematického faktora M , premenné x_i , a rovnako časy defaultu τ_i , sú nezávislé náhodné premenné. Z toho jasne plynie, že podmienenú pravdepodobnosť, že všetky firmy prežijú do maturity kontraktu, môžeme zapísať ako

$$\pi_T(0|M) = \prod_{i=1}^N S_i(T|M). \quad (32)$$

Ďalej, pre výskyt jedného defaultu máme

$$\pi_T(1|M) = \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^N S_j(T|M) \frac{[1 - S_i(T|M)]}{S_i(T|M)} = \pi_T(0|M) \sum_{i=1}^N \frac{1 - S_i(T|M)}{S_i(T|M)}.$$

Ak si zavedieme $w_i = \frac{1 - S_i(T|M)}{S_i(T|M)}$, môžeme zapísať podmienenú pravdepodobnosť výskytu

práve k defaultov do času T takto:

$$\pi_T(k|M) = \pi_T(0|M) \sum w_{p_1} w_{p_2} \dots w_{p_k}, \quad (33)$$

kde $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ je množina k rôznych indexov vyberaných z množiny $\{1, 2, \dots, N\}$ a sumáciu robíme pre $\frac{N!}{k!(N-k)!}$ kombinácií, akými môžeme indexy vybrať.

Popíšeme si teraz spôsob, akým je možné počítať sumu vo vzťahu (33). Tento efektívny postup navrhli autori práce [8]. Zdefinujeme pre nejakú množinu čísel $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ funkciu

$$U_k(w_1, w_2, \dots, w_N) = \sum w_{p_1} w_{p_2} \dots w_{p_k},$$

kde uvedená suma je rovnaká, ako tá vo vzťahu (33). Ďalej zdefinujeme funkcie

$$V_n(w_1, w_2, \dots, w_N) = \sum_{j=1}^N w_j^n, \quad (34)$$

$n=1, 2, \dots, N-1$. Na výpočet jednotlivých hodnôt U_k pomocou V_n použijeme nasledovný rekurenčný vzťah (argumenty funkcií kvôli prehľadnosti vynechávame):¹²

$$\begin{aligned} U_1 &= V_1 \\ 2U_2 &= V_1 U_1 - V_2 \\ 3U_3 &= V_1 U_2 - V_2 U_1 + V_3 \\ 4U_4 &= V_1 U_3 - V_2 U_2 + V_3 U_1 - V_4 \\ &\vdots \\ kU_k &= V_1 U_{k-1} - V_2 U_{k-2} + V_3 U_{k-3} - \dots (-1)^k V_{k-1} U_1 + (-1)^{k+1} V_k \end{aligned} \quad (35)$$

¹² Stručne načrtneme dôkaz vzťahu (35). Zdefinujeme: $Y_{k,i} = U_k(w_1, w_2, \dots, w_N)$, ak $w_i = 0$. Ďalej zdefinujeme: $X_{k,n} = \sum_{i=1}^N w_i^n Y_{k-1,i}$. Z toho máme $V_n U_k = X_{k+1,n} + X_{k,n+1}$, pre $k > 1$ a $V_n U_1 = X_{2,n} + V_{n+1}$. Z posledných dvoch vzťahov dostaneme

$$\begin{aligned} &V_1 U_{k-1} - V_2 U_{k-2} + V_3 U_{k-3} - \dots (-1)^k V_{k-1} U_1 + (-1)^{k+1} V_k \\ &= (X_{k,1} + X_{k-1,2}) - (X_{k-1,2} + X_{k-2,3}) + (X_{k-2,3} + X_{k-3,4}) - \dots (-1)^k (X_{2,k-1} + V_k) + (-1)^{k+1} V_k \\ &= X_{k,1}. \end{aligned}$$

Keďže $X_{k,1} = kU_k$, z predchádzajúcej rovnice už vidíme požadovaný vzťah (35).

Autori [8] poukazujú navyše na takýto vzťah:

$$U_k = w_1 w_2 \dots w_N U_{N-k} \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_N} \right), \quad (36)$$

ktorého použitie je užitočné pri výpočte U_k pre veľké hodnoty k .

Pomocou (33) a vyššie popísanej metódy na výpočet sumy v tomto vzťahu určíme hodnoty $\pi_T(k|M)$, pre $k=1,2,\dots,N-1$. Podmienenú pravdepodobnosť $\pi_T(N|M)$, že žiadna z firiem neprežije do maturity T , môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\pi_T(N|M) = \prod_{i=1}^N [1 - S_i(T|M)]. \quad (37)$$

Podľa vzorca pre úplnú pravdepodobnosť môžeme pravdepodobnosť $\pi_T(k)$, že nastane práve k defaultov do času T , vypočítať integrovaním $\pi_T(k|M)$ cez rozdelenie faktora M , teda

$$\pi_T(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_T(k|M) g(M) dM, \quad (38)$$

kde $g(m)$ je hustota rozdelenia faktora M .

Poznamenajme, že pre nami uvažované modely dosadíme na miesto funkcie g do vzťahu (38) hustotu normovaného normálneho rozdelenia (v prípade Gaussovej copuly), resp. hustotu Studentovho t rozdelenia (v prípade double t copuly).

Pomocou hodnôt $\pi_T(k)$ už môžeme vypočítať ďalšie veličiny, ktoré nás zaujímajú pri oceňovaní homogénneho CDO.

Všeobecné rozšírenie pre prípad n spoločných faktorov

Postup výstavby modelu s n systematickými faktormi je veľmi podobný, ako pri jednom faktore. Rovnica (27) má tvar

$$x_i = \rho_{i1} M_1 + \rho_{i2} M_2 + \dots + \rho_{in} M_n + \sqrt{1 - \rho_{i1}^2 - \rho_{i2}^2 - \dots - \rho_{in}^2} Z_i,$$

kde $i = 1, 2, \dots, N$, $\rho_{i1}^2 + \rho_{i2}^2 + \dots + \rho_{in}^2 < 1$ a $M_j, j = 1, \dots, n$, sú nezávislé náhodné premenné s nulovou strednou hodnotou a jednotkovou varianciou. Korelácia medzi x_i a $x_j, i \neq j$, je rovná $\rho_{i1}\rho_{j1} + \rho_{i2}\rho_{j2} + \dots + \rho_{in}\rho_{jn}$. Vzťah (29) bude vyzerat' nasledovne:

$$S_i(T | M_1, M_2, \dots, M_n) = 1 - H_i \left(\frac{Q_i^{-1} [F_i(t)] - \rho_{i1}M_1 - \rho_{i2}M_2 - \dots - \rho_{in}M_n}{\sqrt{1 - \rho_{i1}^2 - \rho_{i2}^2 - \dots - \rho_{in}^2}} \right).$$

Úplne analogicky ako pri jednom faktore môžeme pomocou hodnôt $S_i(T | M_1, M_2, \dots, M_n)$ určiť podmienené pravdepodobnosti $\pi_T(k | M_1, M_2, \dots, M_n)$. Pravdepodobnosti $\pi_T(k)$ následne vypočítame integrovaním $\pi_T(k | M_1, M_2, \dots, M_n)$ cez rozdelenia faktorov M_1, \dots, M_n , teda

$$\pi_T(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \pi_T(k | M_1, M_2, \dots, M_n) g_1(M_1) g_2(M_2) \dots g_n(M_n) dM_1 dM_2 \dots dM_n,$$

kde $g_j(m)$ je hustota rozdelenia faktora $M_j, j = 1, \dots, n$.

Celý postup výpočtov jednofaktorového modelu teraz stručne zhrnieme v troch krokoch:

1. Predpoklady a vstupné údaje

Model, ktorý sme v tejto kapitole popísali, umožňuje iba oceňovanie homogénneho CDO, keďže výstupom je rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov a nevieme jednoducho povedať, ktoré firmy sa na strate portfólia budú podieľať. Preto predpokladáme, že všetky aktíva majú v portfóliu rovnakú váhu a všetky majú rovnakú úroveň recovery rate, teda $\forall i = 1, \dots, N : A_i = A, RR_i = RR$. Ďalej predpokladáme, že hodnoty \mathbf{R} a $\lambda_i(t)$ sme určili napríklad z trhových dát.

Zložky vektora ρ vypočítame z \mathbf{R} pomocou rovníc $r_{ij} = \rho_i \rho_j, i \neq j$.

Predpokladáme, že časy τ_i sú generované Poissonovým procesom s intenzitou $\lambda_i(t)$, hodnoty $F_i(T) = 1 - S_i(T)$ teda vypočítame pomocou (23).

2. Výpočet rozdelenia pravdepodobnosti počtu defaultov

Podľa konkrétnej voľby modelu vypočítame podmienené pravdepodobnosti, že i -te aktívum prežije do maturity T , pomocou (30) (Gaussova copula), resp. (31) (double t copula).

Pomocou vzťahov (32) až (37) postupne vypočítame podmienené pravdepodobnosti výskytu práve k defaultov pre $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Pri výpočte hodnôt U_k môžeme efektívne využiť

vzťah (36): pre $k = 1, 2, \dots, N/2$, kde $N/2 := \begin{cases} N/2 & \text{ak } N \text{ je párne} \\ (N-1)/2 & \text{ak } N \text{ je nepárne} \end{cases}$, vypočítame hodnoty

U_k priamo pomocou (35) a pre $k = N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N-1$ vypočítame U_k s využitím vzťahu (36).

Pravdepodobnosti výskytu práve k defaultov do času T pre $k = 0, 1, 2, \dots, N$ postupne vyrátame pomocou (38), kde za funkciu g dosadíme hustotu normálneho alebo Studentovho t rozdelenia – podľa voľby modelu.

3. Výpočet očakávaných strát portfólia, prípadne výpočet prémie pre rôzne tranže CDO

Pomocou rozdelenia pravdepodobnosti počtu defaultov vypočítame očakávaný počet defaultov r^e (ako strednú hodnotu tohto rozdelenia):

$$r^e = \sum_{i=1}^N i \pi_T(i).$$

Výskyt jedného defaultu v portfóliu sa prejaví stratou $L(T) = (1 - RR)A$, výskyt dvoch defaultov sa prejaví stratou $L(T) = 2(1 - RR)A$, atď. Pre rozdelenie pravdepodobnosti strát portfólia, ktoré je diskkrétne (keďže závisí od výskytu defaultov) teda platí:

$$\mathbb{P}[L(T) = i(1 - RR)A] = \pi_T(i), \quad (39)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, N$.

Celkovú očakávanú stratu v portfóliu vypočítame (ako strednú hodnotu rozdelenia (39)):

$$L^e(T) = \sum_{i=1}^N i(1 - RR)A \pi_T(i) = (1 - RR)Ar^e. \quad (40)$$

Pomocou rozdelenia pravdepodobnosti počtu defaultov a strát portfólia môžeme vypočítať ďalšie veličiny, ktoré nás zaujímajú, prípadne určiť výšku očakávaných strát pre jednotlivé tranže CDO a následne vypočítať prémie týchto tranží.

5 Praktické výsledky

V tejto kapitole poskytneme výsledky našej praktickej práce s modelmi, ktoré sme skonštruovali v predchádzajúcich dvoch kapitolách. Na implementáciu algoritmov sme si vybrali sympatické prostredie programového balíka Mathematica[®]. Táto voľba súvisí predovšetkým s potrebou symbolických výpočtov pri jednofaktorových modeloch. Praktický zápis algoritmov v jazyku programu Mathematica uvádzame v prílohe A. Príloha A.1 obsahuje zdrojový kód k jednofaktorovým modelom a v prílohe A.2 nájdete zdrojový kód k modelom používajúcim Monte Carlo simulácie.

Kapitola je rozdelená do troch podkapitol. V prvej z nich zostavíme menšie „testovacie“ homogénne portfólio a budeme porovnávať vplyv zmien vstupných parametrov popisujúcich akosť portfólia na výsledky v rámci toho-ktorého modelu a rozdiely medzi jednotlivými modelmi. V druhej časti vyrátame očakávané straty pre jedno väčšie portfólio Slovenskej Sporiťne. Posledná časť bude venovaná zhodnoteniu výsledkov a porovnávaných modelov.

5.1 Testovanie pre rozličné vstupné parametre

Uvažujeme CDO tvorené homogénnym portfóliom s 30 aktívami s maturitou 10 rokov. Každé aktívum má v portfóliu rovnakú váhu (nominálnu hodnotu A), rovnakú pravdepodobnosť defaultu (intenzitu defaultu λ), úroveň recovery rate RR a vzájomné párové korelácie aktív r . Výsledky sú rozdelené do troch častí, pričom v každej z nich sa zameriame na jeden z trojice parametrov λ , r , RR . Okrem pravdepodobnostného rozdelenia počtu defaultov a očakávaných strát vypočítame pre tieto rozdelenia aj hodnoty *Value-at-Risk* (VaR), ktoré na určitej hladine spoľahlivosti vyjadrujú maximálnu hodnotu strát, resp. maximálny počet defaultov.¹³ V prípade Studentovej t copuly a double t copuly uvažujeme vždy dva varianty: prvý s $\nu=6$ stupňami

¹³ Napríklad 95% VaR je Value-at-Risk na hladine spoľahlivosti 95%. Táto veličina vyjadruje úroveň celkových strát, ktorá s pravdepodobnosťou $p = 0,95$ nebude presiahnutá.

voľnosti a druhý s $\nu = 12$ stupňami voľnosti. Pri modeloch používajúcich Monte Carlo simulácie sme na výpočty štandardne používali $n = 700000$ simulačných behov.

$$N = 30$$

$$T = 10$$

$$A_i = A = 100$$

Poznamenajme, že celková hodnota portfólia je 3000 jednotiek.

i) intenzity defaultu λ

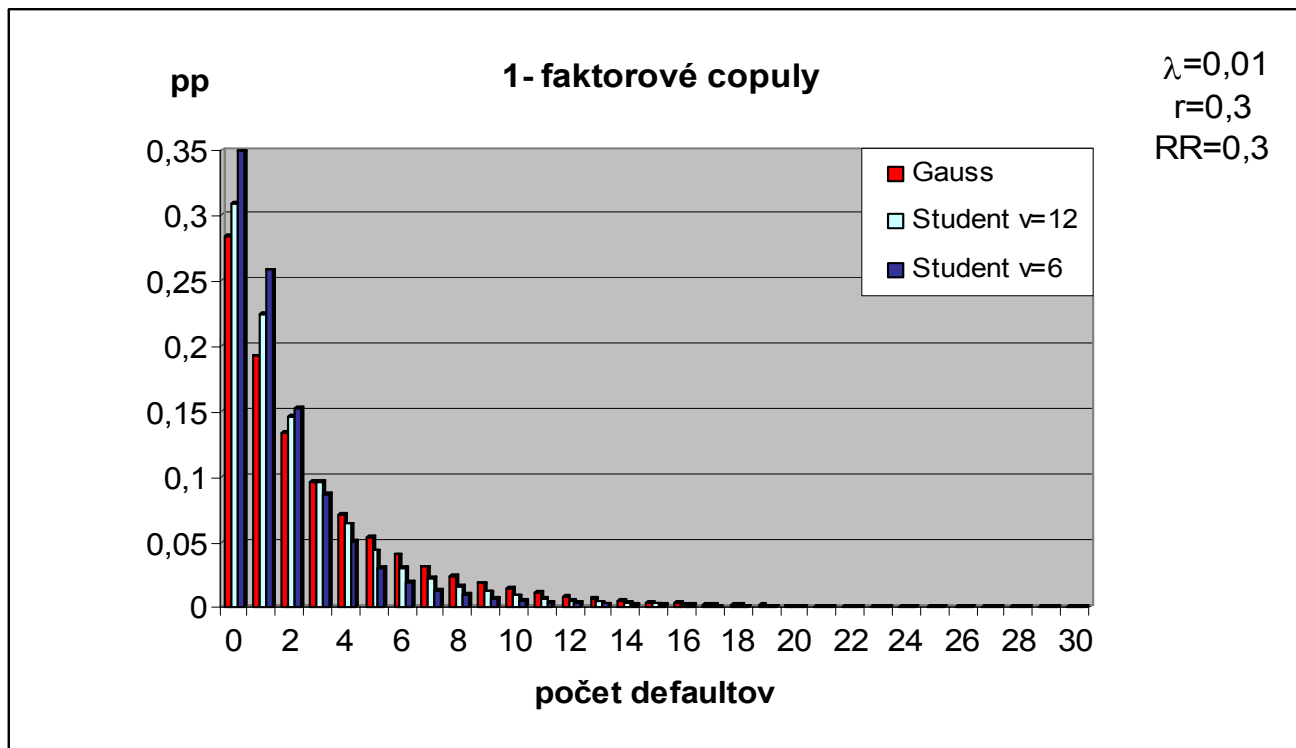
Pripomeňme si, že pri rovnakých hodnotách recovery rate a rovnakej nominálnej hodnote všetkých aktív je rozdelenie pravdepodobnosti strát portfólia a rozdelenie počtu defaultov totožné, pričom určitý počet defaultov sa premietne do určitej hodnoty strát portfólia. Preto nebudeme uvádzať grafy výsledkov pre oba typy rozdelení osobitne.

Ak bude defaultovať j aktív portfólia, výška straty bude rovná $(1 - RR)(j/N) \cdot 100\%$ hodnoty portfólia. Výšky strát pre konkrétne počty defaultov pri hodnote $RR = 0,3$ uvádzame orientačne v nasledujúcej tabuľke.

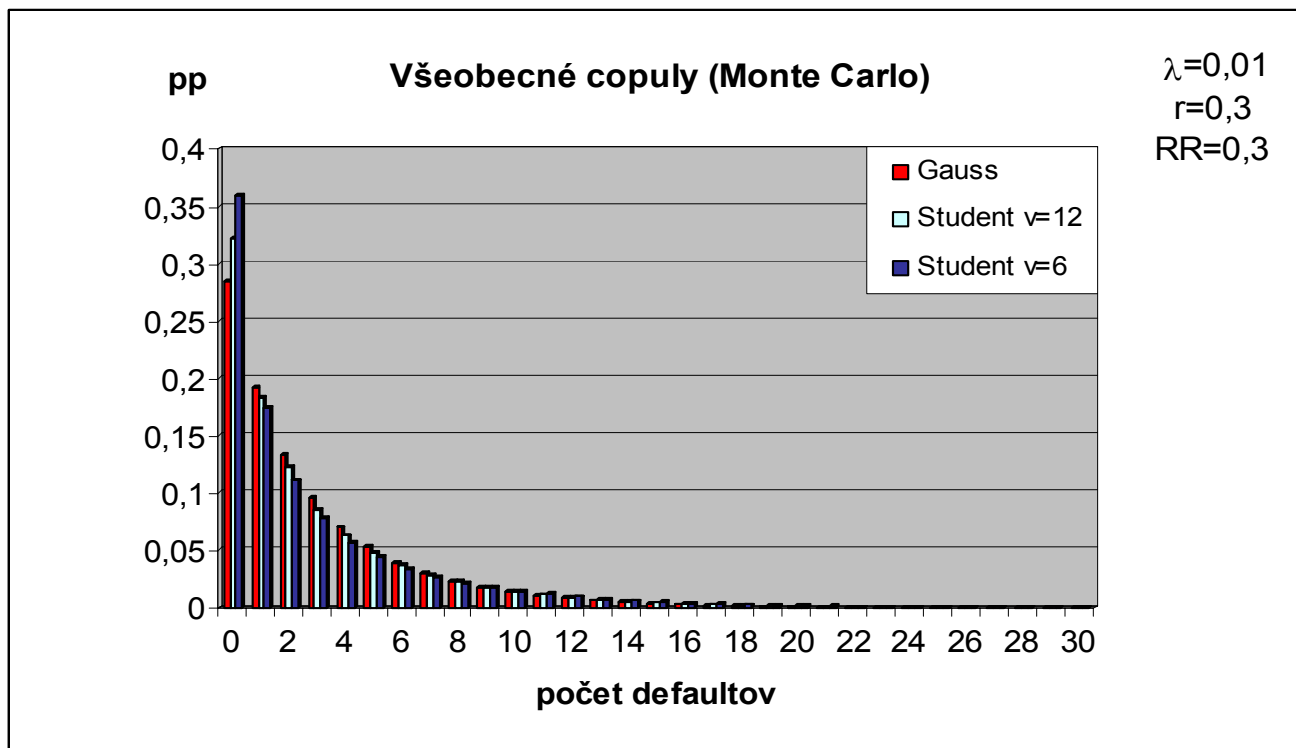
Tab. 5.1.1: Výška strát portfólia pri danom počte defaultujúcich aktív, $RR = 0,3$.

počet defaultov	0	1	2	3	4	5	7	10	15	20	25	30
straty portfólia	0,0%	2,3%	4,7%	7,0%	9,3%	11,7%	16,3%	23,3%	35,0%	46,7%	58,3%	70,0%

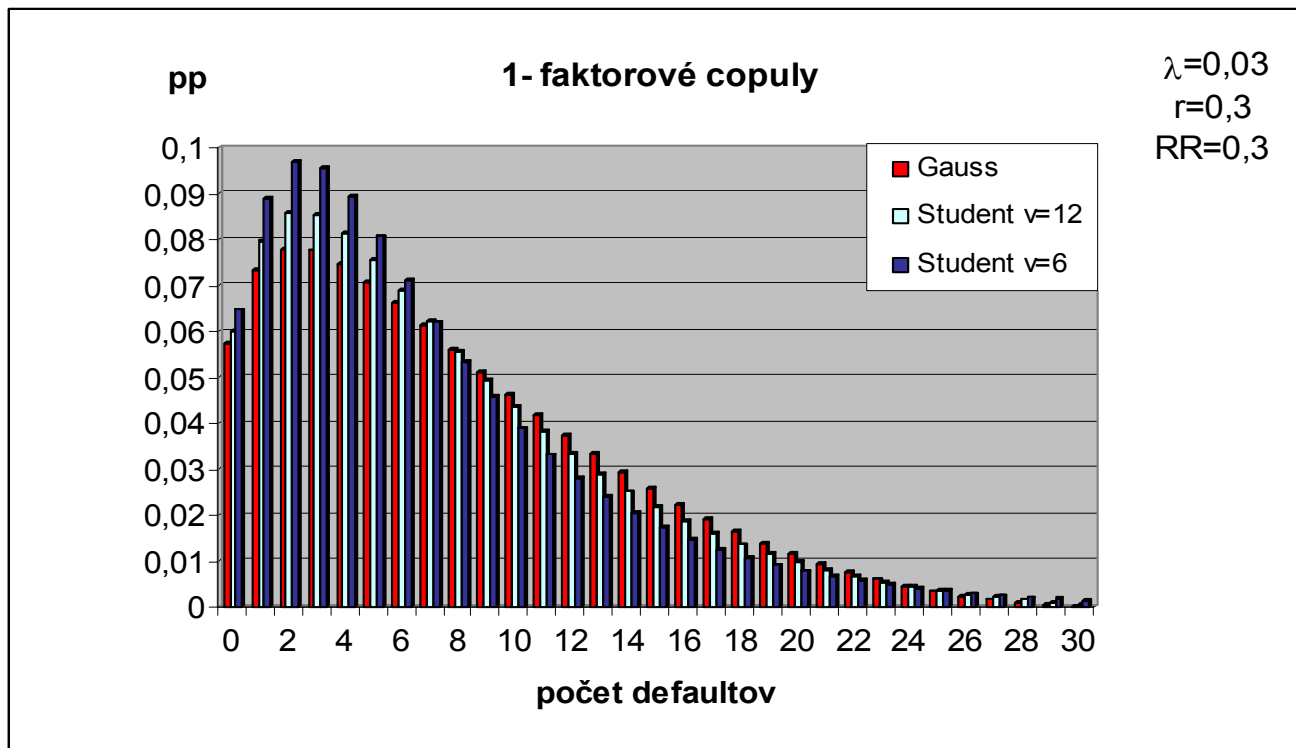
Na nasledujúcich 3 stranách vidíme na obrázkoch farebne odlišené pravdepodobnostné rozdelenia počtu defaultov pre jednofaktorovú Gaussovu copulu versus dva varianty double t copuly a Gaussovu copulu versus dva varianty Studentovej t copuly. Výsledky v jednotlivých obrázkoch sa líšia intenzitou defaultu aktív; hodnoty korelácií a recovery rates sú rovnaké.



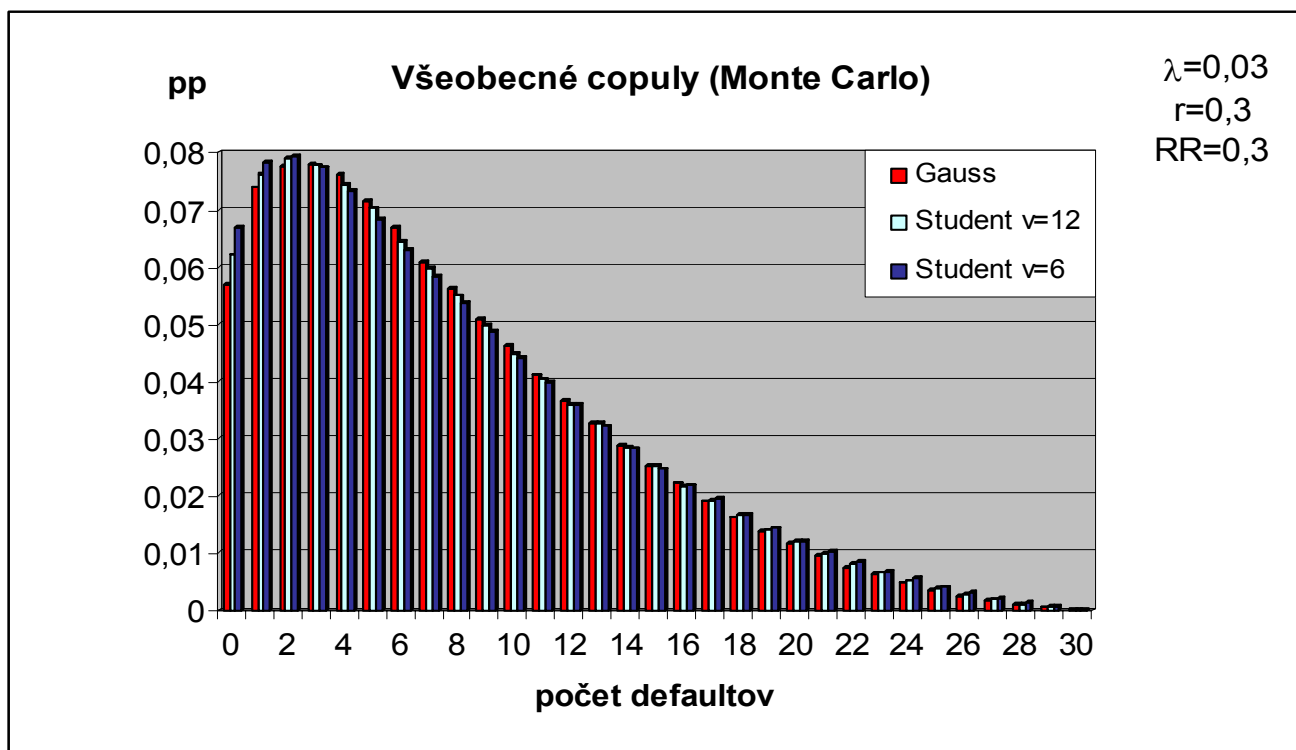
Obr. 5.1.1: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, 1-faktorové copuly, $\lambda = 0,01$.



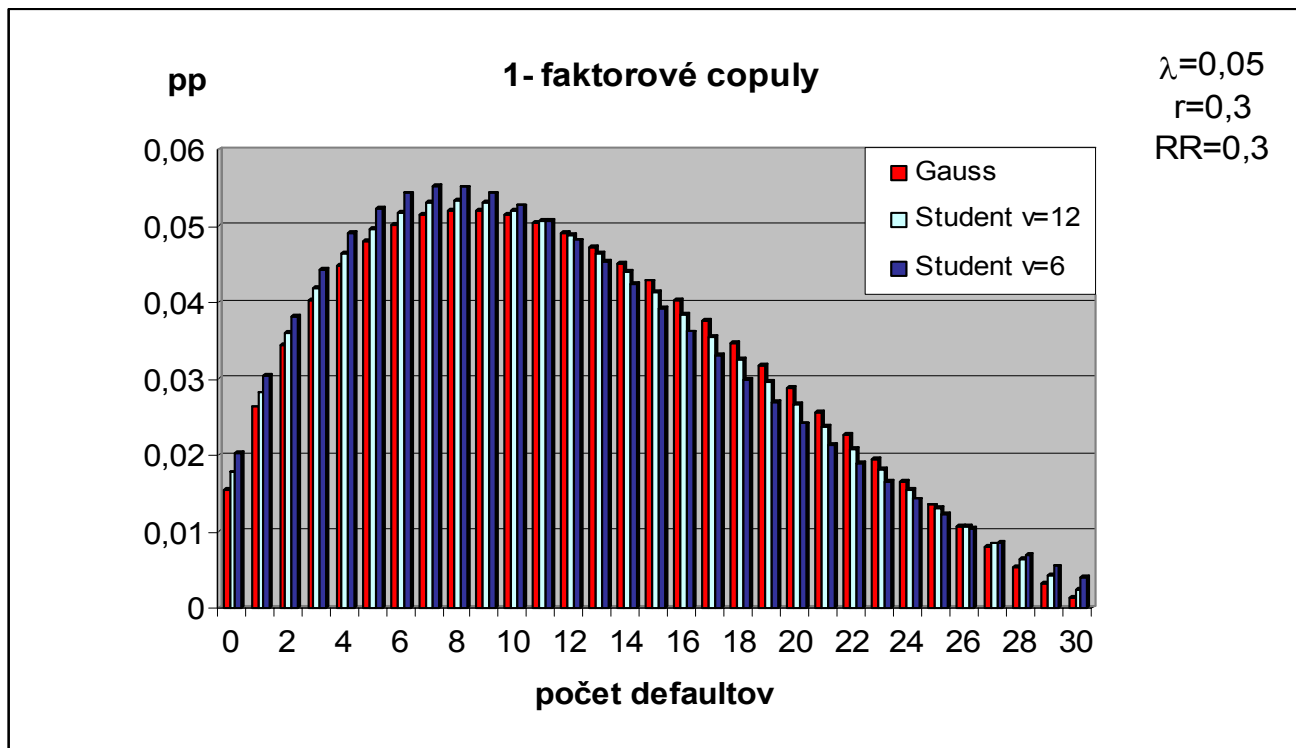
Obr. 5.1.2: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, všeobecné copuly, $\lambda = 0,01$.



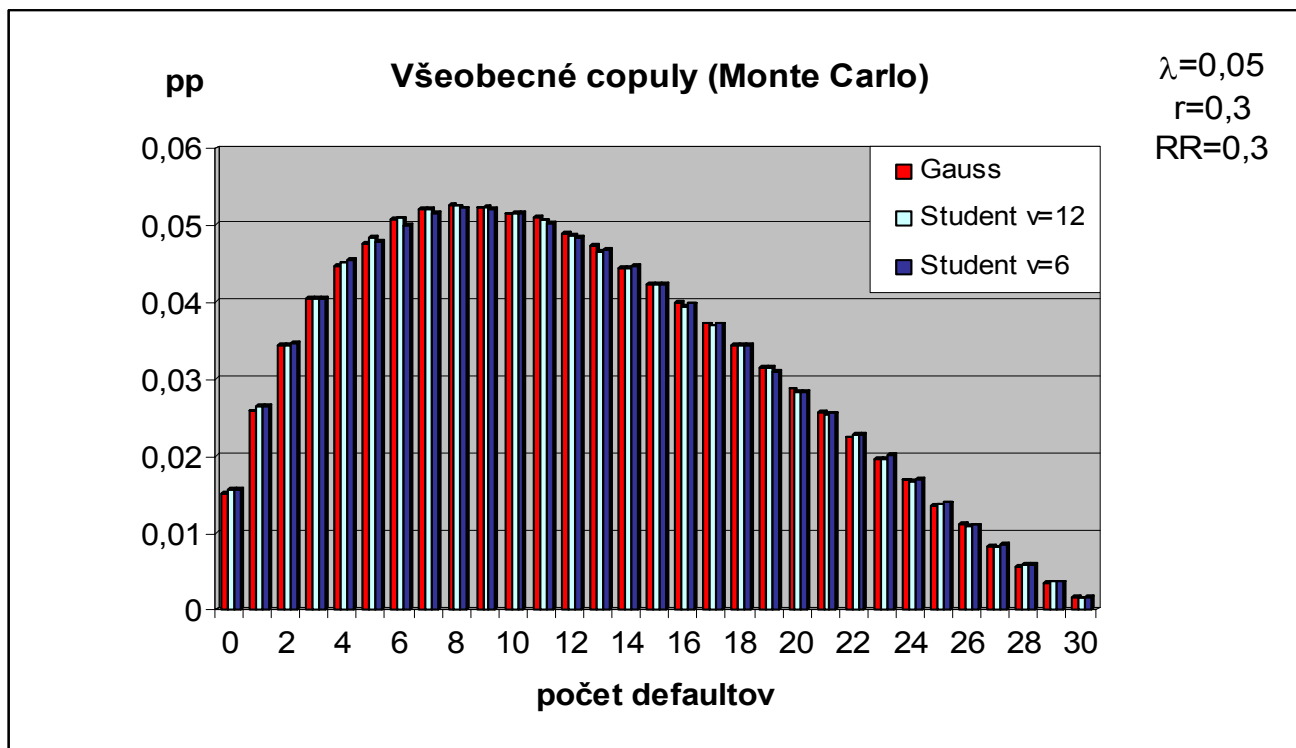
Obr. 5.1.3: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, 1-faktorové copuly, $\lambda = 0,03$.



Obr. 5.1.4: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, všeobecné copuly, $\lambda = 0,03$.



Obr. 5.1.5: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, 1-faktorové copuly, $\lambda = 0,05$.



Obr. 5.1.6: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, všeobecné copuly, $\lambda = 0,05$.

Pri faktorových modeloch na prvý pohľad, pri Monte Carlo modeloch už trochu menej výrazne vidíme na obrázkoch rozdiely medzi Gaussovou a Studentovými t copulami. Vo všeobecnosti dosahuje vo výsledkoch Studentova t copula väčšie hodnoty pravdepodobností na chvostoch rozdelenia a Gaussova copula, naopak, v strede rozdelenia. Táto črta zrejme súvisí s nenulovými hodnotami chvostovej závislosti pri Studentových t copulách, a tieto tak v porovnaní s Gaussovou copulou predpokladajú zvýšený výskyt veľmi malého alebo veľmi vysokého počtu defaultov. Podobný rozdiel vidíme pri vzájomnom porovnaní Studentových t copúl s rôznym počtom stupňov voľnosti. Copuly s väčším počtom stupňov voľnosti sa výsledkami viac približujú ku Gaussovej copule. Odôvodnenie môžeme opäť hľadať vo vzťahoch chvostových závislostí. Ako sme postrehli v kapitole 2.1 pri vzťahoch (12) a (17), hodnoty chvostovej závislosti sú tým menšie, čím väčší je počet stupňov voľnosti copuly; konvergujú k nule (Gaussova copula).

Zaujímavé je, že pri jednofaktorových modeloch pozorujeme v porovnaní s Monte Carlo modelmi omnoho výraznejšie rozdiely medzi Gaussovou a Studentovými t copulami. Veľmi jasne to vidíme porovnaním obrázkov 5.1.3 a 5.1.4. Môže to byť spôsobené tým, že pri vyšších hodnotách korelácií sú hodnoty chvostovej závislosti double t copuly výrazne väčšie v porovnaní so Studentovou t copulou.

Je logické, že čím väčšia je intenzita defaultu λ vyjadrujúca pravdepodobnosť defaultu aktív portfólia, tým väčšie sú pravdepodobnosti vyššieho počtu defaultov, resp. väčších strát. Z obrázkov môžeme vidieť, že so zväčšujúcou sa hodnotu λ sa najpravdepodobnejšia hodnota rozdelenia aj stredná hodnota posúva vpravo a zväčšuje sa variancia rozdelenia.

Ďalej si môžeme na obrázkoch všimnúť, že rozdiely medzi výsledkami pre Gaussovu a Studentovu t copuly sa (či už pri jednofaktorových modeloch, alebo Monte Carlo modeloch) zmenšujú, keď zvyšujeme hodnotu λ . Toto je možné odôvodniť tým, že v našom prípade sa zväčšovaním hodnoty λ presúva objem rozdelenia do stredu grafu. Preto nie je vplyv chvostovej závislosti u Studentových t copúl taký výrazný ako v prípade dostatočne malej (alebo veľmi veľkej) hodnoty λ kedy je veľká časť objemu rozdelenia na dolnom (hornom) chvoste.

V tabuľke 5.1.2 nižšie je sumarizácia výsledkov súvisiacich s rozdelením pravdepodobnosti počtu defaultov a úrovne strát pri zmenách intenzity defaultu aktíva λ . Uvedené sú očakávané straty, stredný počet defaultov a hodnoty VaR rozdelení počtu defaultov a úrovne strát.

Tab. 5.1.2: Výsledky pre rôzne hodnoty intenzít defaultu λ .

$r = 0,3$ $RR = 0,3$	Jednofaktorové copuly			Všeobecné copuly (Monte Carlo)		
$\lambda = 0,01$	Gauss	double-t v=12	double-t v=6	Gauss	Student v=12	Student v=6
očakávaná strata	199,8	166,1	132,6	200,3	200,2	199,5
strata v % z celku	6,661%	5,537%	4,418%	6,675%	6,673%	6,651%
počet defaultov	2,85	2,37	1,89	2,86	2,86	2,85
90% VaR defaulty	8	6	5	8	8	8
95% VaR defaulty	10	9	7	10	11	11
90% VaR %straty	18,67%	14,00%	11,67%	18,67%	18,67%	18,67%
95% VaR %straty	23,33%	21,00%	16,33%	23,33%	25,67%	25,67%
$\lambda = 0,03$						
očakávaná strata	544,3	514,3	475,6	544	543,6	543,6
strata v % z celku	18,14%	17,14%	15,85%	18,13%	18,12%	18,12%
počet defaultov	7,78	7,35	6,79	7,77	7,77	7,77
90% VaR defaulty	16	16	15	16	17	17
95% VaR defaulty	19	19	19	19	20	20
90% VaR %straty	37,33%	37,33%	35,00%	37,33%	39,67%	39,67%
95% VaR %straty	44,33%	44,33%	44,33%	44,33%	46,67%	46,67%
$\lambda = 0,05$						
očakávaná strata	826,3	811,7	791,5	827,2	825,1	827
strata v % z celku	27,54%	27,06%	26,38%	27,57%	27,50%	27,57%
počet defaultov	11,8	11,6	11,3	11,8	11,8	11,8
90% VaR defaulty	22	21	21	22	22	22
95% VaR defaulty	24	24	24	24	24	24
90% VaR %straty	51,33%	49,00%	49,00%	51,33%	51,33%	51,33%
95% VaR %straty	56,00%	56,00%	56,00%	56,00%	56,00%	56,00%

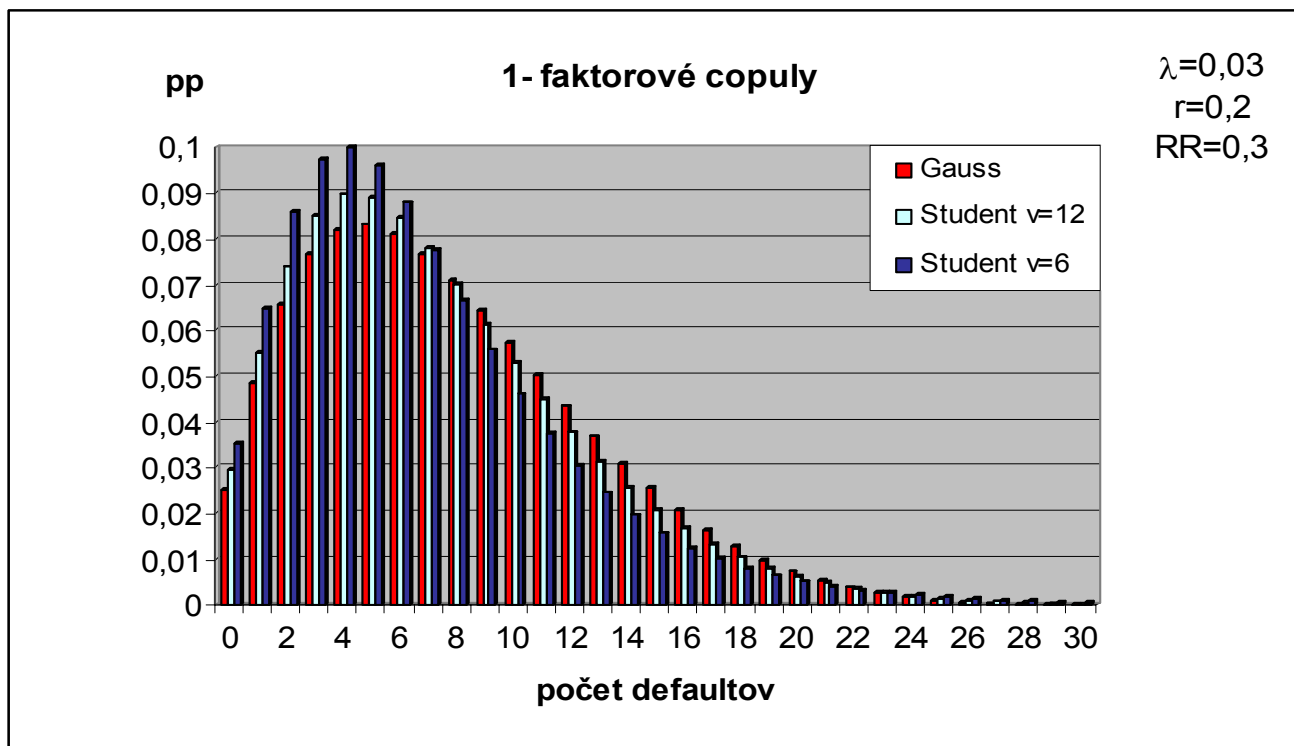
V tabuľke vidíme (napr. na očakávanej hodnote straty portfólia) výrazné rozdiely medzi Gaussovou a Studentovými t copulami pri jednofaktorovom modeli a naopak prakticky žiadne rozdiely pri Monte Carlo modeli.

Môžeme pozorovať, že pri jednofaktorových modeloch výrazne vyššie hodnoty pravdepodobnosti na začiatku rozdelenia znižujú u double t copúl hodnoty VaR v porovnaní s Gaussovou copulou. Pri Monte Carlo modeloch, naopak, preváži vplyv vyšších hodnôt pravdepodobnosti na konci rozdelenia a hodnoty VaR sú u Studentových t copúl vyššie oproti Gaussovej copule.

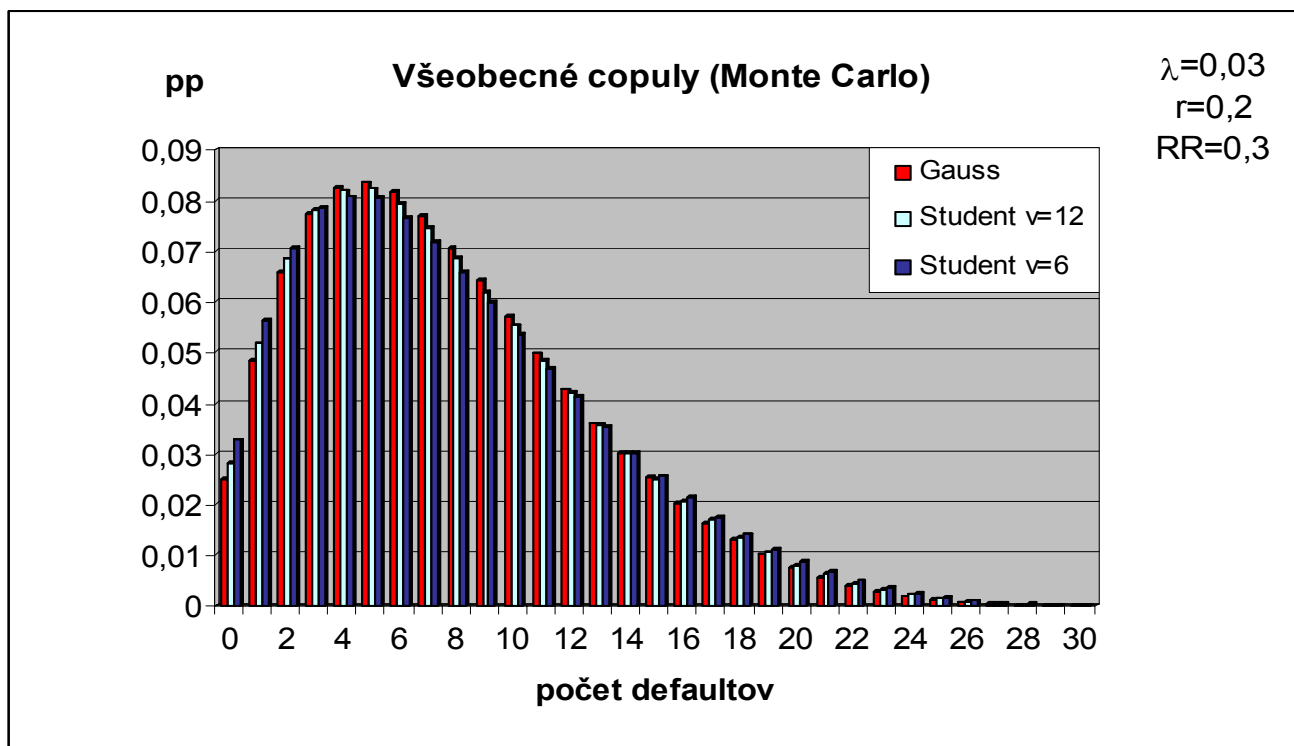
Ani z obrázkov, ani z tabuľky nepozorujeme pri Gaussovej copule takmer žiadny rozdiel medzi výsledkami faktorového modelu a Monte Carlo modelu.

Celkové očakávané straty portfólia, stredný počet defaultov aj hodnoty VaR u všetkých porovnávaných modelov s nárastom intenzít defaultu aktív rastú.

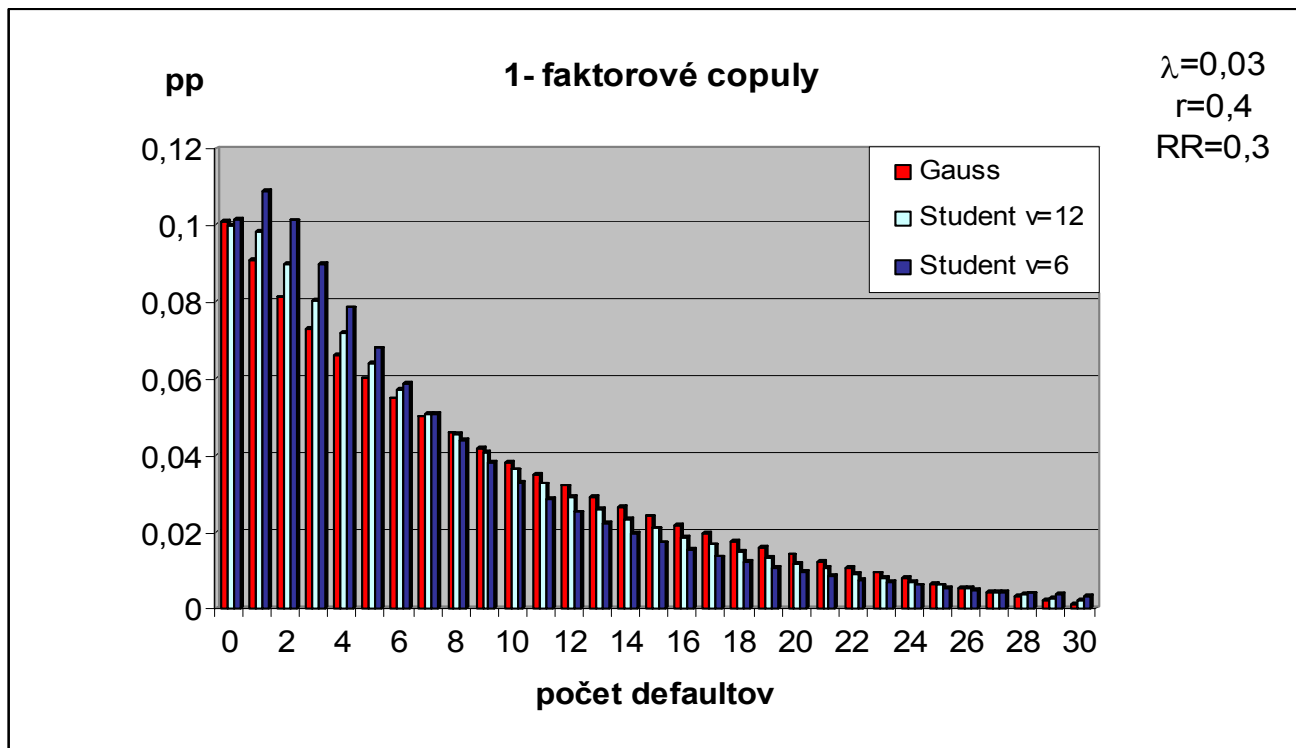
ii) párové korelácie r



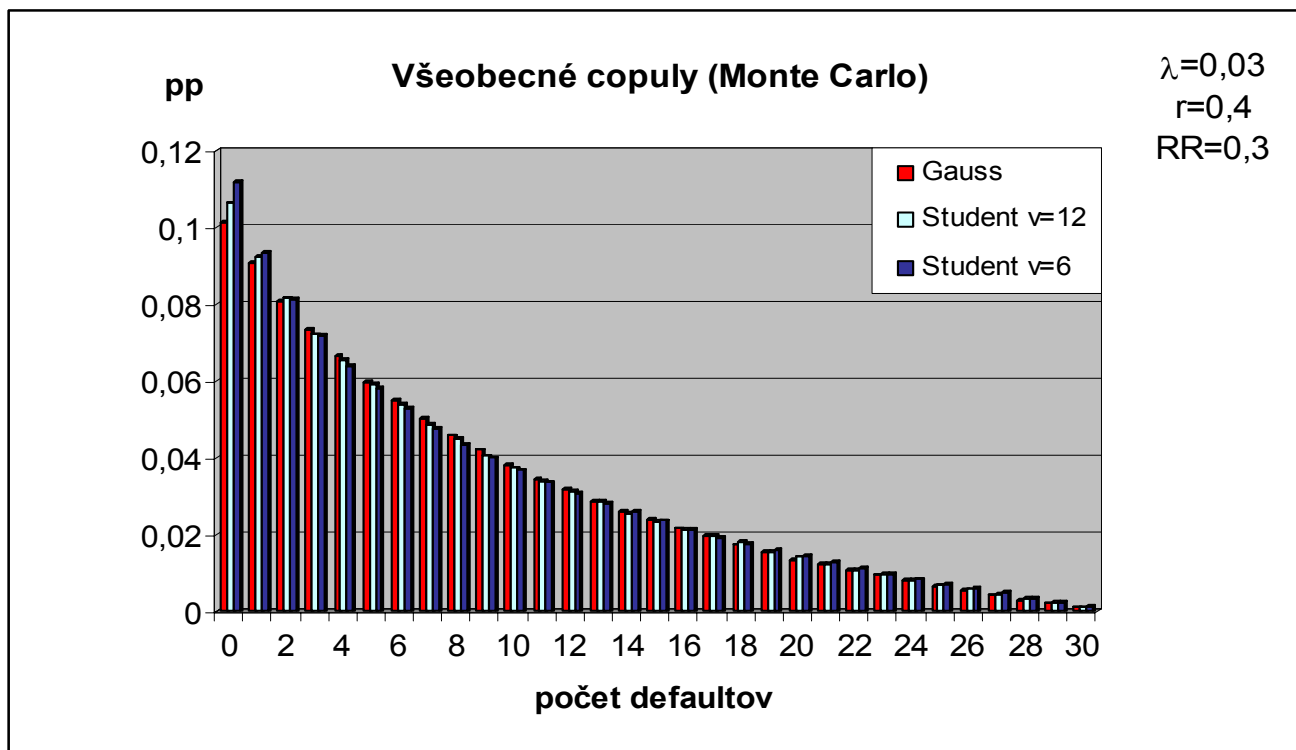
Obr. 5.1.7: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, 1-faktorové copuly, $r = 0,2$.



Obr. 5.1.8: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, všeobecné copuly, $r = 0,2$.



Obr. 5.1.9: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, 1-faktorové copuly, $r = 0,4$.



Obr. 5.1.10: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, všeobecné copuly, $r = 0,4$.

Na obrázkoch 5.1.7 – 5.1.10 je opäť porovnanie rozdelenia pravdepodobnosti počtu defaultov pre rôzne copuly. Výsledky sa líšia hodnotou vzájomných párových korelácií aktív; intenzity defaultu a recovery rates sú rovnaké. Na týchto štyroch obrázkoch sú rozdelenia pre $r = 0,2$ a $r = 0,4$. Obrázky pre $r = 0,3$ sú pre porovnanie k dispozícii na strane 35 (obr. 5.1.3 a 5.1.4).

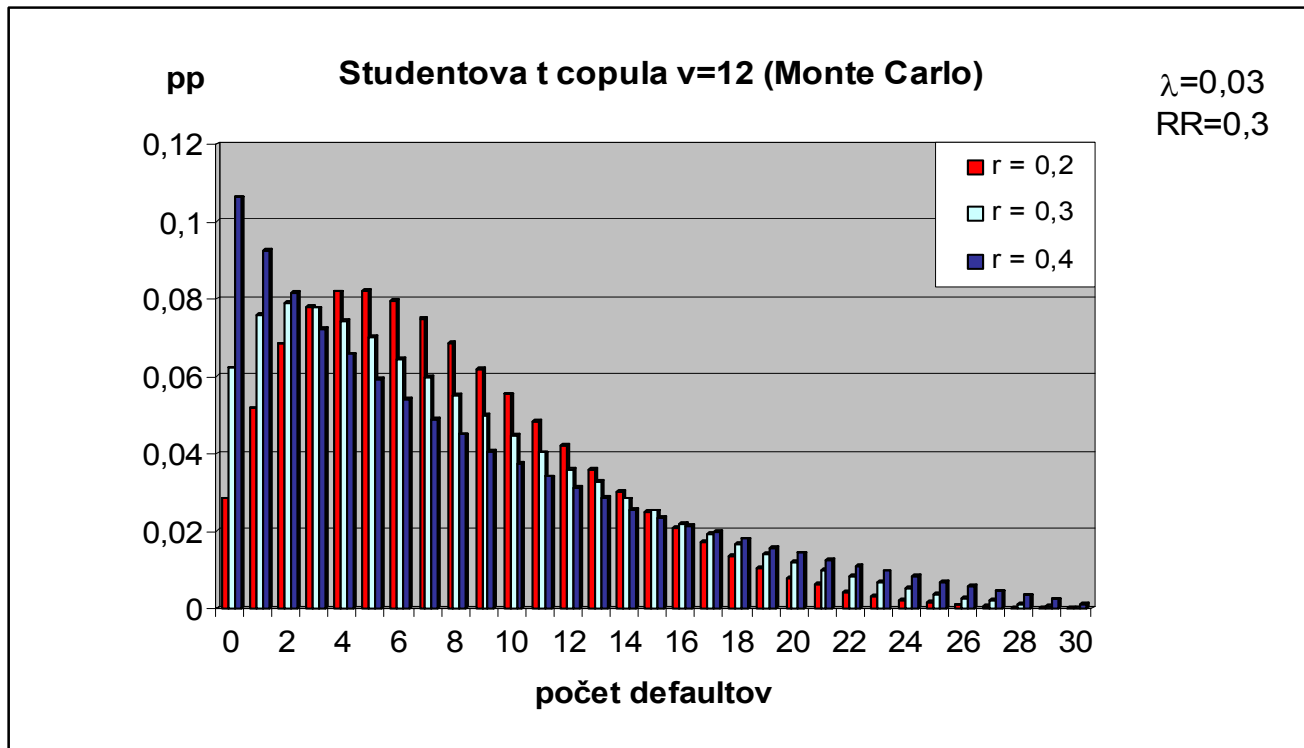
V tabuľke 5.1.3 nižšie je sumarizácia výsledkov súvisiacich s rozdelením pravdepodobnosti počtu defaultov a úrovne strát pri zmenách vzájomných párových korelácií aktív r . Uvedené sú znova očakávané straty, stredný počet defaultov a hodnoty VaR rozdelení počtu defaultov a úrovne percentuálnych strát.

Tab. 5.1.3: Výsledky pre rôzne hodnoty párových korelácií aktív r .

$\lambda = 0,03$ $RR = 0,3$	Jednofaktorové copuly			Všeobecné copuly (Monte Carlo)		
$r = 0,2$	Gauss	double-t v=12	double-t v=6	Gauss	Student v=12	Student v=6
očakávaná strata	544,3	512,1	471,4	544,1	543,6	543,3
strata v % z celku	18,14%	17,07%	15,71%	18,14%	18,12%	18,11%
počet defaultov	7,78	7,32	6,73	7,77	7,77	7,76
90% VaR defaulty	15	14	13	15	15	15
95% VaR defaulty	17	17	16	17	18	18
90% VaR %straty	35,00%	32,67%	30,33%	35,00%	35,00%	35,00%
95% VaR %straty	39,67%	39,67%	37,33%	39,67%	42,00%	42,00%
$r = 0,3$						
očakávaná strata	544,3	514,3	475,6	544	543,6	543,6
strata v % z celku	18,14%	17,14%	15,85%	18,13%	18,12%	18,12%
počet defaultov	7,78	7,35	6,79	7,77	7,77	7,77
90% VaR defaulty	16	16	15	16	17	17
95% VaR defaulty	19	19	19	19	20	20
90% VaR %straty	37,33%	37,33%	35,00%	37,33%	39,67%	39,67%
95% VaR %straty	44,33%	44,33%	44,33%	44,33%	46,67%	46,67%
$r = 0,4$						
očakávaná strata	544,3	515,6	477,9	544,5	543,9	544,1
strata v % z celku	18,14%	17,19%	15,93%	18,15%	18,13%	18,14%
počet defaultov	7,78	7,37	6,83	7,78	7,77	7,77
90% VaR defaulty	18	17	17	18	18	18
95% VaR defaulty	21	21	21	22	22	22
90% VaR %straty	42,00%	39,67%	39,67%	42,00%	42,00%	42,00%
95% VaR %straty	49,00%	49,00%	49,00%	51,33%	51,33%	51,33%

Rovnako, ako v predchádzajúcej časti, vidíme aj v posledných štyroch obrázkoch vyššie hodnoty pravdepodobností na chvostoch rozdelenia počtu defaultov pri všetkých Studentových t copulách. Opäť sledujeme aj fakt, že výsledky Studentových t copúl sa výraznejšie líšia od výsledkov Gaussových copúl pri faktorových modeloch. Z tabuľky sa nám tiež potvrdzuje, že zatiaľ čo hodnoty VaR pri jednofaktorových modeloch sú pre double t copuly v porovnaní s Gaussovou copulou o niečo nižšie, hodnoty VaR pri Monte Carlo modeloch sú pre Studentove t copuly vyššie v porovnaní s Gaussovou copulou.

Napriek tomu, že rozdelenia pravdepodobnosti počtu defaultov sa výrazne zmenia pri zmene párových korelácií, v tabuľke vidíme pre rôzne hodnoty r veľmi podobné výsledky pri jednofaktorových modeloch a prakticky rovnaké výsledky pri Monte Carlo modeloch. Na nasledujúcom obrázku porovnáme osobitne výsledky Studentovej t copuly s 12 stupňami voľnosti pre rôzne hodnoty vzájomných párových korelácií aktív r .



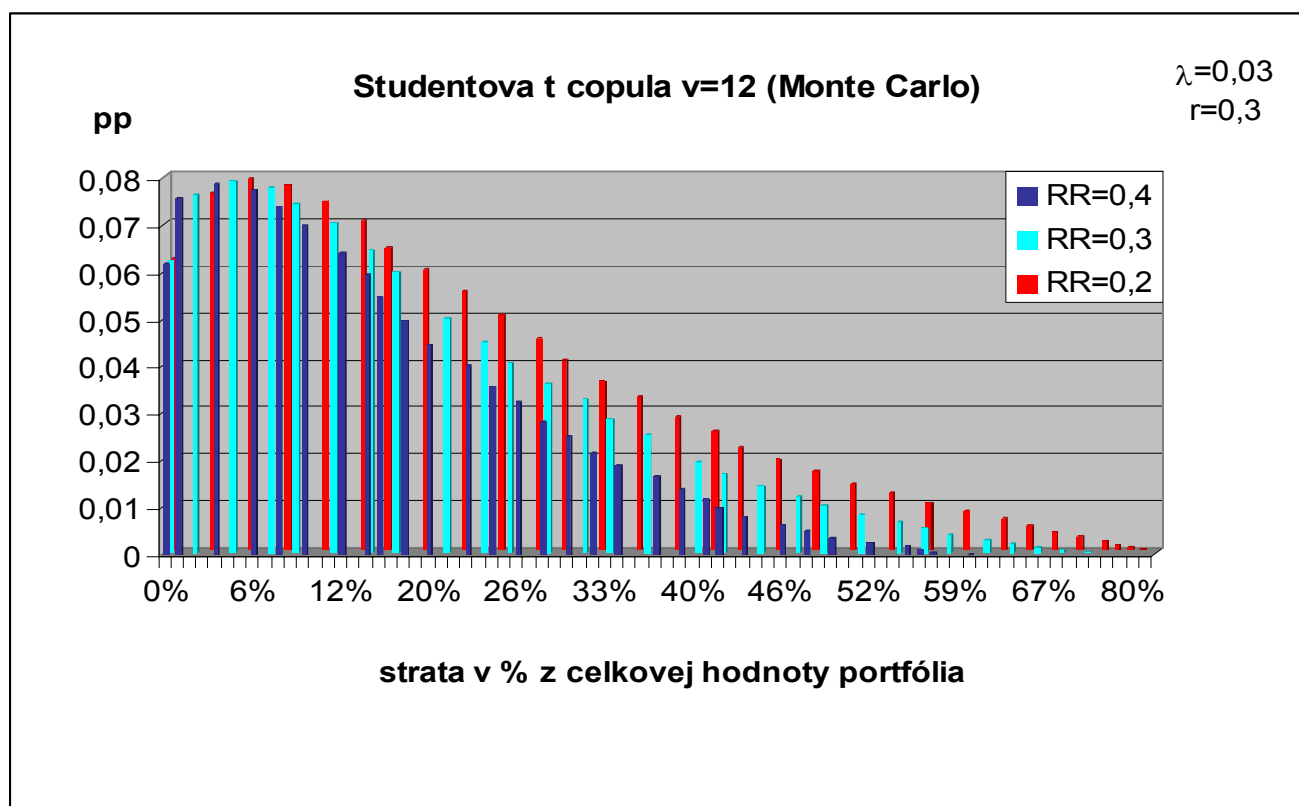
Obr. 5.1.11: Korelácie a rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, Studentova t copula.

Vidíme, že pri zvýšení hodnoty párových korelácií aktív sa najpravdepodobnejšia hodnota rozdelenia počtu defaultov posúva doľava, ale zároveň sa zväčšuje variancia rozdelenia,

následkom čoho ostáva stredná hodnota rozdelenia približne na tej istej úrovni. Všetky tri rozdelenia na obrázku 5.1.11 majú približne rovnakú strednú hodnotu 7,77 defaultu. Z tabuľky môžeme vidieť, že stredná hodnota počtu defaultov a strát pre všetky modely pri zvyšovaní korelácií (v našom prípade) skôr rastie. Ako sme už spomenuli, pri zvyšovaní korelácií r sa zväčšuje variancia rozdelenia, preto sa pri všetkých modeloch aj hodnoty VaR s rastúcou hodnotou r zväčšujú.

iii) recovery rates RR

Zmeny hodnôt recovery rate nemajú vplyv na rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov, iba na výšku strát v prípade určitého počtu defaultov. Pozrieme sa preto na porovnanie pravdepodobnostného rozdelenia výšky strát pri rôznych hodnotách recovery rate (porovnáваме výsledky Studentovej t copuly s 12 stupňami voľnosti: obr. 5.1.12) a na tabuľku, v ktorej sú pre všetky modely a rôzne úrovne recovery rate vyčíslené straty portfólia a hodnoty VaR rozdelenia počtu defaultov a pravdepodobnosti strát.



Obr. 5.1.12: Recovery rate a rozdelenie pravdepodobnosti strát, Studentova t copula.

Tab. 5.1.4: Výsledky pre rôzne hodnoty recovery rates RR .

$\lambda = 0,03$ $r = 0,3$	Jednofaktorové copuly			Všeobecné copuly (Monte Carlo)		
$RR = 0,2$	Gauss	double-t v=12	double-t v=6	Gauss	Student v=12	Student v=6
očakávaná strata	622	587,8	543,5	621,9	621,5	620,4
strata v % z celku	20,73%	19,59%	18,12%	20,73%	20,72%	20,68%
počet defaultov	7,78	7,35	6,79	7,77	7,77	7,75
90% VaR defaulty	16	16	15	16	17	17
95% VaR defaulty	19	19	19	19	20	20
90% VaR %straty	42,67%	42,67%	40,00%	42,67%	45,33%	45,33%
95% VaR %straty	50,67%	50,67%	50,67%	50,67%	53,33%	53,33%
$RR = 0,3$						
očakávaná strata	544,3	514,3	475,6	544	543,6	543,6
strata v % z celku	18,14%	17,14%	15,85%	18,13%	18,12%	18,12%
počet defaultov	7,78	7,35	6,79	7,77	7,77	7,77
90% VaR defaulty	16	16	15	16	17	17
95% VaR defaulty	19	19	19	19	20	20
90% VaR %straty	37,33%	37,33%	35,00%	37,33%	39,67%	39,67%
95% VaR %straty	44,33%	44,33%	44,33%	44,33%	46,67%	46,67%
$RR = 0,4$						
očakávaná strata	466,5	440,8	407,6	467,3	465,5	466,1
strata v % z celku	15,55%	14,69%	13,59%	15,58%	15,52%	15,54%
počet defaultov	7,78	7,35	6,79	7,79	7,76	7,77
90% VaR defaulty	16	16	15	16	17	17
95% VaR defaulty	19	19	19	19	20	20
90% VaR %straty	32,00%	32,00%	30,00%	32,00%	34,00%	34,00%
95% VaR %straty	38,00%	38,00%	38,00%	38,00%	40,00%	40,00%

Vidíme, že rozdiely medzi jednotlivými modelmi sú rovnakého charakteru ako doteraz.

Aj z tabuľky pozorujeme, že pri zmene hodnoty RR sa nemenia parametre rozdelenia počtu defaultov. Nepatrné odchýlky medzi strednými hodnotami počtu defaultov pri obmenách RR u Monte Carlo modelov sú spôsobené úrovňou presnosti modelu, ktorá závisí od zvoleného počtu simulácií. Porovnaním rozdelení na obrázku 5.1.12 vidíme, že so znižujúcou sa hodnotou recovery rate sa najpravdepodobnejšia hodnota rozdelenia strát mierne posúva vpravo a zväčšuje sa aj variácia rozdelenia, čím rastie stredná hodnota očakávaných strát. Vďaka zväčšujúcemu sa rozptylu rozdelenia strát sa poklesom RR zvyšujú aj hodnoty VaR rozdelenia strát.

5.2 Konkrétne portfólio

V tejto podkapitole sa zameriame na reálne portfólio, ktoré bolo zostavené na divízii Treasury Slovenskej Sporiteľne. Portfólio pozostáva z 225 aktív. Sú tu úvery a dlhopisy spoločností z rôznych odvetví a rôznych krajín sveta. V prílohe B uvádzame prehľad týchto spoločností, hodnoty recovery rates, pravdepodobnosti defaultu jednotlivých firiem a ďalšie podrobnosti. Pri určovaní úrovne recovery rate a intenzity defaultu každého aktíva sme vychádzali predovšetkým z ratingového hodnotenia firiem, informácií ratingových agentúr a skúseností banky. Korelačnú maticu sme zostavili na základe dlhodobých priemerných korelácií medzi dvoma firmami z určitého odvetvia v danej krajine, medzi dvoma odvetviami danej krajiny, resp. medzi rôznymi krajinami. Neuvádzame ju kvôli jej veľkým rozmerom. Korelácie medzi firmami v rámci krajiny sa pohybujú v rozmedzí 10% až 30% (výnimočne okolo 40%), medzi rôznymi krajinami v rozmedzí 0% až 15%. Všetky aktíva majú v portfóliu rovnakú váhu. Maturita je 5 rokov.

$$N = 225$$

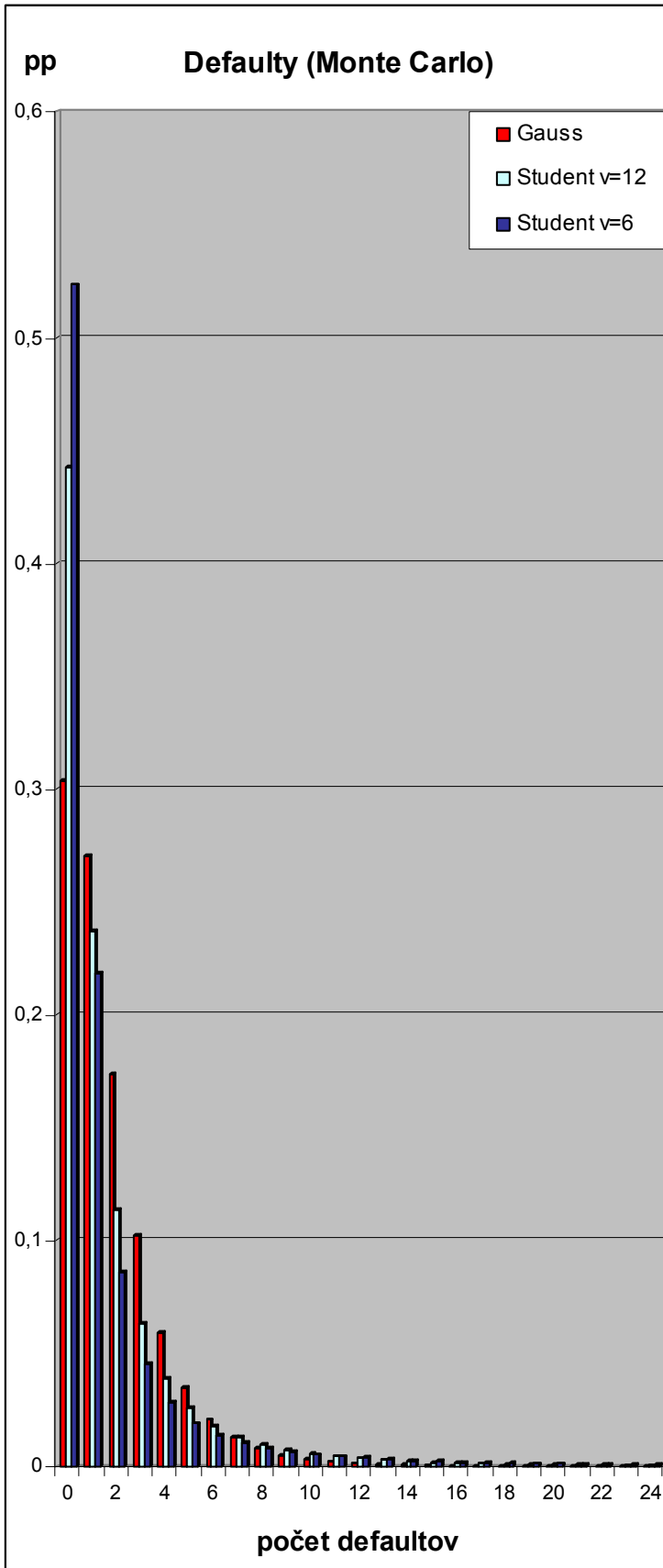
$$T = 5$$

$$A_i = A = 20 \cdot 10^6 \text{ Sk}$$

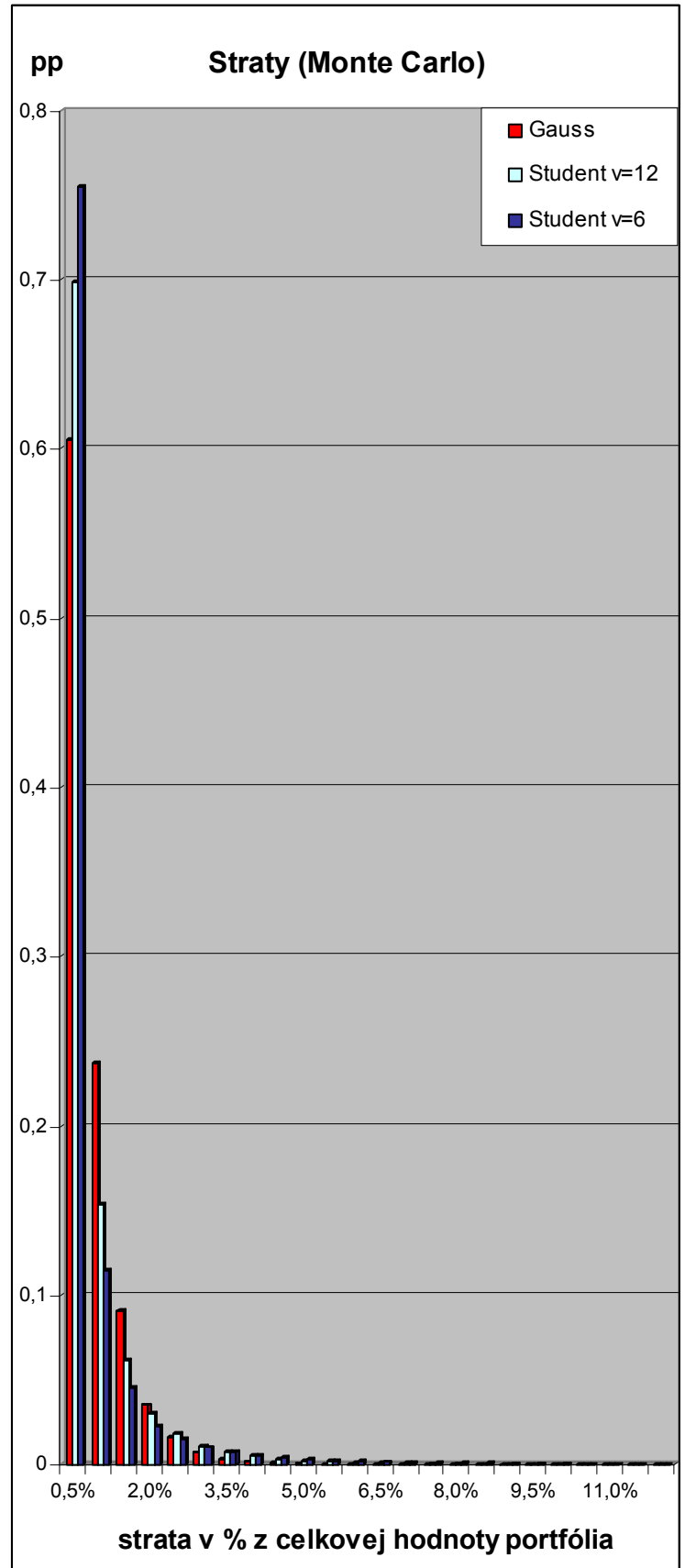
Celková nominálna hodnota portfólia je $4,5 \cdot 10^9$ Sk .

Na výpočet rozdelenia pravdepodobnosti počtu defaultov a úrovne strát sme použili modely využívajúce Monte Carlo simulácie; Gaussovu copulu a Studentove t copuly s $\nu = 12$ a $\nu = 6$ stupňami voľnosti. Jednofaktorové modely, tak ako sme si ich predstavili v štvrtej kapitole, sme nemohli použiť, keďže aktíva v portfóliu majú navzájom odlišné hodnoty recovery rate. Na výpočty sme použili $n = 600000$ simulačných behov.

Na obrázkoch 5.2.1 a 5.2.2 na nasledujúcej strane vidíme rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov a percentuálnej úrovne strát portfólia pre tri spomínané modely využívajúce Monte Carlo simulácie.



Obr. 5.2.1: Rozdelenie pravdepodobnosti počtu defaultov v portfóliu.



Obr. 5.2.2: Rozdelenie pravdepodobnosti percentuálnej úrovne strát portfólia.

Porovnaním výsledkov pre jednotlivé modely vidíme – podobne ako pri testovacom portfóliu – rozdiely medzi Gaussovou a Studentovou t copulou, ktoré sú tým výraznejšie, čím menší je počet stupňov voľnosti Studentovej t copuly. U Studentovej t copuly vidíme výrazne zvýšenú hodnotu pravdepodobnosti na ľavom okraji rozdelenia a mierne zvýšený pretiahnutý pravý chvost rozdelenia.

V tabuľke B.1 v prílohe si môžeme všimnúť pomerne malé pravdepodobnosti defaultu u jednotlivých aktív tohto portfólia, čo sa odzrkadľuje aj na výslednom rozdelení defaultov a strát. Ako vidieť na obrázkoch, pravdepodobnosť, že počet defaultov bude 7, 8 a viac, resp. že straty presiahnu 3-4% hodnoty portfólia, je už veľmi malá. Očakávané straty portfólia budú malé.

V nasledujúcej tabuľke sa pozrieme na výsledné hodnoty očakávaných strát, stredný počet defaultov a hodnoty VaR oboch rozdelení z obrázkov.

Tab. 5.2.1: Výsledky – portfólio.

(Monte Carlo)	Gaussova copula	Studentova t copula $\nu=12$	Studentova t copula $\nu=6$
očakávaná strata portfólia	$23,272 \cdot 10^6$	$23,194 \cdot 10^6$	$23,222 \cdot 10^6$
strata v % z hodnoty portfólia	0,5172%	0,5154%	0,5160%
stredný počet defaultov	1,78	1,77	1,77
90% VaR defaulty	4	5	4
95% VaR defaulty	6	7	8
90% VaR %straty	1,5%	1,5%	1,5%
95% VaR %straty	2%	2,5%	2,5%

Očakávaná strata portfólia pri všetkých troch modeloch je pomerne malá. Rovnako aj rozdiely medzi výsledkami určenými odlišnými modelmi. O niečo výraznejší rozdiel medzi jednotlivými copulami badať na hodnotách VaR, ktoré sa so znižujúcim počtom stupňov voľnosti copuly zväčšujú.

5.3 Zhodnotenie výsledkov

Prvá vec, ktorú sme si počas testovania našich modelov všimli, je, že všetky výsledky citlivo odzrkadľujú aj jemné zmeny vo vstupných parametroch popisujúcich kvality portfólia ako

celku, aj jednotlivých aktív. Preto treba v procese oceňovania CDO dbať na správnu interpretáciu všetkých informácií o jednotlivých aktívach a byť opatrní pri stanovovaní vstupných údajov (v našom prípade ide o intenzity defaultu, recovery rates, korelačnú maticu). Ako sme už spomínali, je viacero spôsobov, ako odhadovať korelačnú maticu portfólia napr. z prístupných trhových dát firiem (problematiku podrobne rozoberá Galiani [6]). Rovnako je veľa odlišných prístupov pri určovaní pravdepodobnosti defaultu daného aktíva, ktoré buď vychádzajú z informácií ratingových agentúr (viac v práci [1]), priamo počítajú implikované intenzity defaultu z trhových dát firiem (pozri prácu [6]), ale aj rôzne ďalšie prístupy (pozri napr. prácu [11]). Tieto vstupy majú výrazný vplyv na počítané očakávané straty a následne stanovené prémie jednotlivých tranží CDO.

Pozrime sa postupne na vplyv vstupných hodnôt na straty portfólia.

Intenzita defaultu λ popisuje pravdepodobnosť defaultu aktíva. Pri náraste pravdepodobností defaultu každého z aktív podľa očakávaní vzrastie počet defaultov a celkové straty portfólia, zväčší sa aj variancia rozdelenia pravdepodobnosti strát, a tak sa zväčšia hodnoty VaR.

Pri náraste vzájomných párových korelácií aktív r sledujeme na rozdelení pravdepodobnosti strát posun centra rozdelenia k nižším hodnotám, ale zároveň sa zväčší variancia tohto rozdelenia. Očakávané straty tak zostávajú približne na tej istej úrovni, ale výrazne sa zvyšujú hodnoty VaR.

Nárastom hodnoty recovery rate RR sa zvyšuje časť hodnoty aktíva, ktorá je vyplatená späť investorovi aj v prípade defaultu. Z výsledkov testovania vidieť, že zvýšením hodnoty recovery rate aktív portfólia sa centrum rozdelenia pravdepodobnosti strát mierne posúva k nižším hodnotám a znižuje sa variancia rozdelenia. Očakávaná strata portfólia a hodnoty VaR tak klesajú.

Porovnaním výsledkov jednofaktorového modelu a modelu používajúceho Monte Carlo simulácie vidíme podstatne výraznejšie rozdiely medzi Gaussovou a Studentovými t copulami pri prvom menovanom, čo môže byť spôsobené vyššími hodnotami chvostovej závislosti double t copúl v porovnaní so Studentovými t copulami (pri dostatočne vysokej hodnote korelačného koeficientu). Výsledky modelov používajúcich double t copuly sú citlivejšie na zmenu počtu stupňov voľnosti copuly. Táto skutočnosť znamená, že pri voľbe double t copuly ako nástroja na modelovanie očakávaných strát je problém vhodnej voľby počtu stupňov voľnosti copuly oveľa výraznejším problémom ako pri Studentovej t copule. Jedna z možností, ako pri voľbe Studen-

toových t copúl určiť vhodný počet stupňov voľnosti copuly, je odhad tohto parametra z trhových dát firmiem (detaily ponúka Galiani [6]).

Použitím jednofaktorovej Gaussovej copuly a všeobecnej Gaussovej copuly (Monte Carlo) sme dosiahli takmer navlas rovnaké výsledky.

Ak chceme porovnať jednofaktorový model a model používajúci Monte Carlo simulácie všeobecne a vybrať ten vhodnejší, všimnime si najprv nevýhody každého z nich. Jednofaktorové modely, tak ako sme si ich predstavili v kapitole 4, majú výrazné obmedzenie v tom, že ich môžeme použiť iba pri portfóliu s rovnakými váhami jednotlivých aktív a rovnakými hodnotami recovery rate.¹⁴ Všeobecnou nevýhodou Monte Carlo modelov je veľmi vysoká náročnosť na procesorový čas potrebný na výpočty veľkého počtu simulácií. Kým pomocou jednofaktorového modelu sme zistili výsledok v priebehu desiatok sekúnd, výpočty modelu používajúceho Monte Carlo simulácie zabrali desiatky hodín. V prípade homogénneho portfólia teda má zmysel vybrať si jednofaktorový model, ktorý pre Gaussovú copulu dosahuje rovnaké výsledky ako Monte Carlo model. Pri voľbe double t copuly ale musíme byť opatrní pri určovaní počtu stupňov voľnosti. Väčší počet stupňov voľnosti double t copuly znamená menšiu odchýlku od výsledkov Gaussovej copuly a rovnako menšiu odchýlku od výsledkov Studentovej t copuly (Monte Carlo).

Ako už sme spomínali, rozdiely medzi Gaussovou a Studentovými t copulami v rámci toho-ktorého modelu súvisia s hodnotami chvostovej závislosti Studentových t copúl, ktoré rastú s klesajúcim počtom stupňov voľnosti. Hodnoty chvostovej závislosti u Gaussových copúl sú nulové.

Frekventovaným pojmom v súvislosti s oceňovaním tranží portfólia CDO je pojem *korelačný úsmev (correlation smile)*. Podobne ako pri Európskych opciách, kde môžeme z trhovej ceny opcie použitím Black-Scholesovho vzorca vypočítať tzv. implikovanú volatilitu, tak aj pri tranžiach CDO môžeme z ceny samostatnej tranže (trhového indexu) vypočítať spätným chodom hodnotu korelačného koeficientu (konštantného pre všetky firmy). Ide o tzv. implikovanú koreláciu. Autori viacerých článkov (pozri napr.[2], [4], [5], [8]) sa zhodujú v tom, že ak vypočítame z trhových indexov implikovanú koreláciu pomocou Gaussovej copuly, nedostaneme pre všetky tranže rovnakú hodnotu (ak by bol model správny, mali by byť rovnaké). Vyššie hodnoty implikovanej korelácie dostaneme pre okrajové tranže (equity, supersenior) a nižšie

¹⁴ Pomerne komplikovanú obmenu prezentovaného jednofaktorového modelu, ktorá je vhodná pre použitie pri nehomogénnom portfóliu, uvádzajú autori práce [8].

hodnoty pre mezzanine tranže. Tento jav sa v literatúre označuje pojmom *korelačný úsmev*. Názory na tento fenomén sa zhodujú v tom, že súvisí so zvýšeným výskytom extrémnych hodnôt, ktorý je možné pozorovať aj na skutočných trhových dátach. Z tohto dôvodu pôvodne začala diskusia o tom, že by bolo vhodné nájsť popri Gaussovej copule aj nejaké iné copuly, ktoré preukazujú nenulovú chvostovú závislosť. Studentove t copuly, spolu s ďalšími (napr. Claytonove copuly), spĺňajú túto požiadavku. Z viacerých štúdií (pozri napr. [2], [5], [8]) sa ukazuje, že práve double t copula veľmi dobre popisuje trhovú dáta a indexy.

Záver

Cieľom našej práce bolo poskytnúť čitateľovi prehľad rôznych metód oceňovania CDO a pokúsiť sa navrhnúť, ktorá z nich by mohla byť najvhodnejšou pre správne určenie prémie jednotlivých tranží CDO. V práci sme porovnávali dva typy modelov používajúce odlišné varianty copula funkcií. Prvým typom sú modely narábajúce so všeobecnými copula funkciami, ktoré pri výpočtoch používajú Monte Carlo simulácie. Druhým typom sú jednofaktorové modely, kde je korelačná štruktúra medzi premennými indukovaná lineárnou závislosťou premenných na jednom spoločnom systematickom faktore. V rámci každého typu sme navyše porovnali dva druhy modelov líšiac sa voľbou copula funkcie. Vyberali sme medzi Gaussovou a Studentovou t copulou a pri druhej menovanej sme si všimli aj vplyv počtu stupňov voľnosti copuly. Keďže proces oceňovania CDO od začiatku do konca je pomerne rozsiahly, zamerali sme sa pri našich porovnaníach na jadro tohto procesu, ktorým je spracovanie vstupných parametrov popisujúcich vlastnosti portfólia a modelovanie rozdelenia pravdepodobnosti strát portfólia.

Výsledky testovania jednotlivých modelov ukazujú na všestrannejšie použitie modelov používajúcich Monte Carlo simulácie. Nevýhodou tu je ale veľmi dlhý čas potrebný na výpočty simulácií. Jednofaktorové modely, veľmi rýchle a jednoduché, sú vhodné pre oceňovanie homogénneho CDO. Ich prispôsobenie pre oceňovanie nehomogénnych CDO je pomerne zložité. Pri rozhodovaní sa medzi Gaussovou a Studentovou t copulou treba mať na pamäti hodnoty chvostovej závislosti copúl, ktoré pri Studentových t typoch copúl generujú zvýšené pravdepodobnosti na chvostoch rozdelenia strát. Ak zvolíme Studentovu t copulu s príliš malým počtom stupňov voľnosti, zvýšené hodnoty na chvostoch rozdelenia pravdepodobnosti strát môžu viesť k nadhodnoteniu prémie pre equity a senior tranže, resp. podhodnoteniu pre mezzanine tranže.

Je ťažké zvoliť jeden správny model a ostatné jednoducho zavrhnúť. Bolo by veľmi zaujímavé pri porovnávaní našich modelov odhadnúť všetky vstupné údaje priamo z trhových dát firiem podieľajúcich sa na niektorom z indexov iTraxx a CDX, vypočítať prémie jednotlivých tranží a na základe ich porovnania s hodnotami indexov potom vybrať ten najvhodnejší model. Takáto práca by však podstatne prekročila prijateľný rozsah diplomovej práce. Verím, že naše dielo tiež čitateľa zaujme a môže byť východiskom pre ďalšie práce v danej oblasti.

Literatúra

- [1] Bluhm Ch. (2003): *CDO Modeling: Techniques, Examples and Applications*, working paper, HypoVereinsbank (Munich), Group Credit Portfolio Management, GCP3 - Structured Finance Analytics
- [2] Burtschell X., Gregory J., Laurent J.-P. (2005): *A comparative analysis of CDO pricing models*, working paper, ISFA Actuarial School, University of Lyon & BNP-Paribas
- [3] Cai D. (2004): *Lecture 4 on Derivatives: Roles of Simulation in Finance*, working paper, Department of Mathematics, New York University
- [4] Elizalde A. (2005): *Credit Risk Models IV: Understanding and pricing CDOs*, working paper, CEMFI and Universidad Pública de Navarra, Madrid
- [5] Embrechts P., Lindskog F., McNeil A. (2001): *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, working paper, Department of Mathematics, ETHZ, Zurich
- [6] Galiani S. (2003): *Copula Functions and their Application in Pricing and Risk Managing Multiname Credit Derivative Products*, working paper, Department of Mathematics, King's College, London
- [7] Hull J., White A. (2003): *Valuation of a CDO and an n-th to Default CDS Without Monte Carlo Simulation*, working paper, Joseph L. Rotman School of Management, University of Toronto
- [8] Hull J., White A. (2004): *Valuation of a CDO and an n-th to Default CDS Without Monte Carlo Simulation*, working paper, Joseph L. Rotman School of Management, University of Toronto
- [9] Jouanin J.-F., Riboulet G., Roncalli T. (2003): *A Critical Approach to the Copula Model for Credit Derivatives*, Groupe de Recherche Operationnelle Credit Lyonnais, Journee Risque de Credit, Evry
- [10] Laurent J.-P., Gregory J. (2003): *Basket Default Swaps, CDO's and Factor Copulas*, working paper, ISFA Actuarial School, University of Lyon & BNP-Paribas

- [11] Madan D., Konikov M., Marinescu M. (2004): *Credit and Basket Default Swaps*, working paper, Robert H. Smith School of Business and Bloomberg LP, New York
- [12] Pataky J. (2005): *CDO modelovacie techniky*, working paper, FEI STU, Bratislava
- [13] Pataky J. (2006): *Kreditné deriváty a štruktúrované produkty*, Trend, Bratislava
- [14] Picone D. (2002): *Collateralised Debt Obligations*, working paper, City University Business School, London & Royal Bank of Scotland

Prílohy

A Algoritmy modelov v zdrojovom kóde programu Mathematica[®]

A.1 Jednofaktorový model pre 1-fakt. Gaussovu copulu a double t copulu

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
<< Statistics`NormalDistribution`
<< Graphics`Graphics`

m = 30;          (* pocet zloziek portfolia *)
L = 100;        (* nominalna hodnota zlozky *)
T = 10;         (* maturita *)
rij = 0.3;      (* parove korelacie *)
R = 0.3;        (* recovery rate, konst. pre vsetky zlozky *)
λ = {0.01, 0.0127, 0.0133, 0.015, 0.0158, 0.017, 0.0181, 0.0185, 0.019, 0.0195, 0.02, 0.0207,
     0.0214, 0.0222, 0.0229, 0.0236, 0.0243, 0.025, 0.02583, 0.02665, 0.0275, 0.0279, 0.03,
     0.0313, 0.0325, 0.035, 0.0375, 0.04, 0.0425, 0.0474};      Length[λ]
Histogram[λ, HistogramCategories → Table[0.0025 * (i - 1), {i, 30}], AxesLabel → {" λi", "pocet aktiv"},
PlotLabel → "          Pocet aktiv v portfoliu v kategoriach podla velkosti rizika defaultu."]
ρi = Sqrt[rij];
ρ = Table[ρi, {m}];
F = Table[1 - Exp[-T * λ[[i]]], {i, m}];
(* vektor hodnot jedn. distribucnych funkcii Fi defaultu pre zodp. vektor λ a cas T *)
stNorm = NormalDistribution[0, 1];
ν = 10;        (* pocet stupnov volnosti *)
studentT = StudentTDistribution[ν];
SfacMnormal = Table[1 - CDF[stNorm, (Quantile[stNorm, F[[i]]] - ρ[[i]] * facM) / Sqrt[1 - (ρ[[i]])^2]],
  {i, m}];
(* vektor hodnot Si (T|facM) jedn. survival funkcii podmienenych faktorom facM v T,
pre Normalnu 1 fakt.Copulu *)
SfacMstudent =
  Table[
    1 - CDF[studentT, (Quantile[studentT, F[[i]]] - ρ[[i]] * Sqrt[(ν - 2) / ν] * facM) /
      (Sqrt[1 - (ρ[[i]])^2] * Sqrt[(ν - 2) / ν])], {i, m}];
(* vektor hodnot Si (T|facM) jedn. survival funkcii podmienenych faktorom facM v T,
pre Studentovu 1 fakt.Copulu *)
```

```

π0facMnormal = Product[SfacMnormal[[i]], {i, m}];
(* π_T(0|facM), t.j.podm.pravdepodobnost, ze vsetky zlozky portfolia preziju,
ziadna nebude defaultovat; pre normal.Copulu *)
π0facMstudent = Product[SfacMstudent[[i]], {i, m}];
(* π_T(0|facM), t.j.podm.pravdepodobnost, ze vsetky zlozky portfolia preziju,
ziadna nebude defaultovat; pre student.Copulu *)
wN = Table[(1 - SfacMnormal[[i]]) / SfacMnormal[[i]], {i, m}];
wS = Table[(1 - SfacMstudent[[i]]) / SfacMstudent[[i]], {i, m}];
(* vektor hodnot w_i *)
mPol = If[Mod[m, 2] == 0, m / 2, m / 2 - 1 / 2];

(* Normal *)
(* 1/2 *)
VN1 = Table[Sum[(wN[[j]])^i, {j, m}], {i, mPol}];
(* vektor hodnot V_i pre i=1,...,m/2 (resp.m/2-1/2) *)
UN1 = Table[0, {mPol}];
vysledok1 = Table[0, {mPol}];
rek[1] = UN1[[1]] = vysledok1[[1]] = VN1[[1]];
rek[j_] := (
  vysledok1[[j]] = ((-1)^(j+1)) * VN1[[j]];
  For[i = 1, i < j,
    vysledok1[[j]] = vysledok1[[j]] + ((-1)^(i+1)) * VN1[[i]] * vysledok1[[j-i]];
    i++;
  vysledok1[[j]] = vysledok1[[j]] / j
)
UN1 = Table[rek[i], {i, mPol}];
(* hodnoty U_k pre k=1,...,m/2 (resp.m/2-1/2) -> mPol *)

(* Normal *)
(* 2/2 *)
VN2 = Table[Sum[(1 / (wN[[j]]))^i, {j, m}], {i, m - mPol - 1}];
UN2 = Table[0, {m - mPol - 1}];
vysledok2 = Table[0, {m - mPol - 1}];
rek2[1] = UN2[[1]] = vysledok2[[1]] = VN2[[1]];
rek2[j_] := (
  vysledok2[[j]] = ((-1)^(j+1)) * VN2[[j]];
  For[i = 1, i < j,
    vysledok2[[j]] = vysledok2[[j]] + ((-1)^(i+1)) * VN2[[i]] * vysledok2[[j-i]];
    i++;
  vysledok2[[j]] = vysledok2[[j]] / j
)

```

```

UN2pom = Table[(Product[wN[[j]], {j, m}]) * (rek2[i]), {i, m - mPol - 1}];
For[i = 1, i <= m - mPol - 1,
  UN2[[i]] = UN2pom[[m - mPol - i]];      (* pozn.: -1+1 *)
  i++]
(* UN2      (* hodnoty Uk pre k=mPol+1,...,m-1 *) *)
UN = Join[UN1, UN2];      (* hodnoty Uk pre k=1,...,m-1 *)
πfacMnormal1 = Table[π0facMnormal * UN[[i]], {i, m - 1}];
(* hodnoty πT(k|facM) pre k=1,...,m-1 *)
πmfacMnormal = Product[1 - SfacMnormal[[i]], {i, m}];
(* πT(m|facM) *)
πfacMnormal = Join[{π0facMnormal}, πfacMnormal1, {πmfacMnormal}];
(* hodnoty πT(k|facM) pre k=0,...,m ; t.j.podm.pravdepodobnosti prave k defaultov;
pre normal.Copulu *)
(* Length[πfacMnormal]      (* =m+1 *) *)

(* StudentT *)
(* 1/2 *)
VS1 = Table[Sum[(wS[[j]])^i, {j, m}], {i, mPol}];
(* vektor hodnot Vi pre i=1,...,m/2 (resp.m/2-1/2) *)
US1 = Table[0, {mPol}];
vysledok3 = Table[0, {mPol}];
rek3[1] = US1[[1]] = vysledok3[[1]] = VS1[[1]];
rek3[j_] := (
  vysledok3[[j]] = ((-1)^(j+1)) * VS1[[j]];
  For[i = 1, i < j,
    vysledok3[[j]] = vysledok3[[j]] + ((-1)^(i+1)) * VS1[[i]] * vysledok3[[j-i]];
    i++];
  vysledok3[[j]] = vysledok3[[j]] / j
)
US1 = Table[rek3[i], {i, mPol}];
(* hodnoty Uk pre k=1,...,m/2 (resp.m/2-1/2) -> mPol *)

(* StudentT *)
(* 2/2 *)
VS2 = Table[Sum[(1 / (wS[[j]]))^i, {j, m}], {i, m - mPol - 1}];
US2 = Table[0, {m - mPol - 1}];
vysledok4 = Table[0, {m - mPol - 1}];
rek4[1] = US2[[1]] = vysledok4[[1]] = VS2[[1]];

```

```

rek4[j_] := (
  vysledok4[[j]] = ((-1)^(j+1)) * VS2[[j]];
  For[i = 1, i < j,
    vysledok4[[j]] = vysledok4[[j]] + ((-1)^(i+1)) * VS2[[i]] * vysledok4[[j-i]];
    i++];
  vysledok4[[j]] = vysledok4[[j]] / j
)
US2pom = Table[(Product[wS[[j]], {j, m}]) * (rek4[i]), {i, m - mPol - 1}];
For[i = 1, i <= m - mPol - 1,
  US2[[i]] = US2pom[[m - mPol - i]];      (* pozn.: -1+1 *)
  i++]
(* US2      (* hodnoty Uk pre k=mPol+1,...,m-1 *) *)
US = Join[US1, US2];      (* hodnoty Uk pre k=1,...,m-1 *)
πfacMstudent1 = Table[π0facMstudent * US[[i]], {i, m - 1}];
(* hodnoty πT(k|facM) pre k=1,...,m-1 *)
πmfacMstudent = Product[1 - SfacMstudent[[i]], {i, m}];
(* πT(m|facM) *)
πfacMstudent = Join[{π0facMstudent}, πfacMstudent1, {πmfacMstudent}];
(* hodnoty πT(k|facM) pre k=0,...,m ; t.j.podm.pravdepodobnosti prave k defaultov;
pre student.T Copulu *)
(* Length[πfacMstudent]      (* =m+1 *) *)

πNormal = Table[NIntegrate[(πfacMnormal[[i]]) * PDF[stNorm, facM], {facM, -∞, ∞}], {i, m + 1}]
(* hodnoty πT(k) pre k=0,...,m ; t.j.pravdepodobnosti prave k defaultov;
pre normal.Copulu; do casu T *)

πStudent = Table[NIntegrate[(πfacMstudent[[i]]) * PDF[studentT, facM], {facM, -∞, ∞}], {i, m + 1}]
(* hodnoty πT(k) pre k=0,...,m ; t.j.pravdepodobnosti prave k defaultov;
pre student.T Copulu; do casu T *)

ExpectedLossNormal = (1 - R) * L * (Sum[(i - 1) * πNormal[[i]], {i, 2, m + 1}]);
ExpectedLossStudent = (1 - R) * L * (Sum[(i - 1) * πStudent[[i]], {i, 2, m + 1}]);
PocDefNormal = Sum[(i - 1) * πNormal[[i]], {i, 2, m + 1}];
PocDefStudent = Sum[(i - 1) * πStudent[[i]], {i, 2, m + 1}];
(* stredna hodnota poctu defaultov *)
PercentExpectedLossNormal = 100 * ExpectedLossNormal / (L * m) "%";
PercentExpectedLossStudent = 100 * ExpectedLossStudent / (L * m) "%";
(* celkova ocakavana strata (v T): absolutna/relativna (v%) , pre dane 2 Copuly *)
loss = Table[100 * (1 - R) * (i - 1) / m "%", {i, m + 1}];
(* hodnoty percentualnej (v%) velkosti straty pre pocet defaultov k=0,...,m *)

```

```

Sum[ $\pi$ Normal[[i]], {i, m + 1}]
Sum[ $\pi$ Student[[i]], {i, m + 1}]          (* test *)
BarChart[ $\pi$ Normal,  $\pi$ Student,
  BarLabels → Table[i - 1, {i, m + 1}], AxesLabel → {"pocet defaultov", "Pravdepodobnost"},
  PlotLabel → "Pp rozloženie počtu defaultov pre Gauss./Student.t 1-fakt.Copulu"]
(* porovnanie pravdepodobnostneho rozloženia počtu defaultov pre dane 2 Copuly *)
lossRounded = Table[Round[100 * (1 - R) * (i - 1) / m] "%", {i, m + 1}];
BarChart[ $\pi$ Normal,  $\pi$ Student,
  BarLabels → lossRounded, AxesLabel → {"Expected Loss", "Pravdepodobnost"},
  PlotLabel → "Pp rozloženie ocak.straty pre Gauss./Student.t 1-fakt.Copulu"]
(* porovnanie pravdepodobnostneho rozloženia % - strat pre dane 2 Copuly:
  1-fakt.Normalnu Copulu a 1-fakt.StudentovuT Copulu s v stupnami volnosti *)
qntlNormal[p_] := (
  sucet = 0;
  vystup = 0;
  For[i = 1, i ≤ m + 1,
    sucet = sucet +  $\pi$ Normal[[i]];
    If[sucet ≥ p, vystup = i - 1; i = m + 2, i++];
  ];
  vystup
)
qntlStudent[p_] := (
  sucet = 0;
  vystup = 0;
  For[i = 1, i ≤ m + 1,
    sucet = sucet +  $\pi$ Student[[i]];
    If[sucet ≥ p, vystup = i - 1; i = m + 2, i++];
  ];
  vystup
)
Print["pocet aktiv v portfoliu N= ", m]
Print["maturita T= ", T]
Print["nominalna hodnota aktiva L= ", L]
Print["hodnota portfolia= ", L * m]
Print["parove korelacie qij= ", rij]
Print["recovery rate RR= ", R]
Print["pocet stupnov volnosti Studentovej-t Copuly v= ", v]
Print[""]
Print["ocakavana strata, percento ocakavanej straty, ocakavany pocet defaultov, kvantily
  Pp.rozloženia počtu defaultov a Pp.rozloženia percenta strat: 90%, 91%,...,95% kvantil"]

```

```

vysledkyNormal = {SetPrecision[ExpectedLossNormal, 4], SetPrecision[PercentExpectedLossNormal, 4],
  SetPrecision[PocDefNormal, 3], qntlNormal[0.9], qntlNormal[0.91], qntlNormal[0.92],
  qntlNormal[0.93], qntlNormal[0.94], qntlNormal[0.95], SetPrecision[loss[[qntlNormal[0.9] + 1]], 4],
  SetPrecision[loss[[qntlNormal[0.91] + 1]], 4], SetPrecision[loss[[qntlNormal[0.92] + 1]], 4],
  SetPrecision[loss[[qntlNormal[0.93] + 1]], 4], SetPrecision[loss[[qntlNormal[0.94] + 1]], 4],
  SetPrecision[loss[[qntlNormal[0.95] + 1]], 4]};
vysledkyStudent = {SetPrecision[ExpectedLossStudent, 4], SetPrecision[PercentExpectedLossStudent, 4],
  SetPrecision[PocDefStudent, 3], qntlStudent[0.9], qntlStudent[0.91], qntlStudent[0.92],
  qntlStudent[0.93], qntlStudent[0.94], qntlStudent[0.95],
  SetPrecision[loss[[qntlStudent[0.9] + 1]], 4], SetPrecision[loss[[qntlStudent[0.91] + 1]], 4],
  SetPrecision[loss[[qntlStudent[0.92] + 1]], 4], SetPrecision[loss[[qntlStudent[0.93] + 1]], 4],
  SetPrecision[loss[[qntlStudent[0.94] + 1]], 4], SetPrecision[loss[[qntlStudent[0.95] + 1]], 4]};
Print["Gaussova 1-fakt.Copula"]
Print[vysledkyNormal]
Print["Studentova-t 1-fakt.Copula"]
Print[vysledkyStudent]

```

A.2 Model používajúci Monte Carlo simuláciu; Gaussova a Studentova t copula

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
<< Statistics`NormalDistribution`
<< Graphics`Graphics`
m = 30;          (* pocet zloziek portfolia *)
Li = 1000000;   (* nominalna hodnota zlozky *)
T = 5;          (* maturita *)
qij = 0.3;      (* parove korelacie *)
λ = {0.01, 0.0127, 0.0133, 0.015, 0.0158, 0.017, 0.0181, 0.0185, 0.019, 0.0195, 0.02,
     0.0207, 0.0214, 0.0222, 0.0229, 0.0236, 0.0243, 0.025, 0.02583, 0.02665, 0.0275,
     0.0279, 0.03, 0.0313, 0.0325, 0.035, 0.0375, 0.04, 0.0425, 0.0474};
Length[λ]
Histogram[λ, AxesLabel → {" λi", "pocet aktiv"},
  PlotLabel → "          Pocet aktiv v portfoliu v kategoriach podla velkosti
  rizika defaultu." ]
L = Table[Li, {m}];
R = {0.35, 0.15, 0.40, 0.25, 0.20, 0.35, 0.20, 0.45, 0.45, 0.45, 0.25, 0.25, 0.35, 0.25,
     0.45, 0.45, 0.45, 0.25, 0.35, 0.45, 0.45, 0.25, 0.35, 0.15, 0.35, 0.25, 0.25, 0.45,
     0.45, 0.25};
(* recovery rates *) Length[R]
Q = Table[qij, {m}, {m}] + DiagonalMatrix[Table[1 - qij, {m}]];
MatrixForm[Q];          (* korelacna matica *)
A = Transpose[CholeskyDecomposition[Q]]; (* A - lower triangular *)
(* MatrixForm[A]
  MatrixForm[A.Transpose[A]]          (* skuska *) *)
stNorm = NormalDistribution[0, 1];
v = 10;                  (* pocet stupnov volnosti *)
studentT = StudentTDistribution[v];

n = 1000000;             (* pocet simulacii *)
HodnotaPortfolia = Sum[L[[i]], {i, m}];
sumCLN = 0;
sumCLS = 0;
sumPocDefN = Table[0, {m + 1}];
sumPocDefS = Table[0, {m + 1}];
sumStrataN = Table[0, {200}];
sumStrataS = Table[0, {200}];
stredPocDefN = 0;
stredPocDefS = 0;
```

```

For[k = 1, k ≤ n,
  zN = RandomArray[stNorm, m];
  xN = A . zN;
  uN = Table[CDF[stNorm, xN[[i]], {i, m}]; (* uN ~ CQGaussian *)
  zS = RandomArray[stNorm, m];
  s = Random[ChiSquareDistribution[v]];
  y = A . zS;
  xS = (Sqrt[v / s]) * y;
  uS = Table[CDF[studentT, xS[[i]], {i, m}]; (* uS ~ CQ,vStudent *)
  τN = Table[Last[t /. Solve[- Integrate[λ[[i]], {t, 0, t}] == Log[uN[[i]], t]], {i, m}];
  τS = Table[Last[t /. Solve[- Integrate[λ[[i]], {t, 0, t}] == Log[uS[[i]], t]], {i, m}];
  (* τN/τS obsahuju hodnoty simulovaných casov defaultu pre jednotlivé zložky;
  urcene z realizacie nahodneho vektora rozdeleného podľa Normalnej/Studentovej t Copuly *)
  QτN = Table[If[τN[[i]] < T, 1, 0], {i, m}];
  QτS = Table[If[τS[[i]] < T, 1, 0], {i, m}]; (* hodnoty Qτi = 1{τi < T} *)
  CLN = Sum[(1 - R[[i]]) * (L[[i]]) * QτN[[i]], {i, m}];
  CLS = Sum[(1 - R[[i]]) * (L[[i]]) * QτS[[i]], {i, m}];
  (* simulovaná hodnota veľkosti celkovej straty v portfóliu *)
  sumCLN = sumCLN + CLN;
  sumCLS = sumCLS + CLS;
  sumStrataN =
  sumStrataN +
  Table[If[((CLN / HodnotaPortfolia) ≥ (0.005 * (j - 1))) && ((CLN / HodnotaPortfolia) < (0.005 * j)),
  1, 0], {j, 200}];
  sumStrataS =
  sumStrataS +
  Table[If[((CLS / HodnotaPortfolia) ≥ (0.005 * (j - 1))) && ((CLS / HodnotaPortfolia) < (0.005 * j)),
  1, 0], {j, 200}];
  pocetDefN = Sum[QτN[[i]], {i, m}];
  stredPocDefN = stredPocDefN + pocetDefN;
  sumPocDefN = sumPocDefN + Table[If[pocetDefN == (j - 1), 1, 0], {j, m + 1}];
  pocetDefS = Sum[QτS[[i]], {i, m}];
  stredPocDefS = stredPocDefS + pocetDefS;
  sumPocDefS = sumPocDefS + Table[If[pocetDefS == (j - 1), 1, 0], {j, m + 1}];
  If[Mod[k, 25000] == 0, Print["Hotovo simulácií: viac ako... k= ", k]];
  k++]
ExpLossNormal = sumCLN / n;
ExpLossStudent = sumCLS / n; (* priemerna hodnota očkavanych strat *)
PercentExpLossNormal = 100 * (ExpLossNormal / HodnotaPortfolia) "%";
PercentExpLossStudent = 100 * (ExpLossStudent / HodnotaPortfolia) "%";
(* percento očkavanych strat (v%) *)
Print["hodnoty pravdepodobnosti k defaultov, Normalna Copula"]
ProbPocDefNormal = sumPocDefN / n

```

```

Print["hodnoty pravdepodobnosti k defaultov, Studentova Copula"]
ProbPocDefStudent = sumPocDefS / n
(* priemerne hodnoty pravdepodobnostneho rozlozenia poctu defaultov,
t.j. hodnoty pravdepodobnosti k defaultov, pre k=0,1,...,m *)
PocDefNormal = stredPocDefN / n; // N
PocDefStudent = stredPocDefS / n; // N (* priemerna hodnota poctu defaultov *)
Print["hodnoty pravdepodobnosti percenta strat pre 200 intervalov po 0.5%, Normalna Copula"]
PravdepStratN = sumStrataN / n
Print["hodnoty pravdepodobnosti percenta strat pre 200 intervalov po 0.5%,
Studentova Copula"]
PravdepStratS = sumStrataS / n
(*priemerne hodnoty pravdepodobnostneho rozdelenia percenta celkovych strat;
hodnoty pravdepodobnosti,ze celkova_strata/hodnota_portfolia padne do daneho
intervalu velkosti 0.5%,(200 intervalov: [0,0.005],[0.005,0.001), ...) *)
Sum[ProbPocDefNormal[[i]], {i, m + 1}]
Sum[ProbPocDefStudent[[i]], {i, m + 1}] (* test *)
Sum[PravdepStratN[[i]], {i, 200}]
Sum[PravdepStratS[[i]], {i, 200}] (* test *)
Print["porovnanie cca s ocak. relativ. stratou..."]
100 * Sum[0.005 * ((i - 1 + i) / 2) * PravdepStratN[[i]], {i, 200}] "%"
100 * Sum[0.005 * ((i - 1 + i) / 2) * PravdepStratS[[i]], {i, 200}] "%"
(*porovnat cca s ocakavanou relativnou stratou*)
BarChart[ProbPocDefNormal, ProbPocDefStudent,
BarLabels -> Table[i - 1, {i, m + 1}], AxesLabel -> {"pocet defaultov", "Pravdepodobnost"},
PlotLabel -> "Pp rozlozenie poctu defaultov pre Gauss./Student.t Copulu"]
(* porovnanie pravdepodobnostneho rozlozenia poctu defaultov pre dane 2 Copuly *)
BarChart[PravdepStratN, PravdepStratS, BarLabels -> Table[i * 0.5 "%", {i, 200}],
AxesLabel -> {"Expected Loss", "Pravdepodobnost"},
PlotLabel -> "Pp rozdelenie straty pre Gauss. a Student.-t Copulu"]
qntlNormal[p_] := (
sucet = 0;
vystup = 0;
For[i = 1, i <= m + 1,
sucet = sucet + ProbPocDefNormal[[i]];
If[sucet >= p, vystup = i - 1; i = m + 2, i++];
];
vystup)
qntlStudent[p_] := (
sucet = 0;
vystup = 0;
For[i = 1, i <= m + 1,
sucet = sucet + ProbPocDefStudent[[i]];
If[sucet >= p, vystup = i - 1; i = m + 2, i++];
];
vystup)

```

```

qntlLossNormal[p_] := (
  sucet = 0;
  vystup = 0;
  For[i = 1, i ≤ 200,
    sucet = sucet + PravdepStratN[[i]];
    If[sucet ≥ p, vystup = i * 0.005; i = 201, i++];
  ];
  vystup)
qntlLossStudent[p_] := (
  sucet = 0;
  vystup = 0;
  For[i = 1, i ≤ 200,
    sucet = sucet + PravdepStratS[[i]];
    If[sucet ≥ p, vystup = i * 0.005; i = 201, i++];
  ];
  vystup)
Print["pocet aktiv v portfoliu N= ", m]
Print["maturita T= ", T]
Print["nominalna hodnota aktiva L= ", Li]
Print["hodnota portfolia= ", HodnotaPortfolia]
(*Print["parove korelacie qij= ",qij]*)
(*Print["recovery rate RR= ",Ri]*)
Print["pocet stupnov volnosti Studentovej-t Copuly v= ", v]
Print["pocet simulacnych behov n= ", n]
Print[""]
Print["ocakavana strata, percento ocakavanej straty, ocakavany pocet defaultov,
  kvantily Pp.rozlozenia poctu defaultov a Pp.rozlozenia percenta strat: 90%, 91
  %, ...,95% kvantil"]
vysledkyNormal = {SetPrecision[ExpLossNormal, 4], SetPrecision[PercentExpLossNormal, 4],
  SetPrecision[PocDefNormal, 3], qntlNormal[0.9], qntlNormal[0.91], qntlNormal[0.92],
  qntlNormal[0.93], qntlNormal[0.94], qntlNormal[0.95], qntlLossNormal[0.9] * 100 "%",
  qntlLossNormal[0.91] * 100 "%", qntlLossNormal[0.92] * 100 "%", qntlLossNormal[0.93] * 100 "%",
  qntlLossNormal[0.94] * 100 "%", qntlLossNormal[0.95] * 100 "%"};
vysledkyStudent = {SetPrecision[ExpLossStudent, 4], SetPrecision[PercentExpLossStudent, 4],
  SetPrecision[PocDefStudent, 3], qntlStudent[0.9], qntlStudent[0.91], qntlStudent[0.92],
  qntlStudent[0.93], qntlStudent[0.94], qntlStudent[0.95], qntlLossStudent[0.9] * 100 "%",
  qntlLossStudent[0.91] * 100 "%", qntlLossStudent[0.92] * 100 "%", qntlLossStudent[0.93] * 100 "%",
  qntlLossStudent[0.94] * 100 "%", qntlLossStudent[0.95] * 100 "%"};
Print["Gaussova Copula"]
Print[vysledkyNormal]
Print["Studentova-t Copula"]
Print[vysledkyStudent]

```

B Prehľad spoločností, ktorých dlhopisy a pôžičky figurujú v modelovanom CDO portfóliu Slovenskej Sporiteľne

Tab. B.1: Kredity tvoriace modelované portfólio SISp.

No.	Credit	Country	Industry Class	Recovery Rate	Notional	Moody's Rating	S&P Rating	Probability of Default (in 5 Years)	Maturity	Swap Rate	Type
1	3M CO.	United States	Industrial/Manufacturing	0.35	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	65.0	loan.unsecured
2	ACCOR SA	France	Lodging & Restaurants	0.15	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	15.0	loan.unsecured
3	ACE LTD.	United States	Banking & Finance	0.40	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	31.5	bond
4	ACOM CO. LTD.	Japan	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	11.0	loan.unsecured
5	AEGON NV	Netherlands	Banking & Finance	0.20	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	39.0	bond
6	AIOI INSURANCE CO. LTD.	Japan	Banking & Finance	0.35	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	43.0	loan.unsecured
7	ALBERTO-CULVER CO.	United States	Consumer Products	0.20	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	6.0	bond
8	ALLERGAN, INC.	United States	Health Care & Pharmaceuticals	0.45	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	10.0	loan.unsecured
9	ALLIANZ AG	Germany	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	30.0	loan.unsecured
10	ALTRIA GROUP INC.	United States	Food, Beverage & Tobacco	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	55.0	loan.unsecured
11	AMBAC FINANCIAL GROUP INC.	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	150.0	loan.unsecured
12	AMERICAN EXPRESS CO.	United States	Transportation	0.25	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	30.0	loan.unsecured
13	AMERICAN INTERNATIONAL GROUP	United States	Banking & Finance	0.35	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	38.0	loan.unsecured
14	AMGEN INC.	United States	Health Care & Pharmaceuticals	0.25	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	16.0	loan.unsecured
15	AMP GROUP HOLDINGS LTD.	Australia	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	16.0	loan.unsecured
16	ANGLO AMERICAN PLC	United Kingdom	Metals & Mining	0.45	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	19.0	loan.unsecured
17	ANHEUSER-BUSCH CO'S, INC.	United States	Food, Beverage & Tobacco	0.45	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	10.0	loan.unsecured
18	ANTHEM INC.	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	Ba1	BB+	5,74%	5	250.0	loan.unsecured
19	AOL TIME WARNER INC.	United States	Broadcasting/Media/Cable	0.35	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	115.0	loan.unsecured
20	AON CORPORATION	United States	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	33.0	loan.unsecured
21	ARROW ELECTRONICS, INC.	United States	Computers & Electronics	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	43.0	loan.unsecured
22	ASFINAG	Austria	Building & Materials	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	34.0	loan.unsecured
23	ASSICURAZIONI GENERALI SPA	Italy	Banking & Finance	0.35	20 000 000 Sk	Ba1	BB+	5,74%	5	170.0	loan.unsecured
24	ASTRAZENECA PLC	United Kingdom	Health Care & Pharmaceuticals	0.15	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	20.0	loan.unsecured
25	AT&T WIRELESS SERVICES INC.	United States	Telecommunications	0.35	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	36.0	loan.unsecured
26	AUTOMATIC DATA PROCESSING, INC.	United States	Consumer Products	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	23.0	loan.unsecured
27	AXA SA	France	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	45.0	loan.unsecured

No.	Credit	Country	Industry Class	Recovery Rate	Notional	Moodys Rating	S&P Rating	Probability of Default (in 5 Years)	Maturity	Swap Rate	Type
28	BAE SYSTEMS PLC	United Kingdom	Aerospace & Defense	0.45	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	19.0	loan.unsecured
29	BANCO COMERCIAL PORTUGUES SA	Portugal	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	20.0	loan.unsecured
30	BANCO ESPIRITO SANTO SA	Portugal	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	18.0	loan.unsecured
31	BARCLAYS BANK PLC	United Kingdom	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	27.0	loan.unsecured
32	BAXTER INTERNATIONAL INC.	United States	Health Care & Pharmaceuticals	0.45	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	23.0	loan.unsecured
33	BAYER AG	Germany	Chemicals	0.40	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	10.0	bond
34	BAYERISCHE HYPO-UND VEREINSBANK AG	Germany	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	25.0	loan.unsecured
35	BCE INC.	Canada	Utilities	0.45	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	29.0	loan.unsecured
36	BERTELSMANN AG	Germany	Broadcasting/Media/Cable	0.25	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	18.0	loan.unsecured
37	BRISTOL-MYERS SQUIBB CO.	United States	Health Care & Pharmaceuticals	0.45	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	29.0	loan.unsecured
38	BRITISH TELECOMMUNICATIONS PLC	United Kingdom	Telecommunications	0.45	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	29.0	loan.unsecured
39	CARLTON COMMUNICATIONS PLC	United Kingdom	Broadcasting/Media/Cable	0.25	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	20.0	loan.unsecured
40	CARNIVAL CORPORATION	United States	Gaming, Leisure & Entertainment	0.45	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	37.0	loan.unsecured
41	CASINO GUICHARD PERRACHON SA	France	Supermarkets & Drugstores	0.45	20 000 000 Sk	A1	A+	0,56%	5	44.0	loan.unsecured
42	CENDANT CORP.	United States	Business Services	0.25	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	21.0	loan.unsecured
43	CIE DE SAINT-GOBAIN	France	Building & Materials	0.35	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	40.0	loan.unsecured
44	CIT GROUP INC.	United States	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	42.0	loan.unsecured
45	CITIZENS COMMUNICATIONS COMPANY	United States	Telecommunications	0.45	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	33.0	loan.unsecured
46	COMMERZBANK AG	Germany	Banking & Finance	0.40	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	40.0	bond
47	COMPUTER ASSOCIATES INTERNATIONAL INC.	United States	Business Services	0.45	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	15.0	loan.unsecured
48	COMPUTER SCIENCES CORP.	United States	Computers & Electronics	0.25	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	20.0	loan.unsecured
49	CONTINENTAL AG	Germany	Chemicals	0.35	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	43.0	loan.unsecured
50	COOP.CENTRALE RAIFFEISEN-BOERENLEENBANK BA	Netherlands	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	24.0	loan.unsecured
51	COOPER INDUSTRIES, INC.	United States	Computers & Electronics	0.35	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	28.0	loan.unsecured
52	COX COMMUNICATIONS, INC.	United States	Broadcasting/Media/Cable	0.45	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	28.0	loan.unsecured
53	CREDIT SUISSE 1ST. BOSTON BANK	United States	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	30.0	loan.unsecured
54	DAIMLERCHRYSLER AG	Germany	Automobiles	0.25	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	24.0	loan.unsecured
55	DELPHI CORPORATION	United States	Computers & Electronics	0.45	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	50.0	loan.unsecured
56	DEUTSCHE LUFTHANSA AG	Germany	Transportation	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	49.0	loan.unsecured
57	DEUTSCHE TELEKOM AG	Germany	Telecommunications	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	25.0	loan.unsecured
58	DOMINION VIRGINIA POWER	United States	Energy	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	36.0	loan.unsecured
59	DOW CHEMICAL COMPANY	United States	Chemicals	0.30	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	45.5	bond

No.	Credit	Country	Industry Class	Recovery Rate	Notional	Moody's Rating	S&P Rating	Probability of Default (in 5 Years)	Maturity	Swap Rate	Type
60	DRESDNER BANK AG	Germany	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	30.0	loan.unsecured
61	DUKE CAPITAL CORP.	United States	Energy	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	37.0	loan.unsecured
62	E.ON AG	Germany	Energy	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	53.0	loan.unsecured
63	ELECTRICIDADE DE PORTUGAL SA	Portugal	Energy	0.40	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	47.0	bond
64	ELECTRICITE DE FRANCE	France	Energy	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	18.0	loan.unsecured
65	ELECTRONIC DATA SYSTEMS CORPORATION	United States	Utilities	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	125.0	loan.unsecured
66	ENDESA SA	Spain	Energy	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	56.0	loan.unsecured
67	EOP OPERATING LP	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	29.0	loan.unsecured
68	ERGO VERSICHERUNGSGRUPPE AG	Germany	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	220.0	loan.unsecured
69	EXXON MOBIL CORPORATION	United States	Energy	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	24.0	loan.unsecured
70	FANNIE MAE	United States	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	28.0	loan.unsecured
71	FINANCIAL SECURITY ASSURANCE INC.	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	80.0	loan.unsecured
72	FINMECCANICA SPA	Italy	Aerospace & Defense	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	100.0	loan.unsecured
73	FKI PLC	United Kingdom	Consumer Products	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	80.0	loan.unsecured
74	FORD MOTOR CREDIT COMPANY	United States	Automobiles	0.15	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	30.0	loan.unsecured
75	FORTUM POWER & HEAT AB	Finland	Energy	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	75.0	loan.unsecured
76	FRANCE TELECOM SA	France	Telecommunications	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	27.0	loan.unsecured
77	FREDDIE MAC	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	62.0	loan.unsecured
78	FUJITSU LIMITED	Japan	Computers & Electronics	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	40.0	loan.unsecured
79	GENERAL ELECTRIC CAPITAL CORPORATION	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	62.0	loan.unsecured
80	GENERAL MOTORS ACCEPTANCE CORP.	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	30.0	loan.unsecured
81	GOLDMAN SACHS GROUP INC.	United States	Banking & Finance	0.15	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	65.0	loan.unsecured
82	GOODRICH CORP.	United States	Industrial/Manufacturing	0.35	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	31.0	loan.unsecured
83	HAMMERSON PLC	United Kingdom	Real Estate	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	24.0	loan.unsecured
84	HANNOVER RUECKVERSICHERUNGS AG	Germany	Banking & Finance	0.15	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	37.0	bond
85	HANSON PLC	United Kingdom	Building & Materials	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	32.0	loan.unsecured
86	HARTFORD FINANCIAL SERVICES GROUP	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	43.0	loan.unsecured
87	HEIDELBERGER ZEMENT FINANCE	Germany	Building & Materials	0.45	20 000 000 Sk	A3	A-	0,92%	5	35.0	loan.unsecured
88	HERTZ CORPORATION	United States	Transportation	0.45	20 000 000 Sk	Aa1	AA+	0,19%	5	10.0	loan.unsecured
89	HEWLETT-PACKARD COMPANY	United States	Computers & Electronics	0.20	20 000 000 Sk	Aa1	AA+	0,19%	5	17.0	bond
90	HILTON GROUP PLC	United Kingdom	Lodging & Restaurants	0.15	20 000 000 Sk	Aa1	AA+	0,19%	5	15.0	loan.unsecured
91	HOUSEHOLD FINANCE CORP.	United States	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Aa2	AA	0,26%	5	28.0	loan.unsecured

No.	Credit	Country	Industry Class	Recovery Rate	Notional	Moodys Rating	S&P Rating	Probability of Default (in 5 Years)	Maturity	Swap Rate	Type
92	HUTCHISON WHAMPOA LTD.	Hong Kong	Energy, Telecommunications	0.20	20 000 000 Sk	Aa2	AA	0,26%	5	17.0	bond
93	CHIRON CORPORATION	United States	Health Care & Pharmaceuticals	0.45	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	17.0	loan.unsecured
94	CHUBB CORPORATION	United States	Banking & Finance	0.20	20 000 000 Sk	A2	A	0,62%	5	39.0	bond
95	ING GROEP NV	Netherlands	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Aa2	AA	0,26%	5	8.0	loan.unsecured
96	INVESTOR AB	Sweden	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Aa2	AA	0,26%	5	48.0	loan.unsecured
97	ISRAEL ELECTRIC CORP. LTD.	Israel	Energy	0.15	20 000 000 Sk	Aa2	AA	0,26%	5	15.0	loan.unsecured
98	ITOHAM FOOD INC.	Japan	Food, Beverage & Tobacco	0.35	20 000 000 Sk	Aa2	AA	0,26%	5	10.0	loan.unsecured
99	JOHNSON & JOHNSON	United States	Health Care & Pharmaceuticals	0.35	20 000 000 Sk	Aa2	AA	0,26%	5	12.0	loan.unsecured
100	KANSAI ELECTRIC POWER COMPANY INC.	Japan	Energy	0.45	20 000 000 Sk	Aa2	AA	0,26%	5	14.0	loan.unsecured
101	KIMBERLY-CLARK CORPORATION	United States	Paper & Forest Products	0.35	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	30.0	loan.unsecured
102	KINDER MORGAN ENERGY PARTNERS, L.P.	United States	Utilities	0.45	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	30.0	loan.unsecured
103	KNIGHT-RIDDER, INC.	United States	Paper & Forest Products	0.25	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	19.0	loan.unsecured
104	KONINKLIJKE AHOLD NV	Netherlands	Supermarkets & Drugstores	0.15	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	15.0	loan.unsecured
105	KONINKLIJKE PHILIPS ELECTRONICS NV	Netherlands	Computers & Electronics	0.45	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	29.0	loan.unsecured
106	KOREA TELECOM CORPORATION	Korea	Telecommunications	0.15	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	18.0	loan.unsecured
107	LAFARGE SA	France	Building & Materials	0.45	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	30.0	loan.unsecured
108	LANDESBANK HESSEN-THUERINGEN GIROZENTRALE	Germany	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	10.0	loan.unsecured
109	LEGAL & GENERAL GROUP PLC	United Kingdom	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	22.0	loan.unsecured
110	LEHMAN BROTHERS HOLDINGS INCORPORATED	United States	Banking & Finance	0.40	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	34.0	bond
111	LEND LEASE CORPORATION LIMITED	Australia	Real Estate	0.25	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	17.0	loan.unsecured
112	LIBERTY MEDIA CORPORATION	United States	Broadcasting/Media/Cable	0.45	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	18.0	loan.unsecured
113	LIMITED BRANDS	United States	Textiles & Furniture	0.15	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	7.0	loan.unsecured
114	LLOYDS TSB BANK PLC	United Kingdom	Banking & Finance	0.15	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	15.0	loan.unsecured
115	LOEWS CORPORATION	United States	Food, Beverage & Tobacco	0.20	20 000 000 Sk	Aa3	AA-	0,36%	5	17.0	bond
116	LVMH MOET HENNESSY LOUIS VUITTON SA	France	Consumer Products	0.45	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	25.0	loan.unsecured
117	MALAYAN BANKING BERHAD	Malaysia	Banking & Finance	0.35	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	2.0	loan.unsecured
118	MAN GROUP PLC	United Kingdom	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	10.0	loan.unsecured
119	MAY DEPARTMENT STORES COMPANY	United States	Supermarkets & Drugstores	0.45	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	7.0	loan.unsecured
120	MAYNE GROUP LTD.	Australia	Health Care & Pharmaceuticals	0.45	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	23.0	loan.unsecured
121	MBIA INC.	United States	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	24.0	loan.unsecured
122	MBNA CORPORATION	United States	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	28.0	loan.unsecured
123	MEDIOBANCA SPA	Italy	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	8.0	loan.unsecured

No.	Credit	Country	Industry Class	Recovery Rate	Notional	Moody's Rating	S&P Rating	Probability of Default (in 5 Years)	Maturity	Swap Rate	Type
124	MEDTRONIC INC.	United States	Health Care & Pharmaceuticals	0.45	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	5.0	loan.unsecured
125	MERCK & CO INC.	United States	Health Care & Pharmaceuticals	0.45	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	7.0	loan.unsecured
126	MERRILL LYNCH & CO.	United States	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	7.0	loan.unsecured
127	METRO AG	Germany	Supermarkets & Drugstores	0.45	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	5.0	loan.unsecured
128	MITSUMI SUMITOMO INSURANCE, LIMITED	Japan	Banking & Finance	0.35	20 000 000 Sk	Aaa	AAA	0,05%	5	4.0	loan.unsecured
129	MIZUHO CORPORATE BANK	Japan	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	B1	B+	17,09%	5	180.0	loan.unsecured
130	MMO2 PLC	United Kingdom	Telecommunications	0.45	20 000 000 Sk	Ba1	BB+	5,74%	5	300.0	loan.unsecured
131	MORGAN STANLEY	United States	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Ba3	BB-	12,50%	5	230.0	loan.unsecured
132	MOTOROLA INC.	United States	Telecommunications	0.15	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	50.0	loan.unsecured
133	MUENCHENER RUECKVERSICHERUNGS AG	Germany	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	45.0	loan.unsecured
134	NATIONAL GRID TRANSCO PLC	United Kingdom	Energy	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	68.0	loan.unsecured
135	NATIONWIDE FINANCIAL FUNDING LLC	United States	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	41.0	loan.unsecured
136	NEC CORPORATION	Japan	Computers & Electronics	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	60.0	loan.unsecured
137	NIPPON MEAT PACKERS, INC.	Japan	Food, Beverage & Tobacco	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	45.0	loan.unsecured
138	NIPPON TELEGRAPH AND TELEPHONE CORP. (NTT)	Japan	Telecommunications	0.40	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	62.5	bond
139	NORGES STATSBANER BA	Norway	Transportation	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	20.0	loan.unsecured
140	NOVARTIS AG	Switzerland	Health Care & Pharmaceuticals	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	47.0	loan.unsecured
141	NTT DOCOMO INC.	Japan	Telecommunications	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	31.0	loan.unsecured
142	OLIVETTI SPA (TECNOST)	Italy	Telecommunications	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	48.0	loan.unsecured
143	OMNICOM GROUP	United States	Broadcasting/Media/Cable	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	31.0	loan.unsecured
144	ORANGE PLC	United Kingdom	Telecommunications	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	1.0	loan.unsecured
145	PARMALAT SPA	Italy	Food, Beverage & Tobacco	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	98.0	loan.unsecured
146	PETROLIAM NASIONAL BERHAD	Malaysia	Energy	0.35	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	32.0	loan.unsecured
147	PFIZER INCORPORATED	United States	Health Care & Pharmaceuticals	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	47.0	loan.unsecured
148	PINAULT-PRINTEMPS-REDOUTE SA	France	Supermarkets & Drugstores	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	280.0	loan.unsecured
149	PITNEY BOWES INC.	United States	Utilities	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	15.0	loan.unsecured
150	PORTUGAL TELECOM INTERNAT.FINANCE BV	Portugal	Telecommunications	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	35.0	loan.unsecured
151	PROMISE CO. LTD.	Hong Kong	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	35.0	loan.unsecured
152	PRUDENTIAL PLC	United Kingdom	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	45.0	loan.unsecured
153	PUBLISHING & BROADCASTING LIMITED	Australia	Broadcasting/Media/Cable	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	30.0	loan.unsecured
154	QANTAS AIRWAYS LTD.	Australia	Transportation	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	35.0	loan.unsecured
155	RADIOSHACK CORPORATION	United States	Retail (General)	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	63.0	loan.unsecured
156	RANK GROUP FINANCE PLC	United Kingdom	Gaming, Leisure & Entertainment	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	32.0	loan.unsecured
157	RENAULT SA	France	Automobiles	0.20	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	125.0	bond

No.	Credit	Country	Industry Class	Recovery Rate	Notional	Moodys Rating	S&P Rating	Probability of Default (in 5 Years)	Maturity	Swap Rate	Type
158	REPSOL YPF SA	Spain	Chemicals	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	42.0	loan.unsecured
159	REPUBLIC OF KOREA	Korea	Consumer Products	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	44.0	loan.unsecured
160	REUTERS GROUP PLC	United Kingdom	Business Services	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	45.0	loan.unsecured
161	ROLLS-ROYCE PLC	United Kingdom	Aerospace & Defense	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	43.0	loan.unsecured
162	RWE AG	Germany	Utilities	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	43.0	loan.unsecured
163	SAFeway PLC	United Kingdom	Retail (General)	0.15	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	50.0	loan.unsecured
164	SALLIE MAE	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	29.0	loan.unsecured
165	SAMSUNG ELECTRONICS COMPANY, LIMITED	Korea	Computers & Electronics	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	54.0	loan.unsecured
166	SCANIA AB	Sweden	Automobiles	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	33.0	loan.unsecured
167	SEARS ROEBUCK ACCEPTANCE	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	45.0	loan.unsecured
168	SECURITAS AB	Sweden	Business Services	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	33.0	loan.unsecured
169	SEMPRA ENERGY	United States	Energy	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	20.0	loan.unsecured
170	SIEMENS AG	Germany	Computers & Electronics	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	32.0	loan.unsecured
171	SIMON PROPERTY GROUP INC.	United States	Real Estate	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	45.0	loan.unsecured
172	SINGAPORE TELECOMMUNICATIONS LTD.	Singapore	Telecommunications	0.20	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	36.0	bond
173	SIX CONTINENTS PLC	United Kingdom	Lodging & Restaurants	0.35	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	43.0	loan.unsecured
174	SMITHS GROUP PLC	United Kingdom	Computers & Electronics	0.15	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	30.0	bond
175	SOL MELIA SA	Spain	Lodging & Restaurants	0.35	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	48.0	loan.unsecured
176	SOMPO JAPAN INSURANCE INC.	Japan	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	38.0	loan.unsecured
177	SPRINT CORPORATION	United States	Telecommunications	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	48.0	loan.unsecured
178	STMICROELECTRONICS NV	Switzerland	Computers & Electronics	0.45	20 000 000 Sk	Baa1	BBB+	1,20%	5	48.0	loan.unsecured
179	SUEZ SA	France	Energy	0.45	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	200.0	loan.unsecured
180	SUN MICROSYSTEMS, INC.	United States	Computers & Electronics	0.45	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	46.0	loan.unsecured
181	SWISS REINSURANCE	Switzerland	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	85.0	loan.unsecured
182	TAKEFUJI CORPORATION	Japan	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	71.0	loan.unsecured
183	TDC A/S	Denmark	Telecommunications	0.45	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	45.0	loan.unsecured
184	TECO ENERGY INC.	United States	Energy	0.45	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	50.0	loan.unsecured
185	TELECOM CORP. OF NEW ZEALAND LTD.	New Zealand	Telecommunications	0.45	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	145.0	loan.unsecured
186	TELECOM ITALIA SPA	Italy	Telecommunications	0.45	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	52.0	loan.unsecured
187	TELEFONICA SA	Spain	Telecommunications	0.25	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	47.0	loan.unsecured
188	TELEKOMUNIKACJA POLSKA SA	Poland	Telecommunications	0.15	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	60.0	loan.unsecured
189	TELENOR ASA	Norway	Telecommunications	0.45	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	265.0	loan.unsecured
190	TELSTRA CORP. LTD.	Australia	Telecommunications	0.25	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	48.0	loan.unsecured
191	TENAGA NASIONAL BERHAD	Malaysia	Energy	0.15	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	50.0	loan.unsecured
192	TEXAS INSTRUMENTS INC.	United States	Computers & Electronics	0.35	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	56.0	loan.unsecured
193	TEXTRON INC.	United States	Aerospace & Defense	0.45	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	69.0	loan.unsecured
194	THAMES WATER PLC	United Kingdom	Utilities	0.25	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	59.0	loan.unsecured

No.	Credit	Country	Industry Class	Recovery Rate	Notional	Moodys Rating	S&P Rating	Probability of Default (in 5 Years)	Maturity	Swap Rate	Type
195	THE BANK OF TOKYO-MITSUBISHI LTD.	Japan	Banking & Finance	0.15	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	35.0	loan.unsecured
196	THE BOEING CO.	United States	Aerospace & Defense	0.35	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	50.0	loan.unsecured
197	THE HOME DEPOT, INCORPORATED	United States	Building & Materials	0.25	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	56.0	loan.unsecured
198	THE INTERPUBLIC GROUP OF COMPANIES INC.	United States	Business Services	0.35	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	43.0	loan.unsecured
199	THE TOKIO MARINE & FIRE INSURANCE, LTD.	Japan	Banking & Finance	0.35	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	40.0	loan.unsecured
200	THOMSON MULTIMEDIA	France	Consumer Products	0.25	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	45.0	loan.unsecured
201	THYSSENKRUPP AG	Germany	Industrial/Manufacturing	0.25	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	56.0	loan.unsecured
202	TOKYO ELECTRIC POWER COMPANY, INC.	Japan	Energy	0.25	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	80.0	loan.unsecured
203	TOTALFINAELF SA	France	Energy	0.35	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	55.0	loan.unsecured
204	TRIBUNE COMPANY	United States	Broadcasting/Media/Cable	0.25	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	38.0	loan.unsecured
205	UFJ BANK LIMITED (USD)	Japan	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	315.0	loan.unsecured
206	UNICREDITO ITALIANO SPA	Italy	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	Baa2	BBB	1,89%	5	48.0	loan.unsecured
207	UNION FENOSA SA	Spain	Energy	0.45	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	185.0	loan.unsecured
208	UNITED BUSINESS MEDIA PLC	United Kingdom	Utilities	0.25	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	51.0	loan.unsecured
209	UNITED UTILITIES WATER PLC	United Kingdom	Utilities	0.45	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	100.0	loan.unsecured
210	USINOR SA	France	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	55.0	loan.unsecured
211	VEOLIA ENVIRONNEMENT	France	Utilities	0.45	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	230.0	loan.unsecured
212	VERIZON GLOBAL FUNDING CORPORATION	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	120.0	loan.unsecured
213	VIENNA CITY OF	Austria	Consumer Products	0.35	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	57.0	loan.unsecured
214	VISTEON CORPORATION	United States	Automobiles	0.45	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	82.0	loan.unsecured
215	VNU NV	Netherlands	Broadcasting/Media/Cable	0.45	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	145.0	loan.unsecured
216	VODAFONE GROUP PLC	United Kingdom	Telecommunications	0.25	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	120.0	loan.unsecured
217	VOLKSWAGEN AG	Germany	Automobiles	0.45	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	85.0	loan.unsecured
218	WAL-MART STORES INC.	United States	Supermarkets & Drugstores	0.15	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	25.0	loan.unsecured
219	WALT DISNEY COMPANY	United States	Gaming, Leisure & Entertainment	0.25	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	57.0	loan.unsecured
220	WASHINGTON MUTUAL BANK FA	United States	Banking & Finance	0.25	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	45.0	loan.unsecured
221	WHARF HOLDINGS	Hong Kong	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	114.0	loan.unsecured
222	WOLTERS KLUWER NV	Netherlands	Consumer Products	0.45	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	105.0	loan.unsecured
223	WPP GROUP PLC	United Kingdom	Broadcasting/Media/Cable	0.25	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	60.0	loan.unsecured
224	WYETH	United States	Health Care & Pharmaceuticals	0.45	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	210.0	loan.unsecured
225	ZURICH INSURANCE CO.	Switzerland	Banking & Finance	0.45	20 000 000 Sk	Baa3	BBB-	3,63%	5	145.0	loan.unsecured