

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



GARCH modely a Value-at-Risk aplikácie
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2006

Jana Krátka

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



GARCH modely a Value-at-Risk aplikácie

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Jana Krátka

Vedúca diplomovej práce: Dr. Zuzana Siebertová

Študijný odbor: Matematika
Špecializácia: Ekonomická a finančná matematika

Bratislava 2006

Čestne prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracovala samostatne s využitím teoretických vedomostí a s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, apríl 2006

Jana Krátka

Podakovanie

Ďakujem vedúcej diplomovej práce Dr. Zuzane Siebertovej za všetky cenné rady a pripomienky, za odborné vedenie a za všetok čas a ochotu, ktoré mi venovala počas vypracovávania diplomovej práce.

Abstrakt

Cieľom diplomovej práce je spracovať problematiku Value-at-Risk (VaR) s aplikáciou na reálne dáta. Zaoberať sa budeme metódou historickej simulácie, RiskMetricsTM metodológiou, ťažiskom práce je však modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov vybraných akciových indexov pomocou GARCH modelov a následné určenie VaR. Na rozdiel od predchádzajúcich dvoch metód, ktoré sa bežne používajú vo finančných inštitúciách na odhad trhového rizika, GARCH modely sa v praxi používajú zatiaľ len málo, ale záujem o ne stále viac rastie, pretože sú dynamické a zároveň sú silným nástrojom na modelovanie podmienenej volatility meniacej sa s časom, ktorá je typická pre výnosy finančných aktív. Modely otestujeme na siedmich portfóliach pozostávajúcich z vybraných svetových a stredoeurópskych akciových indexov.

Kľúčové slová: Value-at-Risk, GARCH, EGARCH, TARCH, zhlukovanie volatility, leverage effect, akciový index, RiskMetrics, metóda historickej simulácie

Obsah

Úvod	7
1 Value-at-Risk (VaR)	8
1.1 Základné pojmy	8
1.1.1 Definícia rizika	8
1.1.2 Definícia VaR	9
1.1.3 Pravdepodobnostná schéma VaR	9
1.2 VaR metodológie	13
1.2.1 Neparametrické metódy	14
1.2.2 Semiparametrické metódy	16
1.2.3 Parametrické metódy	16
2 Špecifikácia modelov	19
2.1 Základné pojmy	19
2.1.1 Výnosy finančných aktív a ich charakteristika	19
2.1.2 Volatilita na finančných trhoch	22
2.2 Konštrukcia modelu metódy historickej simulácie	26
2.3 Model pre podmienené rozdelenie výnosov	27
2.3.1 Rovnica podmienenej strednej hodnoty	28
2.3.2 Rovnica podmienenej variancie	29
2.3.3 Určenie 1-krokových (<i>1-step ahead</i>) predikcií podmienenej strednej hodnoty a podmienenej variancie výnosov	33
2.3.4 Výpočet VaR	34
2.4 RiskMetrics	35
2.5 Hustota podmieneného rozdelenia výnosov	37
2.5.1 Podmienené normálne rozdelenie	37
2.5.2 Studentovo t-rozdelenie	37
2.6 Testovanie modelov (<i>Backtesting</i>)	38
2.6.1 Kupiecov test	38
2.6.2 Christoffersenov test	39
2.6.3 Kupiecov <i>TUFF</i> test (<i>Time until First Failure</i>)	40
2.6.4 Kupiecov <i>mixed</i> test	40

3	Empirická analýza	42
3.1	Aplikácia navrhnutých modelov na reálne dáta	42
3.1.1	Charakteristika výnosov vybraných akciových indexov	43
3.1.2	Modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov vybraných akciových indexov	46
3.1.3	Výpočet VaR	51
3.2	Testovanie modelov	57
	Záver	61
	Literatúra	62
	Príloha	64

Úvod

Obchodovanie na finančných trhoch prináša so sebou možnosť zisku i krachu. Zvlášť v poslednej dobe sa stala páľčivou otázkou, koľko maximálne môžeme stratiť s určitou pravdepodobnosťou, ak investujem do daného aktíva. Odpoveďou na túto otázku je Value-at-Risk (VaR), ktorá predstavuje štandardný nástroj na meranie trhového rizika, v súčasnosti mimoriadne obľúbený v rizikovom managmente.

Diplomová práca pozostáva z troch kapitol. Prvá kapitola obsahuje základné informácie a charakteristiku VaR. V tejto časti zdefinujeme pravdepodobnostnú schému VaR, s ktorou budeme ďalej pracovať. Kapitola zároveň obsahuje stručný prehľad VaR metodológií a krátku charakteristiku metódy historickej simulácie, RiskMetricsTM metodológie a parametrickej metódy na výpočet VaR, založenej na modelovaní podmieneného rozdelenia výnosov finančných aktív pomocou GARCH modelov.

Druhá kapitola obsahuje na začiatku charakteristiku výnosov finančných aktív a ich variancie, resp. volatility. Jadrom kapitoly je špecifikácia modelov, ktoré použijeme na výpočet VaR. Popri metóde historickej simulácie sa dôraz kladie na modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov pomocou GARCH modelov a následného určenia VaR práve za takéhoto prístupu. V tejto časti podrobnejšie charakterizujeme vybrané GARCH modely a ukážeme si, ako pomocou nich možno modelovať podmienenú varianciu výnosov. Záver kapitoly je venovaný prehľadu testov určených na spätné testovanie, tzv. *backtesting* modelov na výpočet VaR, ktoré použijeme v empirickej časti.

Tretou kapitolou je samotná empirická analýza, ktorú robíme na siedmich portfóliach pozostávajúcich z vybraných svetových a stredoeurópskych akciových indexov. Súčasťou tejto analýzy je množstvo výsledkov, ktoré sú zhrnuté v tabuľkách v prílohe.

Kapitola 1

Value-at-Risk (VaR)

1.1 Základné pojmy

Ceny finančných aktív a ich derivátov sa na finančných trhoch väčšinou pohybujú tak, že ich dokážeme s určitou (obvykle relatívne vysokou) pravdepodobnosťou správne odhadnúť a namodelovať. Zriedkavým, o to však dôležitejším prípadom býva prudký a nečakaný pokles alebo nárast v cene aktíva. Práve kvôli svojej nepredvídateľnosti tieto extrémne pohyby cien výrazne zvyšujú riziko finančných inštitúcií. Sú príčinou vzniku niekoľkých veľkých finančných kríz v posledných desaťročiach; najväčšiu pozornosť vedcov i odborníkov z praxe si vynútil krach finančnej burzy na Wall Street v októbri 1987. Výsledkom mnohých diskusií o trhovom riziku, ktoré vyvolali tieto finančné krízy, sa stala práve Value-at-Risk (VaR). VaR predstavuje štandardný nástroj, ktorý finanční analytici používajú na kvantifikáciu trhového rizika, momentálne veľmi rozšírený a obľúbený v rizikovom managmente. O VaR, o spôsoboch jej výpočtu a o jej využití v praxi si povieme viac v tejto práci.

1.1.1 Definícia rizika

Riziko môžeme zjednodušene definovať ako stupeň (mieru) neistoty budúcich čistých výnosov. Táto neistota sa môže vyskytovať v rôznych formách a podobách, dôsledkom čoho je väčšina účastníkov na finančných trhoch vystavená celej škále rizík.

Všeobecná klasifikácia rizika odráža základné zdroje tejto neistoty. Na základe toho literatúra¹ rozlišuje štyri hlavné typy rizika:

1. Kreditné riziko (*credit risk*) odhaduje možnú stratu v dôsledku neschopnosti proti-strany splniť svoje záväzky. Zahŕňa v sebe pravdepodobnosť nesolventnosti (default risk) a stratu v prípade, že by k nej došlo.
2. Operačné riziko (*operational risk*) je výsledkom chýb, ktoré môžu nastať pri vykonávaní platieb a transakcií. Jeho súčasťou je riziko vyplývajúce zo sprenevery a

¹Vid' *RiskMetrics-Technical Document* (1996), Manganelli (2001).

regulačné riziko.

3. Likvidné riziko (*liquidity risk*) vzniká z neschopnosti firmy kryť svoje nelikvidné aktíva. Je spôsobené neočakávaným veľkým záporným tokom peňazí v krátkodobom horizonte. Ak má firma prevažne nelikvidné aktíva a náhle potrebuje likvidné, podstupuje riziko, že bude donútená predat' časť svojich aktív za zníženú cenu.
4. Trhové riziko (*market risk*) v sebe zahŕňa neistotu budúcich výnosov, ktorá je výsledkom zmien v trhových podmienkach (napr. ceny aktív, úrokové miery). Spomedzi uvedených štyroch typov rizika má práve trhové riziko popredné miesto, pretože odráža potenciálnu ekonomickú stratu spôsobenú poklesom trhovej hodnoty portfólia. V posledných rokoch sa synonymom miery trhového rizika stal pojem Value-at-Risk.

1.1.2 Definícia VaR

Value-at-Risk vyjadruje maximálnu možnú zmenu hodnoty portfólia finančných inštrumentov pri danej pravdepodobnosti (hladine spoľahlivosti) v dopredu určenom časovom horizonte.

VaR pravdepodobnostne opisuje trhové riziko obchodovaného portfólia a je tak odpoveďou na otázku: koľko môžem stratiť s $x\%$ -nou pravdepodobnosťou v danom časovom horizonte?²

Uvažujme napr., že K je hodnota 1-dňovej VaR pri 99%-nej hladine spoľahlivosti. To znamená, že s 99%-nou pravdepodobnosťou bude mať uvažované portfólio o 1 deň stratu menšiu ako alebo rovnú K . Inak povedané, dané portfólio bude mať o 1 deň stratu väčšiu ako K s pravdepodobnosťou 1%. VaR môžeme teda interpretovať dvoma spôsobmi: ako maximálnu možnú stratu finančnej pozície v danom časovom období pri danej pravdepodobnosti, spojenú so zriedkavou (alebo výnimočnou) udalosťou za predpokladu normálnych trhových podmienok, alebo ako minimálnu možnú stratu za výnimočných trhových okolností.

Výhoda VaR spočíva v jej jednoduchosti. Zahŕňa v sebe všetky zložky trhového rizika daného portfólia; je to jedna číselná hodnota. Vďaka tomu je dnes takým obľúbeným nástrojom rizikového manažmentu finančných inštitúcií. VaR vlastne slúži na to, aby finančnej inštitúcii zabezpečila fungovanie na trhu aj po prípadnej katastrofickej udalosti.

1.1.3 Pravdepodobnostná schéma VaR

Predpokladajme, že v čase t máme portfólio zložené z jedného alebo viacerých finančných aktív, ktorého súčasná hodnota je $V(t)$. Ďalej predpokladajme, že nás zaujíma riziko finančnej pozície na najbližších l periód. Nech $\Delta V(l)$ je zmena hodnoty portfólia z času t do $t+l$. Táto zmena sa meria v množstve peňažných jednotiek, napr. v USD, EUR, SKK, a je náhodnou veličinou v čase t . Označme $F_l(x)$ distribučnú funkciu náhodnej premennej $\Delta V(l)$.

²Vid' *RiskMetrics-Technical Document* (1996), str. 6.

VaR long pozície

VaR long pozície³ v časovom horizonte l s pravdepodobnosťou p definujeme nasledovne:

$$p = Pr[\Delta V(l) \leq VaR] = F_l(VaR) \quad (1.1)$$

Držiteľ long pozície utrpí stratu, keď $\Delta V(l) < 0$. Preto budeme predpokladať, že pre malé hodnoty p nadobúda VaR definovaná výrazom (1.1) zápornú hodnotu. Záporné znamienko bude v tomto prípade znamenať stratu. Z definície máme, že pravdepodobnosť toho, že držiteľ bude mať stratu väčšiu alebo rovnú VaR v časovom horizonte l , je p . Alternatíva interpretácie VaR je nasledovná: S pravdepodobnosťou $1 - p$ bude mať držiteľ finančnej pozície v časovom horizonte l stratu menšiu alebo rovnú VaR.

VaR short pozície

VaR short pozície⁴ v časovom horizonte l s pravdepodobnosťou p definujeme nasledovne:

$$p = Pr[\Delta V(l) \geq VaR] = 1 - Pr[\Delta V(l) \leq VaR] = 1 - F_l(VaR) \quad (1.2)$$

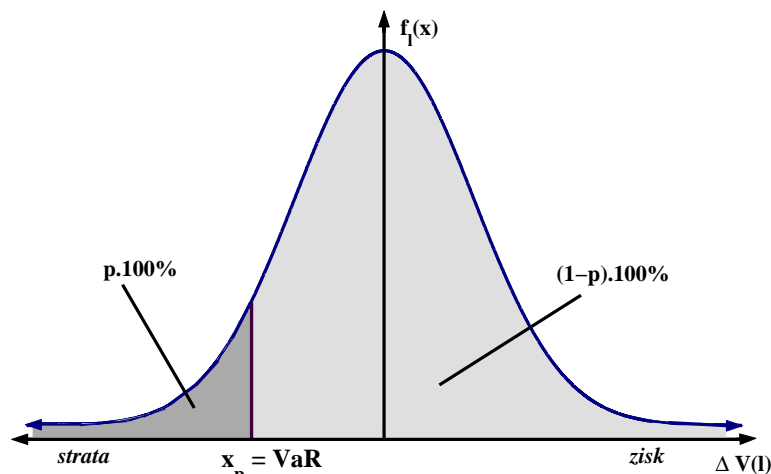
Držiteľ short pozície utrpí stratu, keď hodnota portfólia vzrastie, t.j. $\Delta V(l) > 0$. Preto predpokladáme, že pre malé hodnoty p nadobúda VaR short pozície definovaná výrazom (1.2) kladnú hodnotu. V tomto prípade kladné znamienko znamená stratu.

Z predchádzajúcich definícií je zrejmé, že VaR sa zaoberá správaním chvostov (kocov) distribučnej funkcie $F_l(x)$. V long pozícii je dôležitý ľavý chvost $F_l(x)$, zatiaľ čo short pozícia sa sústreďuje na pravý chvost $F_l(x)$. Všimnime si však, že definíciu VaR výrazom (1.1) možno aplikovať na short pozíciu, pokiaľ použijeme rozdelenie pre $-\Delta V(l)$. Preto budeme ďalej vždy uvažovať long pozíciu VaR (viď obrázok 1.1).

Pre ľubovoľnú distribučnú funkciu $F_l(x)$ a pravdepodobnosť p ($0 < p < 1$) sa číslo $x_p = \inf\{x; F_l(x) \geq p\}$ nazýva $p \cdot 100\%$ -ný kvantil $F_l(x)$. Ak distribučná funkcia výrazu (1.1) je známa, potom VaR je jednoducho jej $p \cdot 100\%$ -ný kvantil (t.j. $VaR = x_p$). V praxi však býva distribučná funkcia neznáma, preto sa štúdie VaR v podstate zaoberajú odhadom empirickej distribučnej funkcie a/alebo jej kvantilov, zvlášť správaním sa jej chvostov.

³Long pozícia (*z angl. long position*) znamená finančnú pozíciu, kedy daná osoba (držiteľ long pozície) nakúpi, a teda vlastní cenné papiere, kontrakty alebo komodity s očakávaním, že hodnota daného aktíva v budúcnosti vzrastie; ide o opak short pozície.

⁴Short pozícia (*z angl. short position*) je finančná pozícia, ktorá je výsledkom predaja cenných papierov, kontraktov alebo komodít. Vzniká vtedy, keď daná osoba (obchodník, držiteľ short pozície) očakáva, že cena nejakého aktíva v budúcnosti poklesne. Držiteľ short pozície predá cenné papiere, napr. akcie (také, o ktorých očakáva, že ich cena poklesne), ktoré nevlastní. Pred samotným predajom si ich musí požičať, aby ich mohol dodať kupujúcemu. Nakoniec ich musí kúpiť naspäť (ale už za zníženú cenu - v prípade, že jeho očakávanie bolo správne), aby ich mohol vrátiť naspäť a aby tak bola transakcia uzavretá.



Obrázok 1.1: Grafické znázornenie Value-at-Risk: $(1 - p) \cdot 100\%$ VaR

V praktických aplikáciách pri výpočte VaR uvažujeme nasledujúce faktory:

1. Pravdepodobnosť p (t.j. pravdepodobnosť, že strata portfólia \geq VaR), napr. $p = 0.01$ alebo $p = 0.05$. Číslo $1 - p$ budeme nazývať hladinou spoľahlivosti (*confidence level*), resp. hladinou významnosti (*significance level*) VaR.
2. Časový horizont l . Obvykle sa uvažuje 1 deň (ide o 1-dňovú VaR) alebo 10 dní (ide o 10-dňovú VaR).
3. Frekvencia dát - nemusí byť rovnaká ako časový horizont l . Často sa používajú denné dáta.
4. Distribučná funkcia $F_l(x)$ ⁵ alebo jej kvantily.
5. Veľkosť finančnej pozície alebo trhovú hodnotu portfólia V .

Poznámka 1.1 V literatúre sa môžeme stretnúť s dvoma ekvivalentnými alternatívami pre označenie VaR: napr. 99% VaR a 1% VaR. Týmto označením autori myslia tú istú VaR, a to VaR, ktorej hodnotu prekročí strata portfólia s pravdepodobnosťou 1%, resp. neprekročí s pravdepodobnosťou 99%. Aby nedošlo k nedorozumeniu, my v tejto práci budeme p označovať pravdepodobnosť, že strata portfólia presiahne VaR (strata portfólia \geq VaR), a hovoriť budeme o $(1 - p) \cdot 100\%$ VaR, teda o VaR pri $(1 - p) \cdot 100\%$ -nej hladine spoľahlivosti (resp. hladine významnosti).

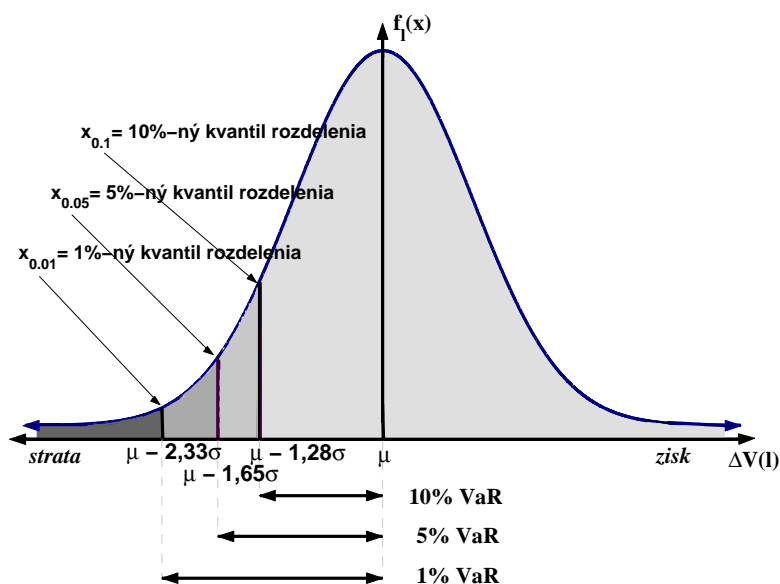
Poznámka 1.2 Stručne a zároveň výstižne popísanú pravdepodobnostnú schému VaR možno nájsť v Tsayovi (2002), str. 257–259. Treba si uvedomiť, že z tejto schémy sa v podstate vychádza pri všetkých ďalej spomínaných metódach na výpočet VaR, preto ju uvádzame hneď v prvej kapitole.

⁵V prípade $l = 1$ (1-dňová VaR) budeme distribučnú funkciu označovať $F(x)$.

Voľba uvedených faktorov, ktoré vstupujú do výpočtu VaR, výrazne ovplyvní výslednú hodnotu VaR. Voľba pravdepodobnosti p odzrkadľuje náš záujem, resp. možnosti pre presnosť pri určení maximálnej možnej straty, ktorú sme pri našom obchodovaní ochotní, resp. schopní podstúpiť. Je zrejmé, že s rastúcou presnosťou (klesajúcou hodnotou pravdepodobnosti p) sa bude tiež zvyšovať hodnota VaR.

Predstavme si, že máme portfólio, ktoré má dnes trhovú hodnotu V . Tvrdíme, že strata nášho portfólia zajtra s pravdepodobnosťou 5% neprekročí číslo $VaR_{0.05}$. Z nejakého dôvodu však potrebujeme vyššiu presnosť, a tak si určíme $VaR_{0.01}$, číslo predstavujúce maximálnu možnú stratu pri pravdepodobnosti 1%. „Daňou“ za vyššiu presnosť je vyššia hodnota VaR.

Poznámka 1.3 Vieme, že podľa vzťahu (averzie) k riziku sa investori delia do troch skupín: rizikovo averzní, rizikovo neutrálni a riziko obľubujúci. Uvažujme rizikovo averzného investora, ktorý pri svojom obchodovaní požaduje vysokú hladinu spoľahlivosti (napr. 99%). Maximálna možná strata (99% VaR), ktorú je pri obchodovaní ochotný podstúpiť, je výrazne vyššia, ako je maximálna možná strata (napr. 90% VaR), ktorú by bol ochotný podstúpiť menej rizikovo averzný investor obchodujúci s tým istým portfóliom. Vidíme, že druhý investor by mohol podstatne zvýšiť objem obchodov so svojím portfóliom a dosiahnuť tak pri intenzívnejšom obchodovaní s väčšími vyhlídkami na zisk tú istú maximálnu možnú stratu, ktorú je ochotný podstúpiť, ako viac rizikovo averzný investor - išlo by o to isté číslo, avšak pri podstatne rozdielnych hladinách spoľahlivosti. Platí tu stále to isté: nižšia averzia investora k riziku prináša investorovi širšie možnosti pre obchodovanie a zisk, avšak za cenu vyššej pravdepodobnosti krachu.



Obrázok 1.2: Grafické porovnanie VaR pri rôznych hladinách spoľahlivosti: 99% VaR, 95% VaR, 90% VaR, za predpokladu $\Delta V(l) \sim N(\mu, \sigma^2)$

Z obrázka 1.2 je zrejmé, že hodnota VaR rastie so znižujúcou sa pravdepodobnosťou p . VaR vo všeobecnosti stúpa aj s predlžujúcim sa časovým horizontom l , pretože neistota vyplývajúca z budúcej hodnoty portfólia rastie s dobou jeho držania.

Zjednodušený prehľad závislosti hodnoty VaR od zvolených hodnôt p a l ponúka tabuľka 1.1:

		časový horizont l (v dňoch)				
		1	...	10	...	30
$p = 0.01$						
$p = 0.05$			VaR		→	
$p = 0.1$			rastie		↑	
⋮						

Tabuľka 1.1: Rast VaR v závislosti od p a l

Voľba pravdepodobnosti p , resp. hladiny spoľahlivosti $1 - p$ závisí predovšetkým od účelu, pre ktorý sa výpočet VaR použije. Hladina spoľahlivosti $1 - p$ sa obvykle volí v rozmedzí 95% až 99%. Relatívne vysokú hodnotu hladiny spoľahlivosti požadujú regulačné výbory pri stanovení kapitálových požiadaviek pre banky (napr. Basel Committee (1996) odporúča 99%-nú hladinu spoľahlivosti), pre svoje vnútorné účely však banky zvyknú používať nižšiu hladinu spoľahlivosti (napr. RiskMetrics používa 95%-nú hladinu spoľahlivosti).

Voľba časového horizontu l závisí od povahy držaného aktíva a predovšetkým od času potrebného na zlikvidovanie finančnej pozície. Pri výpočte VaR sa predpokladá, že počas tohto časového horizontu sa hodnota portfólia nemení. Pre portfólia, s ktorými sa aktívne obchoduje, sa zvykne používať časový horizont jeden deň, zatiaľ čo pre menej likvidné aktíva, ktorých zlikvidovanie si vyžaduje dlhší čas, by sa mal používať dlhší časový horizont. Vo všeobecnosti sa najviac používa časový horizont v rozmedzí od jedného dňa po jeden mesiac. Basel Committee (1996) v rámci svojich kapitálových požiadaviek pre banky odporúča 10-dňový časový horizont.

1.2 VaR metodológie

Napriek tomu, že VaR sama osebe predstavuje jasnú a jednoduchú koncepciu, jej výpočet je náročným štatistickým problémom. Existuje viacero rôznych metodológií na jej určenie, ktoré sa líšia predovšetkým spôsobom, akým odhadujú rozdelenie výnosov (rozdelenie zmien hodnoty) portfólia. Inak však majú spoločnú všeobecnú štruktúru, ktorú možno sumárne zhrnúť do troch bodov: určenie trhovej hodnoty portfólia, odhad rozdelenia výnosov portfólia a samotný výpočet VaR.⁶

⁶Vid' Manganeli (2001), str. 7.

Literatúra rozdeľuje existujúce metódy na výpočet VaR do troch kategórií:

1. Neparametrické metódy (metóda historickej simulácie, Monte Carlo)
2. Semiparametrické metódy (teória extrémnych hodnôt, CAViaR)
3. Parametrické metódy (RiskMetrics, GARCH)

Centrom ekonometrického modelovania je distribučná funkcia $F_l(x)$. Rôzne metódy na odhadovanie $F_l(x)$ podnietili vznik rozličných prístupov na výpočet VaR, ktoré možno rozdeliť do uvedených troch kategórií. Niekoľkým z nich sa budeme venovať v ďalšom texte.

Ťažiskom tejto práce bude modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov pomocou GARCH modelov. Pozrieme sa však bližšie aj na to, ako možno VaR určiť metódou historickej simulácie a pomocou RiskMetrics.

1.2.1 Neparametrické metódy

Metóda historickej simulácie

Jednou z najobľúbenejších neparametrických metód na určenie VaR v praxi je metóda historickej simulácie. Na Slovensku ju používajú mnohé banky a finančné inštitúcie na odhadovanie a kvantifikovanie trhového rizika, ktoré podstupujú pri svojej činnosti. Je jednoduchá (čo sa týka naprogramovania, času výpočtu i pochopiteľnosti) a vzhľadom k tejto svojej jednoduchosti prináša celkom uspokojivé výsledky. V posledných rokoch sa však stala terčom viacerých kritík, napr. podľa Manganelliho (2001) „tento prístup drasticky zjednodušuje procedúru výpočtu VaR.“

Základná myšlienka metódy historickej simulácie je veľmi jednoduchá: použitím dostatočného (a zároveň vhodného, t.j. ani príliš malého, ani príliš veľkého) množstva skutočných historických dát určíme empirickú hustotu budúcich ziskov a strát portfólia. Výstupom metódy je teda časový rad potenciálnych ziskov a strát portfólia, ku ktorým by došlo v uvažovanom časovom horizonte v budúcnosti (napr. zajtra), a to v závislosti od skutočných denných odchyliet (zmien) v hodnote portfólia dodnes. VaR potom určíme ako $p \cdot 100$ %-ný kvantil zo získaného empirického rozdelenia, kde $1 - p$ je požadovaná hladina spoľahlivosti.

Použitím metódy historickej simulácie sa vyhneme predpokladom o rozdelení výnosov daného finančného aktíva, ktoré je niekedy veľmi problematické správne odhadnúť. Väčšina parametrických metód totiž predpokladá normálne rozdelenie výnosov, čo však nie je vždy v súlade s realitou. Rozdelenie finančných veličín má v skutočnosti obvykle odlišný priebeh než symetrické normálne rozdelenie⁷. Popri jednoduchšej aplikovateľnosti na dáta teda hlavná výhoda metódy historickej simulácie spočíva v tom, že nerobí žiadne predpoklady o rozdelení pravdepodobnosti rizikových faktorov.

⁷ Viď Kapitola 2, časť 2.1.1 Výnosy finančných aktív a ich charakteristika.

Jedným zo závažných problémov pri použití tejto metódy je problém voľby rozsahu dát. Manganelli (2001) hovorí o dvoch protichodných podmienkach, ktoré musí spĺňať rozsah dát: počet dát musí byť dostatočne veľký, aby naše štatistické závery boli signifikantné (odhad kvantilu je konzistentný, až keď sa počet dát blíži nekonečnu), a zároveň dát nesmie byť príliš veľa, aby sme sa vyhli riziku, že použijeme dáta, ktoré sú veľmi vzdialené do minulosti a už vôbec nezohľadňujú súčasný vývoj uvažovaného finančného aktíva. Ďalším problémom je, že negatívne ovplyvniť výpočet VaR môže jediná extrémna hodnota v dátach. Takže na to, aby výsledná VaR bola relevantná a aby to zároveň nebol žiadny extrémny prípad, treba byť pri výbere rozsahu dát veľmi opatrný.

Predstavme si napr. určenie 1-dňovej Var pri 99 % hladine spoľahlivosti. Pokiaľ by sme mali k dispozícii 100 dát, VaR by bola hneď prvá najvyššia strata (najnižší zisk) portfólia, čo vzhľadom k počtu dát je samozrejme nerelevantný výsledok. Ak by sme však na jej určenie použili dáta napr. z dvoch rokov, máme pri dennej frekvencii dát k dispozícii približne 500 pozorovaní (počet obchodovacích dní v roku je obvykle 250–252), a teda VaR pri 99 % hladine spoľahlivosti je až piata najvyššia očakávaná strata portfólia. V tomto prípade je už rozsah dát relatívne postačujúci a teda aj pravdepodobnosť toho, že do výpočtu nezahrnieme extrémne prípady, je podstatne vyššia, ako by bola pri použití 100 dát.

Na druhej strane, musíme si dať pozor, aby sme nepoužili príliš veľký počet dát. Zaujímá nás VaR o 1 deň a krátkodobý vývoj portfólia najlepšie popisujú najaktuálnejšie dáta. Ísť ďaleko do minulosti nám v tomto prípade môže veľmi skresliť výsledné empirické rozdelenie, pretože vývoj sledovaného finančného aktíva pred niekoľkými rokmi väčšinou vôbec neodzrkadľuje jeho vývoj dnes, kedy je ovplyvňovaný mnohokrát úplne rozdielnymi ekonomickými, sociálnymi a politickými podmienkami. Preto finančné inštitúcie používajú historické dáta najčastejšie v rozmedzí 2–5 rokov a všeobecne sa najviac odporúča rozpätie 6 mesiacov až 2–3 roky.⁸ Použiť menší alebo väčší počet dát nemá z uvedených dôvodov zmysel.

Metóda Monte Carlo

Ďalšou neparametrickou metódou, ktorá je veľmi podobná metóde historickej simulácie, je metóda Monte Carlo. Táto metóda modeluje stochastické procesy. Na rozdiel od metódy historickej simulácie, ktorá VaR počíta na základe historických dát, metóda Monte Carlo generuje náhodné scenáre - jej použitím získame veľký počet simulácií vývoja hodnoty portfólia, ktorý je určený veľkým počtom náhodne generovaných rizikových faktorov so známym rozdelením. Ďalej sa postupuje rovnako ako pri metóde historickej simulácie: zo získaných simulácií vytvoríme empirické rozdelenie budúcich ziskov a strát portfólia a VaR určíme ako jeho $p \cdot 100$ %-ný kvantil.

⁸Pri voľbe rozpätia dát treba brať do úvahy aj pravdepodobnosť p . Pre 1-dňovú 99 % VaR je 6 mesiacov málo, ako vidno aj z uvedeného príkladu.

1.2.2 Semiparametrické metódy

K semiparametrickým metódam patrí napr. teória extrémnych hodnôt⁹, ktorá predstavuje nový prístup k modelovaniu náhodných udalostí so zjavne iným ako normálnym rozdelením. Sústreďuje sa na opis a modelovanie extrémnych hodnôt, teda maxima a minima náhodnej udalosti.

K semiparametrickým metódam sa zaraďuje aj pomerne nový CAViaR model (*Conditional Autoregressive Value at Risk*), ktorý predstavil Engle a Manganelli (1999). Základnou pointou tohto prístupu je modelovať priamo vývoj kvantilu v čase, na rozdiel od prístupov, ktoré modelujú celé rozdelenie výnosov portfólia.

1.2.3 Parametrické metódy

Existuje viacero parametrických metód na výpočet VaR; tieto metódy využívajú na odhad potenciálnych budúcich ziskov a strát portfólia štatistiky o volatilitách a kovarianciách rizikových faktorov, ktoré sa určia z historických dát. Parametrický prístup je založený na predpoklade, že rozdelenie budúcich výnosov portfólia patrí do určitej parametrickej triedy, a takisto aj rozdelenie pravdepodobnosti potenciálnych budúcich zmien portfólia. Pre zjednodušenie sa často predpokladá normálne rozdelenie, čo však býva spojené s nevýhodami, o ktorých ešte budeme hovoriť.

V tejto časti sa zameriame na dve parametrické metódy: RiskMetricsTM metodológiu na výpočet VaR, ktorá sa dnes vo veľkej miere používa v praxi, ale najmä na ekonometrický prístup k výpočtu VaR pomocou GARCH modelov, ktoré sa síce v praxi používajú zatiaľ len veľmi málo, ale záujem o ne rastie stále viac, pretože sú silným nástrojom na modelovanie podmienenej volatility meniacej sa s časom, ktorá je charakteristická pre vývoj finančných aktív.

RiskMetrics

J.P. Morgan v spolupráci s Reuters vyvinuli RiskMetricsTM metodológiu na výpočet VaR, ktorá predstavuje výrazný krok napred v oblasti VaR modelov. RiskMetrics systém zostáva z metodológie vysvetľujúcej procedúry na výpočet VaR, ako aj z trhových dát a zo softwaru potrebného na výpočty. Prvá verzia RiskMetrics bola k dispozícii v roku 1994 a počas nasledujúcich dvoch rokov autori urobili ďalšie aktualizácie v metodológii i rozsahu dát. Vzhľadom k tomu, že celý systém bol voľne sprístupnený na internete, veľkou výhodou RiskMetrics sa stala práve dostupnosť rozsiahleho aparátu dát, ktoré môžu byť použité na určenie VaR. Na internete možno nájsť dáta¹⁰, a takisto aj plnú verziu *RiskMetrics Technical Document*¹¹, ktorý podrobne popisuje štatistické pozadie metodológie a

⁹ Aplikácie teórie extrémnych hodnôt na odhad VaR možno nájsť napr. v prácach autorov Danielsson a deVries (1998) alebo Gouriéroux a Jasak (1998).

¹⁰ www.riskmetrics.com; www.jpmorgan.com

¹¹ www.riskmetrics.com/techdoc.html

spôsob, akým možno dáta implementovať vo VaR modeloch. Ďalšou výhodou RiskMetrics je jednoduchosť tejto metódy, ľahká pochopiteľnosť a aplikovateľnosť. Vďaka uvedeným výhodám dnes mnohé banky a finančné inštitúcie najmä v zahraničí používajú vo svojom rizikovom managmente na výpočet VaR práve metódy založené na RiskMetrics.

RiskMetrics systém aplikuje na odhad rozdelenia výnosov portfólia metódu EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average* - exponenciálne vážené kĺzavé priemery), na základe ktorej majú pozorovania bližšie k súčasnosti vyššiu vypovedaciu hodnotu ako vzdialenejšie pozorovania: váha pozorovania klesá exponenciálne, čím viac ideme do minulosti. Nevýhodou EWMA je, že podobne ako mnoho iných prístupov predpokladá, že výnosy portfólia sledujú podmienené normálne rozdelenie. Vieme však, že výnosy finančných aktív zvyknú mať ťažké chvosty, dôsledkom čoho sa použitý predpoklad normality často odzrkadlí v podhodnotení VaR.

Poznámka 1.4 Podhodnotenie VaR prináša so sebou riziko nečakanej straty (väčšej, ako sme očakávali), pretože pri danej hladine spoľahlivosti je skutočná VaR vyššia ako tá, ktorá nám vyšla za predpokladu normality. Ťažké chvosty totiž znamenajú, že pravdepodobnostná masa je sústredená v koncoch rozdelenia finančných aktív viac ako pri normálnom rozdelení, a teda pravdepodobnosť nastatia extrémnej udalosti je v takomto prípade vyššia ako za predpokladu normality. VaR sa sústreďuje práve na konce rozdelenia (my konkrétne uvažujeme ľavý koniec rozdelenia), ktoré súvisia s extrémnymi udalosťami.

Dôsledkom špeciálneho modelu¹², ktorý používa RiskMetrics, je možnosť pri výpočte VaR pomocou tejto metodológie použiť tzv. *pravidlo druhej odmocniny z času*, na základe ktorého sa l -dňová VaR počíta ako \sqrt{l} násobok 1-dňovej VaR. Porušenie ľubovoľného z predpokladov tohto modelu však vedie k neplatnosti pravidla.

Modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov pomocou GARCH modelov

V posledných rokoch vzbudili pozornosť mnohých akademikov i odborníkov GARCH modely, pretože predstavujú flexibilný systém na modelovanie podmienenej volatility, ktorá je charakteristická pre vývoj finančných aktív. Na rozdiel od EWMA, metódy využívajúce na odhad GARCH modely sú dynamické, pretože parametre modelu nie sú fixované, ale sú odhadované osobitne pre každý rizikový faktor v portfóliu a aktualizované v čase. To má však za následok zložitejšiu implementáciu GARCH modelov, ktorých použitie sa stáva značne náročnejším a nepohodlnejším s rastúcim počtom aktív v portfóliu.

Veľkou výhodou GARCH modelov je to, že na rozdiel od iných metód dokážu úspešne zachytiť niekoľko charakteristík finančných aktív, a to už spomínané ťažké chvosty výnosov finančných aktív a zhľukovanie volatility. Špeciálny tvar modelu podobne ako EWMA priradzuje vyššie váhy údajom bližším súčasnosti, čím sa utlmia väčšie zmeny vo volatilitate dávnych udalostí a volatilita tak viac reaguje na aktuálne zmeny na trhu. Na druhej strane,

¹²Viac o modeli RiskMetrics a jeho predpokladoch viď v Kapitole 2, časť 2.4. RiskMetrics

model umožňuje zachytiť jav pretrvávania a pomalého vymiznutia volatility spôsobenej šokmi na trhu, ktorých následky na trhu obyčajne ešte dlho tvajú (zhlukovanie volatility). Špeciálna trieda GARCH modelov dokáže dokonca zachytiť aj často prítomnú asymetriu zrejmú z dát. V týchto modeloch majú dobré správy a zlé správy na trhu odlišnú (nie totožnú) úlohu pri predpovedaní budúcej volatility.

Kapitola 2

Špecifikácia modelov

2.1 Základné pojmy

2.1.1 Výnosy finančných aktív a ich charakteristika

Väčšina autorov finančných štúdií uvažuje pri analýzach finančných časových radov výnosy, a nie samotné ceny aktív. Campbell, Lo a MacKinlay (1997) uvádzajú dva hlavné dôvody pre použitie výnosov. Po prvé, finančné trhy z pohľadu priemerného investora môžeme pokladať za veľmi blízke dokonalej konkurencii, takže veľkosť investície neovplyvní zmeny cien. Z tohto dôvodu, keďže „technológia“ investícií má konštantné výnosy z rozsahu, výnos je kompletným a, čo sa týka výnosov z rozsahu, nezávislým súhrnom investičnej príležitosti. Po druhé, s časovými radmi výnosov sa narába ľahšie ako s časovými radmi samotných cien, pretože výnosy majú výhodnejšie („atraktívnejšie“) štatistické vlastnosti¹. Preto budeme aj my ďalej uvažovať výnosy finančných aktív.

Nech P_t je cenový proces finančného aktíva v čase t . Budeme predpokladať, že dané aktívum nevypláca žiadne dividendy.

Existuje niekoľko definícií výnosov aktív; uvedené definície výnosov, s ktorými budeme ďalej pracovať, definujeme podľa Tsaya (2002).

Jednoduchý čistý výnos (*simple net return*) R_t aktíva v čase t vzhľadom k času $t - 1$ je definovaný nasledovne:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (2.1)$$

Potom jednoduchý hrubý výnos (*simple gross return*) je $(1 + R_t)$, a teda pre cenu aktíva P_t v čase t platí: $P_t = P_{t-1}(1 + R_t)$.

¹Napr. stacionaritu; v dynamických modeloch sa často stáva, že ceny aktív sú nestacionárne, zatiaľ čo ich výnosy sú už stacionárne.

Poznámka 2.1 Campbell, Lo a MacKinlay (1997) zdôrazňujú, že hoci výnosy sú, čo sa týka výnosov z rozsahu, nezávislé (*free-scale*), nie sú bezjednotkové, ale vždy sa musia definovať vzhľadom k nejakému časovému intervalu, napr. k jednému dňu, mesiacu, roku. V skutočnosti by R_t bol lepšie vystihnutý pojmom *miera* výnosu. Preto *5%-ný výnos* nie je kompletným opisom investičnej príležitosti bez špecifikovania časového horizontu. V literatúre sa časový horizont výnosov často uvádza explicitne ako súčasť deskripcie dát; aj my ďalej budeme vždy uvažovať l -dňové výnosy, väčšinou 1-dňové výnosy.

V tejto práci budeme uvažovať zlogaritmované výnosy (*log returns*)² r_t aktíva, ktoré sa definujú ako prirodzený logaritmus jednoduchého hrubého výnosu $(1 + R_t)$:

$$r_t \equiv \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1}, \quad (2.2)$$

kde $p_t = \ln P_t$.

Ďalej pod pojmom *výnosy* budeme rozumieť zlogaritmované výnosy (*log returns*) r_t .

Poznámka 2.2 Veľkou výhodou zlogaritmovaných výnosov (*log returns*) je pri viacperiódových výnosoch, ktoré my však nebudeme uvažovať, zmena multiplikatívnej operácie na aditívnu, a následne podstatné zjednodušenie pri modelovaní štatistických vlastností a správania sa výnosov aktív v čase. Je totiž oveľa jednoduchšie odvádzať vlastnosti časových radov pre aditívne procesy ako pre multiplikatívne.³

Distribučné vlastnosti výnosov

Postupnosť výnosov finančných aktív $\{r_t\}$ v čase $t = 1, 2, \dots$ predstavuje stochastický proces, teda chronologicky usporiadanú postupnosť náhodných premenných r_1, r_2, \dots . V každom časovom okamihu t je k nemu priradená distribučná funkcia $F_t(r_t)$. Ďalej predpokladajme, že existuje hustota pravdepodobnosti rozdelenia výnosov r_t , označme ju $f_t(r_t)$. Potom môžeme zadať k -tý moment stochastického procesu r_t ako

$$m'_k = E[r_t^k] = \int_{-\infty}^{\infty} r_t^k f_t(r_t) dr_t,$$

pričom prvým momentom je stredná hodnota (*mean*):

$$\mu_t = E[r_t] = \int_{-\infty}^{\infty} r_t f_t(r_t) dr_t \quad (2.3)$$

merajúca umiestnenie stredu rozdelenia.

K -tý centrálny moment stochastického procesu r_t zadefinujeme ako

$$m_k = E[(r_t - \mu_t)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (r_t - \mu_t)^k f_t(r_t) dr_t$$

²V literatúre sa často označujú aj ako *continuously compounded returns*.

³Pre výhody a nevýhody *log returns* pozri viac v Campbell, Lo a MacKinlay (1997), str. 11-12.

za predpokladu, že uvedený integrál existuje.

Variancia r_t (druhý centrálny moment) sa teda definuje ako

$$\sigma_t^2 = E[(r_t - \mu_t)^2], \quad (2.4)$$

jej druhá odmocnina σ_t sa nazýva štandardná odchylka r_t a v ďalšom sa na ňu budeme často odvolávať ako na volatilitu finančného aktíva.

Poznámka 2.3 Prvé dva momenty náhodnej premennej jednoznačne určujú normálne rozdelenie. Momenty vyšších rádov sú však potrebné pre určenie iných rozdelení.

Pre charakteristiku rozdelenia finančných aktív sú ďalej zaujímavé tretí a štvrtý centrálny moment, ktoré merajú symetriu r_t vzhľadom k strednej hodnote a správanie sa koncov (chvostov) rozdelenia. Mieru asymetrie meria normalizovaný tretí centrálny moment, šikmosť (*skewness*):

$$S(r_t) = E \left[\frac{(r_t - \mu_t)^3}{\sigma_t^3} \right] \quad (2.5)$$

a to, aké ťažké sú konce (chvosty) rozdelenia, zohľadňuje normalizovaný štvrtý centrálny moment, špicatosť (*kurtosis*):

$$K(r_t) = E \left[\frac{(r_t - \mu_t)^4}{\sigma_t^4} \right] \quad (2.6)$$

Šikmosť náhodnej premennej s normálnym rozdelením je 0 a jej špicatosť je 3. Teda ak r_t je stochastický proces normálne rozdelených výnosov aktív, tak $S(r_t) = 0$ a $K(r_t) = 3$. Číslo $K(r_t) - 3$ sa nazýva „*excess kurtosis*“ a pre náhodnú premennú s normálnym rozdelením je 0. O rozdelení, ktoré má kladnú „*excess kurtosis*“, povieme, že má ťažké chvosty, čo vlastne znamená, že obsah plochy pod funkciou hustoty v jeho koncoch je väčší ako pri normálnom rozdelení. V praxi to znamená, že takéto rozdelenie zahŕňa v sebe viac extrémnych prípadov, pretože extrémne prípady (udalosti) sa nachádzajú práve na koncoch rozdelenia.

Vo väčšine prác zaoberajúcich sa analýzou výnosov finančných aktív sa kvôli zjednodušeniu a uľahčeniu výpočtov predpokladá normálne rozdelenie výnosov. Je to tradičný predpoklad, ktorý však nie je vždy v súlade s realitou. Rozdelenie finančných aktív má v skutočnosti obvykle odlišný priebeh než symetrické normálne rozdelenie. Pre výnosy finančných aktív sú teda typické tzv. ťažké konce (chvosty), sú špicatejšie (majú kladnú „*excess kurtosis*“), a niekedy pre ne býva charakteristické zošikmenie. Niekedy môže byť preto výhodnejšie pri výpočtoch uvažovať napr. Studentovo t -rozdelenie, ktoré svojimi ťažkými chvostami viac vystihuje vyššiu pravdepodobnosť výskytu extrémnej udalosti v praxi.

2.1.2 Volatilita na finančných trhoch

Pri analýze vývoja časových radov (nielen) finančných aktív je možné oddelene charakterizovať a modelovať dve zložky: trend a fluktuálnu zložku. Trend predstavuje zložku, ktorá hovorí o dlhodobom vývoji sledovaného finančného aktíva a závisí najmä od pozície a stratégie spoločnosti, ktorá s aktívom obchoduje. Stochastický (náhodný, nestály) charakter finančných aktív reprezentuje práve fluktuálna zložka daného aktíva (striedanie väčších a menších fluktuácií). Mieru fluktuácie finančných aktív charakterizujeme volatilitou.

Volatilita je veľmi dôležitou charakteristikou finančných trhov. Na finančných trhoch hrá kľúčovú rolu totiž práve neistota, a to aj vo finančnej teórii, aj v jej empirickej implementácii. Volatilitu môžeme preto chápať ako mieru rizika, ktoré pri obchodovaní na trhu podstupujú investori. Pojem *volatilný* zvykneme tiež použiť pri charakteristike aktíva: pri porovnaní vývoja cien dvoch aktív, z ktorých jedno má výrazné fluktuácie, označíme ho za viac rizikové alebo viac volatilné.

Nech σ_t^2 je variancia (disperzia) náhodnej premennej v čase t . Volatilitou označujeme jej štandardnú odchylku σ_t , teda druhú odmocninu z variancie náhodnej premennej.

Charakteristika volatility

Na rozdiel od cien, volatilitu nie je na trhu možné priamo pozorovať. Hovoriť o volatilita a odhadovať ju môžeme len v kontexte modelu. Uvažujme napr. denné výnosy slovenského akciového indexu. Denná volatilita nie je z výnosov priamo pozorovateľná, pretože máme k dispozícii iba jedno pozorovanie za obchodovací deň (napr. uzatváraciu hodnotu). Dennú volatilitu by sme mohli odhadnúť, ak by sme poznali vnútrodenne (*intraday*) dáta, napr. 5-minútové výnosy. To je však konkrétne pri tomto finančnom aktíve nemožné. Obvykle sa s ním totiž uskutoční len niekoľko obchodovaní za deň, niekedy dokonca žiadne, a už vôbec nie v presných časových intervaloch. Navyše, volatilita aktíva pozostáva z vnútrodennej volatility a zo zmeny medzi obchodovacími dňami.⁴

Hoci volatilita nie je priamo pozorovateľná, má určité charakteristické (typické) črty pre výnosy aktív.

1. Zhlukovanie volatility (*Volatility clustering*) - volatilita môže byť vyššia pre určité časové periódy a nižšia pre iné periódy.
2. *Leverage effect* - volatilita reaguje odlišne na veľký cenový nárast a veľký cenový pokles.
3. Volatilita sa vyvíja v čase spojito, tzn. skoky volatility sú zriedkavé.
4. Volatilita nediverguje do nekonečna, ale mení sa vo fixnom rozmedzí. Štatisticky to znamená, že volatilita je v dlhodobom časovom horizonte často stacionárna.

⁴Vid' Tsay (2002), str. 80.

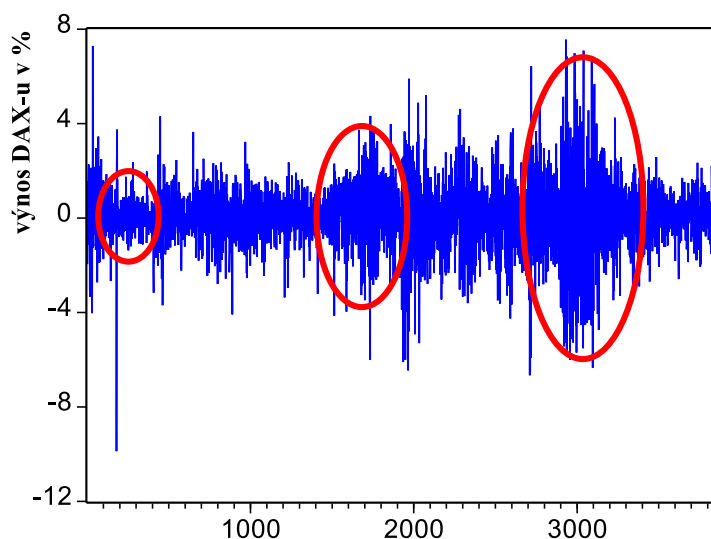
Zhlukovanie volatility (*Volatility clustering*)

Charakteristickou vlastnosťou časových radov výnosov finančných aktív je jav známy ako zhlukovanie volatility (*volatility clustering*): volatilita na finančných trhoch sa objavuje v zhlukoch (*clusters*) a v časových radoch výnosov finančných aktív sa striedajú volatilné periódy s veľkými výnosmi (kladnými i zápornými) s pokojnými periódami s nízkymi výnosmi (kladnými i zápornými), pričom „veľké zmeny majú tendenciu byť nasledované veľkými zmenami, platí to pre obidve znamienka, a malé zmeny majú tendenciu byť nasledované malými zmenami“.⁵

Tento jav naznačuje prítomnosť určitého stupňa závislosti (autokorelácie) vo výnosoch. Hoci samotné výnosy nie sú korelované, ich absolútne hodnoty a štvorce vykazujú signifikantnú pozitívnu autokoreláciu, ktorá pomaly klesá s rastúcim počtom pozorovaní medzi dvoma sledovanými výnosmi.

Fenomén zhlukovania volatility pútal záujem a pozornosť vedcov mnoho rokov. V súčasnosti sa na jeho modelovanie používa trieda GARCH modelov. Hoci GARCH modely nevedia vysvetliť príčinu vzniku a prítomnosti (resp. absencie) tohto javu vo výnosoch finančných aktív, sú dobrým štatistickým nástrojom na jeho modelovanie.

Na nasledujúcom obrázku 2.1 sú červenou farbou vyznačené zhluky volatility prítomné v denných výnosoch indexu DAX.



Obrázok 2.1: Zhlukovanie volatility: denné výnosy (v %) indexu DAX v rokoch 1991–2006

⁵Mandelbrot (1963): „Large changes tend to be followed by large changes, of either sign, and small changes tend to be followed by small changes.“

Leverage effect

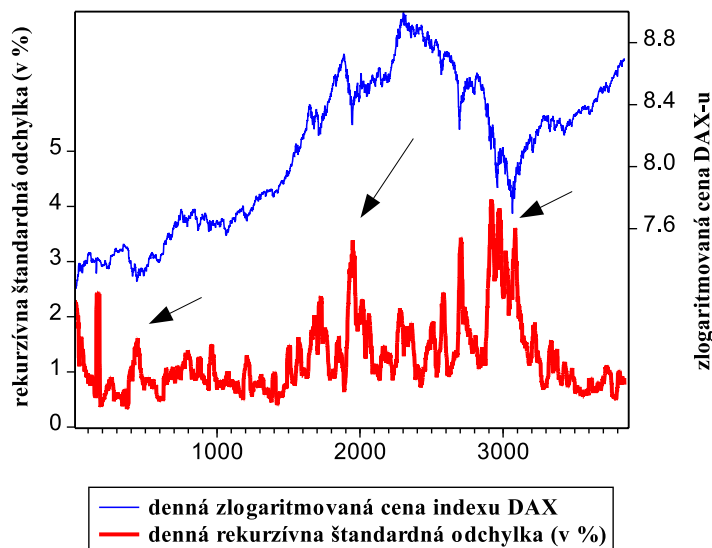
Black (1976) prvý krát uvádza, že zmeny vo výnosoch akcií majú často tendenciu byť negatívne korelované so zmenami volatility týchto výnosov, t.j. volatilita má tendenciu stúpať ako odozva na zlé správy (*bad news*) a klesať ako odozva na dobré správy (*good news*). Tento jav sa nazýva *leverage effect*.

Leverage effect možno pozorovať najmä na akciových trhoch, kde volatilita zvykne byť vyššia, keď trh padá, a nižšia, keď trh rastie. Odpoveď volatility na veľký negatívny výnos je často oveľa väčšia ako v prípade rovnako veľkého, ale pozitívneho výnosu. *Leverage effect* teda naznačuje asymetriu v zhlukoch volatility (spôsobenú veľkými kladnými a zápornými výnosmi aktíva), ktorú nie je schopný zachytiť symetrický GARCH model. Na zachytenie tejto asymetrie je potrebné použiť niektorý z asymetrických GARCH modelov (napr. EGARCH, TARCH).

Na nasledujúcom obrázku 2.2 môžeme pozorovať prítomnosť *leverage effectu* v denných cenách indexu DAX. Degiannakis a Xekalaki (2004) vo svojom článku navrhujú v grafickom zobrazení trhových cien a ich volatility zobrať ako jednoduchý odhad volatility pre deň t rekurzívnu štandardnú odchylku posledných 22 obchodovacích dní $\sigma_t^{(22)}$,

$$\sigma_t^{(22)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=t-22}^t \left(r_i - \frac{\sum_{i=t-22}^t r_i}{23} \right)^2}{22}},$$

kde r_i je denný výnos (*log return*) daného indexu. Všimnime si, že periódy, v ktorých nastal veľký cenový pokles indexu (pád na trhu), sú sprevádzané značným zvýšením volatility.



Obrázok 2.2: *Leverage effect*: vývoj ceny indexu DAX v rokoch 1991–2006

Analýza priebehu výnosov finančných aktív v čase ukazuje, že väčšina z nich nemá v čase konštantnú volatilitu. Vo vývoji výnosov týchto aktív sú popri pokojných časových periódach prítomné periódny s výraznými fluktuáciami, čo naznačuje, že volatilita sa v čase mení a vyvíja. Táto vlastnosť sa označuje pojmom podmienená heteroskedasticita (*conditional heteroscedasticity*)⁶.

Z uvedeného vyplýva potreba teórie dynamického modelovania volatility. Veľký úspech v modelovaní volatility meniacej sa v čase zaznamenala trieda ARCH (resp. GARCH) modelov. Tieto dynamické modely dosahujú veľmi dobré výsledky najmä v aplikáciách na finančné dáta, a to, ako hovorí Engle (2003) vo svojej *Nobel Lecture*, čiastočne aj kvôli trom „všadeprítomným“ charakteristickým vlastnostiam finančných výnosov, vyplývajúcich z držania rizikového aktíva.

Engle (2003) ďalej hovorí: „Výnosy sú takmer nepredvídateľné, dosahujú až prekvapujúco veľa extrémnych hodnôt a periódny s extrémnymi výnosmi, ako aj pokojné periódny sa zhlukujú v čase. Ide už o spomínané črty: nepredvídateľnosť (neočakávanosť), ťažké chvosty a zhlukovanie volatility. A to sú presne charakteristiky, pre ktoré bol navrhnutý ARCH (resp. GARCH) model. Keď je volatilita vysoká, je pravdepodobné, že vysoká aj zostane, a keď je nízka, je pravdepodobné, že nízka aj zostane. Tieto časové obdobia sú však obmedzené, preto je isté, že predpoveď (predikcia) volatility sa nakoniec vráti späť k menej extrémnym volatilitám. Výsledkom ARCH procesu sú dynamické odhady (a predikcie) volatility, ktoré sa vracajú späť k priemeru. ARCH proces takisto produkuje väčší počet extrémov, ako by sme očakávali pri normálnom rozdelení, keďže extrémne hodnoty počas obdobia s vysokou volatilitou sú väčšie, ako by sme mohli predpokladať pri procese s konštantnou volatilitou.“

Poznámka 2.4 Pokiaľ potrebujeme porovnať volatility výnosov pri rôznych frekvenciách, volatilita finančných aktív sa zvykne štandardne vyjadriť ako ročná hodnota v %. Ročnú volatilitu $\sigma_{r,t}$ definujeme nasledovne:

$$\sigma_{r,t} = (100\sigma_t\sqrt{A})\%, \quad (2.7)$$

kde σ_t je denná volatilita a A je tzv. analizačný faktor, počet výnosov za rok. Analizačný faktor je normalizačná konštanta: variancia rastie s dobou držania finančného aktíva, ale analizačný faktor klesá (počet výnosov za rok so zvyšujúcou sa dobou držania aktíva klesá). Na transformáciu dennej volatility na ročnú sa obvykle použije počet obchodovacích dní (alebo „rizikových dní“) za rok, teda často analizačný faktor $A = 250$ alebo $A = 252$.

⁶Zjednodušene: stochastická premenná s konštantnou varianciou sa nazýva homoskedastická, stochastická premenná s varianciou meniacou sa v čase sa nazýva heteroskedastická. Viac v časti 2.3 Model pre podmienené rozdelenie výnosov.

2.2 Konštrukcia modelu metódy historickej simulácie

Pred samotným určením VaR daného portfólia je vo všeobecnosti potrebné najprv identifikovať trhové faktory⁷, od ktorých závisí hodnota uvažovaného portfólia, a skonštruovať príslušné vzorce na ocenenie portfólia, ktoré môže pozostávať z jedného alebo viacerých aktív.

My budeme uvažovať portfólio pozostávajúce z jedného aktíva, a to konkrétne z jedného vybraného akciového indexu. Preto hodnota nášho portfólia bude ovplyvnená (určená) hodnotou jediného trhového faktoru, a to cenou daného indexu. V tejto časti predstavíme konštrukciu modelu pre určenie VaR takéhoto portfólia pomocou metódy historickej simulácie.

Výpočet VaR portfólia obsahujúceho jeden vybraný akciový index použitím metódy historickej simulácie pozostáva z nasledujúcich krokov:

1. Voľba rozsahu historických dát zvoleného indexu⁸, pravdepodobnosti p (teda rozhodnutie sa pre určitú hladinu spoľahlivosti $1 - p$) a časového horizontu l .
2. Získanie časového radu historických cien zvoleného indexu a výpočet príslušných l -dňových výnosov.

Nech P_t je cena indexu v čase t , $t = 1, \dots, T$, pričom P_T je cena indexu dnes. Nech $l = 1$. Potom jednodňové výnosy indexu určíme ako logaritmus⁹ relatívnych denných zmien (odchýliek)¹⁰ Δ_t v cene indexu, kde

$$\Delta_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} = R_t + 1 \text{ pre } t = 2, \dots, T.$$

Vidíme, že $\Delta_t = R_t + 1$ predstavuje vlastne jednoduchý hrubý výnos (*simple gross return*)¹¹ a $\ln \Delta_t = \ln(R_t + 1) = r_t$ je *log return*.

3. Zostrojenie rozdelenia budúcich (potenciálnych, očakávaných, hypotetických) ziskov a strát portfólia.

⁷Trhové faktory sú premenné, ktorých hodnota ovplyvňuje hodnotu jednotlivých zložiek portfólia. Najčastejšie nimi sú úrokové sadzby, menové kurzy, ceny akcií, indexov a komodít.

⁸Vid' Kapitola 1, časť 1.2.1 Metóda historickej simulácie.

⁹Logaritmus uvažujeme kvôli konzistencii s výpočtami robenými pomocou GARCH modelov, pri ktorých sa uvažujú práve zlogaritmované výnosy.

¹⁰Denné zmeny (odchylky) v cene aktíva môžeme vyjadriť relatívnou alebo absolútnou zmenou. Relatívna zmena (*podiel* cien aktíva dvoch za sebou nasledujúcich dní) sa používa pre akcie, akciové indexy, výmenné kurzy; absolútna zmena (*rozdiel* cien aktíva dvoch za sebou nasledujúcich dní) sa používa pri modelovaní úrokových mier.

¹¹Vid' Kapitola 2, časť 2.1.1 Výnosy finančných aktív a ich charakteristika.

Označme znakom n počet kusov indexu, z ktorého je vytvorené naše portfólio. Nech V_T je súčasná hodnota portfólia (teda hodnota portfólia dnes - *present value*), pre ktorú platí: $V_T = n \cdot P_T$, kde P_T je cena indexu dnes.

Najprv na základe skutočných denných výnosov r_t v hodnote portfólia dodnes vypočítame hypotetický budúci zisk alebo stratu indexu na zajtra¹² ako $r_t \cdot P_T$ pre všetky $t = 2, \dots, T$.

Časový rad budúcich ziskov a strát portfólia, teda časový rad očakávaných budúcich zmien hodnoty portfólia dostaneme ako $n \cdot r_t \cdot P_T$ pre všetky $t = 2, \dots, T$. Zoradením týchto hodnôt od najmenšieho zisku po najväčší, teda od najväčšej straty po najmenšiu¹³, získame hľadané rozdelenie budúcich ziskov a strát portfólia.

4. Samotný výpočet VaR

VaR sa určí ako príslušný kvantil získaného empirického rozdelenia budúcich, hypotetických ziskov a strát portfólia. Teda ak $1 - p$ je požadovaná hladina spoľahlivosti, potom VaR je $p \cdot 100$ %-ný kvantil tohto rozdelenia (t.j. $VaR = x_p$).

V prípade, že máme k dispozícii 500 dát a počítame 99 % VaR, VaR predstavuje piatu navyššiu stratu (resp. piaty najnižší zisk). V prípade, že nám VaR vyjde medzi dvoma po sebe idúcimi hypotetickými výnosmi portfólia, na presné určenie VaR použijeme nejaké interpolačné pravidlo, napr. lineárnu interpoláciu.

Poznámka 2.5 V zmysle toho, že VaR chápeme ako stratu, bude označovaná kladným znamienkom.

2.3 Model pre podmienené rozdelenie výnosov

Podmienené rozdelenie výnosov r_t finančných aktív budeme modelovať niekoľkými GARCH modelmi. GARCH model vždy pozostáva z dvoch rovníc. Prvá rovnica modeluje podmienenú strednú hodnotu (teda samotné podmienené rozdelenie výnosov r_t), druhá rovnica v GARCH modeli je rovnicou podmienenej variancie.

Prvý krát použil ARCH model (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) Engle (1982) na modelovanie inflácie v Anglicku. Zovšeobecnením ARCH modelu je GARCH model (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*), ktorý navrhol Bollerslev (1986). Práve Englovi a Bollerslevovi sa pripisuje významný podiel práce na vývoji a zlepšovaní rôznych typov GARCH modelov, o ktorých existuje v súčasnosti široká literatúra¹⁴.

¹²Uvažujeme $l = 1$, jednoduché výnosy, 1-dňovú VaR; zaujíma nás zmena hodnoty portfólia o 1 deň, teda jeho zisk/strata zajtra oproti dnešnému dňu (*1-step ahead forecast*).

¹³Zisk predstavujú hodnoty s kladným znamienkom, stratu hodnoty so záporným znamienkom.

¹⁴Vynikajúci prehľad literatúry o GARCH modeloch vo financiách ponúka Bollerslev et.al. (1992) a (1994).

Za posledných dvadsať rokov výskum GARCH modelov pokročil výrazne dopredu. Hoci sa zatiaľ GARCH modely v praxi využívajú len málo, záujem o ne stále rastie, pretože sú silným nástrojom na modelovanie podmienenej variancie meniacej sa v čase, ktorá je typická pre výnosy finančných aktív. Je teda možné, že v budúcnosti budú sofistikované GARCH modely využívať mnohé finančné inštitúcie.

Klasická lineárna regresia predpokladá, že variancia modelovaného procesu je konštantná. Tento predpoklad sa označuje pojmom homoskedasticita. Viaceré ekonomické časové rady, najmä finančné, však vykazujú nestacionárnu (podmienenú) varianciu, ktorá sa mení s časom. V ich vývoji môžeme často sledovať striedanie períód s výraznými fluktuáciami (s vysokou volatilitou) s pokojnými períódami (s nízkou volatilitou). Túto vlastnosť označujeme pojmom heteroskedasticita.

Názov GARCH modelu teda odráža to, na čo sa tento model sústreďuje: na modelovanie podmienenej variancie, ktorá nie je v čase konštantná (*conditional heteroscedasticity*), pričom variancia je modelovaná autoregresným procesom, teda „regresiou na seba“ (*autoregressive*), a pojem zovšeobecnený (*generalized*) znamená, že na modelovanie variancie sa použijú aj iné ako iba autoregresné členy.

2.3.1 Rovnica podmienenej strednej hodnoty

Prvá rovnica v GARCH modeli modeluje podmienenú strednú hodnotu výnosov. Všeobecne môžeme túto rovnicu slúžiacu vlastne na samotné modelovanie procesu výnosov zapísať v tvare:

$$r_t = E[r_t | I_{t-1}] + \epsilon_t, \quad (2.8)$$

kde $E[r_t | I_{t-1}] := \mu_t$, a teda rovnicu (2.8) môžeme prepísať nasledovne:

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t. \quad (2.9)$$

Predpokladáme, že modelujeme konečný proces výnosov, teda $t = 1, \dots, T$. $E[r_t | I_{t-1}]$ označuje podmienenú (očakávanú) strednú hodnotu procesu výnosov r_t v čase t , pričom I_{t-1} predstavuje informačnú množinu, ktorá je k dispozícii v čase $t - 1$ (takže I_{t-1} v sebe zahŕňa r_{t-1} a ľubovoľné iné hodnoty, ktoré sú známe v čase $t - 1$).

ϵ_t predstavujú disturbancie v čase t (neočakávaný, nepredvídateľný výnos); sú to nekorelované náhodné premenné, ktoré však nemajú v čase konštantnú varianciu, teda pre ktoré platí:

$$E[\epsilon_t] = 0$$

$$E[\epsilon_t \epsilon_s] = \begin{cases} 0 & t \neq s, \\ \sigma_t^2 & t = s. \end{cases}$$

Na odhad podmienenej strednej hodnoty $E[r_t|I_{t-1}]$ použijeme ARMA(p,q) proces, a teda rovnica pre výnosy r_t bude mať nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} r_t &= c + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_p r_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t \\ r_t &= c + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Rád (p,q) ARMA modelu identifikujeme porovnaním so známym, teoretickým tvarom autokorelačnej (ACF) a parciálnej autokorelačnej funkcie (PACF) ARMA modelov.

Obvykle sa použije iba jednoduchý AR(1), MA(1) alebo ARMA(1,1) proces, teda často

$$\begin{aligned} r_t &= c + \phi_1 r_{t-1} + \epsilon_t \\ \text{alebo} \quad r_t &= c + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ \text{alebo} \quad r_t &= c + \phi_1 r_{t-1} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t. \end{aligned}$$

Poznámka 2.6 Na rozdiel od podmienenej strednej hodnoty $E[r_t|I_{t-1}]$ (μ_t), ktorej odhady vlastne vytvárajú časový rad hodnôt, nepodmienená stredná hodnota stacionárneho procesu výnosov r je jedno číslo, konštanta. Označuje sa $E[r]$ alebo μ a zvyčajne sa odhaduje veľmi jednoducho výberovým aritmetickým priemerom \bar{r} : $\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i$, kde n je rozsah výberu (počet výnosov) a $E[\bar{r}] = \mu$.

2.3.2 Rovnica podmienenej variancie

Ťažiskom GARCH modelu je jeho druhá rovnica - rovnica podmienenej variancie. GARCH model, špeciálne jeho druhá rovnica, sa teda zameriava na modelovanie v čase sa meniacej variancie podmieneného rozdelenia výnosov r_t .

Na rozdiel od klasickej ARMA metodológie, ktorá predpokladá, že variancia disturbancií ϵ_t je konštantná: $V(\epsilon_t) = \sigma^2$ (teda predpokladá homoskedasticitu), pri modelovaní podmieneného rozdelenia výnosov pomocou GARCH modelov uvažujeme v čase sa meniacu varianciu disturbancií ϵ_t : $V(\epsilon_t) = \sigma_t^2$ (teda predpokladáme heteroskedasticitu).

Rovnicu podmienenej variancie môžeme zapísať v tvare:

$$\sigma_t^2 = Var(r_t|I_{t-1}) = E((r_t - \mu_t)^2|I_{t-1}) = E(\epsilon_t^2|I_{t-1}) = Var(\epsilon_t|I_{t-1}) \quad (2.11)$$

Poznámka 2.7 Podobne ako nepodmienená stredná hodnota, aj nepodmienená variancia stacionárneho procesu výnosov r je jedno číslo, konštanta. Označuje sa $V[r]$ alebo σ^2 a často sa odhaduje výberovou varianciou (rozptylom) $S^2(r)$: $S^2(r) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2$, kde n je rozsah výberu (počet výnosov) a $E[S^2(r)] = \sigma^2$. Na rozdiel od nepodmienenej variancie, odhady podmienenej variancie podobne ako podmienenej strednej hodnoty vytvárajú časový rad hodnôt.

V literatúre bolo doteraz navrhnutých a predstavených veľa rozličných typov a modifikácií GARCH modelov, ktoré sa líšia špecifikáciou rovníc, predovšetkým rovnice podmienenej variancie, a podmieneného rozdelenia disturbancií ϵ_t .

Engle (1982) predstavil ARCH(p) proces¹⁵, ktorým sa podmienená variancia modeluje ako vážený priemer minulých štvorcov disturbancií:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2, \quad (2.12)$$

kde $\omega > 0$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$.

Na modelovanie finančných časových radov sa najviac odporúča zovšeobecnený ARCH model, GARCH(p,q), ktorý navrhol Bollerslev (1986) a ktorý podľa odborníkov najlepšie vystihuje povahu finančných dát. GARCH(p,q) model vznikol pridaním minulých podmienených variancií (q autoregresívnych zložiek) do rovnice (2.12) modelu ARCH(p):

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (2.13)$$

kde $\omega > 0$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0, \beta_1, \dots, \beta_q \geq 0$.

Podmienky kladnosti parametra ω a nezápornosti parametrov α_i pre $\forall i$ a β_j pre $\forall j$ v (2.13) majú zabezpečiť kladnú hodnotu podmienenej variancie σ_t^2 . Bollerslev (1986) ukázal, že za ich platnosti je uvedený proces stacionárny, ak je splnená podmienka:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1. \quad (2.14)$$

V tomto prípade nepodmienená variancia σ^2 procesu ϵ_t sa určí ako:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j}. \quad (2.15)$$

V praxi sa len zriedkavo používajú GARCH modely vyšších rádoov ako GARCH(1,1). Ak sa aj dá dosiahnuť zlepšenie odhadov použitím niektorého z ďalších GARCH modelov, GARCH(1,1) slúži minimálne ako dobrý štartovací model.

GARCH(1,1) bude základným GARCH modelom, ktorý použijeme v tejto práci na modelovanie podmienenej variancie (resp. podmienenej volatility) výnosov vybraných finančných aktív. Použijeme štandardné označenie koeficientov z literatúry: ω na označenie konštanty, α pre ARCH časť a β pre GARCH časť modelu:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (2.16)$$

kde $\omega > 0, \alpha, \beta \geq 0$.

¹⁵ARCH(p) predstavuje prvý, pôvodný model autoregresívnej podmienenej heteroskedasticity, ktorý navrhol a použil Engle (1982) na modelovanie inflácie v Anglicku.

Pre stacionaritu uvedeného procesu musí byť opäť splnená podmienka (2.14), ktorá pre GARCH(1,1) má tvar:

$$\alpha + \beta < 1, \quad (2.17)$$

a pre nepodmienenú varianciu σ^2 procesu ϵ_t platí:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}. \quad (2.18)$$

Parametre α a β určujú krátkodobú dynamiku výsledného časového radu variancie (volatility).

Parameter α meria veľkosť okamžitej reakcie procesu na nové informácie. Veľký parameter α teda znamená, že volatilita reaguje pomerne intenzívne na neočakávané pohyby na trhu, ktoré sa udiali v nedávnej minulosti.

Parameter β vyjadruje dlhodobú pamäť procesu, jeho pretrvávanie (perzistenciu). Veľký parameter β teda naznačuje pretrvávanie volatility, pretože šokom, ktoré sú charakterizované podmienenou varianciou, trvá dlho, kým vymiznú.

Parameter ω určuje priemernú hladinu variancie σ_t^2 , ku ktorej konvergujú v dlhodobom horizonte predpovede podmienenej variancie, teda ω je určená nepodmienenou varianciou vyjadrenou vzťahom (2.18).

Z uvedeného vyplýva, že veľkosť parametrov α , β a ω ovplyvní „tvar“ výsledného časového radu variancie (volatility). Takže ak je α pomerne nízka a β je pomerne vysoká, potom volatilita má tendenciu byť viac „špicatá“ (*spiky*). Na finančných trhoch pri denných pozorovaniach je bežné, že veľkosť parametra β je približne 0.8 a viac, kým veľkosť parametra α býva menej ako 0.2. Stacionarita procesu je zaručená len v prípade, že ich súčet je menší ako 1, teda iba ak $\alpha + \beta < 1$.

Treba zdôrazniť, že všetky tri parametre, najmä však ω , sú citlivé na použité dáta, preto výber historických dát je dôležitý a ovplyvní predikcie volatility. Pokiaľ je rozsah použitých dát veľký a zahŕňa aj množstvo extrémnych, stresových udalostí, priemerná hladina variancie σ_t^2 , ktorú odráža práve parameter ω , bude podstatne vyššia ako pri použití dát z kratšieho časového úseku obsahujúceho menej extrémnych udalostí.

Teraz stručne predstavíme niekoľko ďalších typov GARCH modelov, ktoré použijeme na modelovanie podmienenej variancie v empirickej časti.

V prípade, že $\alpha + \beta = 1$, môžeme položiť $\beta = \lambda$ a prepísať tak rovnicu podmienenej variancie stacionárneho GARCH(1,1) modelu do nového tvaru:

$$\sigma_t^2 = \omega + (1 - \lambda)\epsilon_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2, \quad \text{kde } 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (2.19)$$

Uvedená rovnica podmienenej variancie (2.19) zodpovedá modelu, ktorý sa nazýva I-GARCH (*Integrated GARCH*), a definuje nestacionárny proces - pri tomto modeli nie je definovaná nepodmienená variancia. Nestacionarita procesu variancie býva typická pre trhy s komoditami a výmennými kurzami.

Pre $\omega = 0$ sa I-GARCH(1,1) stáva EWMA procesom s „vyhladzovacou konštantou“ (*smoothing constant*) λ .

Pre finančné aktíva, najmä akcie, je charakteristický už spomínaný *leverage effect*. Na zachytenie asymetrie vo volatilitate, spôsobenej veľkými kladnými a zápornými výnosmi aktíva, sa najčastejšie používajú dva asymetrické modely: EGARCH (*Exponential GARCH*) model Nelsona (1991) a TARCH (*Threshold ARCH*) model, ktorý navrhli Glosten, Jagannathan a Runkle (1993).

Rovnica podmienenej variancie v modeli TARCH(1,1) má tvar:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma \epsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (2.20)$$

kde $d_t = 1$, ak $\epsilon_t < 0$, inak $d_t = 0$.

V tomto modeli majú dobré správy ($\epsilon_t > 0$) a zlé správy ($\epsilon_t < 0$) odlišný efekt na podmienenú varianciu: dobré správy na ňu vplývajú veľkosťou α , zatiaľ čo zlé správy veľkosťou $\alpha + \gamma$. Ak $\gamma \neq 0$, dopad správ je asymetrický. Ak $\gamma > 0$, zlé správy zvyšujú volatilitu a to naznačuje prítomnosť *leverage effect*, teda skutočnosti, že veľké záporné výnosy daného aktíva zvyšujú jeho volatilitu viac ako rovnako veľké kladné výnosy.

V GARCH(p,q) modeli musia byť parametre $\omega > 0$ a $\alpha_i \geq 0$ pre $\forall i$, $\beta_j \geq 0$ pre $\forall j$, aby bola zabezpečená kladná hodnota podmienenej variancie σ_t^2 . Tieto podmienky kladené na parametre modelu však môžu v niektorých prípadoch príliš obmedziť dynamiku podmienenej variancie získanej takto špecifikovaným modelom. Nelson (1991) eliminoval potrebu týchto obmedzení formulovaním rovnice podmienenej variancie v logaritmovanom tvare.

Rovnica podmienenej variancie v modeli EGARCH má tvar:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + g(z_{t-1}) + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2), \quad (2.21)$$

kde $g(\cdot)$ je funkcia asymetrickej odpovede definovaná ako

$$g(z_t) = \varphi z_t + \gamma(|z_t| - E(|z_t|)), \quad (2.22)$$

kde φ a γ sú reálne konštanty a z_t aj $|z_t| - E(|z_t|)$ sú postupnosti nezávislých a rovnako rozdelených (*i.i.d., independent and identically distributed*) náhodných premenných s nulovou strednou hodnotou a spojitým rozdelením, teda $z_t \sim i.i.d.(0, \sigma_t^2)$, $|z_t| - E(|z_t|) \sim i.i.d.(0, \sigma_t^2)$.

Asymetria $g(z_t)$ je ľahko viditeľná, pokiaľ ju rozpíšeme ako

$$g(z_t) = \begin{cases} (\varphi + \gamma)z_t - \gamma E(|z_t|) & z_t \geq 0, \\ (\varphi - \gamma)z_t - \gamma E(|z_t|) & z_t < 0. \end{cases}$$

Koeficienty $(\varphi + \gamma)$ a $(\varphi - \gamma)$ naznačujú, že v modeli je prítomná asymetria spočívajúca v odlišnej odpovedi podmienenej variancie na kladné a záporné výnosy. V prípade, že

$\gamma = 0$, dobré ($z_t > 0$) i zlé ($z_t < 0$) správy majú rovnaký dopad na podmienenú varianciu a zvyšujú ju o rovnakú hodnotu nahor, resp. nadol. Pre $\gamma \neq 0$ je však model nelineárny. Parameter $\varphi \neq 0$ indikuje asymetriu vo výnosoch (dopad správ na podmienenú varianciu je asymetrický). Prítomnosť *leverage effect* testujeme hypotézou $\varphi < 0$.

Za predpokladu, že disturbancie ϵ_t sledujú podmienené normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou, teda $\epsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$, štandardizovaná normálna náhodná premenná $z_t = \epsilon_t / \sigma_t$ predstavuje štandardizovaný neočakávaný výnos a platí: $E(|z_t|) = \sqrt{2/\pi}$.

Potom rovnicu (2.21) môžeme prepísať nasledovne:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \varphi \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \gamma \left(\left| \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2). \quad (2.23)$$

Poznámka 2.8 Parametre GARCH modelov sa odhadujú súčasne s parametrami rovnice pre podmienenú strednú hodnotu metódou maximálnej vierohodnosti (*maximum likelihood*).

2.3.3 Určenie 1-krokových (*1-step ahead*) predikcií podmienenej strednej hodnoty a podmienenej variancie výnosov

V empirickej časti budeme počítať 1-dňovú VaR (pri hladine spoľahlivosti $1-p$) niekoľkých portfólií pozostávajúcich vždy z jedného vybraného akciového indexu. Bude nás teda zaujímať maximálna možná strata, ktorú môže portfólio utrpieť o 1 deň. Pri výpočte VaR budeme teda voliť časový horizont l rovný 1 dňu.

Na to, aby sme mohli určiť hodnotu 1-dňovej VaR, potrebujeme poznať 1-krokové (*1-step ahead*) predikcie¹⁶ podmienenej strednej hodnoty a podmienenej variancie výnosov uvažovaného indexu.

V prípade, že podmienenú varianciu výnosov sme modelovali GARCH(p, q) modelom, 1-krokové predikcie podmienenej strednej hodnoty a podmienenej variancie výnosov v čase t na čas $t + 1$ získame z rovníc (2.10) a (2.13), predpokladajúc, že parametre modelu sú známe (použijeme odhadnuté hodnoty koeficientov). Dostaneme:

$$\hat{r}_t(1) = c + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t+1-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t+1-j} \quad (2.24)$$

$$\hat{\sigma}_t^2(1) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2. \quad (2.25)$$

Konkrétne pri použití modelov AR(1) a GARCH(1,1), uvedené rovnice (2.24) a (2.25) majú tvar:

$$\hat{r}_t(1) = c + \phi r_t \quad (2.26)$$

$$\hat{\sigma}_t^2(1) = \omega + \alpha \epsilon_t^2 + \beta \sigma_t^2. \quad (2.27)$$

¹⁶Pojmom *1-krokové predikcie* budeme označovať tzv. *1-step ahead forecasts* (z angl.), teda predikcie vždy len 1 krok dopredu.

Poznámka 2.9 $\hat{r}_t(1)$ a $\hat{\sigma}_t^2(1)$ sú predikcie podmienenej strednej hodnoty a podmienenej variancie výnosov v čase t na čas $t + 1$. Teda poznáme (máme k dispozícii) všetky pozorovania až do času t , na základe ktorých máme vypočítané parametre modelu, a v čase t robíme predikcie vždy len 1 krok dopredu, teda na čas $t + 1$.

Analogicky získame 1-krokové predikcie podmienenej variancie výnosov v čase t na čas $t + 1$ použitím TAR(1,1) modelu:

$$\hat{\sigma}_t^2(1) = \omega + \alpha\epsilon_t^2 + \gamma\epsilon_t^2 d_t + \beta\sigma_t^2. \quad (2.28)$$

Pre určenie 1-krokových predikcií podmienenej variancie výnosov v čase t na čas $t + 1$ použitím EGARCH modelu definovaného v (2.21) a (2.22) musíme tento model najprv pretransformovať do tvaru:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \sigma_{t-1}^{2\beta} \exp(\omega) \exp(g(z_{t-1})), \\ g(z_{t-1}) &= \varphi z_{t-1} + \gamma(|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nech nás teraz v čase t zaujíma predikcia podmienenej variancie 1 krok dopredu, teda na čas $t + 1$. Máme:

$$\sigma_{t+1}^2 = \sigma_t^{2\beta} \exp(\omega) \exp(g(z_t)),$$

kde všetky hodnoty na pravej strane poznáme. Preto $\hat{\sigma}_t^2(1) = \sigma_{t+1}^2$, a teda platí:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_t^2(1) &= \sigma_t^{2\beta} \exp(\omega) \exp(g(z_t)) \\ \hat{\sigma}_t^2(1) &= \sigma_t^{2\beta} \exp(\omega) \exp(\varphi z_t + \gamma(|z_t| - E(|z_t|))). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Poznámka 2.10 Ak $\epsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$, tak $z_t = \epsilon_t / \sigma_t$ a platí: $E(|z_t|) = \sqrt{2/\pi}$. Potom pre $\hat{\sigma}_t^2(1)$ platí:

$$\hat{\sigma}_t^2(1) = \sigma_t^{2\beta} \exp(\omega) \exp\left(\varphi \frac{\epsilon_t}{\sigma_t} + \gamma\left(\left|\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right). \quad (2.31)$$

2.3.4 Výpočet VaR

Nech disturbancie ϵ_t sledujú podmienené normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou: $\epsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$. Potom podmienené rozdelenie výnosov r_{t+1} , majú k dispozícii všetky informácie do času t , je $N(\hat{r}_t(1), \hat{\sigma}_t^2(1))$, teda: $r_{t+1} | I_{t-1} \sim N(\hat{r}_t(1), \hat{\sigma}_t^2(1))$.

Hodnotu 1-dňovej VaR pri hladine spoľahlivosti $1 - p$, teda hodnotu maximálnej možnej straty nášho portfólia pri hladine spoľahlivosti $1 - p$ o 1 deň, vypočítame ako príslušný $p \cdot 100\%$ -ný kvantil podmieneného rozdelenia výnosov.

$(1 - p) \cdot 100\%$ 1-dňová VaR (1-kroková predikcia VaR v čase t na čas $t + 1$) sa v tomto prípade vypočíta nasledovne:

$$VaR_t(1) = \hat{r}_t(1) - |x_p| \cdot \hat{\sigma}_t(1), \quad (2.32)$$

kde x_p je $p \cdot 100\%$ -ný kvantil normálneho rozdelenia. Napr. pre $p = 0.01$ má 99% 1-dňová VaR hodnotu:

$$VaR_t(1) = \hat{r}_t(1) - 2.33\hat{\sigma}_t(1).$$

Ak disturbancie ϵ_t sledujú Studentovo t-rozdelenie s v stupňami voľnosti, tak $(1-p) \cdot 100\%$ 1-dňová VaR (1-kroková predikcia VaR v čase t na čas $t + 1$) sa vypočíta ako:

$$VaR_t(1) = \hat{r}_t(1) - \frac{|t_{p,v}| \cdot \hat{\sigma}_t(1)}{\sqrt{v/(v-2)}}, \quad (2.33)$$

kde $t_{p,v}$ je $p \cdot 100\%$ -ný kvantil Studentovho t-rozdelenia s v stupňami voľnosti a $t_{p,v}/\sqrt{v/(v-2)}$ je $p \cdot 100\%$ -ný kvantil štandardizovaného Studentovho t-rozdelenia s v stupňami voľnosti. Napr. pre $p = 0.01$ a $v = 5$ nadobúda 99% 1-dňová VaR hodnotu:

$$VaR_t(1) = \hat{r}_t(1) - 3.36\hat{\sigma}_t(1).$$

Poznámka 2.11 Odvodenie *h-step ahead* predikcií, teda predikcií h krokov dopredu podmienenej strednej hodnoty a podmienenej variancie výnosov možno nájsť napr. v Tsayovi (2002). Tu ich neuvádzame, pretože v empirickej časti sa sústreďujeme iba na výpočet 1-dňovej VaR (teda pre VaR uvažujeme iba časový horizont $l = 1$), ktorá vlastne zodpovedá *1-step ahead* predikcii, teda $h = 1$.

Poznámka 2.12 Aby sme získali skutočnú VaR nášho portfólia, musíme ešte číslo získané rovnicou (2.32), resp. rovnicou (2.33) prenásobiť veľkosťou trhovej pozície, resp. trhovou hodnotou nášho portfólia V_t v čase t .

Poznámka 2.13 VaR definovaná rovnicami (2.32) a (2.33) je záporná hodnota, ale v zmysle toho, že VaR vyjadruje *stratu*, interpretujeme ju kladným číslom. Preto ak nám VaR vyjde napr. -1 000 000 EUR, hovoriť budeme o miliónovej VaR (o miliónovej strate). Čím menšie číslo dostaneme z rovníc (2.32) a (2.33), tým o väčšej VaR budeme hovoriť.

2.4 RiskMetrics

RiskMetrics predpokladá, že denné výnosy portfólia sledujú podmienené normálne rozdelenie, teda $r_t | I_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$, a rovnice podmienenej strednej hodnoty a podmienenej variancie výnosov sú v tvare:

$$\begin{aligned} \mu_t &= 0 \Rightarrow r_t = \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

kde $0 < \lambda < 1$ sa nazýva vyhladzovacia konštanta (*smoothing constant*).

RiskMetrics systém aplikuje na odhad rozdelenia výnosov portfólia metódu EWMA. Parameter λ pri modelovaní podmieneného rozdelenia výnosov metódou EWMA väčšinou nadobúda hodnoty v intervale $(0.9,1)$. RiskMetrics používa pre predikcie volatility výnosov o 1 deň $\lambda = 0.94$ a pre predikcie volatility výnosov o 1 mesiac $\lambda = 0.97$.

Parameter λ určuje perzistenciu volatility, jej pretrvávanie. Čím má vyššiu hodnotu, tým väčšia váha sa kladie na minulé pozorovania a tým viac sa časový rad podmienenej variancie stáva hladším. Parameter $1 - \lambda$ meria veľkosť a intenzitu reakcie volatility na udalosti na trhu. Čím je λ menšia, tým intenzívnejšie volatilita reaguje na nové informácie z trhu obsiahnuté vo včerajšom výnose.

Všimnime si, že EWMA metóda používaná v RiskMetrics je vlastne špeciálnym I-GARCH modelom, a to konkrétne I-GARCH(1,1) modelom, v ktorom parameter $\omega = 0$ a vyhladzovacia konštanta $\lambda = 0.94$ (resp. $\lambda = 0.97$ pre predikcie na mesiac dopredu).

Modelovaním podmieneného rozdelenia výnosov portfólia EWMA metódou, resp. špeciálnym I-GARCH-om pod systémom RiskMetrics, získame v čase t na čas $t + 1$ tieto 1-krokové predikcie podmienenej strednej hodnoty a podmienenej variancie výnosov:

$$\begin{aligned}\hat{r}_t(1) &= r_{t+1} = 0 \\ \hat{\sigma}_t^2(1) &= \sigma_{t+1}^2 = \lambda\sigma_t^2 + (1 - \lambda)r_t^2.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Potom 1-dňová VaR portfólia (1-kroková predikcia VaR v čase t na čas $t + 1$) pri hladine spoľahlivosti $1 - p$ sa určí ako:

$$VaR_t(1) = \text{veľkosť trhovej pozície} \cdot |x_p| \cdot \sigma_{t+1},\tag{2.36}$$

kde x_p je $p \cdot 100\%$ -ný kvantil normálneho rozdelenia.

Pri výpočte VaR pomocou RiskMetrics metodológie navyše špeciálne platí, že l -dňovú VaR portfólia (predikciu VaR l krokov dopredu v čase t na čas $t + l$) pri hladine spoľahlivosti $1 - p$ získame ako:

$$VaR_t(l) = \text{veľkosť trhovej pozície} \cdot |x_p| \cdot \sqrt{l}\sigma_{t+1},\tag{2.37}$$

čo má za dôsledok platnosť tzv. *pravidla druhej odmocniny z času* (*square root of time rule*), na základe ktorého sa l -dňová VaR počíta ako \sqrt{l} násobok 1-dňovej VaR:

$$VaR_t(l) = \sqrt{l} \cdot VaR_t(1).\tag{2.38}$$

Je však jednoduché ukázať, že pokiaľ je porušený predpoklad nulovej strednej hodnoty alebo špeciálny I-GARCH(1,1) model zlyhá, vedie to k neplatnosti tohto pravidla (viď Tsay (2002)).

Poznámka 2.14 V tomto prípade rovnice (2.36) a (2.37) už definujú VaR v zmysle jej interpretácie ako straty, teda ako kladnú hodnotu.

2.5 Hustota podmieneného rozdelenia výnosov

V empirickej časti budeme uvažovať a analyzovať dva typy podmieneného rozdelenia výnosov: podmienené normálne a Studentovo t-rozdelenie. Kým RiskMetrics metodológia priamo predpokladá použitie podmieneného normálneho rozdelenia, pri modelovaní podmienenej strednej hodnoty a podmienenej variancie výnosov pomocou GARCH modelov použijeme obidva typy rozdelenia a porovnáme takto získané výsledky.

Ako bolo už viackrát spomínané, Studentovo t-rozdelenie by malo byť na rozdiel od normálneho rozdelenia schopné zachytiť ťažké chvosty typické pre výnosy finančných aktív, a tak zabrániť k možnému podhodnoteniu VaR.

2.5.1 Podmienené normálne rozdelenie

Nech výnosy portfólia sledujú podmienené normálne rozdelenie, teda nech $r_t|I_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$, kde hustota podmieneného normálneho rozdelenia je:

$$f(r_t|I_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right). \quad (2.39)$$

Parametrami podmieneného normálneho rozdelenia sú podmienená stredná hodnota μ_t :

$$\mu_t = E[r_t|I_{t-1}]$$

a podmienená variancia σ_t^2 :

$$\sigma_t^2 = Var[r_t|I_{t-1}].$$

Ak $r_t|I_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$, tak $(r_t|I_{t-1} - \mu_t)/\sigma_t \sim N(0, 1)$ (štandardizované výnosy portfólia sledujú štandardné normálne rozdelenie).

2.5.2 Studentovo t-rozdelenie

Nech výnosy portfólia sledujú podmienené Studentovo t-rozdelenie s v stupňami voľnosti, teda nech $r_t|I_{t-1} \sim t_v$, kde hustota Studentovho t-rozdelenia je:

$$f(r_t|I_{t-1}) = \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\sqrt{v\pi}\Gamma(v/2)} (1 + r_t^2/v)^{-(v+1)/2}, \quad (2.40)$$

kde $\Gamma(\cdot)$ je gamma funkcia. Studentovo t-rozdelenie má jeden parameter, a to stupeň voľnosti v , takže toto rozdelenie závisí iba od v a vôbec nie od μ_t a σ_t^2 . Práve neprítomnosť závislosti od μ_t a σ_t^2 ho robí takým významným v teórii i v praxi. Pre $v \rightarrow \infty$ sa tvar Studentovho t-rozdelenia približuje normálnemu rozdeleniu.

Poznámka 2.15 Gamma funkciou nazývame funkciu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

ktorá je definovaná pre všetky $x > 0$.

Studentovo t-rozdelenie má podmienenú strednú hodnotu 0 a podmienenú varianciu $v/(v-2)$.

Ak $r_t|I_{t-1} \sim t_v$, tak štandardizované výnosy portfólia $r_t/\sqrt{v/(v-2)}$ sledujú štandardizované Studentovo t-rozdelenie.

2.6 Testovanie modelov (*Backtesting*)

Na to, aby sa mohla vyhodnotiť úspešnosť modelov použitých na výpočet VaR a zistiť, nakoľko spĺňajú uložené požiadavky, je pre banky, ako aj ich regulátorov nevyhnutné spätné testovanie modelov, tzv. *backtesting*. Banky majú zvlášť záujem poznať výsledky spätných testov, a to ešte predtým, ako ich vykonajú a vyhodnotia samotní regulátori, pretože takto môžu načas odhaliť prípadné chyby v použitých modeloch a predísť tak pokutám.

Existuje niekoľko typov spätných testov modelov, najzákladnejšími sú však dve metódy, ktoré predstavili Kupiec (1995) a Christoffersen (1998). Tieto dve metódy predstavujú ohodnotenie odhadov VaR založené na binomickom rozdelení a ohodnotenie VaR metódou intervalovej predikcie.

Ďalej sú uvedené testy, ktoré použijeme na *backtesting* navrhnutých modelov na výpočet VaR v empirickej časti.

2.6.1 Kupiecov test

Najzákladnejšou požiadavkou, ktorá sa kladie na dobrý VaR model, je to, že pomer počtu predpovedí VaR, ktoré skutočná strata portfólia presiahla, teda „zlých“ predikcií VaR (tieto budeme ďalej označovať pojmom *výnimky*), k počtu všetkých predpovedí VaR by sa mal rovnať na začiatku stanovenej hodnote pravdepodobnosti p . Inými slovami, model by mal zabezpečiť správne nepodmienené pokrytie.

Podľa Kupieca (1995), za predpokladu, že odhady VaR sú správne, sa tieto výnimky môžu modelovať ako nezávislé náhodné udalosti z binomického rozdelenia s pravdepodobnosťou výskytu p . Správne odhady VaR by mali vykazovať vlastnosť, že ich nepodmienené pokrytie $\hat{p} = N/T$, kde N je počet výnimiek z celkového počtu odhadov T , sa rovná p . Nulovou hypotézou tohto testu teda je: $H_0 : \hat{p} = p$.

Na overenie tohto predpokladu použijeme LR (*likelihood ratio*) štatistiku:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left(\frac{p^N (1-p)^{T-N}}{\hat{p}^N (1-\hat{p})^{T-N}} \right). \quad (2.41)$$

LR_{uc} ¹⁷ má asymptotické χ^2 rozdelenie s jedným stupňom voľnosti. Hypotézu H_0 zamietame, pokiaľ je hodnota LR_{uc} štatistiky vyššia ako kritická hodnota $\chi^2(1)$ pri danej pravdepodobnosti p .

Poznámka 2.16 Kupiecov test sa niekedy v literatúre zvykne nazývať aj *Kupiecov POF test* (z angl. *Proportion of Failures*).

¹⁷Z angl. *unconditional coverage*.

V literatúre sa zvykne zavádzať tzv. *indikačná premenná* I_t , ktorá nadobúda hodnotu 0, pokiaľ je skutočná strata portfólia v čase t nižšia ako odhad VaR, a 1, pokiaľ skutočná strata portfólia v čase t presiahla odhadnutú VaR, a teda došlo k výnimke. Dostaneme tak časový rad jednotiek a núl, indikujúcich, či v rámci množiny odhadov (predikcií) VaR v čase t došlo, resp. nedošlo k výnimke.

Literatúra (Kupiec (1995), Christoffersen (1998), Lopez (1998)) uvádza viaceré nedostatky Kupiecovho testu. Jedným z nich je, že uvedený test síce testuje pokrytie intervalu, ale nemá žiadnu silu na zachytenie alternatívy, že nuly a jednotky sa zhlukujú. Na poradí núl a jednotiek vôbec nezáleží, dôležitý je iba celkový počet jednotiek.

2.6.2 Christoffersenov test

Nedostatky Kupiecovho testu, ktorý testuje iba nepodmienené pokrytie, sa pokúsil zdokonaľiť Christoffersen (1998) predstavením testu podmieneného pokrytia. Odhady (predikcie) VaR v čase t na čas $t + 1$ sú vlastne intervalovými predikciami, ktoré môžu byť ohodnotené podmienene alebo nepodmienené, teda berúc, resp. neberúc do úvahy informácie dostupné v čase t .

Dôležité totiž je, aby VaR model dokázal správne modelovať podmienené rozdelenie výnosov a v čase sa meniacu podmienenú varianciu. Potom by výnimky mali byť nepredvídateľné, a teda nezávislé. Za predpokladu, že odhady VaR vykazujú správne (korektné) podmienené pokrytie, časový rad indikačných premenných musí vykazovať súčasne správne (korektné) nepodmienené pokrytie a nezávislosť. Christoffersenov test spája testovanie týchto dvoch vlastností.

LR_{cc} ¹⁸ štatistika má tvar:

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}, \quad (2.42)$$

kde LR_{uc} je testovacia štatistika nepodmieneného pokrytia z Kupiecovho testu a LR_{ind} je štatistika, ktorá testuje nulovú hypotézu nezávislosti oproti alternatívnej hypotéze závislosti:

$$LR_{ind} = 2(\ln L_A - \ln L_0), \quad (2.43)$$

kde $L_A = (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \pi_{01}^{T_{01}} (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \pi_{11}^{T_{11}}$, $L_0 = (1 - \pi)^{T_{00} + T_{10}} \pi^{T_{01} + T_{11}}$.

T_{ij} označuje počet pozorovaní (indikačných premenných), ktoré sú v čase t v stave j , pričom v čase $t - 1$ boli v stave i .

π_{01} , π_{11} a π vypočítame ako: $\pi_{01} = T_{01}/(T_{00} + T_{01})$, $\pi_{11} = T_{11}/(T_{10} + T_{11})$, $\pi = (T_{01} + T_{11})/T$, kde T je počet všetkých pozorovaní.

LR_{ind} štatistika má asymptotické $\chi^2(1)$ rozdelenie a LR_{cc} štatistika má asymptotické $\chi^2(2)$ rozdelenie.

¹⁸Z angl. *conditional coverage*.

2.6.3 Kupiecov *TUFF* test (*Time until First Failure*)

Tento test je založený na podobných predpokladoch ako už uvedený Kupiecov *POF* test. Predpokladáme, že výnimky sú binomicky rozdelené s pravdepodobnosťou nastatia p . Potom môžeme očakávať, že výnimka nastane každých $1/p$ dní. Teda ak $p = 0.01$, nastatie výnimky očakávame každých 100 dní. Označme $\tilde{p} = 1/v$, kde v je počet dní do nastatia prvej výnimky. Nulovou hypotézou tohto testu je: $H_0 : \tilde{p} = p$.

LR štatistika je v tomto prípade definovaná ako:

$$LR_{tuff} = -2 \ln \left(\frac{p(1-p)^{v-1}}{\tilde{p}(1-\tilde{p})^{v-1}} \right). \quad (2.44)$$

LR_{tuff} štatistika má asymptotické $\chi^2(1)$ rozdelenie.

2.6.4 Kupiecov *mixed* test

Haas (2001) vo svojom článku navrhuje niekoľko nových metód *backtestingu*. Jednou z nich je aj tento zmiešaný test, v ktorom vychádza z Kupieca (1995) a Christoffersena (1998).

Na základe Kupiecovej LR_{tuff} štatistiky, ktorá meria čas do nastatia prvej výnimky, Haas (2001) hovorí, že takisto môžeme merať čas medzi nastatím výnimky $i-1$ a výnimky i , a to na základe štatistiky:

$$LR_i = -2 \ln \left(\frac{p(1-p)^{v_i-1}}{\tilde{p}_i(1-\tilde{p}_i)^{v_i-1}} \right), \quad (2.45)$$

kde v_i predstavuje počet dní, ktoré uplynuli od nastatia výnimky $i-1$ po nastatie výnimky i , a $\tilde{p}_i = 1/v_i$.

Ak je náš model optimálny, opäť môžeme očakávať výnimku každých $1/p$ dní. Preto môžeme pre každú výnimku zostrojiť test, ktorý bude merať čas medzi ňou a nastatím ďalšej výnimky. Spolu s LR_{tuff} štatistikou tak dostaneme N štatistík, kde N je počet všetkých výnimiek. Nulovou hypotézou tohto testu je, že výnimky sú medzi sebou navzájom nezávislé. Preto aj testovacie štatistiky sú nezávislé a môžeme ich spočítať. Takisto môžeme spočítať kritické hodnoty χ^2 a, keďže každá z uvedených štatistík má podobne ako LR_{tuff} asymptotické $\chi^2(1)$ rozdelenie, výsledná testovacia štatistika, ktorú označíme ako LR_{ind2} , bude mať asymptotické χ^2 rozdelenie s N stupňami voľnosti a nasledujúci tvar:

$$LR_{ind2} = \sum_{i=2}^N \left(-2 \ln \left(\frac{p(1-p)^{v_i-1}}{\tilde{p}_i(1-\tilde{p}_i)^{v_i-1}} \right) \right) - 2 \ln \left(\frac{p(1-p)^{v-1}}{\tilde{p}(1-\tilde{p})^{v-1}} \right). \quad (2.46)$$

Výsledný Kupiecov *mixed* test dostaneme spojením práve uvedeného testu a pôvodného Kupiecovho testu. Keďže aj LR_{uc} je nezávislá s každou z N uvedených štatistík, môžeme ju pripočítať kLR_{ind2} a dostaneme LR_{mix} štatistiku:

$$LR_{mix} = LR_{ind2} + LR_{uc}, \quad (2.47)$$

ktorá má asymptotické χ^2 rozdelenie s $N+1$ stupňami voľnosti.

Poznámka 2.17 Posledné dva testy, teda Kupiecov *TUFF* test a Kupiecov *mixed* test nemajú zmysel pre prípad, že $N = 0$, teda v prípade nulového počtu výnimiek nie sú definované. Pre $N = 1$, teda v prípade, že existuje len jedna výnimka, Kupiecov *mixed* test vlastne meria čas do nastatia prvej výnimky a testovacia štatistika LR_1 je totožná s Kupiecovou LR_{tuff} štatistikou.

Poznámka 2.18 V oboch uvedených testoch uvažujeme, že počet dní v do nastatia prvej výnimky, resp. počet dní v_i medzi nastatím výnimky $i - 1$ a výnimky i sa určí ako poradie daného pozorovania, resp. ako rozdiel poradí dvoch daných pozorovaní. Teda ak napr. prvá výnimka nastala v čase $t = 25$, tak $v = 25$, a ak druhá výnimka nastala v čase $t = 30$, tak $v_2 = 30 - 25 = 5$, a ak tretia výnimka nastala v čase $t = 31$, tak $v_3 = 31 - 30 = 1$.

Kapitola 3

Empirická analýza

3.1 Aplikácia navrhnutých modelov na reálne dáta

V tejto kapitole aplikujeme navrhnuté modely na vybrané akciové indexy a nakoniec určíme pre každé portfólio pozostávajúce z jedného vybraného indexu jeho VaR.

Analýzu uskutočníme na siedmich portfóliach. Nech každé portfólio pozostáva zo 100 000 kusov vybraného akciového indexu. Predpokladáme, že sme držiteľmi long pozície, a teda stratu utrpíme vtedy, pokiaľ trhovú hodnotu nášho portfólia poklesne. Ďalej si niekoľkými metódami ukážeme, ako môžeme určiť najhoršiu možnú stratu (teda VaR), ktorú sme pri určitej hladine spoľahlivosti ochotní pri obchodovaní s portfóliom podstúpiť.

Vybrali sme si sedem akciových indexov, ktoré reprezentujú dve skupiny krajín.

Prvú skupinu tvoria akciové indexy krajín Višeegrádskej štvorky V4, teda Českej republiky, Maďarska, Poľska a Slovenska. Višeegrádska štvorka V4 (zoskupenie týchto štyroch stredo európskych štátov) vznikla v roku 1991. Aktivity vzájomnej spolupráce V4 inicioval spoločný záujem štátov postkomunistického bloku o integráciu medzi vyspelé západoeurópske demokracie. V súčasnosti je pre krajiny V4 charakteristický pomerne rýchly rast hospodárstva, zároveň je však pre proces transformácie typická vysoká miera makroekonomickej nerovnováhy.

Prvú skupinu akciových indexov, ktorú budeme ďalej označovať ako *Indexy V4*, tvoria slovenský akciový index SAX, český akciový index PX¹, akciový index budapeštianskej burzy BUX a poľský akciový index WIG 20.

Poznámka 3.1 Zdroj dát: oficiálne webstránky národných búr, teda *www.bsse.sk*, *www.pse.cz*, *www.bse.hu*, *www.wse.com.pl*.

¹Do 17. marca 2006 existovali na pražskej burze dva indexy: PX 50 a PX-D. Od 20. marca 2006 však boli nahradené novým hlavným indexom pražskej burzy PX, ktorý nadviazal na vývoj indexu PX 50 a prevzal jeho históriu.

Druhú skupinu tvoria akciové indexy troch hospodárskych veľmocí, najvyspelejších krajín sveta. Ameriku reprezentuje USA indexom S&P 500, Áziu Japonsko indexom NIKKEI 225 a napokon Európu Nemecko, a to indexom DAX. Tieto tri indexy, prislúchajúce trom vyspelým stabilným trhovým ekonomikám, patria medzi najznámejšie a najobchodovanejšie indexy na svete.

Druhú skupinu akciových indexov budeme ďalej označovať ako *Svetové indexy*.

Poznámka 3.2 Zdroj dát: <http://finance.yahoo.com>.

3.1.1 Charakteristika výnosov vybraných akciových indexov

V nasledujúcich výpočtoch budeme vždy narábať s výnosmi, a nie so samotnými cenami vybraných indexov, z už uvedených dôvodov².

O voľbe počtu použitých historických dát si povieme viac pri analýze portfólia konkrétnej metódou.

V tabuľkách 3.1 a 3.2 sú uvedené deskriptívne charakteristiky jednotlivých akciových indexov spolu s hodnotou testovacej štatistiky Jarque-Bera, ktorou testujeme nulovú hypotézu o normálnom rozdelení časového radu. Všimnime si, že pre všetky výnosy túto hypotézu zamietame. Je zrejmé, že výnosy nemajú normálne rozdelenie, a ako vidno z vysokých hodnôt špicatosti (resp. z hodnôt špicatosti, ktoré sú vyššie ako 3, čo zodpovedá špicatosti normálneho rozdelenia), výnosy majú ťažké chvosty. Hodnota šikmosti naznačuje istú mieru asymetrie v dátach³.

<i>Indexy V4</i>	SAX	PX	BUX	WIG 20
<i>počet pozorovaní</i>	1506	1569	1564	1570
<i>priemer (μ)</i>	0.111800	0.073034	0.062226	0.027755
<i>medián</i>	0.030938	0.098824	0.050666	0.021619
<i>minimum</i>	-8.816664	-5.999678	-6.873526	-7.705723
<i>maximum</i>	5.959058	4.178458	6.004322	6.246071
<i>št. odchylka (σ)</i>	1.292688	1.240418	1.394985	1.559463
<i>šikmost' (S)</i>	-0.054761	-0.260685	-0.100457	0.046140
<i>špicatosť (K)</i>	7.415478	4.366144	4.668662	4.424116
<i>Jarque-Bera</i>	1224.155	139.7832	184.0828	133.2291
<i>pravdepodobnosť</i>	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tabuľka 3.1: Deskriptívne charakteristiky pre *Indexy V4*, na vzorke pozorovaní z rokov 2000–2006

²Pozri Kapitola 2, časť 2.1.1 Výnosy finančných aktív a ich charakteristika.

³Asymetriu vyjadruje tretí centrálny moment, tzv. *koefficient šikmosti S*. Pre $S = 0$ je rozdelenie symetrické, pre $S < 0$ je rozdelenie oproti symetrickému rozdeleniu zošikmené doprava a pre $S > 0$ je rozdelenie oproti symetrickému rozdeleniu zošikmené doľava.

<i>Svetové indexy</i>	S&P 500	NIKKEI 225	DAX
<i>počet pozorovaní</i>	2832	2467	2845
<i>priemer (μ)</i>	0.036613	-0.005171	0.036615
<i>medián</i>	0.057003	0.000000	0.093943
<i>minimum</i>	-7.112745	-7.233984	-6.652230
<i>maximum</i>	5.574432	7.655334	7.552676
<i>št. odchylka (σ)</i>	1.102201	1.445925	1.527857
<i>šikmost (S)</i>	-0.113215	-0.013773	-0.158556
<i>špicatosť (K)</i>	6.398544	4.898996	5.675297
<i>Jarque-Bera</i>	1368.962	415.8509	860.3485
<i>pravdepodobnosť</i>	0.000000	0.000000	0.000000

Tabuľka 3.2: Deskriptívne charakteristiky pre *Svetové indexy*, na vzorke pozorovaní z rokov 1995–2006

Vieme, že pre výnosy finančných aktív sú charakteristické dva zaujímavé javy: zhlukovanie volatility (*volatility clustering*) a tzv. *leverage effect*⁴. Obrázok 3.1 zobrazuje priebeh ceny a denných výnosov akciových indexov SAX a DAX v rokoch 2000–2006. Na oboch grafoch môžeme pozorovať striedanie pokojných a volatilných periód, zvlášť to vidno na grafe priebehu ceny a výnosu indexu DAX. Na vývoji ceny a výnosu indexu DAX si takisto môžeme všimnúť, ako reaguje volatilita na prudký pokles ceny - tzv. *leverage effect*.

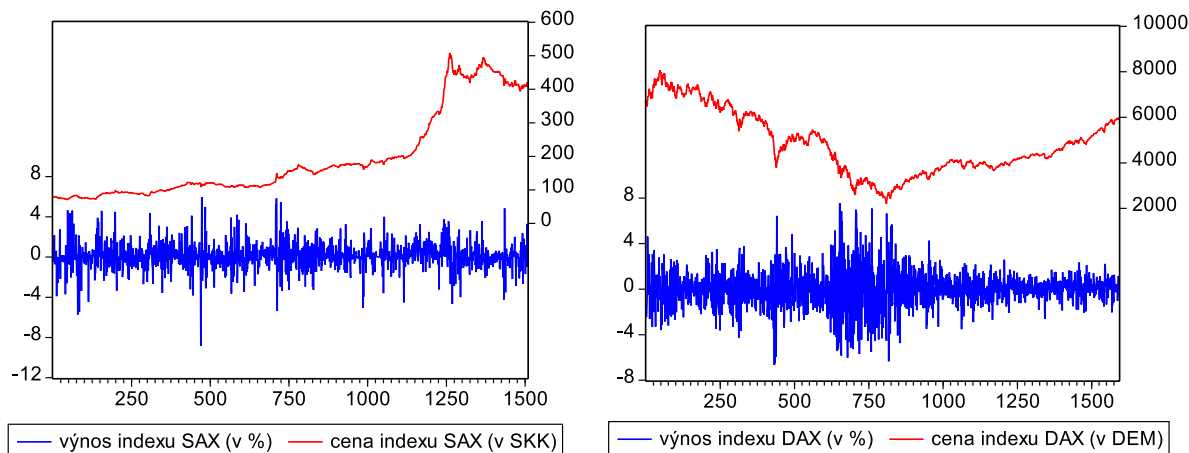
Na zachytenie javu zhlukovania volatility boli špeciálne navrhnuté práve GARCH modely, ktorými budeme v ďalšej časti modelovať podmienené rozdelenie výnosov všetkých uvažovaných indexov. *Leverage effect* zase dokážu zachytiť asymetrické GARCH modely. Uvidíme, či nám navrhnutý asymetrický GARCH model naozaj potvrdí prítomnosť *leverage effectu* v indexe DAX.

Prítomnosť javu zhlukovania volatility možno „tušiť“ už z toho, ak samotné výnosy aktíva nie sú síce korelované, ale štvorce výnosov áno. To naznačuje, že výnosy nie sú nezávislé, ako by sa dalo vzhľadom k ich nekorelovanosti čakať. Pre štvorce výnosov je charakteristická signifikantná pozitívna autokorelácia, ktorá pomaly klesá s rastúcim počtom pozorovaní medzi dvoma výnosmi.

Pre všetky uvažované indexy môžeme naozaj pozorovať, že ich výnosy nie sú korelované, ale štvorce výnosov áno.

Samotný proces výnosov budeme modelovať ARMA procesom. Rád ARMA modelu sa identifikuje porovnaním so známym, teoretickým tvarom ACF a PACF. Tvar ACF a PACF výnosov všetkých vybraných indexov pripomína biely šum, a teda výnosy možno modelovať rovnicou $r_t = c + \epsilon_t$. V literatúre sa však v tomto prípade zvykne do tejto jednoduchšej

⁴Viac pozri v Kapitole 2, časť 2.1.1 Výnosy finančných aktív a ich charakteristika.



(a) SAX

(b) DAX

Obrázok 3.1: Priebeh ceny a denných výnosov akciových indexov SAX a DAX v rokoch 2000–2006 (v %)

rovnice pridať ešte aj autoregresívna zložka prvého rádu. Preto budeme výnosy indexov ďalej modelovať AR(1) procesom, a teda $r_t = c + \rho r_{t-1} + \epsilon_t$.

Ďalším krokom je analýza rezidií. Klasická ARMA metodológia predpokladá, že variancia disturbancií ϵ_t je konštantná: $V(\epsilon_t) = \sigma^2$ (teda predpokladá homoskedasticitu). Pre výnosy finančných aktív je však charakteristická prítomnosť podmienenej heteroskedasticity v reziduách, resp. disturbanciách ϵ_t , teda podmienená variancia ϵ_t nie je konštantná, ale sa mení v čase: $V(\epsilon_t) = \sigma_t^2$, a na jej modelovanie slúžia GARCH modely.

Prítomnosť ARCH (autoregresívna podmienená heteroskedasticita, z angl. *autoregressive conditional heteroscedasticity*) v modeli skúmame dvoma krokmi. Prvým je analýza štvorcov štandardizovaných rezidií ϵ_t/σ_t . Pokiaľ sú korelované, naznačuje to prítomnosť ARCH v modeli. Druhým krokom je testovanie nulovej hypotézy o neprítomnosti ARCH v modeli. Engle na to navrhuje použiť ARCH LM test (*Lagrange Multiplier*). Ak je hodnota príslušnej testovacej štatistiky dostatočne veľká, nulovú hypotézu o neprítomnosti ARCH v modeli zamietame. Ak je dostatočne malá, môžeme nulovú hypotézu prijať (resp. nezamietnuť), a teda môžeme predpokladať, že v modeli nie je ARCH prítomná.

Analýza štandardizovaných rezidií po modelovaní výnosov všetkých siedmich indexov AR(1) procesom jasne naznačuje prítomnosť ARCH v modeli. Štandardizované reziduá sú vo všetkých siedmich prípadoch silne korelované a hodnota Englovej LM testovacej štatistiky ARCH LM testu je vo všetkých prípadoch dostatočne vysoká na to, aby sme mohli nulovú hypotézu o neprítomnosti ARCH v modeli zamietnuť. Tabuľky 3.3, 3.4

obsahujú výsledky ARCH LM testu pre všetkých sedem indexov. Na základe uvedených výsledkov sme teda podmienené rozdelenie výnosov modelovali pomocou GARCH modelov.

ARCH LM test:	SAX	PX	BUX	WIG 20
<i>LM štatistika</i>	8.118593	18.7028	9.693142	24.4337
<i>(p-hodnota)</i>	(0.004381)	(0.000015)	(0.001850)	(0.000001)

Tabuľka 3.3: Výsledky ARCH LM testu pre *Indexy V4*

ARCH LM test:	S&P 500	NIKKEI 225	DAX
<i>LM štatistika</i>	88.55686	14.36301	111.6371
<i>(p-hodnota)</i>	(0.000000)	(0.000151)	(0.000000)

Tabuľka 3.4: Výsledky ARCH LM testu pre *Svetové indexy*

3.1.2 Modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov vybraných akciových indexov

Podmienené rozdelenie výnosov akciových indexov sme modelovali štatistickým softwarom EViews 4.0, ktorý obsahuje zabudovanú väčšinu procedúr potrebných pre našu analýzu. Na odhad koeficientov v GARCH modeloch metódou maximálnej vierohodnosti sme použili upravené programy z EViewsu a všetky ďalšie špeciálne výpočty sú takisto doprogramované v EViewse.

Podmienené rozdelenie výnosov indexov sme modelovali s použitím historických cien na dennej báze (*close values*) na nasledujúcich časových úsekoch:

- *Indexy V4* sme modelovali počas rokov 2000–2004, čo predstavovalo 1215 pozorovaní pre SAX (7.1.2000–23.12.2004), 1252 pozorovaní pre PX (5.1.2000–30.12.2004), 1248 pozorovaní pre BUX (4.1.2000–31.12.2004) a 1255 pozorovaní pre WIG 20 (3.1.2000–31.12.2004). Ďalšie pozorovania až do 31.3.2006 sme si nechali na *out-of-sample* predikcie pre spätné testovanie modelov. Konkrétne, pre SAX to bolo 292 pozorovaní (10.1.2005–31.3.2006), pre PX 318 pozorovaní (3.1.2005–31.3.2006), pre BUX 317 pozorovaní (4.1.2005–31.3.2006) a pre WIG 20 to bolo 316 pozorovaní (3.1.2005–31.3.2006).
- Spomedzi *Svetových indexov* sme index S&P 500 a NIKKEI 225 modelovali počas rokov 1995–2004, čo pre S&P 500 predstavovalo 2519 pozorovaní (3.1.1995–31.12.2004) a pre NIKKEI 225 2462 pozorovaní (4.1.1995–31.12.2004). Index DAX sme modelovali počas rokov 1991–2004, čo predstavovalo 3526 pozorovaní (2.1.1991–30.12.2004).

Ďalšie pozorovania až do 31.3.2006 sme si nechali na *out-of-sample* predikcie pre spätné testovanie modelov. Konkrétne, pre S&P 500 to bolo 314 pozorovaní (3.1.2005–31.3.2006), pre NIKKEI 225 306 pozorovaní (4.1.2005–31.3.2006) a pre DAX to bolo 322 pozorovaní (3.1.2005–31.3.2006).

Na základe uvedených deskriptívnych charakteristík (tabuľky 3.1, 3.2) výnosov jednotlivých indexov sme sa pri modelovaní podmienenej variancie výnosov rozhodli pre tri GARCH modely. Prvým je GARCH(1,1) ako všeobecne najviac odporúčaný na modelovanie podmienenej variancie výnosov finančných aktív. Je to však symetrický model a na zachytenie prípadnej prítomnosti *leverage effect* je potrebné použiť niektorý z asymetrických modelov. Vybrali sme si TAR(1,1) a EGARCH.

Ako rovnicu podmienenej strednej hodnoty sme vo všetkých prípadoch použili AR(1) proces, teda $r_t = c + \rho r_{t-1} + \epsilon_t$.

Napriek tomu, že výnosy finančných aktív vo všeobecnosti nevykazujú normálne rozdelenie, a tak je tomu aj v našom prípade, ich podmienená variancia sa dá úspešne modelovať GARCH modelmi za predpokladu, že disturbancie ϵ_t sledujú podmienené normálne rozdelenie. Samotný GARCH je totiž tak špecifikovaný, že dokáže aj tak zachytiť ťažké chvosty výnosov. V niektorých prípadoch sa však špecifikácia modelu dá vylepšiť použitím Studentovho t-rozdelenia pre disturbancie ϵ_t . Tieto dve podmienené rozdelenia sme použili aj my, a to pre všetky tri GARCH modely, teda celkovo sme analýzu robili na šiestich modeloch pre každý index.

Poznámka 3.3 Normálne aj Studentovo t-rozdelenie sú obidve symetrické. V prípade asymetrie vo výnosoch sa môže použiť aj iné rozdelenie, ktoré nie je symetrické, a teda dokáže túto asymetriu zachytiť. Odporúča sa napr. tzv. *Generalized Error Distribution (GED)* alebo tzv. *Mixture of Normals*. Použitie niektoré z uvedených rozdelení predstavuje možné rozšírenie tejto analýzy.

Výsledky analýzy pre jednotlivé indexy pri použití jednotlivých GARCH modelov sú uvedené v tabuľkách 3.5až 3.11 v prílohe. Pre *Indexy V4* sú to konkrétne tabuľky 3.5, 3.6, 3.7 a 3.8, a pre *Svetové indexy* sú to tabuľky 3.9, 3.10 a 3.11.

Každá tabuľka obsahuje odhad parametrov pre rovnicu podmienenej strednej hodnoty a odhad parametrov príslušných GARCH modelov. Hviezdičkou označené hodnoty parametrov sú nesignifikantné pri hladine spoľahlivosti 90%.

Poznámka 3.4 Parameter *tdf* v tabuľke 3.5až 3.11 vyjadruje odhadnutý počet stupňov voľnosti daného GARCH modelu s disturbanciami, ktoré majú Studentovo t-rozdelenie.

Po namodelovaní podmieneného rozdelenia príslušným GARCH modelom je opäť dôležitá analýza reziduí. Je dôležité otestovať, či sa nám použitím daného GARCH modelu podarilo odstrániť prítomnosť ARCH v modeli. Ak sú štvorce štandardizovaných reziduí ϵ_t/σ_t nekorelované a ak hodnota testovacej štatistiky v ARCH LM teste je dostatočne nízka na to, že môžeme prijať nulovú hypotézu o neprítomnosti ARCH v modeli, tak model je dobre špecifikovaný.

V našej analýze vo všetkých prípadoch vyšlo, že štvorce štandardizovaných reziduí už nie sú korelované. Navyše, ako vidno z tabuliek, pre každý z GARCH modelov použitých na modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov je pri všetkých indexoch hodnota testovacej štatistiky veľmi malá a nulovú hypotézu o neprítomnosti ARCH v modeli môžeme prijať. Teda každý model pre každý index je dobre špecifikovaný.

Okrem toho, dôležité je všimnúť si, či je pri GARCH(1,1) modeli zabezpečená stacionarita procesu. To je vtedy, ak súčet parametrov α a β je nižší ako jedna. Potom môžeme určiť nepodmienenú varianciu σ^2 (vlastne varianciu výnosov z dlhodobého hľadiska) procesu, a to z rovnice (2.18). Vidíme, že aj to platí vo všetkých prípadoch.

Je teda zrejmé, že všetky modely sú dobre špecifikované a všetky môžeme použiť na modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov vybraných akciových indexov.

Porovnávať modely, teda určiť, ktorý z nich najlepšie modeluje výnosy daného aktíva, môžeme na základe dvoch kritérií: Akaikeho informačného kritéria AIC a Schwarzovho kritéria SC. V prípade nerozhodnosti medzi týmito dvoma kritériami bude pre nás smerodajné AIC.

$$\begin{aligned} AIC &= -2\frac{l}{T} + 2\frac{k}{T}, \\ SC &= -2\frac{l}{T} + k\frac{\ln(T)}{T}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde k je počet odhadovaných parametrov v modeli, T predstavuje počet pozorovaní a l vyjadruje hodnotu funkcie vierohodnosti (*likelihood function*) pri použití k parametrov.

Na základe AIC a SC kritérií sme určili, že pre indexy SAX, PX, S&P 500, NIKKEI 225 a DAX je najvhodnejší EGARCH, v ktorom majú disturbance ϵ_t Studentovo t-rozdelenie.

Vidíme, že EGARCH najlepšie modeluje všetky indexy zo skupiny *Svetových indexov*.

Pre skupinu *Indexov V4* sa výsledky trochu líšia. Pre SAX a PX je takisto najlepší EGARCH, pre WIG 20 je to však klasický GARCH(1,1) model s normálne rozdelenými disturbanceami a pre BUX je to TARARCH(1,1) s disturbanceami sledujúcimi Studentovo t-rozdelenie.

Pri všetkých indexoch okrem WIG 20 sa osvedčilo použiť Studentovo t-rozdelenie pre disturbance. Model tak dokáže ešte lepšie zachytiť ťažké chvosty výnosov, ktoré signalizovala vysoká hodnota špicatosti v tabuľkách 3.1 a 3.2. Zaujímavé je všimnúť si, že v uvedených tabuľkách mal zo všetkých indexov najnižšiu hodnotu špicatosti práve WIG 20.

Pri všetkých indexoch okrem WIG 20 sa lepšie osvedčili asymetrické modely: TARARCH v prípade indexu BUX a EGARCH pri ostatných indexoch. Týmito modelmi môžeme zachytiť prítomnosť *leverage effect* vo výnosoch indexov. Prítomnosť *leverage effect* testujeme hypotézou $\gamma > 0$ v TARARCH modeli a hypotézou $\varphi < 0$ v EGARCH modeli. Odhadnutý parameter γ v najvhodnejšom TARARCH modeli pre BUX je kladný a je signifikantný (môžeme prijať hypotézu prítomnosti *leverage effect* vo výnosoch). Takisto odhadnuté parametre φ v najvhodnejších EGARCH-och sú pre S&P 500, NIKKEI 225, DAX a PX záporné a

signifikantné (môžeme prijať hypotézu prítomnosti *leverage effectu* vo výnosoch), jedine pre SAX je φ kladný a nesignifikantný.

Z uvedeného vyplýva, že *Svetové indexy* majú navzájom veľmi podobné správanie sa výnosov. Všetky sa najlepšie modelujú EGARCH modelom s disturbanciami sledujúcimi Studentovo t-rozdelenie (to charakterizuje ťažké chvosty) a vo výnosoch majú prítomný *leverage effect*. Zo skupiny *Indexov V4* je im najviac podobný český index PX a aj maďarský BUX. WIG 20 je v rámci skupiny *Indexov V4* dosť špecifický, keďže sa najlepšie modeluje symetrickým GARCH modelom s normálne rozdelenými disturbanciami. Výnosy indexu SAX sa síce tiež najlepšie modelujú EGARCH-om s disturbanciami sledujúcimi Studentovo t-rozdelenie (to charakterizuje ťažké chvosty), ale ťažko odhadnúť prítomnosť *leverage effectu*. Najvhodnejším modelom pre výnosy indexu SAX je síce EGARCH, ale nemá signifikantný záporný parameter φ .

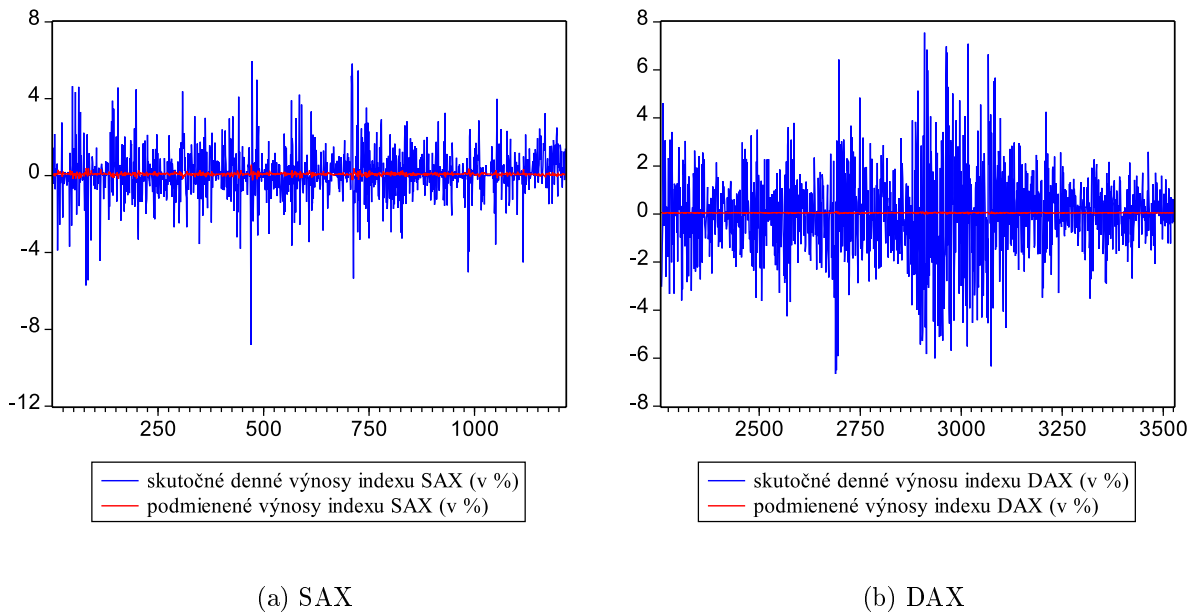
Poznámka 3.5 V tabuľkách pre podmienené rozdelenie výnosov jednotlivých indexov v prílohe sú najvhodnejšie modely vyznačené tmavou farbou.

Ako už bolo spomínané v predchádzajúcej kapitole, odhadnuté parametre α a β GARCH modelov pre jednotlivé indexy určujú krátkodobú dynamiku výsledného časového radu variancie, resp. volatility daného indexu. Parameter α meria veľkosť okamžitej reakcie procesu na nové informácie, zatiaľ čo parameter β vyjadruje pretrvávajúce, perzistenciu procesu.

Jednotlivé indexy zo skupiny *Svetových indexov* majú parametre α a β veľmi podobné. S&P 500 má parameter $\beta = 0.916663$, NIKKEI 225 má $\beta = 0.898431$ a DAX má $\beta = 0.893821$. Najvyššiu perzistenciu teda vykazuje index S&P 500. Najnižšiu reakciu na nové informácie v tejto skupine vykazuje index NIKKEI 225, parameter α má preň veľkosť iba 0.069640, zatiaľ čo pre S&P 500 je to 0.080161 a pre DAX je to 0.085716.

V skupine *Indexov V4* možno pozorovať väčšie rozdiely. *Svetovým indexom* sa najviac približuje PX a BUX, PX hodnotou parametra $\beta = 0.901536$ a BUX hodnotou parametra $\beta = 0.901588$. Najviac perzistentným zo skupiny *Indexov V4* a zároveň spomedzi všetkých uvažovaných indexov je WIG 20 s hodnotou parametra β až 0.946982. Najmenej perzistentným zo skupiny *Indexov V4* a zároveň spomedzi všetkých uvažovaných indexov je SAX s hodnotou parametra β iba 0.0766777. WIG 20 je zároveň indexom, ktorý vykazuje najnižšiu mieru reakcie na nové informácie na trhu, hodnota jeho parametra α je iba 0.046272. Naopak, SAX je zároveň indexom, ktorý vykazuje najvyššiu mieru reakcie na nové informácie na trhu, hodnota jeho parametra α je až 0.094070. Indexy PX a BUX sa aj hodnotami parametrov α najviac približujú skupine *Svetových indexov*. PX má $\alpha = 0.073215$ a BUX má $\alpha = 0.067772$.

Obrázok 3.2 znázorňuje skutočné denné výnosy a namodelované podmienené výnosy indexov SAX a DAX (v %) pri použití EGARCH modelu s disturbanciami sledujúcimi Studentovo t-rozdelenie.



Obrázok 3.2: Priebeh skutočných denných výnosov a podmienených výnosov akciových indexov SAX a DAX v rokoch 2000–2004 (v %)

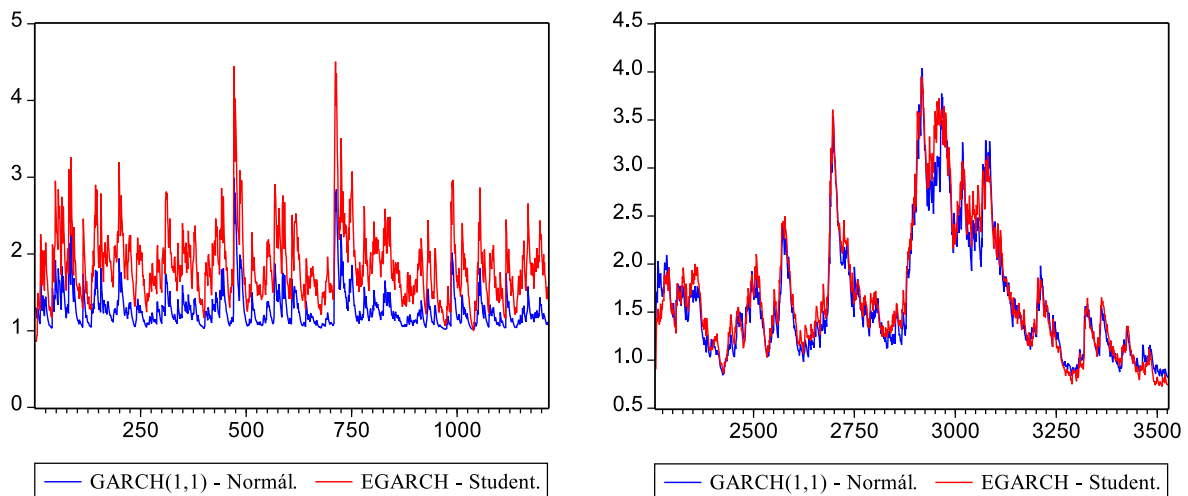
Obrázok 3.3 znázorňuje podmienenú volatilitu namodelovanú klasickým GARCH (1,1) modelom s normálne rozdelenými disturbanciami a EGARCH modelom s disturbanciami sledujúcimi Studentovo t-rozdelenie indexov SAX a DAX v rokoch 2000–2004.

Všimnime si, že pri indexe DAX sú podmienené volatilita namodelované oboma modelmi takmer totožné, takmer sa prekrývajú, zatiaľ čo podmienená volatilita indexu SAX modelovaná klasickým GARCH(1,1) modelom je podstatne nižšia ako modelovaná EGARCH-om.

Podmienenú varianciu, resp. volatilitu výnosov finančných aktív môžeme modelovať aj pomocou RiskMetrics. EWMA metóda používaná v RiskMetrics je vlastne špeciálnym I-GARCH modelom, a to konkrétne I-GARCH(1,1) modelom, v ktorom parameter $\omega = 0$ a vyhladzovacia konštanta $\lambda = 0.94$ (pre predikcie na jeden deň dopredu). Okrem toho, RiskMetrics predpokladá, že výnosy sledujú podmienené normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou, teda $r_t = \epsilon_t$.

Na obrázkoch 3.4(a) a 3.5(a) sú pre porovnanie znázornené podmienené volatilita získané klasickým GARCH(1,1) modelom s normálne rozdelenými disturbanciami a metódou RiskMetrics pre indexy SAX a DAX v rokoch 2000–2004.

Obrázky 3.4(b) a 3.5(b) zase znázorňujú podmienené volatilita získané EGARCH modelom s disturbanciami sledujúcimi Studentovo t-rozdelenie a metódou RiskMetrics pre



(a) SAX

(b) DAX

Obrázok 3.3: Podmienená volatilita akciových indexov SAX a DAX v rokoch 2000–2004

indexy SAX a DAX v rokoch 2000–2004.

Z obrázkov vidíme, že podmienená volatilita získaná metódou RiskMetrics pre index SAX je ešte nižšia ako podmienená volatilita získaná klasickým GARCH modelom. Pre index DAX sú však podmienené volatility získané všetkými tromi modelmi približne rovnaké.

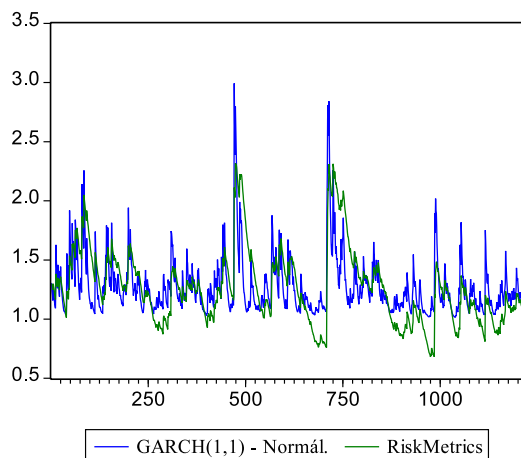
3.1.3 Výpočet VaR

Hodnotu Value-at-Risk (VaR) sme počítali pre všetkých sedem portfólií, každé pozostávajúce zo 100 000 kusov vybraného akciového indexu. VaR sme pre každé portfólio počítali metódou historickej simulácie, metódou RiskMetrics a ekonometrickým prístupom pomocou GARCH modelov. Ťažiskom tejto práce je práve modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov vybraných akciových indexov pomocou GARCH modelov a VaR je jednou z jeho možných finančných aplikácií. VaR sme tak počítali zvlášť pre všetky prípady GARCH modelov.

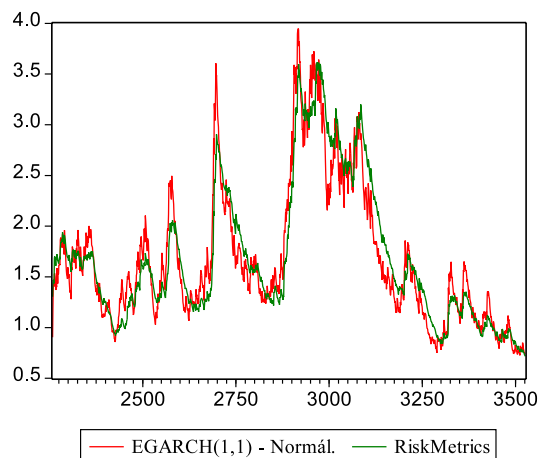
Počítali sme 1-dňovú VaR, teda *1-step ahead* predikcie pre VaR vždy v čase t na čas $t + 1$. VaR sme počítali pri hladine spoľahlivosti 95% a 99%.

Výpočet VaR ekonometrickým prístupom, použitím GARCH modelov

V prípade ekonometrického prístupu k výpočtu VaR pomocou GARCH modelov sme počítali tzv. *in-sample* predikcie a *out-of-sample* predikcie. *In-sample* predikcie sú vlastne



(a) SAX: GARCH - RiskMetrics



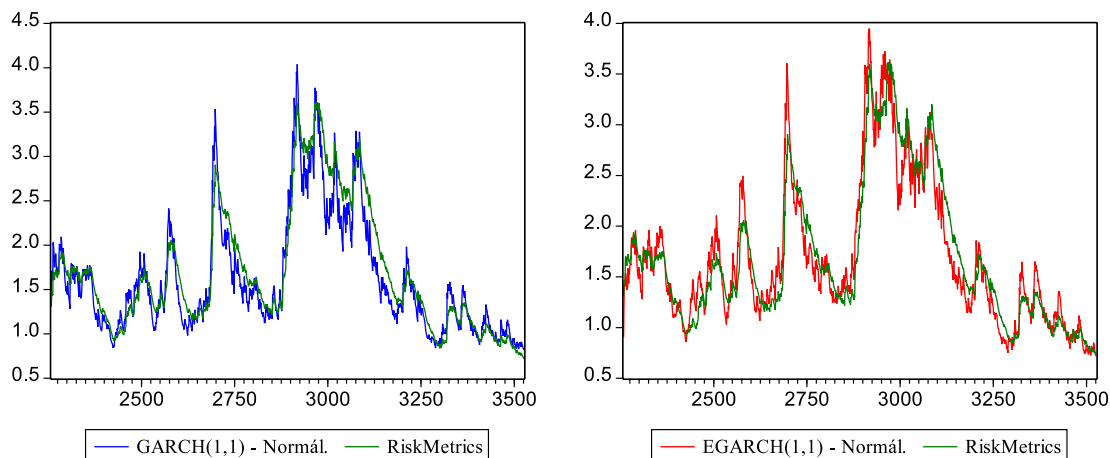
(b) SAX: EGARCH - RiskMetrics

Obrázok 3.4: Podmienená volatilita akciového indexu SAX v rokoch 2000–2004, modelovaná GARCH-om, EGARCH-om a pomocou RiskMetrics

predpoveďami VaR v rámci časového úseku, v ktorom sme modelovali podmienené rozdelenie výnosov GARCH modelmi. *Out-of-sample* predikcie sú predikcie VaR na ďalší časový úsek, v našom prípade to konkrétne bolo od začiatku januára 2005 do 31.3.2006, s tým, že sme na výpočet podmienených výnosov a variancie použili už známe, určené, odhadnuté parametre GARCH modelov. Z tohto hľadiska sú pre nás zaujímavejšie práve *out-of-sample* predikcie, pretože tie predstavujú praktický prínos - v praxi nás zaujíma odhad VaR na zajtrajší deň, s tým, že informácie o vývoji finančného aktíva máme len do dnešného dňa.

V prílohe uvádzame hodnoty 95% a 99% VaR pre dva konkrétne dátumy. Prvým je posledná *in-sample* predikcia VaR, ide teda o predikciu VaR na posledný obchodovací deň v roku 2004 každého indexu. Druhým dátumom je posledná *out-of-sample* predikcia, teda na deň 31.3.2006. Číslo v zátvorke predstavuje hodnotu VaR v % skutočnej trhovej hodnoty portfólia daného dňa.

Tabuľky 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17 a 3.18 obsahujú vypočítané hodnoty VaR pre portfóliá skladajúce sa zo 100 000 kusov indexov SAX, PX, BUX, WIG 20, S&P 500, NIKKEI 225 a DAX, zakaždým pre každý aplikovaný GARCH model.



(a) DAX: GARCH - RiskMetrics

(b) DAX: EGARCH - RiskMetrics

Obrázok 3.5: Podmienená volatilita akciového indexu DAX v rokoch 2000–2004, modelovaná GARCH-om, EGARCH-om a pomocou RiskMetrics

Výpočet VaR pomocou RiskMetrics

RiskMetrics sme aplikovali na dáta od začiatku roku 2000 až po 31.3.2006 a pre každý deň sme vypočítali hodnotu VaR pri 95% a 99% hladine spoľahlivosti. V tomto prípade nemožno hovoriť o *in-sample* a *out-of-sample* predikciách VaR, pretože počas celého časového úseku sme uvažovali pevne zvolené parametre. Pre porovnanie však uvádzame v tabuľke hodnoty 95% VaR a 99% VaR pre posledný obchodovací deň roku 2004 a pre 31.3.2006. Číslo v zátvorke predstavuje hodnotu VaR v % skutočnej trhovej hodnoty portfólia daného dňa.

Vypočítané hodnoty VaR pomocou RiskMetrics pre portfóliá pozostávajúce zo 100 000 kusov daného indexu sú v dvoch tabuľkách v prílohe. V tabuľke 3.19 uvádzame hodnoty VaR pre *Indexy V4* a v tabuľke 3.20 pre *Svetové indexy*.

Výpočet VaR metódou historickej simulácie

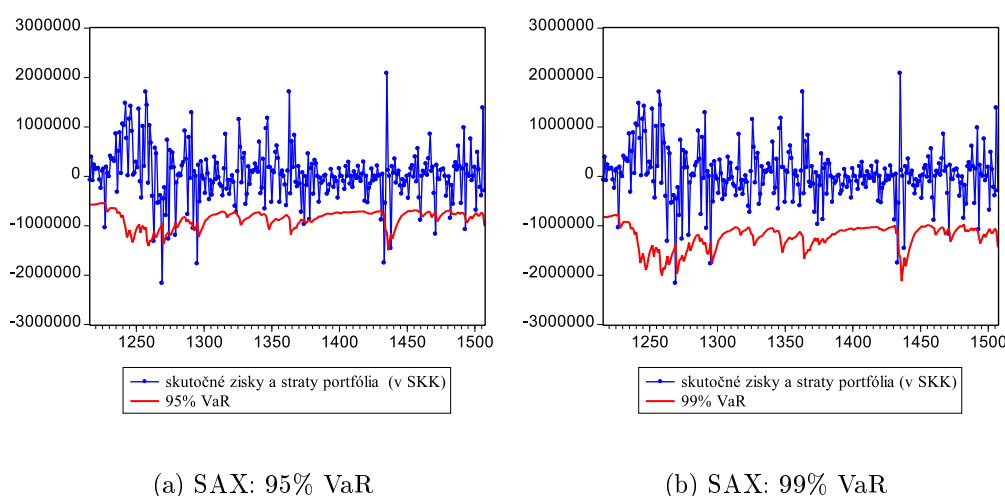
Pri aplikovaní metódy historickej simulácie na výpočet VaR sme použili tzv. posuvné okno historických dát z predchádzajúcich troch rokov, teda približne 750 pozorovaní. To znamená, že na výpočet VaR na posledný obchodovací deň v roku 2004 daného akciového indexu sme v modeli metódy historickej simulácie použili dáta od začiatku roku 2001 po predposledný obchodovací deň v roku 2004. Na základe týchto údajov sme určili VaR pre dané portfólio na posledný obchodovací deň v roku 2004. Potom sme sa posunuli o jeden krok dopredu a na výpočet VaR na prvý obchodovací deň v roku 2005 sme použili dáta

od druhého obchodovacieho dňa v roku 2001 po posledný obchodovací deň v roku 2004. Takto sme pokračovali ďalej, až sme nakoniec určili VaR na 31.3.2006, a to na základe dát od začiatku apríla 2003 do 30.3.2006.

Treba zdôrazniť, že v takto získanom časovom rade VaR predikcií sme každú hodnotu získavali na rozdiel od GARCH modelov a RiskMetrics z nepodmieneného rozdelenia. Nebudeme teda hovoriť o *in-sample* a *out-of-sample* predikciách. V tabuľke na porovnanie uvádzame hodnoty VaR pri 95%-nej a 99%-nej hladine spoľahlivosti takisto pre posledný obchodovací deň v roku 2004 a pre 31.3.2006. Číslo v zátvorke predstavuje hodnotu VaR v % skutočnej trhovej hodnoty portfólia daného dňa.

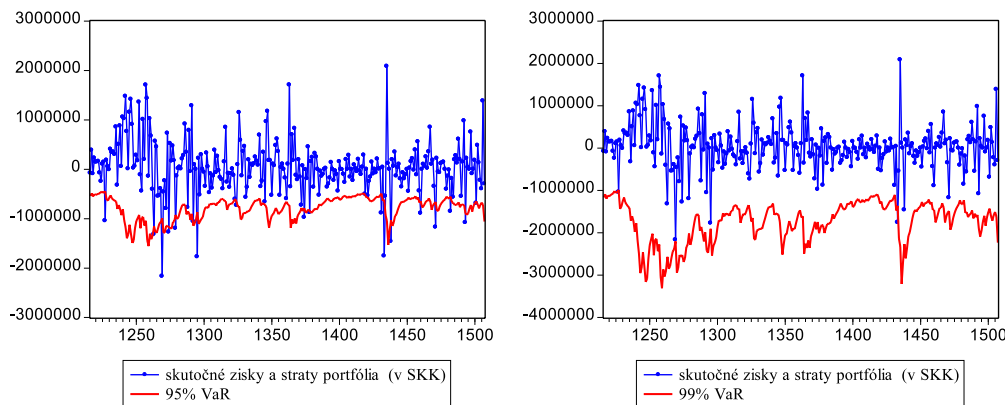
Vypočítané hodnoty VaR pomocou metódy historickej simulácie pre portfóliá pozostávajúce zo 100 000 kusov daného indexu sú v dvoch tabuľkách v prílohe. V tabuľke 3.21 uvádzame hodnoty VaR pre *Indexy V4* a v tabuľke 3.22 pre *Svetové indexy*.

Ďalej uvádzame grafy zobrazujúce skutočné zisky a straty portfólia (v SKK, resp. DEM) a 95% VaR, resp. 99% VaR pre indexy SAX a DEM, a to na obdobie od začiatku roka 2005 po 31.3.2006. V prípade ekonometrického prístupu k výpočtu VaR pomocou GARCH modelov ide o *out-of-sample* predikcie. Grafy zobrazujú obrázky 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13.



Obrázok 3.6: SAX: Ekonometrický prístup k výpočtu VaR, podmienené rozdelenie výnosov bolo modelované GARCH(1,1) modelom s normálne rozdelenými disturbanciami, *out-of-sample* predikcie VaR pre 10.1.2005–31.3.2006

Porovnávaním hodnôt VaR získaných na základe odhadov podmieneného rozdelenia výnosov jednotlivými GARCH modelmi sme dospeli k niekoľkým zaujímavým postrehom.



(a) SAX: 95% VaR

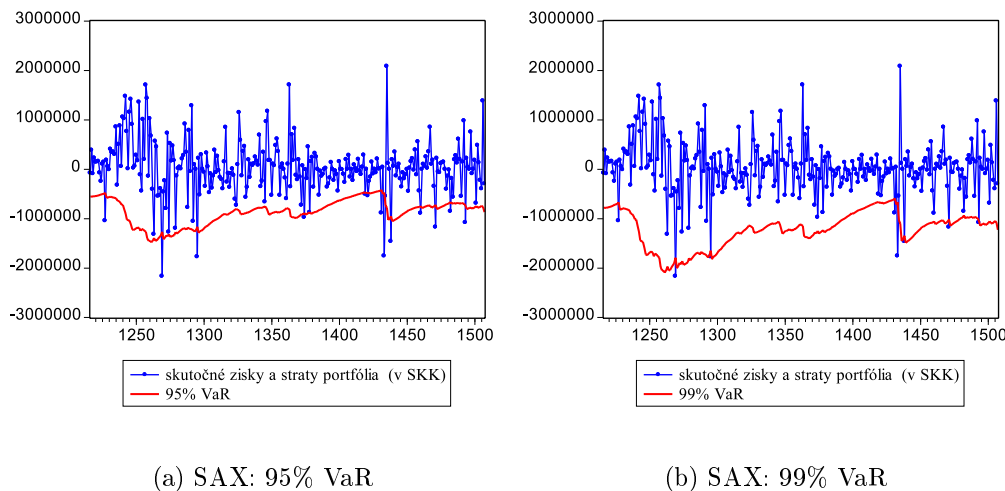
(b) SAX: 99% VaR

Obrázok 3.7: SAX: Ekonometrický prístup k výpočtu VaR, podmienené rozdelenie výnosov bolo modelované EGARCH modelom s disturbanciami sledujúcimi Studentovo t-rozdelenie, *out-of-sample* predikcie VaR pre 10.1.2005–31.3.2006

Pre skupinu *Svetových indexov* je opäť charakteristické podobné správanie sa výnosov. Pri modelovaní 95% VaR GARCH modelmi s normálne rozdelenými disturbanciami a disturbanciami sledujúcimi podmienené Studentovo t-rozdelenie nie je badať výrazné hodnoty v zmene VaR. Použitie Studentovho t-rozdelenia sa prejaví až pri modelovaní 99% VaR, kedy už vlastne viac zachádzame do koncových oblastí rozdelenia. Vtedy sa prejaví efekt ťažkých chvostov, čo má za následok mierne zvýšenie VaR pri 99%-nej hladine spoľahlivosti. Pre všetky tri svetové indexy S&P 500, NIKKEI 225 i DAX je toto zvýšenie iba mierne a približne rovnaké pre všetky tri indexy. Možno to spozorovať z tabuliek uvedených v prílohe, kde okrem absolútnej hodnoty VaR, vyjadrenej v príslušnej domácej mene, je v zátvorke uvedený percentuálny podiel VaR z aktuálnej trhovej hodnoty portfólia. Pre všetky tri indexy je zároveň hodnota VaR určená pre daný deň a pri danej hladine spoľahlivosti mierne nižšia, pokiaľ podmienené rozdelenie výnosov modelujeme TARCH alebo EGARCH modelom.

V skupine *Indexov V4* opäť badať výraznejšie rozdiely. Index PX sa správa veľmi podobne ako *Svetové indexy*, resp. je svojím správaním sa najpodobnejší *Svetovým indexom* zo skupiny *Indexov V4*. Približuje sa mu opäť BUX a indexy SAX a WIG 20 sa odlišujú výraznejšie. Najmä pri indexe SAX možno badať, že 99 % VaR pri predpoklade disturbancií sledujúcich Studentovo t-rozdelenie prudko stúpa. Je to najvýraznejší nárast v hodnote VaR v porovnaní so všetkými ostatnými indexmi, dokonca je to nárast o dosť vyšší oproti nárastu VaR pri indexe WIG 20.

Pri porovnaní výsledkov VaR získaných pomocou RiskMetrics, sú pre index SAX hodnoty VaR dosť podobné, a to najmä pri použití modelov s normálne rozdelenými disturbanciami. Platí to však všeobecne aj pri všetkých ostatných indexoch. Na základe uvedených

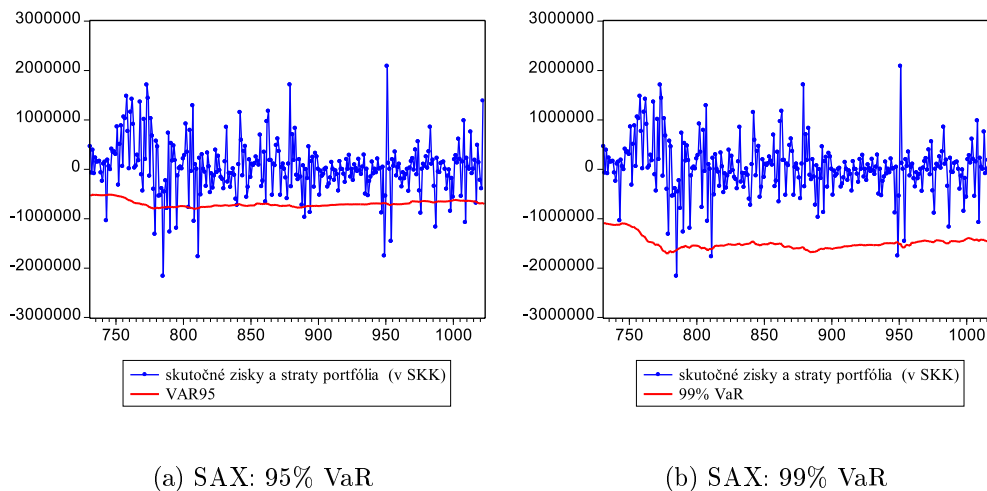


Obrázok 3.8: SAX: RiskMetrics, predikcie VaR pre 10.1.2005–31.3.2006

údajov sa nedá povedať, že by odhady VaR pomocou RiskMetrics boli permanentne vyššie alebo nižšie oproti odhadom VaR získanými niektorým z GARCH modelov. Celkovo sú im dosť podobné vo všetkých prípadoch. To dosvedčuje takú obľúbenosť použitia RiskMetrics metodológie pri výpočtoch VaR, napriek tomu, že RiskMetrics predpokladá, že výnosy sledujú podmienené normálne rozdelenie.

Pri porovnaní odhadov VaR získaných metódou historickej simulácie pre posledný obchodovací deň v roku 2004 vychádza VaR určená metódou historickej simulácie podstatne vyššia pre všetky indexy. Pri porovnaní získaných hodnôt VaR pre 31.3.2006 je stále vyššia pre všetky *Svetové indexy*, avšak pre všetky *Indexy V4* je podstatne nižšia.

Pri podrobnejšom sledovaní uvedených údajov je možné si všimnúť ešte jednu zaujímavú vec. Odhady VaR *Svetových indexov* sú konzistentné, dajú sa predpokladať alebo aspoň tušiť. Nie sú veľké rozdiely medzi hodnotami VaR získanými modelovaním rôznych GARCH modelov. Pre *Indexy V4*, najmä pre SAX a WIG 20, menej pre PX a BUX, je možné si všimnúť, že hodnoty VaR sú niekedy úplne nekonzistentné. Vychádzajú veľmi rozdielne hodnoty pri použití rôznych GARCH modelov. Predpokladáme, že to súvisí s likviditou akciového trhu. Zatiaľ, čo akciové trhy najvyspelejších krajín sveta sú likvidné, neplatí to zatiaľ pre krajiny V4. Najlepšie výsledky, resp. výsledky najbližšie *Svetovým indexom* sme mohli pozorovať pre český index PX, čo môže súvisieť práve s tým, že v Českej republike sú väčšie objemy investícií ako v ostatných krajinách V4, konkrétne napr. na Slovensku.



Obrázok 3.9: SAX: Metóda historickej simulácie, predikcie VaR pre 10.1.2005–31.3.2006

3.2 Testovanie modelov

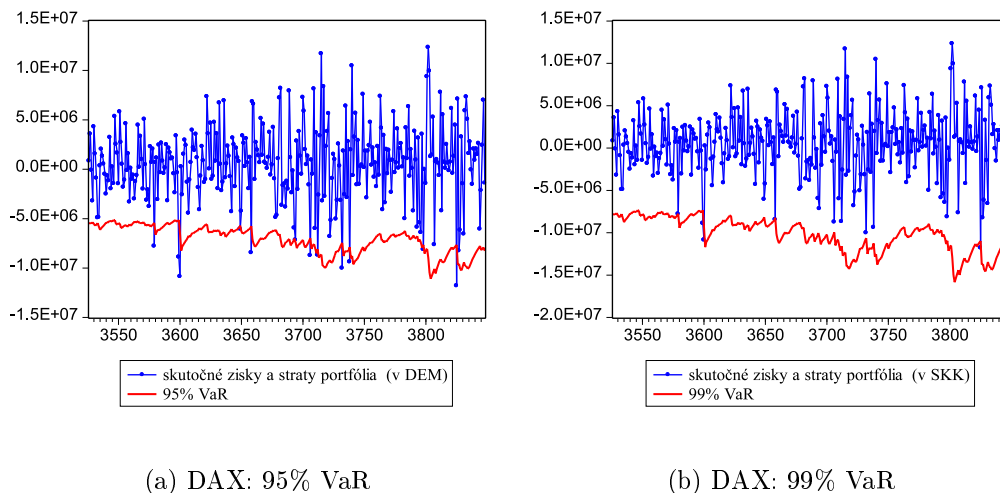
Pre vyhodnotenie úspešnosti modelov použitých na výpočet VaR je nevyhnutné vykonať spätné testovanie, tzv. *backtesting* týchto modelov.

Backtesting v prípade modelovania podmieneného rozdelenia výnosov GARCH modelmi

Všetky navrhnuté modely sme testovali na *in-sample* aj *out-of-sample* predikciách VaR, a to osobitne pre VaR pri hladine spoľahlivosti 95% a 99%. Vo všetkých prípadoch sme urobili všetky štyri testy spomínané v 2. kapitole, teda Kupiecov test, Christoffersenov test, Kupiecov *TUFF* test a Kupiecov *mixed* test. Výsledky týchto testov sú pre jednotlivé indexy, pre jednotlivé hladiny spoľahlivosti a pre oba druhy predikcií zhrnuté v tabuľkách 3.23 až 3.50 v prílohe. V každej tabuľke je uvedený celkový počet pozorovaní (T), na ktorom sme robili *backtesting*, počet výnimiek (N), ku ktorým počas sledovaného obdobia došlo, hodnota testovacej štatistiky LR_{uc} zodpovedajúca Kupiecovmu testu, čísla T_{00} , T_{01} , T_{10} a T_{11} potrebné pre určenie hodnoty testovacej štatistiky LR_{ind} , testovacia štatistika LR_{cc} zodpovedajúca Christoffersenovmu testu. Ďalej je tu uvedená hodnota LR_{tuff} štatistiky zodpovedajúcej Kupiecovmu *TUFF* testu, hodnota LR_{ind2} štatistiky potrebnej pre určenie LR_{mix} štatistiky a samotná hodnota LR_{mix} štatistiky zodpovedajúcej Kupiecovmu *mixed* testu.

Hviezdičkou označené hodnoty testovacích štatistík predstavujú tie, kde zamietame príslušnú nulovú hypotézu.

Vo všeobecnosti možno povedať, že testy dopadli veľmi dobre. Len v niektorých prípadoch zamietame niektorú z nulových hypotéz. Všimnime si pre jednotlivé indexy najvhod-



Obrázok 3.10: DAX: Ekonometrický prístup k výpočtu VaR, podmienené rozdelenie výnosov bolo modelované GARCH(1,1) modelom s normálne rozdelenými disturbanciami, *out-of-sample* predikcie VaR pre 3.1.2005–31.3.2006

nejšie navrhnuté modely na základe AIC a SC kritérií. Sú to EGARCH s disturbanciami sledujúcimi Studentovo t-rozdelenie pre indexy SAX, PX, S&P 500, NIKKEI 225 a DAX, TARCH(1,1) s disturbanciami sledujúcimi Studentovo t-rozdelenie pre index BUX a klasický GARCH(1,1) model s normálne rozdelenými disturbanciami pre index WIG 20. Nulovú hypotézu v týchto konkrétnych prípadoch zamietame jedine pri LR_{mix} testovacej štatistike zodpovedajúcej Kupiecovmu *mixed* testu, a to konkrétne pri hladine spoľahlivosti 95% na *in-sample* predikciách VaR pre index BUX, WIG 20 a DAX, a na *out-of-sample* predikciách VaR pri 95% hladine spoľahlivosti pre index NIKKEI 225.

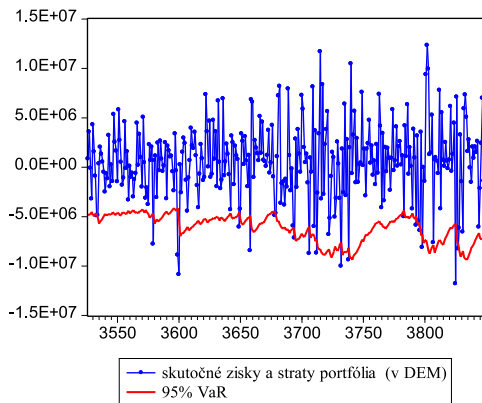
Z uvedených testov vyplýva, že sa nám podarilo úspešne namodelovať podmienené rozdelenie výnosov všetkých indexov a vypočítať hodnotu VaR pre portfólia pozostávajúce z týchto indexov, ktorá naozaj zodpovedá realite.

Backtesting pre RiskMetrics

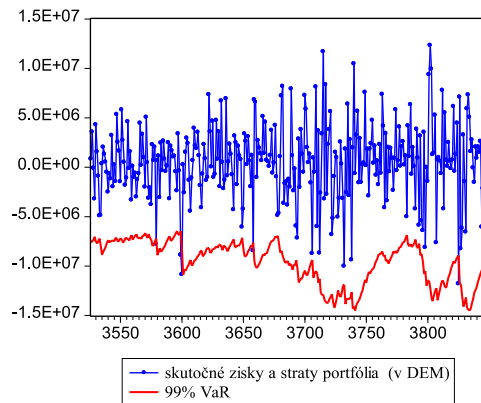
V tabuľkách 3.51 a 3.52 v prílohe sú zhrnuté výsledky *backtestingu* pre RiskMetrics, na VaR predikciách z celého časového úseku, tiež pre 95% VaR a 99% VaR, pre všetky indexy. Z uvedených tabuliek vidno, že tentokrát testy nedopadli tak dobre ako v predchádzajúcom prípade a nulovú hypotézu zamietame vo viacerých prípadoch.

Backtesting pre metódu historickej simulácie

Pre metódu historickej simulácie sme urobili *backtesting* iba Kupiecovým testom, iné tu ani nemožno použiť, keďže pri tejto metóde sa neuvažuje o podmienenom rozdelení výnosov.



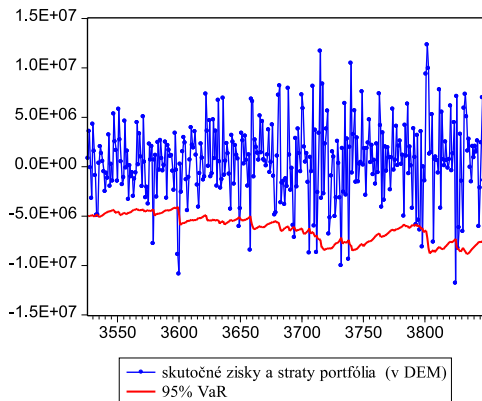
(a) DAX: 95% VaR



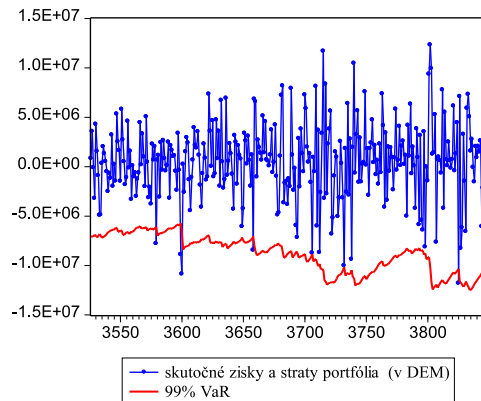
(b) DAX: 99% VaR

Obrázok 3.11: DAX: Ekonometrický prístup k výpočtu VaR, podmienené rozdelenie výnosov bolo modelované EGARCH modelom s disturbanciami sledujúcimi Studentovo t-rozdelenie, *out-of-sample* predikcie VaR pre 3.1.2005–31.3.2006

Výsledky sú uvedené v prílohe v tabuľkách 3.53 a 3.54. *Backtesting* sme v tomto prípade robili pre jednotlivé indexy na úseku od začiatku roka 2005 do 31.3.2006, a to aj pre predikcie 95% VaR, aj pre predikcie 99% VaR. Pre predikcie 99% VaR nulovú hypotézu prislúchajúcu Kupiecovmu testu nezamietame ani v jednom prípade, pre predikcie 95% VaR ju však zamietame až pre štyri indexy, a to pre BUX, S&P 500, NIKKEI 225 a DAX. Môžeme si všimnúť, že pre posledné tri indexy, teda pre *Svetové indexy* je to z toho dôvodu, že výnimiek prítomných v pozorovaniach je príliš málo. To naznačuje, že historická metóda je pre *Svetové indexy* konzervatívna, a teda že v tomto prípade je lepšie na predikcie VaR použiť iné metódy umožňujúce väčšiu flexibilitu a voľnosť v obchodovaní.

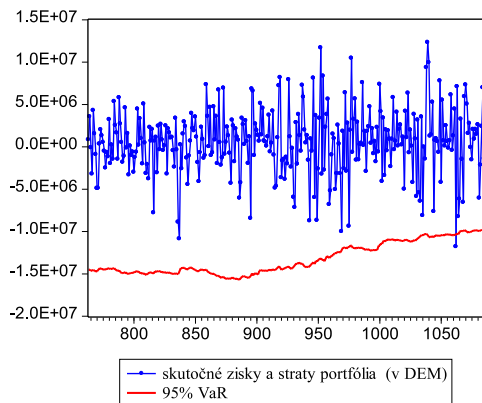


(a) DAX: 95% VaR

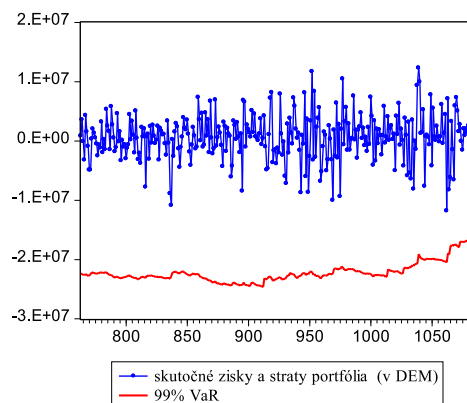


(b) DAX: 99% VaR

Obrázok 3.12: DAX: RiskMetrics, predikcie VaR pre 3.1.2005–31.3.2006



(a) DAX: 95% VaR



(b) DAX: 99% VaR

Obrázok 3.13: DAX: Metóda historickej simulácie, predikcie VaR pre 3.1.2005–31.3.2006

Záver

Ťažiskom diplomovej práce bolo modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov vybraných svetových a stredoeurópskych akciových indexov pomocou GARCH modelov a následné určenie VaR portfólií pozostávajúcich z týchto indexov. Prítomnosť autoregresívnej podmienenej heteroskedasticity, typickej pre výnosy finančných aktív, sa nám podarilo úspešne zachytiť všetkými navrhnutými GARCH modelmi. Pre päť portfólií zo siedmich sa ukázal byť najvhodnejším modelom asymetrický model EGARCH s disturbanciami sledujúcimi Studentovo t-rozdelenie.

Pre uvedené portfólia sme počítali 1-dňové predikcie VaR pri hladine spoľahlivosti 95% a 99% metódou historickej simulácie, pomocou RiskMetrics metodológie a prístupom založeným na modelovaní podmieneného rozdelenia výnosov pomocou GARCH modelov. Spätným testovaním modelov, tzv. *backtestingom* sme zistili vysokú úspešnosť pri predikciách VaR práve týmto prístupom.

Počas analýzy sme si všimli, že pre uvažované svetové indexy je charakteristické podobné správanie sa ich výnosov. Spomedzi stredoeurópskych indexov sa im najviac svojimi výsledkami približoval český akciový index, indexy ostatných krajín Višegrádskej štvorky sa správali dosť odlišne. Predpokladáme, že to súvisí s likviditou, resp. nelikviditou akciových trhov príslušných krajín.

Analýzu sme robili pre portfólia pozostávajúce z jedného typu indexu a uvažovali sme iba symetrické rozdelenia (normálne a Studentovo t-rozdelenie). Možným rozšírením tejto práce je analýza portfólií pozostávajúcich z viacerých indexov a použitie aj iného ako symetrického rozdelenia pre modelovanie výnosov daných indexov, ktoré vykazujú istú mieru asymetrie.

Literatúra

- [1] Alexander, C. (1998): *Risk Management and Analysis, Measuring and Modelling Financial Risk*, Wiley Series in Financial Engineering, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, West Sussex, England.
- [2] Alexander, C. (2001): *Market Models*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, West Sussex, England.
- [3] Black, F. (1976): *Studies of Stock Market Volatility Changes*, Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, 177-181.
- [4] Bollerslev, T. (1986): *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 31, 307-327.
- [5] Bollerslev, T., R.Y. Chou a K.F. Kroner (1992): *ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence*, Journal of Econometrics, 52, 5-59.
- [6] Bollerslev, T., R.F. Engle a D.B. Nelson (1994): *ARCH Models*, Handbook of Econometrics IV, 2959-3038, ed. R.F. Engle a D.C. McFadden, North-Holland, Amsterdam.
- [7] Campbell, J.Y., A.W. Lo a A.C. MacKinlay (1997): *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, New Jersey.
- [8] Christoffersen, P.F. (1998): *Evaluating Interval Forecasts*, International Economic Review, 39.
- [9] Degiannakis, S. a E. Xekalaki (2004): *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH) Models: A Review*, Department of Statistics, Athens University of Economics and Business, Greece.
- [10] Engle, R.F. (1982): *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica, 50, 987-1007.
- [11] Engle, R.F. (2001): *GARCH101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics*, Journal of Economic Perspectives, 15, 157-168.
- [12] Engle, R.F. (2003): *Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice, Nobel Lecture*, New York University, Department of Finance, New York.

- [13] Enders, W. (1995): *Applied Econometric Time Series*, John Wiley & Sons Inc, New York.
- [14] Glosten, L.R., R. Jagannathan a D.E. Runkle (1993): *On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Returns on Stocks*, Journal of Finance, 48, 1779-1801.
- [15] Greene, W.H. (2000): *Econometric Analysis*, Upper Saddle River, Prentice-Hall, Inc.
- [16] Haas, M. (2001): *New Methods in Backtesting*, Financial Engineering, Research center caesar, Bonn.
- [17] Hamilton, J.D. (1994): *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New Jersey.
- [18] Kupiec, P. (1995): *Techniques for Verifying and the Accuracy of Risk Measurement Models*, Journal of Derivatives, 3, 73-84.
- [19] Lopez, J.A. (1998): *Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates*, Federal Reserve Bank of New York.
- [20] Manganelli, S. a R.F. Engle (2001): *Value at Risk Models in Finance*, Working Paper no. 75, European Central Bank.
- [21] Morgan, J.P. a Reuters (1996): *RiskMetricsTM-Technical Document*, Fourth Edition, New York.
- [22] Nelson, D.B. (1991): *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, Econometrica, 59, 347-370.
- [23] Tsay, Ruey S. (2002): *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons Inc, New York.

Príloha

	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
μ	0.114204	0.112260	0.102916	0.094575	0.094677	0.085357
ρ	-0.021249	*-0.019581	*-0.014919	-0.058230	-0.057456	-0.054755
ω	0.236686	0.243464	0.112641	0.401111	0.398331	0.266319
α	0.094070	0.089870	-	0.277144	0.285837	-
β	0.766777	0.758407	0.823688	0.757778	0.760731	0.890291
γ	-	*0.019297	0.232180	-	*-0.032085	0.411895
φ	-	-	*-0.024705	-	-	*0.010828
<i>tdf</i>	-	-	-	2.388411	2.389195	2.369520
AIC	3.308787	3.310205	3.315498	3.091148	3.092737	3.084029
SC	3.329813	3.335436	3.340729	3.116379	3.122174	3.113465

ARCH LM test:

LM štat.	0.039683	0.032574	0.056121	0.274595	0.285327	0.524671
(<i>p-hod.</i>)	(0.842101)	(0.856773)	(0.812735)	(0.600266)	(0.593231)	(0.468856)

Tabuľka 3.5: Modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov indexu SAX

	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
μ	0.113337	0.086455	0.089228	0.119753	0.092263	0.092897
ρ	0.052559	0.057511	0.060762	0.055845	0.059377	0.054330
ω	0.041665	0.081548	0.023209	0.066393	0.102446	0.019532
α	0.073215	*0.023188	-	0.093225	*0.031859	-
β	0.901536	0.868209	0.941439	0.868863	0.841632	0.951171
γ	-	0.110881	0.155518	-	0.124751	0.156702
φ	-	-	-0.074563	-	-	-0.067631
<i>tdf</i>	-	-	-	12.72921	16.34213	16.68352
AIC	3.247698	3.236240	3.233868	3.249160	3.238775	3.230168
SC	3.268222	3.260869	3.258497	3.273768	3.267508	3.258901

ARCH LM test:

LM štat.	0.850685	2.278823	2.106998	0.810489	2.501075	2.249082
(<i>p-hod.</i>)	(0.356359)	(0.131151)	(0.146627)	(0.367976)	(0.114022)	(0.133694)

Tabuľka 3.6: Modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov indexu PX

	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
μ	0.059693	*0.037870	*0.038174	*0.046300	*0.035375	*0.038285
ρ	*0.009763	*0.005409	*0.021219	*-0.013293	*-0.014985	*-0.006833
ω	0.057763	0.060675	0.027288	0.146871	0.157944	0.031220
α	0.067772	0.031353	-	0.097030	0.070090	-
β	0.901588	0.904355	0.958124	0.828482	0.819724	0.952708
γ	-	0.063060	0.153019	-	0.060225	0.155830
φ	-	-	-0.048111	-	-	-0.038868
<i>tdf</i>	-	-	-	7.807814	8.122946	8.644001
AIC	3.407981	3.399409	3.417836	3.395924	3.394949	3.395844
SC	3.428557	3.424101	3.442528	3.420616	3.423757	3.424651

ARCH LM test:

LM štat.	0.761933	0.825269	2.244587	0.552620	0.539078	1.974540
(<i>p-hod.</i>)	(0.382724)	(0.363644)	(0.134083)	(0.457249)	(0.462815)	(0.159967)

Tabuľka 3.7: Modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov indexu BUX

	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
μ	*0.044265	*0.034289	*0.052203	*0.018252	*0.002419	*0.016673
ρ	*0.038318	*0.038308	*0.042309	*0.032483	*0.029088	*0.023153
ω	0.016782	0.019334	0.016252	0.060082	0.061975	0.017645
α	0.046272	0.038897	-	0.082396	0.063664	-
β	0.946982	0.944065	0.985057	0.902307	0.898758	0.985443
γ	-	*0.018992	0.120830	-	0.047653	0.132432
φ	-	-	*-0.005714	-	-	*-0.018650
<i>tdf</i>	-	-	-	6.560608	6.407978	7.884110
AIC	3.719589	3.719594	3.743733	3.735173	3.733803	3.723155
SC	3.740073	3.744175	3.768314	3.759754	3.762481	3.751832

ARCH LM test:

LM štat. (<i>p-hod.</i>)	0.023924 (0.877077)	0.003727 (0.951317)	0.109230 (0.741023)	0.000861 (0.976589)	0.001731 (0.966818)	0.064046 (0.800212)
--------------------------------------	--	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

Tabuľka 3.8: Modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov indexu WIG20

	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
μ	0.075133	0.040652	0.033661	0.079024	0.057570	0.049054
ρ	*0.008571	*0.019552	*0.019558	*-0.005077	*0.004592	*0.004620
ω	0.008488	0.015626	*0.002252	0.007612	0.010884	*0.000474
α	0.080161	*-0.008252	-	0.063737	*-0.015266	-
β	0.916663	0.918960	0.977556	0.932512	0.936242	0.977556
γ	-	0.155511	0.112560	-	0.137797	0.107768
φ	-	-	-0.121170	-	-	-0.117234
<i>tdf</i>	-	-	-	8.328480	10.37049	10.82928
AIC	2.881481	2.845500	2.833427	2.845839	2.820219	2.817037
SC	2.893064	2.859399	2.847327	2.859738	2.836435	2.833253

ARCH LM test:

LM štat. (<i>p-hod.</i>)	0.005888 (0.938838)	1.518987 (0.217773)	0.444912 (0.504761)	0.075574 (0.783388)	1.089151 (0.296659)	0.317932 (0.572853)
--------------------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	--

Tabuľka 3.9: Modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov indexu S&P 500

	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
μ	*0.004533	*-0.024107	*-0.027561	*-0.004923	*-0.026070	*-0.027411
ρ	*-0.011226	*-0.010094	*-0.015013	*-0.025460	*-0.024263	*-0.027731
ω	0.071565	0.062602	0.028059	0.060957	0.052129	0.018456
α	0.069640	*0.021793	-	0.062721	*0.013206	-
β	0.898431	0.907810	0.965327	0.910570	0.920184	0.977747
γ	-	0.085517	0.132626	-	0.088905	0.101562
φ	-	-	-0.078259	-	-	-0.072602
<i>tdf</i>	-	-	-	8.671910	8.961531	8.981600
AIC	3.558228	3.544401	3.545313	3.532373	3.519492	3.518622
SC	3.570033	3.558567	3.559479	3.546538	3.536019	3.535149

ARCH LM test:

LM štat.	2.092485	1.869384	1.102722	1.028608	1.045822	0.430056
(<i>p-hod.</i>)	(0.148025)	(0.171546)	(0.293670)	(0.310486)	(0.306471)	(0.511961)

Tabuľka 3.10: Modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov indexu NIKKEI 225

	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
μ	0.050805	*0.083213	*0.099380	0.065110	0.050477	0.047673
ρ	*0.009793	*-0.051254	*-0.090562	*-0.000349	*0.000621	*-0.008215
ω	0.039174	*0.013463	*0.014685	0.016243	0.018464	0.006442
α	0.085716	0.103166	-	0.091382	0.042924	-
β	0.893821	0.838464	0.988070	0.905590	0.908492	0.989317
γ	-	0.145990	0.370166	-	0.079826	0.140364
φ	-	-	-0.088771	-	-	-0.052905
<i>tdf</i>	-	-	-	7.942766	9.288371	9.097463
AIC	3.292197	3.280596	3.280989	3.280139	3.227761	3.222465
SC	3.300947	3.291096	3.291490	3.291364	3.240012	3.234716

ARCH LM test:

LM štat.	0.907284	1.182806	0.248128	0.353722	0.626407	0.174377
(<i>p-hod.</i>)	(0.340836)	(0.276785)	(0.618396)	(0.552013)	(0.428676)	(0.676251)

Tabuľka 3.11: Modelovanie podmieneného rozdelenia výnosov indexu DAX

SAX 23.12.2004	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
95% VaR	540954	537278.7	530515.4	464313.3	467574.1	449644.9
(<i>v %</i>)	(1.656168)	(1.644916)	(1.624209)	(1.421527)	(1.431510)	(1.376619)
99% VaR	780536.7	775075.6	764245.6	1030158	1036996	999666.1
(<i>v %</i>)	(2.389666)	(2.372947)	(2.339790)	(3.153900)	(3.174833)	(3.060546)
31.3.2006						
95% VaR	1010692	1001764	1023349	1045087	1051099	1059422
(<i>v %</i>)	(2.422792)	(2.401389)	(2.453133)	(2.505242)	(2.519655)	(2.539606)
99% VaR	1437094	1425080	1456644	2193001	2206765	2234122
(<i>v %</i>)	(3.444948)	(3.416147)	(3.491812)	(5.256978)	(5.289973)	(5.355552)

Tabuľka 3.12: Ekonometrický prístup k výpočtu VaR pomocou GARCH modelov: SAX

PX 30.12.2004	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
95% VaR	1577496	1588246	1506390	1523021	1540050	1491318
(<i>v %</i>)	(1.528581)	(1.538998)	(1.459681)	(1.475798)	(1.492296)	(1.445075)
99% VaR	2302330	2308187	2195011	2373000	2351860	2275270
(<i>v %</i>)	(2.230940)	(2.236615)	(2.216949)	(2.299418)	(2.278934)	(2.204719)
31.3.2006						
95% VaR	2191506	2349897	2490610	2171429	2304587	2452621
(<i>v %</i>)	(1.438091)	(1.542029)	(1.634366)	(1.424916)	(1.512295)	(1.609437)
99% VaR	3201762	3411698	3614362	3384146	3514094	3726189
(<i>v %</i>)	(2.101032)	(2.238794)	(2.371784)	(2.220714)	(2.305987)	(2.445166)

Tabuľka 3.13: Ekonometrický prístup k výpočtu VaR pomocou GARCH modelov: PX

BUX 31.12.2004	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
95% VaR	25332176	25928196	25731943	26888662	27257596	25968426
(<i>v %</i>)	(1.718301)	(1.758730)	(1.745418)	(1.823879)	(1.848904)	(1.761459)
99% VaR	36207124	36910240	36658457	42350882	42646275	40419420
(<i>v %</i>)	(2.455957)	(2.503650)	(2.486572)	(2.872693)	(2.892730)	(2.741681)
31.3.2006						
95% VaR	50554678	50620762	47890153	45246973	44584561	46881732
(<i>v %</i>)	(2.191827)	(2.194692)	(2.076305)	(1.961708)	(1.932989)	(2.032584)
99% VaR	72110941	71978055	68184050	71192474	69701939	72884110
(<i>v %</i>)	(3.126411)	(3.120649)	(2.956158)	(3.086590)	(3.021967)	(3.159932)

Tabuľka 3.14: Ekonometrický prístup k výpočtu VaR pomocou GARCH modelov: BUX

WIG 31.12.2004	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
95% VaR	3224419	3178249	3354987	3578522	3473156	3314419
(<i>v %</i>)	(1.644633)	(1.621084)	(1.711230)	(1.825245)	(1.771503)	(1.690538)
99% VaR	4610790	4537384	4803410	5750833	5580922	5200989
(<i>v %</i>)	(2.351760)	(2.314319)	(2.450007)	(2.933246)	(2.846581)	(2.652794)
31.3.2006						
95% VaR	6315342	6380762	6309111	6164455	6208257	6335887
(<i>v %</i>)	(2.204439)	(2.227274)	(2.202264)	(1.151770)	(1.167059)	(2.211610)
99% VaR	9044079	9124746	9050897	9943274	10012149	9960137
(<i>v %</i>)	(3.156934)	(3.185091)	(2.159314)	(3.470808)	(3.494849)	(3.476694)

Tabuľka 3.15: Ekonometrický prístup k výpočtu VaR pomocou GARCH modelov: WIG 20

S&P500 31.12.2004	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
95% VaR	1101721	1134518	1121299	1115325	1086838	1072862
(<i>v %</i>)	(0.909071)	(0.936133)	(1.925226)	(1.920296)	(1.896790)	(1.885258)
99% VaR	1595947	1625064	1602858	1782589	1688726	1656340
(<i>v %</i>)	(1.316875)	(1.340901)	(1.322577)	(1.470880)	(1.393430)	(1.366707)
31.3.2006						
95% VaR	1149427	1281696	1415278	1139186	1235333	1355711
(<i>v %</i>)	(0.887677)	(0.989826)	(1.092989)	(0.879769)	(0.954021)	(1.046986)
99% VaR	1665032	1832409	2017585	1823971	1916327	2086382
(<i>v %</i>)	(1.285868)	(1.415130)	(1.558137)	(1.408614)	(1.479938)	(1.611268)

Tabuľka 3.16: Ekonometrický prístup k výpočtu VaR pomocou GARCH modelov: S&P 500

NIKKEI 225 30.12.2004	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
95% VaR	20264494	19358395	18619714	20045942	18916571	18289075
(<i>v %</i>)	(1.763854)	(1.684986)	(1.620690)	(1.744831)	(1.646529)	(1.591910)
99% VaR	28701989	27282134	26229705	30992975	29021746	28049365
(<i>v %</i>)	(2.498267)	(2.374680)	(2.283075)	(2.697678)	(2.526099)	(2.441461)
31.3.2006						
95% VaR	35034523	32689551	32773605	35277012	32538990	33315650
(<i>v %</i>)	(2.053647)	(1.916190)	(1.921117)	(2.067861)	(1.907364)	(1.952891)
99% VaR	49532099	46018164	46090755	54296610	49722023	50874859
(<i>v %</i>)	(2.903463)	(2.697484)	(2.701739)	(3.182749)	(2.914596)	(2.982173)

Tabuľka 3.17: Ekonometrický prístup k výpočtu VaR pomocou GARCH modelov: NIKKEI 225

DAX 30.12.2004	GARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Normál.</i>)	EGARCH (<i>Normál.</i>)	GARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	TARCH(1,1) (<i>Student.</i>)	EGARCH (<i>Student.</i>)
95% VaR	5524817	4172885	4107980	7307614	4877041	4891380
(<i>v %</i>)	(1.298100)	(0.980453)	(0.965203)	(1.919752)	(1.145900)	(1.149269)
99% VaR	7897745	6078350	6037935	11530514	7599055	7636269
(<i>v %</i>)	(1.855638)	(1.428157)	(1.418661)	(3.029132)	(1.785459)	(1.794203)
31.3.2006						
95% VaR	8264026	7248805	7570666	7459611	7477214	7314026
(<i>v %</i>)	(1.384240)	(1.214189)	(1.268101)	(1.249499)	(1.252448)	(1.225114)
99% VaR	11841898	10310044	10691814	11844180	11638504	11368299
(<i>v %</i>)	(1.983541)	(1.726952)	(1.790900)	(1.983923)	(1.949472)	(1.904212)

Tabuľka 3.18: Ekonometrický prístup k výpočtu VaR pomocou GARCH modelov: DAX

	SAX 23.12.2004	PX 30.12.2004	BUX 31.12.2004	WIG 20 31.12.2004
95% VaR	545267.4	1791523	23427805	3046223
(<i>v %</i>)	(1.669373)	(1.735972)	(1.589126)	(1.553742)
99% VaR	771182.1	2533785	33134392	4308331
(<i>v %</i>)	(2.361027)	(2.455218)	(2.247532)	(2.197489)
31.3.2006				
95% VaR	866578.5	2142638	56700642	6575920
(<i>v %</i>)	(2.077329)	(1.406023)	(2.458288)	(2.295396)
99% VaR	1225619	3030374	80192800	9300449
(<i>v %</i>)	(2.938006)	(1.988565)	(3.476804)	(3.246422)

Tabuľka 3.19: RiskMetrics: Indexy V4

	S&P 500	NIKKEI 225	DAX
	31.12.2004	30.12.2004	30.12.2004
95% VaR	1187882	17432094	5019224
<i>(v %)</i>	(0.980166)	(1.517317)	(1.179307)
99% VaR	1680045	24654543	7098784
<i>(v %)</i>	(1.386267)	(2.145971)	(1.667916)
31.3.2006			
95% VaR	1139098	36827859	7730267
<i>(v %)</i>	(0.879701)	(2.158769)	(1.294835)
99% VaR	1611048	52086343	10933064
<i>(v %)</i>	(1.244177)	(3.053188)	(1.831309)

Tabuľka 3.20: RiskMetrics: Svetové indexy

	SAX	PX	BUX	WIG 20
	23.12.2004	30.12.2004	31.12.2004	31.12.2004
95% VaR	539737.8	1934749	26843948	4196130
<i>(v %)</i>	(1.652444)	(1.874756)	(1.820846)	(2.140260)
99% VaR	1084049	3134214	42287689	6069133
<i>(v %)</i>	(3.318890)	(3.037029)	(2.868407)	(3.095596)
31.3.2006				
95% VaR	704087.4	2090760	41218668	5640744
<i>(v %)</i>	(1.687811)	(1.371980)	(1.787059)	(1.968963)
99% VaR	1480667	4848956	71384777	9276982
<i>(v %)</i>	(3.549399)	(3.181939)	(3.094927)	(3.238231)

Tabuľka 3.21: Metóda historickej simulácie: Indexy V4

	S&P 500	NIKKEI 225	DAX
	31.12.2004	30.12.2004	30.12.2004
95% VaR	2341298	27111584	14479882
<i>(v %)</i>	(1.931891)	(2.359835)	(3.402164)
99% VaR	3702008	40052089	22369591
<i>(v %)</i>	(3.054664)	(3.486198)	(5.255914)
31.3.2006			
95% VaR	1518846	33491966	9960127
<i>(v %)</i>	(1.172972)	(1.963226)	(1.668341)
99% VaR	2027331	54820783	16986217
<i>(v %)</i>	(1.565664)	(3.213475)	(2.845224)

Tabuľka 3.22: Metóda historickej simulácie: Svetové indexy

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	14.00000	14.00000	14.00000	18.00000	18.00000	18.00000
T	292.0000	292.0000	292.0000	292.0000	292.0000	292.0000
T₀₀	264.0000	264.0000	264.0000	257.0000	257.0000	257.0000
T₀₁	14.00000	14.00000	14.00000	17.00000	17.00000	17.00000
T₁₀	14.00000	14.00000	14.00000	17.00000	17.00000	17.00000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	1.000000	1.000000
LR_{uc}	0.026299	0.026299	0.026299	0.778452	0.778452	0.778452
LR_{ind}	1.415766	1.415766	1.415766	0.013534	0.013534	0.013534
LR_{cc}	1.442065	1.442065	1.442065	0.791986	0.791986	0.791986
LR_{tuff}	0.235853	0.235853	0.235853	0.235853	0.235853	0.235853
LR_{ind2}	15.23102	15.23102	15.23102	21.52109	21.52109	21.52109
LR_{mix}	15.25732	15.25732	15.25732	22.29955	22.29955	22.29955

Tabuľka 3.23: SAX: 95% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	5.000000	5.000000	6.000000	3.000000	3.000000	2.000000
T	292.0000	292.0000	292.0000	292.0000	292.0000	292.0000
T₀₀	282.0000	282.0000	280.0000	286.0000	286.0000	288.0000
T₀₁	5.000000	5.000000	6.000000	3.000000	3.000000	2.000000
T₁₀	5.000000	5.000000	6.000000	3.000000	3.000000	2.000000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	1.233545	1.233545	2.515043	0.002194	0.002194	0.329179
LR_{ind}	0.174834	0.174834	0.252650	0.062501	0.062501	0.027682
LR_{cc}	1.408379	1.408379	2.767693	0.064695	0.064695	0.356861
LR_{tuff}	2.547384	2.547384	2.547384	2.547384	2.547384	2.547384
LR_{ind2}	5.188474	5.188474	9.660910	3.423641	3.423641	3.227472
LR_{mix}	6.422019	6.422019	12.17595	3.425835	3.425835	3.556651

Tabuľka 3.24: SAX: 99% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	49.00000	51.00000	49.00000	57.00000	58.00000	58.00000
T	1215.000	1215.000	1215.000	1215.000	1215.000	1215.000
T₀₀	1118.000	1115.000	1118.000	1103.000	1101.000	1101.000
T₀₁	48.00000	49.00000	48.00000	55.00000	56.00000	56.00000
T₁₀	48.00000	49.00000	48.00000	55.00000	56.00000	56.00000
T₁₁	1.000000	2.000000	1.000000	2.000000	2.000000	2.000000
LR_{uc}	2.554424	1.738100	2.554424	0.248567	0.132954	0.132954
LR_{ind}	0.632828	0.010544	0.632828	0.204619	0.259726	0.259726
LR_{cc}	3.187252	1.748644	3.187252	0.453187	0.392680	0.392680
LR_{tuff}	0.235853	0.235853	0.235853	0.235853	0.235853	0.235853
LR_{ind2}	46.32357	52.59651	46.32357	52.29145	54.71521	56.37996
LR_{mix}	48.87799	54.33461	48.87799	52.54002	54.84816	56.51291

Tabuľka 3.25: SAX: 95% VaR, *in-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	22.00000	22.00000	24.00000	7.000000	8.000000	9.000000
T	1215.000	1215.000	1215.000	1215.000	1215.000	1215.000
T₀₀	1171.000	1171.000	1168.000	1201.000	1199.000	1197.000
T₀₁	22.00000	22.00000	23.00000	7.000000	8.000000	9.000000
T₁₀	22.00000	22.00000	23.00000	7.000000	8.000000	9.000000
T₁₁	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	6.504266	6.504266	* 9.091910	2.602152	1.628100	0.906359
LR_{ind}	0.812127	0.812127	0.463959	0.081193	0.106137	0.134441
LR_{cc}	7.316393	7.316393	* 9.555870	2.683346	1.734236	1.040800
LR_{tuff}	2.547384	2.547384	2.547384	2.547384	2.547384	2.547384
LR_{ind2}	37.33809	30.50957	* 43.61654	12.94091	17.45044	15.17122
LR_{mix}	* 43.84236	37.01384	* 52.70846	15.54306	19.07854	16.07758

Tabuľka 3.26: SAX: 99% VaR, *in-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	11.00000	10.00000	12.00000	12.00000	11.00000	12.00000
T	318.0000	318.0000	318.0000	318.0000	318.0000	318.0000
T₀₀	296.0000	298.0000	294.0000	294.0000	296.0000	294.0000
T₀₁	11.00000	10.00000	12.00000	12.00000	11.00000	12.00000
T₁₀	11.00000	10.00000	12.00000	12.00000	11.00000	12.00000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	1.773726	2.639804	1.096233	1.096233	1.773726	1.096233
LR_{ind}	0.791020	0.651581	0.944506	0.944506	0.791020	0.944506
LR_{cc}	2.564746	3.291385	2.040739	2.040739	2.564746	2.040739
LR_{tuff}	1.276880	1.276880	1.276880	1.276880	1.276880	1.276880
LR_{ind2}	18.56028	* 20.59848	19.27131	19.27131	* 21.30950	19.27131
LR_{mix}	20.33401	* 23.23828	20.36755	20.36755	* 23.08323	20.36755

Tabuľka 3.27: PX: 95% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	5.000000	5.000000	5.000000	5.000000	4.000000	5.000000
T	318.0000	318.0000	318.0000	318.0000	318.0000	318.0000
T₀₀	308.0000	308.0000	308.0000	308.0000	310.0000	308.0000
T₀₁	5.000000	5.000000	5.000000	5.000000	4.000000	5.000000
T₁₀	5.000000	5.000000	5.000000	5.000000	4.000000	5.000000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	0.896109	0.896109	0.896109	0.896109	0.197443	0.896109
LR_{ind}	0.160263	0.160263	0.160263	0.160263	0.102239	0.160263
LR_{cc}	1.056372	1.056372	1.056372	1.056372	0.299682	1.056372
LR_{tuff}	0.371460	0.371460	0.371460	0.371460	0.371460	0.371460
LR_{ind2}	11.25858	11.25858	11.25858	11.25858	6.969252	11.25858
LR_{mix}	12.15469	12.15469	12.15469	12.15469	7.166695	12.15469

Tabuľka 3.28: PX: 99% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	64.00000	62.00000	59.00000	64.00000	62.00000	61.00000
T	1252.000	1252.000	1252.000	1252.000	1252.000	1252.000
T₀₀	1128.000	1131.000	1136.000	1129.000	1131.000	1132.000
T₀₁	60.00000	59.00000	57.00000	59.00000	59.00000	59.00000
T₁₀	60.00000	59.00000	57.00000	59.00000	59.00000	59.00000
T₁₁	4.000000	3.000000	2.000000	5.000000	3.000000	2.000000
LR_{uc}	0.032728	0.006072	0.222001	0.032728	0.006072	0.043399
LR_{ind}	0.168063	0.001920	0.266458	0.883745	0.001920	0.394617
LR_{cc}	0.200790	0.007992	0.488458	0.916472	0.007992	0.438016
LR_{tuff}	2.011194	0.079776	0.079776	2.011194	0.079776	0.079776
LR_{ind2}	* 87.65864	79.85110	70.49059	* 95.81603	79.85110	76.69797
LR_{mix}	* 87.69136	79.85717	70.71259	* 95.84876	79.85717	76.74137

Tabuľka 3.29: PX: 95% VaR, *in-sample* predikcie – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	23.00000	20.00000	18.00000	19.00000	17.00000	14.00000
T	1252.000	1252.000	1252.000	1252.000	1252.000	1252.000
T₀₀	1206.000	1212.000	1216.000	1214.000	1218.000	1224.000
T₀₁	23.00000	20.00000	18.00000	19.00000	17.00000	14.00000
T₁₀	23.00000	20.00000	18.00000	19.00000	17.00000	14.00000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	* 7.104536	3.821428	2.133862	2.924178	1.456335	0.170207
LR_{ind}	0.861614	0.649907	0.525566	0.586062	0.468410	0.316902
LR_{cc}	7.966150	4.471334	2.659428	3.510240	1.924746	0.487109
LR_{tuff}	0.083134	0.083134	0.083134	0.083134	0.083134	0.083134
LR_{ind2}	28.21055	19.34992	17.75586	22.11422	16.96041	17.37807
LR_{mix}	35.31509	23.17135	19.88972	25.03840	18.41674	17.54828

Tabuľka 3.30: PX: 99% VaR, *in-sample* predikcie – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	14.00000	15.00000	14.00000	14.00000	14.00000	15.00000
T	317.0000	317.0000	317.0000	317.0000	317.0000	317.0000
T₀₀	289.0000	287.0000	289.0000	289.0000	289.0000	288.0000
T₀₁	14.00000	15.00000	14.00000	14.00000	14.00000	14.00000
T₁₀	14.00000	15.00000	14.00000	14.00000	14.00000	14.00000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
LR_{uc}	0.236201	0.048818	0.236201	0.236201	0.236201	0.048818
LR_{ind}	1.298479	1.495636	1.298479	1.298479	1.298479	0.115310
LR_{cc}	1.534679	1.544454	1.534679	1.534679	1.534679	0.164128
LR_{tuff}	0.801139	0.801139	0.801139	0.801139	0.801139	0.801139
LR_{ind2}	11.47921	14.64458	16.54760	11.47200	12.68124	22.83918
LR_{mix}	11.71541	14.69340	16.78380	11.70820	12.91744	22.88800

Tabuľka 3.31: BUX: 95% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	4.000000	4.000000	4.000000	3.000000	4.000000	4.000000
T	317.0000	317.0000	317.0000	317.0000	317.0000	317.0000
T₀₀	309.0000	309.0000	309.0000	311.0000	309.0000	309.0000
T₀₁	4.000000	4.000000	4.000000	3.000000	4.000000	4.000000
T₁₀	4.000000	4.000000	4.000000	3.000000	4.000000	4.000000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	0.202699	0.202699	0.202699	0.009376	0.202699	0.202699
LR_{ind}	0.102567	0.102567	0.102567	0.057509	0.102567	0.102567
LR_{cc}	0.305266	0.305266	0.305266	0.066885	0.305266	0.305266
LR_{tuff}	0.555607	0.555607	0.555607	0.555607	0.555607	0.555607
LR_{ind2}	4.065016	4.065016	4.065016	4.062403	4.065016	4.065016
LR_{mix}	4.267715	4.267715	4.267715	4.071779	4.267715	4.267715

Tabuľka 3.32: BUX: 99% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	59.00000	56.00000	51.00000	56.00000	58.00000	57.00000
T	1248.000	1248.000	1248.000	1248.000	1248.000	1248.000
T₀₀	1137.000	1142.000	1152.000	1142.000	1138.000	1140.000
T₀₁	52.00000	50.00000	45.00000	50.00000	52.00000	51.00000
T₁₀	52.00000	50.00000	45.00000	50.00000	52.00000	51.00000
T₁₁	7.000000	6.000000	6.000000	6.000000	6.000000	6.000000
LR_{uc}	0.198457	0.714564	2.331822	0.714564	0.334126	0.505961
LR_{ind}	5.115817	3.939358	5.508055	3.939358	3.399875	3.663657
LR_{cc}	5.314274	4.653923	* 7.839878	4.653923	3.734002	4.169618
LR_{tuff}	3.321462	3.321462	3.321462	3.321462	3.321462	3.321462
LR_{ind2}	* 96.75840	* 83.77229	* 86.28784	* 92.52979	* 97.05020	* 92.70397
LR_{mix}	* 96.95685	* 84.48686	* 88.61967	* 93.24435	* 97.38432	* 93.20994

Tabuľka 3.33: BUX: 95% VaR, *in-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	15.00000	15.00000	17.00000	13.00000	13.00000	12.00000
T	1248.000	1248.000	1248.000	1248.000	1248.000	1248.000
T₀₀	1219.000	1219.000	1215.000	1222.000	1222.000	1225.000
T₀₁	14.00000	14.00000	16.00000	13.00000	13.00000	11.00000
T₁₀	14.00000	14.00000	16.00000	13.00000	13.00000	11.00000
T₁₁	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000	1.000000
LR_{uc}	0.482829	0.482829	1.485479	0.021591	0.021591	0.018889
LR_{ind}	1.878577	1.878577	1.459632	0.273911	0.273911	2.684017
LR_{cc}	2.361405	2.361405	2.945112	0.295502	0.295502	2.702906
LR_{tuff}	0.152803	0.152803	6.457852	6.457852	6.457852	6.457852
LR_{ind2}	* 32.29540	25.72053	* 37.94758	22.97529	22.97529	22.14258
LR_{mix}	* 32.77823	26.20336	* 39.43306	22.99688	22.99688	22.16147

Tabuľka 3.34: BUX: 99% VaR, *in-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	9.000000	10.00000	10.00000	9.000000	9.000000	10.00000
T	316.0000	316.0000	316.0000	316.0000	316.0000	316.0000
T₀₀	298.0000	297.0000	296.0000	298.0000	298.0000	296.0000
T₀₁	9.000000	9.000000	10.00000	9.000000	9.000000	10.00000
T₁₀	9.000000	9.000000	10.00000	9.000000	9.000000	10.00000
T₁₁	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	3.622744	2.562847	2.562847	3.622744	3.622744	2.562847
LR_{ind}	0.529488	1.029873	0.655855	0.529488	0.529488	0.655855
LR_{cc}	4.152232	3.592720	3.218702	4.152232	4.152232	3.218702
LR_{tuff}	2.377553	2.377553	2.377553	2.377553	2.377553	2.377553
LR_{ind2}	14.54923	* 20.45492	13.35847	14.54923	14.54923	13.35847
LR_{mix}	18.17198	* 23.01776	15.92132	18.17198	18.17198	15.92132

Tabuľka 3.35: WIG 20: 95% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	7.000000	7.000000	6.000000	5.000000	4.000000	6.000000
T	316.0000	316.0000	316.0000	316.0000	316.0000	316.0000
T₀₀	302.0000	302.0000	304.0000	306.0000	308.0000	304.0000
T₀₁	7.000000	7.000000	6.000000	5.000000	4.000000	6.000000
T₁₀	7.000000	7.000000	6.000000	5.000000	4.000000	6.000000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	3.502062	3.502062	2.040110	0.919502	0.208036	2.040110
LR_{ind}	0.318209	0.318209	0.233024	0.161297	0.102897	0.233024
LR_{cc}	3.820272	3.820272	2.273134	1.080800	0.310933	2.273134
LR_{tuff}	5.431457	5.431457	2.547384	0.555607	0.555607	2.547384
LR_{ind2}	15.70694	15.70694	9.730701	6.760927	2.444794	9.730701
LR_{mix}	19.20900	19.20900	11.77081	7.680429	2.652830	11.77081

Tabuľka 3.36: WIG 20: 99% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	57.00000	57.00000	57.00000	57.00000	54.00000	59.00000
T	1255.000	1255.000	1255.000	1255.000	1255.000	1255.000
T₀₀	1143.000	1143.000	1144.000	1145.000	1151.000	1140.000
T₀₁	55.00000	55.00000	54.00000	53.00000	50.00000	56.00000
T₁₀	55.00000	55.00000	54.00000	53.00000	50.00000	56.00000
T₁₁	2.000000	2.000000	3.000000	4.000000	4.000000	3.000000
LR_{uc}	0.571453	0.571453	0.571453	0.571453	1.345211	0.240489
LR_{ind}	0.159466	0.159466	0.067753	0.731463	1.102252	0.019454
LR_{cc}	0.730920	0.730920	0.639206	1.302917	2.447463	0.259942
LR_{tuff}	3.321462	3.321462	3.321462	3.321462	3.321462	3.321462
LR_{ind2}	* 95.14090	* 92.14022	* 101.7055	* 100.2297	* 88.83792	* 94.94836
LR_{mix}	* 95.71236	* 92.71167	* 102.2770	* 100.8012	* 90.18313	* 95.18885

Tabuľka 3.37: WIG 20: 95% VaR, *in-sample* predikcie – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	14.00000	13.00000	14.00000	10.00000	11.00000	11.00000
T	1255.000	1255.000	1255.000	1255.000	1255.000	1255.000
T₀₀	1227.000	1229.000	1227.000	1236.000	1234.000	1233.000
T₀₁	14.00000	13.00000	14.00000	9.000000	10.00000	11.00000
T₁₀	14.00000	13.00000	14.00000	9.000000	10.00000	11.00000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000
LR_{uc}	0.163119	0.016109	0.163119	0.562519	0.201774	0.201774
LR_{ind}	0.316136	0.272366	0.316136	3.394297	3.024304	0.194693
LR_{cc}	0.479255	0.288475	0.479255	3.956816	3.226079	0.396467
LR_{tuff}	0.371460	0.371460	6.457852	6.457852	6.457852	6.457852
LR_{ind2}	13.30494	10.85914	17.35762	* 28.00854	* 25.28227	15.73801
LR_{mix}	13.46806	10.87525	17.52073	* 28.57106	25.48405	15.93978

Tabuľka 3.38: WIG 20: 99% VaR, *in-sample* predikcie – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	13.00000	11.00000	9.000000	13.00000	12.00000	10.00000
T	314.0000	314.0000	314.0000	314.0000	314.0000	314.0000
T₀₀	289.0000	292.0000	296.0000	289.0000	291.0000	294.0000
T₀₁	12.00000	11.00000	9.000000	12.00000	11.00000	10.00000
T₁₀	12.00000	11.00000	9.000000	12.00000	11.00000	10.00000
T₁₁	1.000000	0.000000	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000
LR_{uc}	0.517870	1.646827	3.533521	0.517870	0.995607	2.486718
LR_{ind}	0.347617	0.801502	0.532973	0.347617	0.525247	0.660186
LR_{cc}	0.865487	2.448329	4.066494	0.865487	1.520854	3.146904
LR_{tuff}	3.321462	3.321462	3.321462	3.321462	3.321462	3.321462
LR_{ind2}	18.89514	10.74715	7.439251	18.89514	16.69486	7.518152
LR_{mix}	19.41301	12.39398	10.97277	19.41301	17.69047	10.00487

Tabuľka 3.39: S&P 500: 95% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	3.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
T	314.0000	314.0000	314.0000	314.0000	314.0000	314.0000
T₀₀	308.0000	312.0000	312.0000	312.0000	312.0000	312.0000
T₀₁	3.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
T₁₀	3.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	0.006400	2.006253	2.006253	2.006253	2.006253	2.006253
LR_{ind}	0.058065	0.006410	0.006410	0.006410	0.006410	0.006410
LR_{cc}	0.064465	2.012663	2.012663	2.012663	2.012663	2.012663
LR_{tuff}	0.811915	1.361236	1.361236	1.361236	1.361236	1.361236
LR_{ind2}	1.142283	1.361236	1.361236	1.361236	1.361236	1.361236
LR_{mix}	1.148683	3.367489	3.367489	3.367489	3.367489	3.367489

Tabuľka 3.40: S&P 500: 99% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	128.0000	138.0000	130.0000	143.0000	145.0000	141.0000
T	2519.000	2519.000	2519.000	2519.000	2519.000	2519.000
T₀₀	2269.000	2249.000	2264.000	2242.000	2237.000	2244.000
T₀₁	122.0000	132.0000	125.0000	134.0000	137.0000	134.0000
T₁₀	122.0000	132.0000	125.0000	134.0000	137.0000	134.0000
T₁₁	6.000000	6.000000	5.000000	9.000000	8.000000	7.000000
LR_{uc}	0.034943	1.178535	0.135714	2.332221	2.898187	1.825567
LR_{ind}	0.044867	0.386361	0.527848	0.103679	0.016715	0.118034
LR_{cc}	0.079811	1.564897	0.663562	2.435899	2.914902	1.943601
LR_{tuff}	0.588495	0.588495	0.588495	0.171580	0.588495	0.588495
LR_{ind2}	147.9913	150.3365	138.8798	* 191.1523	166.5044	159.2793
LR_{mix}	148.0262	151.5151	139.0155	* 193.4845	169.4025	161.1049

Tabuľka 3.41: S&P 500: 95% VaR, *in-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	39.00000	34.00000	33.00000	31.00000	26.00000	28.00000
T	2519.000	2519.000	2519.000	2519.000	2519.000	2519.000
T₀₀	2443.000	2451.000	2453.000	2457.000	2467.000	2463.000
T₀₁	37.00000	34.00000	33.00000	31.00000	26.00000	28.00000
T₁₀	37.00000	34.00000	33.00000	31.00000	26.00000	28.00000
T₁₁	2.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	6.551553	2.805274	2.770656	1.261034	0.026034	0.305583
LR_{ind}	2.100633	0.930786	0.876485	0.772839	0.542546	0.629732
LR_{cc}	8.652186	3.736060	3.647141	2.033872	0.568580	0.935315
LR_{tuff}	0.001661	0.001661	0.001661	0.001661	0.001661	0.001661
LR_{ind2}	54.44799	36.66933	37.62324	37.40792	25.49856	30.37091
LR_{mix}	60.99954	39.47461	40.39990	38.66895	25.52459	30.67649

Tabuľka 3.42: S&P 500: 99% VaR, *in-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	8.000000	8.000000	8.000000	8.000000	9.000000	11.000000
T	306.0000	306.0000	306.0000	306.0000	306.0000	306.0000
T₀₀	292.0000	291.0000	291.0000	292.0000	290.0000	286.0000
T₀₁	6.000000	7.000000	7.000000	6.000000	7.000000	9.000000
T₁₀	6.000000	7.000000	7.000000	6.000000	7.000000	9.000000
T₁₁	2.000000	1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	2.000000
LR_{uc}	* 4.407220	* 4.407220	* 4.407220	* 4.407220	3.184248	1.404228
LR_{ind}	* 6.343231	1.710693	1.710693	* 6.343231	* 5.357204	3.784492
LR_{cc}	* 10.75045	* 6.117913	* 6.117913	* 10.75045	* 8.541452	5.188719
LR_{tuff}	1.735355	1.735355	1.735355	1.735355	1.735355	1.735355
LR_{ind2}	* 21.04331	* 16.76387	* 16.76387	* 21.04331	* 22.80675	* 24.57319
LR_{mix}	* 25.45053	* 21.17109	* 21.17109	* 25.45053	* 25.99100	* 25.97741

Tabuľka 3.43: NIKKEI 225: 95% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	1.000000	2.000000	2.000000	1.000000	2.000000	2.000000
T	306.0000	306.0000	306.0000	306.0000	306.0000	306.0000
T₀₀	304.0000	302.0000	302.0000	304.0000	302.0000	302.0000
T₀₁	1.000000	2.000000	2.000000	1.000000	2.000000	2.000000
T₁₀	1.000000	2.000000	2.000000	1.000000	2.000000	2.000000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	1.897147	0.422634	0.422634	1.897147	0.422634	0.422634
LR_{ind}	0.006579	0.026403	0.026403	0.006579	0.026403	0.026403
LR_{cc}	1.903726	0.449037	0.449037	1.903726	0.449037	0.449037
LR_{tuff}	0.098109	0.098109	0.098109	0.098109	0.098109	0.098109
LR_{ind2}	0.098109	0.121492	0.121492	0.098109	0.121492	0.121492
LR_{mix}	1.995256	0.544126	0.544126	1.995256	0.544126	0.544126

Tabuľka 3.44: NIKKEI 225: 99% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	135.0000	119.0000	118.0000	136.0000	124.0000	124.0000
T	2462.000	2462.000	2462.000	2462.000	2462.000	2462.000
T₀₀	2199.000	2226.000	2229.000	2199.000	2218.000	2219.000
T₀₁	128.0000	117.0000	115.0000	127.0000	120.0000	119.0000
T₁₀	128.0000	117.0000	115.0000	127.0000	120.0000	119.0000
T₁₁	7.000000	2.000000	3.000000	9.000000	4.000000	5.000000
LR_{uc}	1.175640	0.145280	0.225384	1.378216	0.006910	0.006910
LR_{ind}	0.025273	3.533750	1.637073	0.311002	1.015727	0.294769
LR_{cc}	1.200913	3.679030	1.862457	1.689218	1.022637	0.301679
LR_{tuff}	0.171580	0.171580	0.171580	0.235853	0.171580	0.171580
LR_{ind2}	159.0092	111.7072	118.8839	* 176.1589	127.5966	140.0806
LR_{mix}	160.1848	111.8525	119.1093	* 177.5371	127.6035	140.0875

Tabuľka 3.45: NIKKEI 225: 95% VaR, *in-sample* predikcie – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	34.00000	29.00000	31.00000	20.00000	23.00000	24.00000
T	2462.000	2462.000	2462.000	2462.000	2462.000	2462.000
T₀₀	2394.000	2404.000	2400.000	2422.000	2416.000	2414.000
T₀₁	34.00000	29.00000	31.00000	20.00000	23.00000	24.00000
T₁₀	34.00000	29.00000	31.00000	20.00000	23.00000	24.00000
T₁₁	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LR_{uc}	3.226640	0.744605	1.543256	0.935678	0.110091	0.015904
LR_{ind}	0.952648	0.691628	0.790968	0.327738	0.433969	0.472720
LR_{cc}	4.179287	1.436233	2.334224	1.263416	0.544060	0.488624
LR_{tuff}	2.400625	2.400625	2.400625	2.400625	2.400625	2.400625
LR_{ind2}	46.74598	36.37366	47.94405	25.45538	24.15800	30.93432
LR_{mix}	49.97262	37.11827	49.48730	26.39105	24.26809	30.95022

Tabuľka 3.46: NIKKEI 225: 99% VaR, *in-sample* predikcie – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	11.00000	18.00000	17.00000	34.00000	15.00000	18.00000
T	322.0000	322.0000	322.0000	592.0000	322.0000	322.0000
T₀₀	301.0000	288.0000	289.0000	525.0000	293.0000	287.0000
T₀₁	10.00000	16.00000	16.00000	33.00000	14.00000	17.00000
T₁₀	10.00000	16.00000	16.00000	33.00000	14.00000	17.00000
T₁₁	1.000000	2.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
LR_{uc}	1.904231	0.227715	0.052049	0.658373	0.080879	0.227715
LR_{ind}	0.781049	0.875333	0.011924	0.628430	0.125455	9.74E-05
LR_{cc}	2.685280	1.103048	0.063973	1.286803	0.206334	0.227813
LR_{tuff}	1.404371	0.865356	0.865356	0.311834	0.865356	0.865356
LR_{ind2}	14.34517	20.07833	16.73410	39.58673	15.21893	22.44756
LR_{mix}	16.24940	20.30605	16.78615	40.24510	15.29981	22.67528

Tabuľka 3.47: DAX: 95% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	5.000000	7.000000	10.00000	8.000000	5.000000	5.000000
T	322.0000	322.0000	322.0000	592.0000	322.0000	322.0000
T₀₀	313.0000	308.0000	303.0000	577.0000	313.0000	313.0000
T₀₁	4.000000	7.000000	9.000000	7.000000	4.000000	4.000000
T₁₀	4.000000	7.000000	9.000000	7.000000	4.000000	4.000000
T₁₁	1.000000	0.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
LR_{uc}	0.850523	3.356403	* 9.249309	0.665072	0.850523	0.850523
LR_{ind}	3.632984	0.312128	1.057418	2.873394	3.632984	3.632984
LR_{cc}	4.483507	3.668531	* 10.30673	3.538466	4.483507	4.483507
LR_{tuff}	0.333979	0.333979	0.333979	0.186270	0.333979	0.333979
LR_{ind2}	11.76556	7.143625	19.66687	12.70875	11.76556	11.76556
LR_{mix}	12.61608	10.50003	28.91618	13.37383	12.61608	12.61608

Tabuľka 3.48: DAX: 99% VaR, *out-of-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	180.0000	199.0000	188.0000	187.0000	203.0000	196.0000
T	3526.000	3526.000	3526.000	3256.000	3526.000	3526.000
T₀₀	3175.000	3133.000	3155.000	2891.000	3127.000	3142.000
T₀₁	171.0000	194.0000	183.0000	178.0000	196.0000	188.0000
T₁₀	171.0000	194.0000	183.0000	178.0000	196.0000	188.0000
T₁₁	9.000000	5.000000	5.000000	9.000000	7.000000	8.000000
LR_{uc}	0.081203	2.959039	0.800746	3.621052	4.067059	2.239693
LR_{ind}	0.004458	* 4.795171	3.384543	0.334934	2.436043	0.942835
LR_{cc}	0.085661	* 7.754210	4.185289	3.955986	* 6.503102	3.182528
LR_{tuff}	1.800543	1.800543	1.800543	1.800543	1.800543	1.800543
LR_{ind2}	* 264.3680	166.6707	173.0540	* 238.5720	218.8943	* 244.4429
LR_{mix}	* 264.4492	169.6298	173.8547	* 242.1930	222.9614	* 246.6826

Tabuľka 3.49: DAX: 95% VaR, *in-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	GARCH(1,1) <i>Normál.</i>	TARCH(1,1) <i>Normál.</i>	EGARCH <i>Normál.</i>	GARCH(1,1) <i>Student.</i>	TARCH(1,1) <i>Student.</i>	EGARCH <i>Student.</i>
N	47.00000	54.00000	188.0000	32.00000	38.00000	37.00000
T	3526.000	3526.000	3526.000	3256.000	3526.000	3526.000
T₀₀	3433.000	3419.000	3155.000	3193.000	3451.000	3453.000
T₀₁	46.00000	53.00000	183.0000	31.00000	37.00000	36.00000
T₁₀	46.00000	53.00000	183.0000	31.00000	37.00000	36.00000
T₁₁	1.000000	1.000000	5.000000	1.000000	1.000000	1.000000
LR_{uc}	3.574980	* 8.654152	0.800746	0.009784	0.209762	0.085354
LR_{ind}	0.194082	0.034936	3.384543	0.972154	0.622959	0.688996
LR_{cc}	3.769062	8.689088	4.185289	0.981938	0.832721	0.774350
LR_{tuff}	4.771961	4.771961	1.800543	4.771961	4.771961	4.771961
LR_{ind2}	58.43859	63.98616	173.0540	43.82054	46.65942	50.03373
LR_{mix}	62.01357	72.64031	173.8547	43.83032	46.86919	50.11908

Tabuľka 3.50: DAX: 99% VaR, *in-sample predikcie* – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	SAX	PX	BUX	WIG 20	S&P 500	NIKKEI 225	DAX
N	47.00000	53.00000	55.00000	56.00000	124.0000	134.0000	184.0000
T	1505.000	1568.000	1563.000	1569.000	2831.000	2766.000	3846.000
T ₀₀	1120.000	1148.000	1143.000	1145.000	2280.000	2198.000	3168.000
T ₀₁	46.00000	49.00000	48.00000	52.00000	113.0000	128.0000	172.0000
T ₁₀	46.00000	49.00000	48.00000	52.00000	113.0000	128.0000	172.0000
T ₁₁	1.000000	4.000000	7.000000	4.000000	11.00000	6.000000	12.00000
LR _{uc}	*12.81172	*9.728275	*8.016410	*7.480151	2.386156	0.142135	0.382351
LR _{ind}	0.475059	1.229386	*6.510395	0.840622	3.574931	0.274836	0.618078
LR _{cc}	*13.28678	*10.95766	*14.52680	*8.320772	5.961086	0.416971	1.000430
LR _{tuff}	0.413084	1.872144	0.120168	0.120168	*4.456104	0.315336	3.321462
LR _{ind2}	52.01668	*88.05090	*94.35725	*104.7865	*195.9823	*182.7428	*296.8346
LR _{mix}	64.82840	*97.77918	*102.3737	*112.2666	*198.3685	*182.8850	*297.2170

Tabuľka 3.51: RiskMetrics: 95% VaR – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	SAX	PX	BUX	WIG 20	S&P 500	NIKKEI 225	DAX
N	22.00000	18.00000	15.00000	14.00000	41.00000	40.00000	51.00000
T	1505.000	1568.000	1563.000	1569.000	2831.000	2766.000	3846.000
T ₀₀	1169.000	1214.000	1218.000	1225.000	2437.000	2381.000	3424.000
T ₀₁	22.00000	18.00000	13.00000	14.00000	39.00000	39.00000	49.00000
T ₁₀	22.00000	18.00000	13.00000	14.00000	39.00000	39.00000	49.00000
T ₁₁	0.000000	0.000000	2.000000	0.000000	2.000000	1.000000	2.000000
LR _{uc}	2.837706	0.330956	0.025998	0.190783	5.046816	4.887063	3.746449
LR _{ind}	0.813492	0.526420	6.446094	0.316646	1.811641	0.167116	1.527186
LR _{cc}	3.651197	0.857376	6.472092	0.507430	6.858457	5.054179	5.273634
LR _{tuff}	2.889587	0.098109	0.098109	0.412080	0.003790	2.709353	3.589316
LR _{ind2}	35.40532	30.39005	*37.11115	13.34556	*73.00070	*73.21541	*95.61973
LR _{mix}	38.24302	30.72101	*37.13714	13.53635	*78.04752	*78.10247	*99.36618

Tabuľka 3.52: RiskMetrics: 99% VaR – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	SAX	PX	BUX	WIG 20	S&P 500	NIKKEI 225	DAX
N	20.00000	13.00000	25.00000	13.00000	3.000000	7.000000	1.000000
T	293.0000	319.0000	318.0000	317.0000	315.0000	307.0000	323.0000
LR_{uc}	1.855172	0.611377	*4.704745	0.573163	*16.08631	*5.943938	*25.47214

Tabuľka 3.53: Metóda historickej simulácie: 95% VaR – spätné testovanie (*backtesting*) modelov

	SAX	PX	BUX	WIG 20	S&P 500	NIKKEI 225	DAX
N	3.000000	4.000000	7.000000	5.000000	1.000000	1.000000	0.000000
T	293.0000	319.0000	318.0000	317.0000	315.0000	307.0000	323.0000
LR_{uc}	0.001676	0.192267	3.452946	0.907755	2.019984	1.910711	6.492517

Tabuľka 3.54: Metóda historickej simulácie: 99% VaR – spätné testovanie (*backtesting*) modelov