MODEL OBCHODOVANIA S KOMODITAMI AKO ÚLOHA OPTIMÁLNEHO RIADENIA

2006

Viktor Lintner

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Katedra Aplikovanej Matematiky a Štatistiky

Ekonomická a finančná matematika

MODEL OBCHODOVANIA S KOMODITAMI AKO ÚLOHA OPTIMÁLNEHO RIADENIA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Viktor Lintner
Vedúca diplomovej práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava 2006

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, 27. 4. 2006

Viktor Lintner

Ďakujem vedúcej mojej diplomovej práce doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za cenné rady, pripomienky a odborné vedenie práce.

Abstrakt

Budeme sa zaoberať riešením modelu obchodovania s komoditami pomocou Pontryaginovho princípu maxima. Keďže model tak ako je všeobecne formulovaný nie je možné analyticky riešiť, budeme pracovať len s jeho zjednodušenou verziou. Najvýznamnejšie zjednodušenie sa týka cenovej funkcie komodity, ktorá vstupuje do modelu. Zavedieme dva špeciálne typy týchto funkcií, zaručujúce explicitnú riešiteľnosť úlohy. Pre tieto odvodíme úplné riešenie v závislosti od niekoľkých voľných parametrov modelu, z ktorých väčšina sa vzťahuje práve na cenovú funkciu.

Obsah

Úvod

Pontryaginov princíp maxima (ďalej PPM) predstavuje veľmi silný nástroj na riešenie spojitých úloh optimálneho riadenia. Hoci jeho vznik bol podnietený predovšetkým rozvojom vesmírnych letov, dnes nachádza svoje pevné uplatnenie v mnohých ďalších vedných odboroch. Výnimkou nie je ani ekonómia. V súčasnosti sa množstvo ekonomických úloh formuluje ako úlohy optimálneho riadenia. A práve vďaka PPM máme efektívny prostriedok na ich riešenie. To však nie je všetko. PPM nám okrem samotného riešenia umožňuje poodhaliť aj mnohé užitočné vlastnosti skúmaného optimalizačného problému.

Častým javom v optimalizačných úlohách z ekonomickej praxe sú ohraničenia kladené na množstvá príslušných veličín zahrnutých v modeli (typicky požiadavka nezápornosti). Takýmto úlohám v optimálnom riadení hovoríme úlohy s čistými stavovými ohraničeniami. Prítomnosť takýchto ohraničení obvykle sťažuje riešenie úlohy, pretože podmienky PPM sa v takom prípade značne komplikujú. Zaujímavým príkladom ekonomického problému, ktorý vedie na úlohu optimálneho riadenia s čistými stavovými ohraničeniami, je model spojitého obchodovania s komoditami, s ktorým sa budeme v tejto práci zaoberať. Hoci pôvodná formulácia tohoto modelu prevzatá z [1] neobsahuje ohraničenie na stav, jeho rozšírenie týmto smerom je pre nás zaujímavejšie a tiež z vecného hľadiska prirodzenejšie. Podstatou modelu je identifikovať optimálne správanie obchodníka s komoditami (inak povedané kedy a koľko má nakupovať/predávať z danej komodity) v tom zmysle, aby maximalizoval svoj majetok (súčet komodity a hotovosti) ku koncu daného časového intervalu, pričom cena komodity počas tohoto intervalu je vopred známa.

Dôvod, ktorý nás inšpiroval k skúmaniu komoditného modelu je ten, že jeho riešenie v práci [1] je prezentované len na konkrétnych jednoduchých číselných príkladoch a predovšetkým, že jeho nájdenie je do značnej miery založené na ekonomických argumentoch. Cieľom tejto práce je odvodiť riešenie modelu korektným a matematicky precíznym spôsobom, s využitím aparátu PPM. Keďže vo všeobecnosti je nemožné vyjadriť explicitné riešenie tejto úlohy, urobíme aj my niekoľko zjednodušení. Hlavný faktor spôsobujúci komplikácie v snahe o odvodenie úplne všeobecného riešenia je bližšie neidentifikovaný priebeh ceny komodity. Preto sa najpodstanejšie zjednodušenie bude týkať cenovej funkcie. Budeme uvažovať o dvoch typoch týchto funkcií, pri ktorých už je možné elegantné vyjadrenie riešenia. Takpovediac vedľajším produktom vyššie uvedeného úsilia je nájdenie takého príkladu, ktorý poukazuje na to, že jednotlivé formulácie nutných podmienok PPM pre úlohy s čistými stavovými ohraničeniami nemusia byť ekvivalentné.

Celá práca má nasledovnú štruktúru. Na začiatku sú uvedené niektoré základné výsledky z teórie optimálneho riadenia, pre úlohy s čistými stavovými ohraničeniami. Nasleduje samotná formulácia modelu obchodovania s komoditami. V ďalšej časti sú teoretické poznatky princípu maxima aplikované na uvažovanú úlohu. Najrozsiahlejšia časť práce pozostáva z niekoľkých Viet, ktoré sumarizujú riešenie našej verzie modelu v závislosti od voľby parametrov, ktoré do neho vstupujú. Všetky tieto tvrdenia sú podrobne dokázané. Záverečná pasáž pojednáva o už zmienenom príklade naznačujúcom rozdiely medzi formuláciami nutných podmienok.

Kapitola 1

Teória

Uvažujme nasledovnú úlohu optimálneho riadenia so zmiešanými aj čistými stavovými ohraničeniami

$$\begin{cases} \max\left\{\int_0^T F(x,u,t)\,dt + S[x(T),T]\right\} \\ \text{za podmienok} \\ \dot{x} = f(x,u,t),\ x(0)=x_0, \\ g(x,u,t)\geq 0,\ t\in[0,T], \\ h(x,t)\geq 0,\ t\in[0,T], \\ x(T)\ \text{voľné},\ T\ \text{pevné}, \end{cases} \tag{1.1}$$

kde $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^n$, $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$, $S:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$, $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^q$ a $h:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^p$ sú spojite diferencovateľné vo všetkých argumentoch. Obmedzíme sa na stavové ohraničenie prvého rádu, t.j také, ktorých derivácia $h_t^1 := [\partial h(x,t)/\partial x]\,\dot{x}(t)+\partial h(x,t)/\partial t = [\partial h(x,t)/\partial x]\,f(x,u,t)+\partial h(x,t)/\partial t$ bude závisieť od u. Ďalej budeme predpokladať, že úloha spĺňa "constraint qualification" podmienky, t.j.

$$\operatorname{rank}[\partial g/\partial u,\ \operatorname{diag}(g)] = q \tag{1.2}$$

platí pre všetky argumenty $x(t)$, $u(t)$, t pozdĺž optimálneho riešenia a tiež "full-rank" podmienku

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\partial h_1^1/\partial u \\ \vdots \\ \partial h_{\hat{p}}^1/\partial u\end{bmatrix} = \hat{p}, \tag{1.3}$$

kde pre $t\in[\tau_1,\tau_2]$,

$$\begin{aligned} h_i(x^*(t),t) &= 0,\ i=1,\ldots,\hat{p}\leq p, \\ h_i(x^*(t),t) &> 0,\ i=\hat{p}+1,\ldots,p. \end{aligned}$$

Aby sme mohli formulovať princíp maxima, pre úlohu (1.1), musíme zadefinovať Lagrangeovu funkciu nasledovným spôsobom

$$L(x, u, \lambda, \mu, \eta, t) = H(x, u, \lambda, t) + \mu^T g(x, u, t) + \eta^T h_t^1(x, u, t), \tag{1.4}$$

kde Hamiltonián

$$H = F(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t), \tag{1.5}$$

pričom $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^q$ a $\eta \in \mathbb{R}^p$.

Skôr ako odcitujeme znenie nutných podmienok, zadefinujme si niektoré užitočné pojmy. Vzhľadom na i-té ohraničenie $h_i(x(t), t) \geq 0$ budeme interval (t_1, t_2) nazývať vnútorným intervalom, ak $h_i(x(t), t) > 0$ pre všetky $t \in (t_1, t_2)$. Ak pre optimálnu trajektóriu platí $h_i(x(t), t) = 0$ pre $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$, pre nejaké i potom $[\tau_1, \tau_2]$ sa nazýva hraničný interval. Okamih τ_1 budeme označovať pojmom vstupný čas, ak existuje vnútorný interval končiaci v $t = \tau_1$ a hraničný interval začínajúci v τ_1. Ak pre istý časový okamih τ platí, že $h_i(x(\tau), \tau) = 0$ a zároveň je τ koncovým bodom nejakého vnútorného intervalu a začiatočným bodom ďalšieho vnútorného intervalu, potom τ nazývame kontaktný čas.

Nasledovná veta predstavuje špeciálny prípad nutných podmienok optimality ([1], 107) pre úlohu s voľným koncom.

Veta 1.0.1. *Nech u^* (spolu so stavovou trajektóriou x^*) je optimálne pre úlohu (1.1). Potom existujú vektorové funkcie $\lambda(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, $\mu(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^q$, $\eta(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^p$, $\gamma(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^p$ a skokový parameter $\zeta \in \mathbb{R}^p$, ktoré spĺňajú*

1. *Podmienku maximalizácie Hamiltoniánu*

$$\begin{gathered} H[x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t] \geq H[x^*(t), u(t), \lambda(t), t], \\ \text{v každom } t \in [0, T], \text{ pre všetky } u \text{ spĺňajúce} \\ g(x^*(t), u, t) \geq 0 \text{ a} \\ h_i^1(x^*(t), u, t) \geq 0 \text{ kedykoľvek } h_i(x^*(t), t) = 0, \ i = 1, \ldots, p \end{gathered} \tag{1.6}$$

2.

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial L}{\partial x}(x^*, u^*, \lambda, \mu, \eta, t)^T \tag{1.7}$$

3. *Podmienku tranzverzality*

$$\begin{gathered} \lambda(T^-) = \frac{\partial S}{\partial x}(x^*(T), T)^T + \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(T), T)^T \gamma, \\ \gamma \geq 0, \ \gamma^T h(x^*(T), T) = 0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

4. Skokové podmienky v každom vstupnom/kontaktnom čase τ

$$
\begin{aligned}
\lambda\left(\tau^{-}\right)=\lambda\left(\tau^{+}\right)+\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^{*}\left(\tau\right),\tau\right)^{T}\zeta\left(\tau\right), \\
H\left[x^{*}\left(\tau\right),u^{*}\left(\tau^{-}\right),\lambda\left(\tau^{-}\right),\tau\right] &= H\left[x^{*}\left(\tau\right),u^{*}\left(\tau^{+}\right),\lambda\left(\tau^{+}\right),\tau\right]- \\
&\quad -\zeta^{T}\left(\tau\right)\frac{\partial h}{\partial t}\left(x^{*}\left(\tau\right),\tau\right)
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

5. Lagrangeove multiplikátory $\mu\left(t\right)$ spĺňajú

$$\left.\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)^{T}\right|_{u=u^{*}(t)}=0 \tag{1.10}$$

a podmienky komplementarity

$$
\begin{gathered}
\mu\left(t\right)\geq 0,\ \mu^{T}\left(t\right)g\left(x^{*},u^{*},t\right)=0, \\
\eta\left(t\right)\geq 0,\ \dot{\eta}\leq 0,\ \eta^{T}\left(t\right)h\left(x^{*},t\right)=0, \\
\zeta\left(\tau\right)\geq 0,\ \zeta^{T}\left(\tau\right)h\left(x^{*},\tau\right)=0.
\end{gathered}
\tag{1.11}
$$

Poznámka 1.0.2. Vo všeobecnosti, ak by sme chceli byť úplne korektní, museli by sme Hamiltonián uvažovať v tvare $H=\lambda_0 F+\lambda^T f$, kde λ_0 je nezáporné číslo. My sa však budeme zoberať iba úlohou s voľným koncom, pri ktorej možno automaticky položiť $\lambda_0=1$, takže vystačíme aj s Hamiltoniánom v tvare (1.5).

Poznamenajme, že nie každé riešenie nutných podmienok musí byť nevyhnutne optimálne. Získaní kandidáti na optimálne riadenie (riešenia nutných podmienok) zrejme okrem samotného zadania úlohy závisia aj od formulácie nutných podmienok použitých pri ich hľadaní, pretože tie sa môžu líšiť v závislosti od literatúry, z ktorej čerpáme. Dobrý prehľad jednotlivých formulácii nutných podmienok maxima, pre úlohy so stavovými ohraničeniami možno nájsť v článku [3]. Nie je dosť dobre možné vybrať jednu formuláciu a označiť ju za najlepšiu z hľadidka praktického použitia pri riešení. Vhodnosť použitia tej-ktorej formulácie podmienok je determinovaná vlastným zadaním optimalizačnej úlohy. Veľmi voľne môžeme povedať, že vhodnosť jednotlivých typov formulácií pre danú úlohu je nepriamo úmerná počtu získaných kandidátov. Práve v tejto súvislosti sa neskôr, v priebehu riešenia, ukáže, že v jednom špeciálnom prípade nám lepšie poslúži odlišná formulácia nutných podmienok ako vo Vete 1.0.1. Takéto alternatívne znenie nutných podmienok predstavíme v nasledujúcej časti.

Tak ako doteraz, aj v ďalšom sa budeme odvolávať na formuláciu úlohy (1.1). Okrem Lagrangeovej funkcie (1.4) je potrebné zadefinovať ešte jednu pomocnú Lagrangeovu funkciu, danú predpisom

$$\check{L}\left(x,u,\lambda,\mu,t\right)=H\left(x,u,\lambda,t\right)+\mu^{T}g\left(x,u,t\right)$$

ktorá sa od Lagrangeovej funkcie (1.4) líši tým, že nezahŕňa čisté stavové ohraničenia. Na verifikáciu toho, či úloha nie je v istom zmysle degenerovaná budeme musieť pre každé $t \in [0, T]$ definovať množiny I_t^- a I_t^+

$$\begin{array}{c} I_t^- = \{j : j \leq q, g_j(x^*(t), u^*(t^-), t) = 0\} \\ I_t^+ = \{j : j \leq q, g_j(x^*(t), u^*(t^+), t) = 0\} \end{array}$$

Pomocou znalosti týchto množín môžeme potom vyhodnotiť tzv. "full rank" podmienku, ktorá hovorí

$$\begin{array}{l} \text{Ak } I_t^- \neq \emptyset, \text{ matica } [\partial g_j(x^*(t), u^*(t^-), t) / \partial u_i], \ i = 1, \ldots, m, \\ \quad j \in I_t^-, \text{ má hodnosť rovnajúcu sa počtu prvkov v } I_t^-. \\ \text{Ak } I_t^+ \neq \emptyset, \text{ matica } [\partial g_j(x^*(t), u^*(t^+), t) / \partial u_i], \ i = 1, \ldots, m, \\ \quad j \in I_t^+, \text{ má hodnosť rovnajúcu sa počtu prvkov v } I_t^+. \end{array} \tag{1.12}$$

Potom na základe tvrdení ([2], 372) a ([2], 396) možno sformulovať nasledovnú vetu.

Veta 1.0.3. *Nech $(x^*(t), u^*(t))$ je pípustná dvojica riešiaca úlohu (1.1). Predpokladajme, že "constraint qualification" (1.12) platí pre všetky $t \in [0, T]$. Potom existujú vektorové funkcie $\lambda(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, $\mu(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^q$ a nerastúca vektorová funkcia $\eta(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^p$, všetky majúce jednostranné limity všade, také že nasledujúce podmienky platia:*

1. *Pre skoro všetky $t \in (0, T)$,*

$$\begin{array}{c} H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) \geq H(x^*(t), u, \lambda(t), t), \\ \text{pre všetky } u \text{ také, že } g(x^*(t), u, t) > 0 \end{array} \tag{1.13}$$

2. *Definujúc*

$$\lambda^*(t) = \lambda(t) - \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t), t)^T \eta(t) \tag{1.14}$$

$\lambda^*(t)$ je spojitá a má deriváciu skoro všade danú

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial L}{\partial x}(x^*, u^*, \lambda, \mu, \eta, t)^T \tag{1.15}$$

3. *$\lambda(t)$ spĺňa podmienku tranzverzality*

$$\lambda(T) = \frac{\partial S}{\partial x}(x^*(T), T)^T \tag{1.16}$$

4. $\eta_j(t)$ *je konštantná na každom intervale kde* $h_j(x^*(t), t) > 0$, $j = 1, \ldots, p$

5. $\eta_j(t)$ *je spojitá pre každé* $t \in (0, T)$, *v ktorom* $h_j(x^*(t), t) = 0$ *a* $(\partial h_j(x^*(t), t) / \partial x) . f(x^*(t), u^*(t), t)$ *je nespojitá,* $j = 1, \ldots, p$

6.

$$\left. \left(\frac{\partial \check{L}}{\partial u} \right)^T \right|_{u = u^*(t)} = 0 \tag{1.17}$$

7. Pre všetky $t \in [0, T]$,

$$\mu(t) \geq 0, \ \mu^T(t) g(x^*, u^*, t) = 0. \tag{1.18}$$

Na záver tejto kapitoly sa ešte pokúsime poukázať na základné rozdiely odlišujúce formulácie nutných podmienok vo Vetách 1.0.1 a 1.0.3. Pre jednoduchšiu orientáciu označme sadu nutných podmienok Vety 1.0.1 ako (1) a sadu nutných podmienok Vety 1.0.3 ako (2). Prvý rozdiel sa týka množiny $\Omega(x^*(t), t)$ riadení, cez ktoré maximalizujeme Hamiltonián. Zrejme pre každé $(x^*(t), t)$ je $\Omega^{(1)}(x^*(t), t) \subseteq \Omega^{(2)}(x^*(t), t)$. Asi kľúčová odlišnosť je v tom, že v (2) definujeme vektor nových adjungovaných premenných $\lambda^*(t)$, ktorý má byť spojitý. Tým pádom v (2) odpadá potreba skokových podmienok, ktoré máme v (1). Taktiež multiplikátor $\eta(t)$ nemusí v (2) spĺňať podmienku komlementarity, pre prípad $h(x^*, t) = 0$ sa od neho vyžaduje "iba" konštantnosť, nie nevyhnutne nulovosť. Na druhej strane tento musí byť pre $h(x^*, t) > 0$ spojitý, čo pre zmenu nie je nutné pre $\eta(t)$ z (1). Posledný rozdiel je už na prvý pohľad evidentný a týka sa podmienky tranzverzality.

Kapitola 2

Obchodovanie s komoditami

2.1 Model

Uvažujme firmu, ktorá nakupuje a predáva komoditu. Predpokladáme, že časový vývoj ceny tejto komodity je vopred známy. Cieľom firmy je maximalizovať svoje aktíva (tie pozostávajú iba z hotovosti a komodity) ku koncu daného časového horizontu. Pre jednotlivé veličiny zaveďme nasledovné označenie

$$\begin{aligned}
T &= \text{časový horizont,} \\
x(t) &= \text{hotovosť v peňažných jednotkách v čase } t, \\
y(t) &= \text{zásoba komodity v merných jednotkách v čase } t, \\
u(t) &= \text{miera nakupovania komodity v merných jednotkách} \\
&\ \text{za jednotku času (záporná hodnota znamená predaj),} \\
p(t) &= \text{cena komodity v peňažných jednotkách v čase } t, \\
r &= \text{konštantná kladná úroková miera,} \\
h(y) &= \text{náklady na skladovanie } y \text{ jednotiek komodity za jednotku času,} \\
V_1, V_2 &= \text{maximálna rýchlosť predávania, resp. kupovania.}
\end{aligned}$$

Túto úlohu možno formulovať ako úlohu optimálneho riadenia s Mayerovou účelovou funkciou a to nasledovným spôsobom

$$\begin{cases}
\max \{x(T) + p(T)\, y(T)\} \\
\text{za podmienok} \\
\dot{x}(t) = rx(t) - h(y(t)) - p(t)\, u(t)\,,\ x(0) = x_0, \\
\dot{y}(t) = u(t)\,,\ y(0) = y_0, \\
-V_1 \le u(t) \le V_2,\ V_1, V_2 \ge 0.
\end{cases} \tag{2.1}$$

Uvedená všeobecná formulácia modelu je prevzatá z [1]. Takto všeobecne definovaný model je de facto nemožné analyticky riešiť. Preto autori spomínanej publikácie uvádzajú vo svojej práci len riešenie dvoch konkrétnych číselných príkladov. Podstata riešiteľnosti týchto príkladov nespočíva ani tak v znalosti konkrétnych číselných hodnôt jednotlivých veličín, ako v kvalitatívnej jednoduchosti jednotlivých vstupov a to predovšetkým cenovej funkcie. V prvom príklade sa jedná o po čiastkach konštantnú funkciu $p(t)$ so skokom v jednom bode, v druhom príklade je $p(t)$ lineárna lomená funkcia. Navyše samotné riešenie, hoci vychádza z princípu maxima, je v práci [1] z veľkej časti založené na intuícii a ekonomických argumentoch ako na precíznom matematickom odvodzovaní.

Práve vyššie uvedené skutočnosti nás viedli k myšlienke pokúsiť sa matematicky korektne analyzovať tieto príklady. Aby však táto úloha opäť trochu nabrala na všeobecnosti, nahradili sme väčšinu číselných hodnôt parametrami. Naviac oproti [1], kde sa zákaz krátkej pozície pre komoditu (nezápornosť y) uvažoval len pri lomenej cenovej funkcii, v našom prípade budeme $y \geq 0$ požadovať pri oboch verziách cenovej funkcie. Okrem už naznačeného zjednodušenia cenovej funkcie, budú ďalšími uľahčujúcimi predpokladmi lineárna funkcia skladovacích nákladov $h(y) = cy$ a úroková miera $r = 0$. Nami analyzovaná úloha bude mať teda takýto tvar

$$\begin{cases} \max\{x(T) + p(T)\,y(T)\} \\ \text{za podmienok} \\ \dot{x}(t) = -cy(t) - p(t)\,u(t)\,,\ x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = u(t)\,,\ y(0) = y_0, \\ u + 1 \geq 0,\ 1 - u \geq 0,\ y \geq 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

pričom $p(t)$ bude nadobúdať dve spomínané kvalitatívne verzie. Analytické vyjadrenia týchto cenových funkcií nie sú ešte v tejto fáze potrebné a nachádzajú sa až v neskorších podkapitolách.

2.2 Nutné podmienky maxima

Pri formulácii nutných podmienok pre úlohu (2.2) budeme vychádzať z Vety 1.0.1. Hamiltonián pre túto úlohu má tvar

$$H = \lambda_1(-cy - pu) + \lambda_2 u \tag{2.3}$$

Podmienka maximalizácie Hamiltoniánu (1.6) nám potom hovorí, že kandidát na optimálne riadenie je daný predpisom

$$u^*(t) = \text{bang}\left[-1; 1; \lambda_2(t) - \lambda_1(t)\,p(t)\right] \ \text{ak}\ y(t) > 0 \tag{2.4}$$

Ak $y(t) = 0$ potom musí platiť $\dot{y} = u \geq 0$, aby sme zabezpečili nezápornosť y. Optimálne riadenie má v tom prípade formu

$$u^*(t) = \text{bang}\,[0; 1; \lambda_2(t) - \lambda_1(t)\, p(t)] \ \text{ ak } y(t) = 0. \tag{2.5}$$

Zrejme Lagrangeova funkcia (1.4) má tvar

$$L = H + \mu_1 (u + 1) + \mu_2 (1 - u) + \eta u,$$

kde μ_1, μ_2 a η spĺňajú podmienky komplementarity (1.11)

$$\begin{gathered} \mu_1 \geq 0, \ \mu_1 (u + 1) = 0, \\ \mu_2 \geq 0, \ \mu_2 (1 - u) = 0, \\ \eta \geq 0, \ \eta y = 0, \ \eta u = 0. \end{gathered}$$

Podmienka (1.10) má tvar

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \lambda_2 - p\lambda_1 + \mu_1 - \mu_2 + \eta = 0.$$

Adjungované rovnice (1.7) sú v tvare

$$\begin{aligned} \dot{\lambda_1} &= -\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \ \lambda_1\left(T^-\right) = 1 \ \Rightarrow \ \lambda_1(t) \equiv 1, \ t \in [0, T] \\ \dot{\lambda_2} &= -\frac{\partial L}{\partial y} = c, \ \lambda_2\left(T^-\right) = p(T) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Skokové podmienky (1.9) v čase τ (vstupný/kontaktný čas) sú

$$\begin{gathered} H\left[x^*(\tau), y^*(\tau), u^*(\tau^-), \lambda_1(\tau^-), \lambda_2(\tau^-), \tau\right] = \\ H\left[x^*(\tau), y^*(\tau), u^*(\tau^+), \lambda_1(\tau^+), \lambda_2(\tau^+), \tau\right] \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} \lambda_2(\tau^-) = \lambda_2(\tau^+) + \zeta(\tau) \\ \zeta(\tau) \geq 0, \ \zeta(\tau)\, y^*(\tau) = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Poznámka 2.2.1. Striktnou aplikáciou podmienky tranzverzality (1.8) na našu úlohu by sme dospeli k jej tvaru

$$\lambda_2\left(T^-\right) = p(T) + \gamma \tag{2.9}$$

ktorý sa líši od formulácie v (2.6). Elementárnou úvahou však môžeme obhájiť správnosť podmienky tranzverzality (2.6). Ide o to dokázať, že musí platiť $\gamma = 0$. Sporom. Nech by teda podmienka (2.9) bola splnená pre nejaké $\gamma > 0$. Potom by podľa podmienky komplementarity pre γ muselo byť ohraničenie na stav y aktívne, t.j. $y^*(T) = 0$. Na druhej strane by sme mali $\lambda_2(T^-) > p(T)$, teda existovalo by ľavé okolie bodu T, označme ho $\mathcal{O}_\epsilon(T) = (T - \epsilon, T)$, $\epsilon > 0$, také, že by pre všetky $t \in \mathcal{O}_\epsilon(T)$ tiež platilo $\lambda_2(t) > p(t)$. Toto okolie by bolo v súlade s (2.4) aj (2.5) charakterizované riadením $u^*(t) = 1$, čo by malo nevyhnutne za následok $y^*(T) > 0$. Tým sme však dospeli k hľadanému sporu.

Aby sme sa presvedčili, že použitie nutných podmienok z Vety 1.0.1 je korektné, musíme skontrolovať, či sú pre našu úlohu splnené aj všetky podmienky regularity. Najprv overíme (1.2)

$$M := [\partial g^*/\partial u,\ \mathrm{diag}\,(g^*)] = \begin{bmatrix} \partial g_1^*/\partial u & g_1^* & 0 \\ \partial g_2^*/\partial u & 0 & g_2^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & u^*(t)+1 & 0 \\ -1 & 0 & 1-u^*(t) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & u^*(t)+1 & 0 \\ 0 & u^*(t)+1 & 1-u^*(t) \end{bmatrix}$$

Keďže $u^*(t)+1$ a $1-u^*(t)$ nemôžu súčasne nadobúdať nulovú hodnotu, vidíme, že $\mathrm{rank}\,(M) = 2 = q$ a teda prvá podmienka je splnená. Pri testovaní druhej podmienky (1.3) pripadajú do úvahy dva prípady a to $\hat{p} = 0$ ak $h^* = y^*(t) > 0$, alebo $\hat{p} = 1$ ak $h^* = y^*(t) = 0$. V prípade, že $\hat{p} = 0$ je táto podmienka splnená triviálne. Podrobnejšie si ukážeme len prípad $\hat{p} = 1$.

$$N := \left[\partial h^1/\partial u\right] = [\partial u/\partial u] = [1] \;\Rightarrow\; \mathrm{rank}\ (N) = 1 = \hat{p}$$

Takže úloha spĺňa aj druhú podmienku regularity, čo nás dodatočne oprávňuje k použitiu Vety 1.0.1.

Nasledujúca Veta a jej Dôsledok bude mať veľký význam pri ďalšom odvodení optimálneho riadenia.

Veta 2.2.2. *Nech τ je skokový bod Hamiltonovej funkcie H (t.j. vstupný alebo kontaktný čas). Potom platí*

$$\lambda_2\left(\tau^-\right) = p(\tau)\,. \tag{2.10}$$

Dôkaz: Použitím (2.3) vo vzťahu (2.7) dostaneme

$$\begin{gathered} \lambda_1(\tau^-)\,[-cy(\tau) - p(\tau)\,u^*(\tau^-)] + \lambda_2(\tau^-)\,u^*(\tau^-) = \\ \lambda_1(\tau^+)\,[-cy(\tau) - p(\tau)\,u^*(\tau^+)] + \lambda_2(\tau^+)\,u^*(\tau^+) \end{gathered}$$

Keďže $\lambda_1(t) \equiv 1$, podmienka sa redukuje na tvar

$$-p(\tau)\,u^*\left(\tau^-\right) + \lambda_2\left(\tau^-\right)u^*\left(\tau^-\right) = -p(\tau)\,u^*\left(\tau^+\right) + \lambda_2\left(\tau^+\right)u^*\left(\tau^+\right)$$

Nech τ je vstupný čas, teda $u^*(\tau^-) = -1$, $u^*(\tau^+) = 0$, potom

$$-p(\tau)(-1) + \lambda_2\left(\tau^-\right)(-1) = -p(\tau)\,0 + \lambda_2\left(\tau^+\right)0$$

$$p(\tau) - \lambda_2\left(\tau^-\right) = 0$$

$$\lambda_2\left(\tau^-\right) = p(\tau)$$

Situácia je o niečo menej priamočiarejšia v prípade, že τ je kontaktný čas. Vtedy $u^*(\tau^-) = -1$, $u^*(\tau^+) = 1$, z čoho

$$-p(\tau)(-1) + \lambda_2\left(\tau^-\right)(-1) = -p(\tau)1 + \lambda_2\left(\tau^+\right)1.$$

$$\lambda_2\left(\tau^+\right) + \lambda_2\left(\tau^-\right) = 2p(\tau) \tag{2.11}$$

Na to, aby sme v tomto prípade dokázali samotné tvrdenie Vety využijeme spor. Nech teda $\lambda_2(\tau^-) \neq p(\tau)$.

a) Predpokladajme $\lambda_2(\tau^-) < p(\tau)$.

$$\lambda_2\left(\tau^+\right) = 2p(\tau) - \lambda_2\left(\tau^-\right) > 2p(\tau) - p(\tau) = p(\tau)$$

Z toho plynie

$$\lambda_2\left(\tau^+\right) > p(\tau) > \lambda\left(\tau^-\right) \tag{2.12}$$

Podmienka maxima (2.8) však hovorí, že $\lambda_2(\tau^-) = \lambda_2(\tau^+) + \zeta(\tau)$, $\zeta(\tau) \geq 0$, preto

$$\lambda_2\left(\tau^-\right) \geq \lambda_2\left(\tau^+\right) \tag{2.13}$$

Z (2.12) a (2.13) dostávame teda hľadaný spor.

b) Predpokladajme $\lambda_2(\tau^-) > p(\tau)$. Z toho ale vyplýva, že existuje $\epsilon > 0$ a také okolie $\mathcal{O}_\epsilon(\tau) = (\tau - \epsilon, \tau)$, že $\lambda_2(t) > p(t)$, pre $t \in \mathcal{O}_\epsilon(\tau)$. To by ale znamenalo, že $u^*(t) = 1$, pre $t \in \mathcal{O}_\epsilon(\tau)$. Spolu s predpokladom $y(t) \geq 0$, teda dostávame, že $y(\tau) > 0$, čo je spor s tým, že τ je kontaktný čas. $\square$

Dôsledok 2.2.3. *Ak je τ kontaktný čas, potom je $\lambda_2(t)$ v bode τ spojitá.*

Dôkaz: Dosadením vzťahu z Vety (2.2.2) do rovnosti (2.11) dostávame

$$\lambda_2\left(\tau^+\right) + \lambda_2\left(\tau^-\right) = 2\lambda_2\left(\tau^-\right)$$

$$\lambda_2\left(\tau^+\right) = \lambda_2\left(\tau^-\right)$$

Z posledného vzťahu je už spojitosť zrejmá. $\square$

2.3 Obchodovanie s komoditami v prípade lomenej cenovej funkcie

Uvažujme úlohu (2.2) s po častiach lineárnou lomenou cenovou funkciou. Všeobecný zápis takejto funkcie bude

$$p(t) = \begin{cases} a_1 t + b_1 & \text{pre } 0 \leq t < \hat{t}, \\ a_2\left(t - \hat{t}\right) + \left(a_1\hat{t} + b_1\right) & \text{pre } \hat{t} \leq t \leq T, \end{cases} \tag{2.14}$$

pričom požadujeme, aby $a_1 a_2 \leq 0$, $p(t) > 0$ a $0 < \hat{t} < T$.

Celá zvyšná časť tejto kapitoly sa zaoberá riešením a analýzou tejto úlohy, vzhľadom na voľbu parametrov $\hat{t}$, T, y_0, c, a_1, a_2. Tú si rozdelíme na štyri časti, ktoré budú reprezentované štyrmi tvrdeniami. Základné členiace kritérium sa odvíja od tvaru cenovej funkcie $p(t)$ a to podľa toho, či má podobu písmena "V" ($a_1 \leq 0, a_2 \geq 0$), alebo obráteného "V" ($a_1 \geq 0, a_2 \leq 0$). V oboch týchto hlavných prípadoch vyčleníme ešte osobitne situáciu, keď nastáva rovnosť $c = a_1$, resp. $c = a_2$, ktorá je dosť špecifická.

Veta 2.3.1. *Nech $a_1 \geq 0$, $a_2 \leq 0$, $c > 0$ a $c \neq a_1$. Označme $\bar{t} := \frac{b_1 - d}{c - a_1}$. Potom riadenie spĺňajúce nutné podmienky Vety 1.0.1 pre úlohu (2.2), (2.14) má tvar*

1. $u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \alpha) \\ -1 & t \in [\alpha, T] \end{cases}$,

   pre $y_0 \geq T - 2\alpha$, *kde* $\alpha := \begin{cases} \bar{t} & \text{ak } 0 \leq \bar{t} \leq T \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$

2. (a) $u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, t_1] \\ -1 & t \in (t_1, t_2) \\ 0 & t \in [t_2, T] \end{cases}$,

   pre $y_0 < T - 2\bar{t}$, $c < a_1$, $t_1 \geq 0$, *kde* $t_1 := \dfrac{(c - a_2) y_0 + (a_2 - a_1)\hat{t}}{a_1 - 2a_2 + c}$,

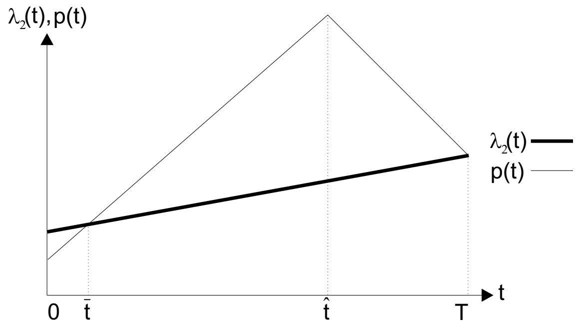
   $t_2 := \dfrac{(c - a_1) y_0 + 2(a_2 - a_1)\hat{t}}{a_1 - 2a_2 + c}$

   (b) $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0] \\ 0 & t \in (y_0, T] \end{cases}$,

   pre $y_0 < T$, $c < a_1$, $t_1 < 0$, *alebo* $y_0 < T$, $c > a_1$

Dôkaz: Z toho, že $\dot{\lambda}_2 = c$, vieme, že $\lambda_2(t)$ je na celom intervale $[0, T]$ lineárnou funkciou so sklonom c. Navyše $\lambda_2(t)$ musí byť spojitá všade okrem bodov, ktoré predstavujú vstupný čas. Predpokladajme na chvíľu, že optimálne riadenie je také, že pre odozvu platí $y(t) > 0$ na intervale $(0, T)$, s možnou výnimkou izolovaných bodov, kde $y(t) = 0$, predstavujúcich kontaktné časy. To ale na základe (2.8) a Dôsledku (2.2.3) znamená, že $\lambda_2(t)$ je spojitá na celom intervale $[0, T]$. Spolu s požiadavkou $\lambda_2(T^-) = p(T)$ máme

$$\lambda_2(t) = ct + d, \quad t \in [0, T], \quad \text{kde } d = p(T) - cT \tag{2.15}$$



Obr. 1: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.15)

Vzhľadom na tvar funkcií $\lambda_2(t)$ a $p(t)$ a ich vzájomnú polohu dostávame podľa (2.4), že optimálne riadenie má tvar

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \bar{t}) \\ -1 & t \in [\bar{t}, T] \end{cases} \quad \text{alebo} \quad u^*(t) = -1, \quad t \in [0, T],$$

podľa toho, či priesečník $\lambda_2(t)$ a $p(t)$ (označme ho $\bar{t}$) bude patriť do intervalu $[0, T]$, alebo nie (existencia priesečníka vyplýva z predpokladu $c \neq a_1$). Hodnotu $\bar{t}$ získame z rovnosti

$$c\bar{t} + d = a_1 t + b_1$$

$$\bar{t}(c - a_1) = b_1 - d$$

$$\bar{t} = \frac{b_1 - d}{c - a_1}$$

Zaveďme označenie

$$\alpha := \begin{cases} \bar{t} & \text{ak } 0 \leq \bar{t} \leq T \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Potom možno optimálne riadenie jednoducho zapísať ako

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \alpha] \\ -1 & t \in (\alpha, T] \end{cases} \tag{2.16}$$

Aby však platili všetky uvedené úvahy je nutné zabezpečiť, aby $y(t) > 0$, pre $t \in (0, T)$. Keďže optimálne riadenie je také, že v prvej fáze nakupujeme (nemusí nastať ak $\alpha < 0$), čím zvyšujeme hodnotu $y(t)$ a v druhej fáze predávame, teda $y(t)$ klesá, stačí ekvivalentne požadovať, aby $y(T) \geq 0$. Ak vyjadríme $y(T)$ pomocou y_0 dostaneme

$$y_0 + \alpha - (T - \alpha) \geq 0$$

$$y_0 \geq T - 2\alpha$$

Pre $y_0 \geq T-2\alpha$ sme teda identifikovali prípad 1.a, ktorý je charakterizovaný riadením (2.16) a adjungovanou funkciou (2.15).

Predpokladajme teraz, že $y_0 < T - 2\alpha$ a ďalej nech $\alpha \geq 0$ a $c < a_1$. Keby bola $\lambda_2(t)$ opäť tvaru (2.15), tak

$$y(T) = y_0 + \alpha - (T - \alpha) = y_0 + 2\alpha - T < 0$$

Teda existoval by bod $0 \leq s < T$ taký, že $y(t) > 0$, $t \in [0, s)$ a $y(s) = 0$. To ale znamená, že s by bol kontaktný, resp. vstupný čas. Tu sa ale dostávame do sporu s Vetou 2.2.2, pretože by sme mali $\lambda_2(s^-) < p(s)$. Východiskom je posunúť $\lambda_2(t)$ nahor. Určite bude existovať taký posun, že $y(t_1) = y_0 + t_1 - (t_2 - t_1) = 0$, pričom t_1 je priesečník $\lambda_2(t)$ s $p(t) = a_1 t + b_1$, t_2 je kontaktný/vstupný čas spĺňajúci podmienku (2.10). Hodnoty t_1, t_2, spolu s hodnotou $\bar{d}$ (absolútny člen lineárnej funkcie $\lambda_2(t) = ct + \bar{d}$) nájdeme ako riešenie systému

$$\begin{aligned} y_0 + t_1 &= t_2 - t_1, \\ ct_1 + \bar{d} &= a_1 t_1 + b_1, \\ ct_2 + \bar{d} &= a_2\left(t_2 - \hat{t}\right) + \left(a_1 \hat{t} + b_1\right), \end{aligned}$$

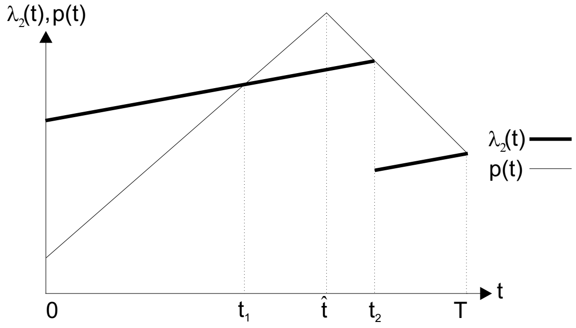
čo vedie k výsledku

$$\begin{gathered} t_1 = \frac{(c - a_2)\, y_0 + (a_2 - a_1)\, \hat{t}}{a_1 - 2a_2 + c}, \quad t_2 = \frac{(c - a_1)\, y_0 + 2\,(a_2 - a_1)\, \hat{t}}{a_1 - 2a_2 + c}, \\ \bar{d} = b_1 + (a_1 - a_2)\, \hat{t} + \frac{(c - a_2)\left[(c - a_1)\, y_0 + 2\,(a_2 - a_1)\, \hat{t}\right]}{a_1 - 2a_2 + c} \end{gathered} \tag{2.17}$$

Určite platí, že $t_1 \geq 0$, $t_2 \leq T$, lebo máme predpoklad $\alpha \geq 0$, ktorý pre pôvodnú funkciu $\lambda_2(t)$ zabezpečoval, že jej priesečníky s $p(t)$ ležali v intervale $[0, T]$. Tvar $\lambda_2(t) = ct + \bar{d}$ však platí len na intervale $[0, t_2]$. V bode t_2 bude mať $\lambda_2(t)$ skok nadol, tak aby bola zabezpečená koncová podmienka z (2.6). Z toho $\lambda_2(t) = c(t - T) + p(T)$, pre $t \in (t_2, T]$, čo spolu s $y(t) = 0$ a $u^*(t) = 0$ vyhovuje (2.5). Výsledná podoba $\lambda_2(t)$ a optimálneho riadenia musí teda byť

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} ct + \bar{d} & t \in [0, t_2) \\ c(t - T) + p(T) & t \in [t_2, T] \end{cases}, \qquad u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, t_1] \\ -1 & t \in (t_1, t_2) \\ 0 & t \in [t_2, T] \end{cases}, \tag{2.18}$$

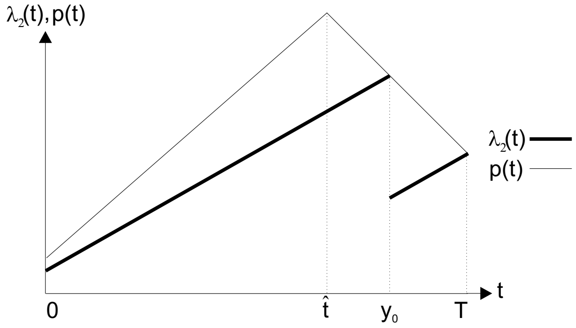
kde t_1, t_2 a $\bar{d}$ sú dané (2.17).



Obr. 2: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.18)

V ďalšej časti ponechajme predpoklad $c < a_1$, ale ostatné predpoklady zmeňme na $\alpha = 0$ a $y_0 < T$. Opäť uvažujme, čo by sa stalo, keby za takýchto okolností platilo (2.15). V tomto prípade by sme analogicky došli k sporu s (2.10). Východiskom bude opäť posun nahor. Predpokladajme taký posun, že $\lambda_2(t) < p(t)$, $t \in [0, s)$ a $p(t) = p(s)$, kde čas s značí priesečník $\lambda_2(t)$ s $p(t)$. Inak povedané by to znamenalo, že $\lambda_2(t)$ leží na $[0, s)$ pod cenovou funkciou $p(t)$. Takýto posun určite existuje vzhľadom na to, že $\alpha = 0$, čo značí, že pred posunutím platilo $\lambda_2(t) < p(t)$, pre $t \in [0, T)$. Teraz je otázka, akému y_0 by taký posun zodpovedal. V takom prípade by sme mali na $[0, s)$ buď $u^*(t) = -1$ podľa (2.4), alebo $u^*(t) = 0$ podľa (2.5). Keby nastali obe riadenia (nevyhnutne len v poradí -1,0), implikovalo by to, že existuje bod $r < s$, v ktorom dochádza k prepnutiu. Avšak to by viedlo k sporu s (2.13), lebo r by bol vstupný čas a súčasne by preň platilo $\lambda_2(r^-) < p(r)$. Z toho je jasné, že pre predpokladanú funkciu $\lambda_2(t)$ bude $u^*(t) = -1$ na celom $[0, s)$. Vďaka tomu možno ľahko usúdiť, že je to práve $y_0 = s$, ktoré by spolu s danou funkciou $\lambda_2(t)$ spĺňali všetky podmienky maxima. Je zrejmé, že čím menšie y_0, tým väčší posun nahor. Bude teda existovať dolná hranica $\bar{y_0}$, taká že práve pre $\bar{y_0} < y_0 < T$ bude adjungovaná funkcia spĺňať $\lambda_2(t) < p(t)$, pre $t \in [0, y_0)$. Funkcia $\bar{\lambda_2}(t)$ prislúchajúca $\bar{y_0}$, bude mať tú vlastnosť, že $\bar{\lambda_2}(0) = p(0)$ a $\bar{\lambda_2}(t) < p(t)$ na $(0, s)$. To ale dáva jednoznačné vyjadrenie $\bar{\lambda_2}(t) = ct + p(0)$. Vďaka tomu, že $\bar{\lambda_2}(t)$ je taká ako sme uviedli, je ľahké uvedomiť si, že pre $\bar{y_0}$ by vyšlo $t_1 = 0$, kde t_1 je ako v (2.17). Teda $u^*(t) = -1$, pre $t \in [0, y_0)$ je optimálnym riadením pre tie y_0, ktoré spĺňajú $t_1 < 0$. Ešte však musíme určiť riadenie a $\lambda_2(t)$ na intervale $(y_0, T]$. S ohľadom na splnenie koncovej podmienky $\lambda_2(T^-) = p(T)$ to bude $\lambda_2(t) = c(t - T) + p(T)$ a tomu zodpovedajúce $u^*(t) = 0$. Ak to teda zhrnieme, pre $c < a_1$, $y_0 < T$ a súčasne spĺňajúce $t_1 < 0$ môžeme písať

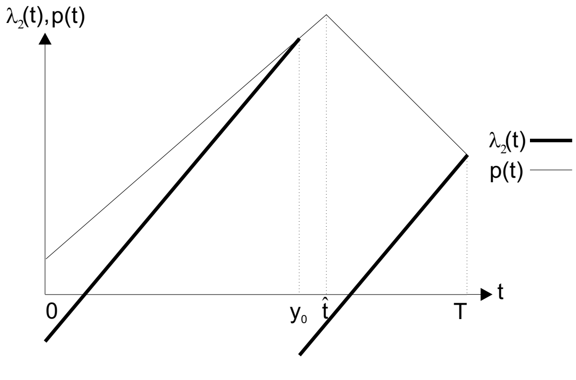
$$\lambda_2(t) = \begin{cases} c(t - y_0) + p(y_0) & t \in [0, y_0) \\ c(t - T) + p(T) & t \in [y_0, T] \end{cases}, \quad u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in [y_0, T] \end{cases} \tag{2.19}$$



Obr. 3: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.19), pre $c < a_1$

Pre prípad $c < a_1$, $y_0 < T$ a $\alpha = 0$ musíme ešte dopovedať, čo s tými y_0, pre ktoré $t_1 \geq 0$. Zrejme pre nich bude platiť práve (2.18). Keďže v prípade $c < a_1$, $y_0 < t - 2\alpha$ a $\alpha > 0$ splnenie týchto podmienok automaticky implikuje $t_1 \geq 0$, možno ho zlúčiť s prípadom $c < a_1$, $y_0 < T$, $\alpha = 0$ a spoločne klasifikovať nasledovným spôsobom. Ak $c < a_1$, $y_0 < T - 2\alpha$ a $t_1 \geq 0$ tak platí (2.18).

Ostáva už len analyzovať situáciu, keď $c > a_1$ a $y_0 < T$. V tomto prípade nemôže $\lambda_2(t)$ ležať nad $p(t)$. Nech s je ľubovolný bod, v ktorom by $\lambda_2(s) > p(s)$. Potom by v prípade, že $\lambda_2(t)$ nemá skok dole pre nejaké $u > s$ muselo byť $\lambda_2(t) > p(t)$ pre $t \in [s, T]$, čo je v spore s (2.6). To, že by existoval skokový bod je však tiež vylúčené, lebo by platilo $y(u) > 0$, keďže prinajmenšom na intervale $[s, u)$, by sme mali riadenie $u^*(t) = 1$. A to je spor, lebo skokový bod môže nastať len v bode, kde y poklesne na 0. Navyše vzhľadom na to, že $c > a_1$ množina bodov, kde $\lambda_2(t) = p(t)$ pozostáva len z izolovaných bodov, všade inde teda platí $\lambda_2(t) < p(t)$. Kvôli tomu môžeme v podstate povedať, že $u^*(t) = -1$, pokiaľ $y(t) > 0$. Keďže za y_0 časových jednotiek dôjde k vypredaniu celej počiatočnej zásoby, tak nám to podľa (2.10) implikuje $\lambda_2\left(y_0^-\right) = p(y_0)$. Tým máme $\lambda_2(t)$ na $[0, y_0)$ presne definované. V bode y_0 bude skok, ktorý zabezpečí splnenie koncovej podmienky. Celkovo teda aj pre tento prípad platí (2.19). □



Obr. 4: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.19), pre $c > a_1$

V predošlej Vete sme predpokladali, že $c \neq a_1$, pretože z hľadiska zápisu riešenia a jeho odvodzovania je vhodnejšie posudzovať tento prípad osobitne. Chýbajúcu časť riešenia pre prípad $c = a_1$ postihuje ďalšie tvrdenie

Veta 2.3.2. *Nech $a_1 = c > 0$, $a_2 \leq 0$. Potom riadenie spĺňajúce nutné podmienky Vety 1.0.1, pre úlohu (2.2), (2.14) má tvar*

1. $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in [y_0, T) \end{cases}$,
   pre $y_0 > \hat{t}$

2. $u^*(t) = \begin{cases} \text{neurčené na } [-1,1] & t \in [0, \alpha) \\ 0 & t \in [\alpha, T] \end{cases}$,
   pre $y_0 \leq \hat{t}$, kde $0 \leq \alpha \leq \hat{t}$ a zároveň platí $y(\alpha) = y_0 + \int_0^\alpha u(s)\, ds = 0$, $y(t) = y_0 + \int_0^t u(s)\, ds \geq 0, \forall t \geq \alpha$

Dôkaz: Na úvod ukážeme, že $\lambda_2(t) \leq p(t)$, $t \in [0, T]$. Ak by pre ľubovoľné $s \in [0, T]$ platilo $\lambda_2(s) > p(s)$, potom by z lineárnosti $\lambda_2(t)$, tvaru $p(t)$ a rovnosti $c = a_1$ (za predpokladu spojitosti $\lambda_2(t)$, platilo $\lambda_2(T^-) > p(T)$, čo by bol spor s koncovou podmienkou. Nespojitosť $\lambda_2(t)$ by mohla mať jedine charakter skoku nadol. Ten však nemôže nastať. Nech by bol taký skok v bode τ, potom by bolo $\lambda_2(t) > p(t)$, $t \in (\tau - \epsilon, \tau)$, pre nejaké $\epsilon > 0$, z čoho $u^*(t) = 1$ na tomto intervale a teda $y(\tau) > 0$ a to je spor s tým, že v τ môže nastať skok. Tým sme dokázali, že skutočne $\lambda_2(t) \leq p(t)$, $t \in [0, T]$. Rovnosť $\lambda_2(t) = p(t)$ môže nastať jedine na nejakom počiatočnom intervale $[0, \tau)$ (okrem tohoto intervalu už len v konečnom počte izolovaných bodov), kde τ je nejaký vstupný čas. Ak $y_0 \leq \hat{t}$, potom vieme, že $\lambda_2(t) = p(t)$, $t \in [0, y_0)$ (keby neplatila daná rovnosť, mali by sme $\lambda_2(t) < p(t)$, $t \in \left[0, \hat{t}\right]$, čiže $u^*(t) = -1$, $t \in [0, y_0)$, takže $t = y_0$ by bol vstupný čas, ale platilo by pre neho $\lambda_2\left(y_0^-\right) < p(y_0)$, čo by bol spor). Na intervale $[0, y_0)$ bude teda riadenie, ktoré nie je jednoznačne určené. Situácia $\lambda_2(t) = p(t)$ môže platiť aj pre $y_0 \leq t < \alpha \leq \hat{t}$, kde pre α platí, že $y(\alpha) = 0$ a v tomto bode máme skok $\lambda_2(t)$ nadol, lebo keby $\lambda_2(t)$ spojite pokračovala aj pre $t \geq \hat{t}$, porušili by sme $\lambda_2(t) \leq p(t)$. Spolu teda pre $t \in [0, \alpha)$ dostávame ľubovoľné riadenie zachovávajúce nezápornosť $y(t)$ a tiež také, že pre odozvu platí $y(\alpha) = 0$. Na zvyšnom intervale $[y_0, T]$ bude platiť $\lambda_2(t) < p(t)$. Ak máme $y_0 \leq \hat{t}$ dostávame riešenie

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} ct + p(0) & t \in [0, \alpha) \\ c(t - T) + p(T) & t \in [\alpha, T] \end{cases}, \quad u^*(t) = \begin{cases} \text{neurč. na } [-1,1] & t \in [0, \alpha) \\ 0 & t \in [\alpha, T) \end{cases},$$

pričom

$$0 \leq \alpha \leq \hat{t},\ y_0 + \int_0^\alpha u(s)\, ds = 0,\ y_0 + \int_0^t u(s)\, ds \geq 0, \forall t \geq \alpha \tag{2.20}$$

V prípade $y_0 > \hat{t}$ je situácia jednoduchšia, pretože vtedy nenastane úsek $\lambda_2(t) = p(t)$. Dôvod je ten, že aj keby sme volili $u^*(t) = -1$, $t \in \left[0, \hat{t}\right)$, tak by platilo $y(t) > 0$, $t \in \left[0, \hat{t}\right)$ a teda $\lambda_2(t)$ by musela byť spojitá na intervale $[0, \tau)$, kde $\tau > \hat{t}$ a to by znamenalo, že $\lambda_2(t)$ by na intervale $\left[\hat{t}, \tau\right)$ bola väčšia ako $p(t)$, čo by bol spor. Čiže $\lambda_2(t) < p(t)$, $t \in [0, T]$ (až na konečný počet bodov) a z toho už ľahko usúdime, že riešenie má tvar

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} c(t - y_0) + p(y_0) & t \in [0, y_0) \\ c(t - T) + p(T) & t \in [y_0, T] \end{cases}, \qquad u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in [y_0, T) \end{cases} \quad \square$$

Prejdime teraz na kvalitatívne odlišný prípad lomenej cenovej funkcie, keď $a_1 \leq 0$, $a_2 \geq 0$.

Veta 2.3.3. *Nech $a_1 \leq 0$, $a_2 \geq 0$, $c > 0$ a $c \neq a_2$. Označme $\bar{t} := \frac{b_1 - d}{c - a_1}$. Potom riadenie spĺňajúce nutné podmienky Vety 1.0.1, pre úlohu (2.2), (2.14) má tvar*

1. $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, \beta) \\ 0 & t \in [\beta, T] \end{cases},$
   pre $c > a_2$, kde $\beta := min\{y_0, T\}$

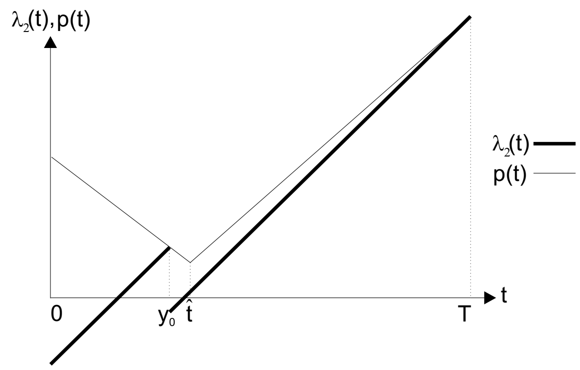
2. (a) $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in [y_0, \bar{t}) \\ 1 & t \in [\bar{t}, T] \end{cases},$
   pre $c < a_2$, $y_0 < \bar{t}$, $\bar{t} > 0$

   (b) $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, \gamma) \\ 1 & t \in [\gamma, T] \end{cases},$
   pre $c < a_2$, $y_0 \geq \gamma$, kde $\gamma := max\{0, \bar{t}\}$

Dôkaz: Nech $c > a_2$. Najprv dokážeme, že nie je možné, aby čo len v jednom bode bolo $\lambda_2(t) > p(t)$ a tiež pre $t \in [0, T)$ nesmie byť ani $\lambda_2(t) = p(t)$ s výnimkou bodu s, kedy $\lambda_2(s) = p(s)$ a zároveň $y(t) > 0$ pre $t < s$ a $y(s) = 0$. Predpokladajme, že by existoval taký bod $u < T$, v ktorom buď $\lambda_2(u) > p(u)$, alebo $\lambda_2(u) = p(u) \wedge y(u) > 0$. Potom by $\lambda(t)$ musela byť spojitá na intervale $[u, T]$ a keďže $c > a_2$, tak by sme v čase T dostali $\lambda_2(T^-) > p(T)$. To je však v spore s (2.6). Zatiaľ teda vieme, že $\lambda_2(t) < p(t)$ pre $t \in [0, T)$, s možnou výnimkou tzv. vstupného času, kde sa pripúšťa aj rovnosť . Takže na nejakom počiatočnom intervale (môže sa degenerovať na interval nulovej dĺžky ak $y_0 = 0$) je vzhľadom na (2.4) optimálne $u^*(t) = -1$. Toto trvá v prípade, že $y_0 \leq T$ až kým stav y nepoklesne na 0. K vyčerpaniu zásoby dôjde v čase $t = y_0$ a preto v tomto bode je podľa Vety 2.2.2 adjungovaná funkcia viazaná podmienkou $\lambda_2\left(y_0^-\right) = p(y_0)$. Vo zvyšnom časovom intervale $[y_0, T]$ musí mať polohu zaručujúcu splnenie koncovej podmienky (2.6). V bode y_0 bude musieť mať $\lambda_2(t)$ skok nadol, inak by sme mali $\lambda_2(t) > p(t)$ pre $t > y_0$, čo nie je možné, ako sme ukázali už na začiatku. Keďže nákup nie je možný (k tomu by muselo byť $\lambda_2(t) > p(t)$ na nejakom intervale) a $y(y_0) = 0$, tak ľahko vidieť, že pre $y_0 \leq t \leq T$, bude $y(t) = 0$. To znamená, že tomto intervale nebude už žiadny vstupný čas a preto $\lambda_2(t)$ bude na celom intervale spojitá. Spojitosť a podmienka (2.6) dávajú jednoznačnosť $\lambda_2(t)$ na $[y_0, T]$. Predošlé úvahy sa týkali len situácie, že $y_0 \leq T$. Ak je $y_0 > T$, tak bude platiť $y(t) > 0$ pre $t \in [0, T]$ a teda $\lambda_2(t)$ bude spojitá na celom intervale $[0, T]$. Jej presná poloha sa opäť určí z koncovej podmienky. Oba prípady $y_0 \leq T$ a $y_0 > T$ môžeme pre $c > a_2$ spoločne popísať nasledovným spôsobom.

$$\lambda(t) = \begin{cases} c(t-\beta) + p(\beta) & t \in [0, \beta) \\ c(t-T) + p(T) & t \in [\beta, T] \end{cases}, \quad u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, \beta) \\ 0 & t \in [\beta, T] \end{cases}, \tag{2.21}$$

kde $\beta := \min\{y_0, T\}$



Obr. 5: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.21), pre $\beta = y_0$

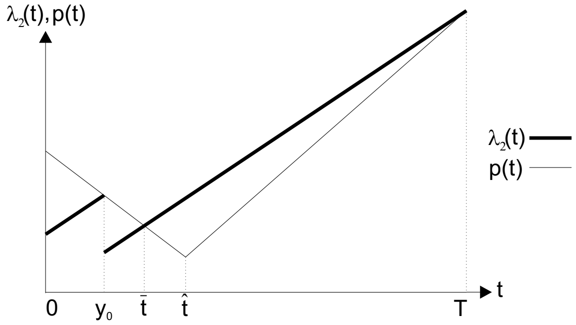
Nech $c < a_2$. Predpokladajme, že $\lambda_2(t)$ je spojitá na celom intervale $[0, T]$ a spĺňa koncovú podmienku. Podmienky, za ktorých je tento predpoklad korektný, stanovíme neskôr. Keďže $c < a_2$, tak $\lambda_2(t)$ nebude mať pre $t < T$ priesečník s rastúcou časťou cenovej funkcie a naopak určite bude mať práve jeden priesečník s klesajúcou časťou cenovej funkcie, keďže $c \neq a_1$. Označme tento priesečník $\bar{t}$. Jeho hodnotu dostaneme riešením rovnice

$$a_1\bar{t} + b_1 = c\bar{t} + d$$

$$\bar{t} = \frac{d - b_1}{a_1 - c}$$

Ak je $\bar{t} \leq 0$, tak $\lambda_2(t) > p(t)$, pre $t \in (0, T)$, teda máme že optimálne je $u^*(t) = 1$ na celom $[0, T]$, z čoho plynie $y(t) > 0$, $t \in (0, T)$, pre ľubovoľné $y_0 \geq 0$. To, že je $y(t)$ neustále kladné potvrdzuje náš predpoklad o spojitosti $\lambda_2(t)$. Čo ak $\bar{t} > 0$? Potom $\lambda_2(t) < p(t)$, pre $t \in [0, \bar{t})$, čo podľa (2.4) znamená $u^*(t) = -1$, pokiaľ je $y(t) > 0$. Predpokladanú spojitosť v tomto prípade zabezpečí podmienka $y_0 \geq \bar{t}$, lebo vtedy bude $y(t) > 0$, pre $t \in [0,T] - \{\bar{t}\}$. Ostáva ešte vyhodnotiť, čo ak $y_0 < \bar{t}$. Vtedy zrejme čas $t = y_0$ bude vstupným časom, čo si vyžaduje posun $\lambda_2(t)$ nahor na $[0, y_0)$, aby bolo možné splniť (2.6). Na zvyšnom intervale $[y_0, T]$ ostáva $\lambda_2(t)$ tak ako podľa predpokladu, lebo takto s riadením určeným na $[y_0, \bar{t}]$ podľa (2.5) a na $(\bar{t}, T]$ podľa (2.4), spĺňa podmienky maxima. Ak to zosumarizujeme, tak pre $y_0 < \bar{t}$, $\bar{t} > 0$ máme

$$u^*(t) = \begin{cases} c(t - y_0) + p(y_0) & t \in [0, y_0) \\ c(t - T) + p(T) & t \in [y_0, T] \end{cases}, \qquad u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in [y_0, \bar{t}] \\ 1 & t \in (\bar{t}, T] \end{cases} \tag{2.22}$$

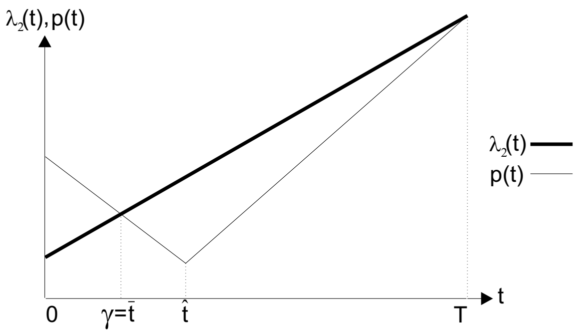


Obr. 6: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.22)

Zvyšné dva diskutované prípady v tejto časti môžeme zjednotiť pomocou zápisu, že ak $y_0 \geq \gamma$, tak platí

$$\lambda(t) = c(t - T) + p(T), \qquad u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, \gamma) \\ 1 & t \in [\gamma, T] \end{cases}, \qquad \text{kde } \gamma := \max\{0, \bar{t}\} \tag{2.23}$$

□



Obr. 7: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.23), pre $\gamma = \bar{t}$

Aj pre tento variant lomenej cenovej funkcie musíme ešte doplniť mozaiku riešenia o špeciálny prípad $c = a_2$.

Veta 2.3.4. *Nech $a_2 = c > 0$, $a_1 \leq 0$. Potom riadenie spĺňajúce nutné podmienky Vety 1.0.1, pre úlohu (2.2), (2.14) má tvar*

1. $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in \left[y_0, \hat{t}\right) \\ \text{neurčené na } [-1,1] & t \in \left[\hat{t}, T\right] \end{cases}$,

   pre $y_0 < \hat{t}$, pričom riadenie na intervale $\left[\hat{t}, T\right]$ musí spĺňať $y(t) = \int_{\hat{t}}^{t} u(s)\, ds \geq 0, \forall t \geq \hat{t}$

2. $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in \left[0, \hat{t}\right) \\ \text{neurčené na } [-1,1] & t \in \left[\hat{t}, T\right] \end{cases}$,

   pre $y_0 \geq \hat{t}$, pričom riadenie na intervale $\left[\hat{t}, T\right]$ musí spĺňať $y(t) = y_0 - \hat{t} + \int_{\hat{t}}^{t} u(s)\, ds \geq 0, \forall t \geq \hat{t}$

Dôkaz: Analogicky, ako v predošlom dôkaze, je možné aj v tomto prípade ukázať nerovnosť $\lambda_2(t) \leq p(t)$. Ďalej vychádzajme z požiadavky, že $\lambda_2(T^-) = p(T)$. Nakoľko vieme, že $\lambda_2(t) \leq p(t)$ a $c = a_2$ môžeme usúdiť, že $\lambda_2(t) = p(t)$, $t \in \left[\hat{t}, T\right]$, pretože $\lambda_2(s) < p(s)$ v nejakom bode by $s \in \left[\hat{t}, T\right]$ by implikovalo, že musí existovať bod, v ktorom má funkcia $\lambda_2(t)$ skok nahor, čo však princíp maxima neumožňuje. Na druhej strane, z toho, že $a_1 < c$ a $\lambda_2(t) \leq p(t)$, nám plynie, že až na konečný počet bodov bude platiť $\lambda_2(t) < p(t)$. To znamená, že pokiaľ budeme mať kladnú zásobu, budeme predávať. Keďže $\lambda_2(t) = p(t)$, $t \in \left[\hat{t}, T\right]$ nemáme z princípu maxima jednoznačne riadenie na tomto intervale. To znamená, že $u^*(t)$ môžeme voliť ľubovoľné z intervalu $[-1, 1]$. Avšak musíme dozrieť na to, aby sme dodržali nezápornosť $y(t)$. T.j. musí platiť

$$y\left(\hat{t}\right) + \int_{\hat{t}}^{t} u(s)\, ds \geq 0,\ t \in \left[\hat{t}, T\right] \tag{2.24}$$

Podľa toho, v akom vzťahu je y_0 k $\hat{t}$, rozlišujeme dva prípady. Ak $y_0 < \hat{t}$, potom v čase $t = y_0$ dôjde k poklesu zásoby y na nulu. Celkovo riešenie bude vyzerať nasledovne

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} c(t - y_0) + p(y_0) & t \in [0, y_0) \\ c(t - T) + p(T) & t \in [y_0, T] \end{cases},\ u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in \left[y_0, \hat{t}\right) \\ \text{neurč. na } [-1,1] & t \in \left[\hat{t}, T\right] \end{cases}$$

Naopak, ak $y_0 \geq \hat{t}$, potom musí platiť $y(t) > 0$, $t \in \left[0, \hat{t}\right)$ a preto dostávame riešenie

$$\lambda_2(t) = c(t - T) + p(T),\ t \in [0, T),\quad u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in \left[0, \hat{t}\right) \\ \text{neurč. na } [-1,1] & t \in \left[\hat{t}, T\right] \end{cases}$$

Navyše v oboch prípadoch musí byť splnená podmienka (2.24). $\square$

Poznámka 2.3.5. Vo Vete 2.3.2 a Vete 2.3.4 sa uvádza, že v istom časovom intervale je "$u^*(t)$ neurčené na $[-1,1]$". Je potrebné zdôrazniť, že to neznamená, že by pre daný časový interval princíp maxima neidentifikoval kandidáta na optimálne riadenie. Práve naopak. Kandidátom je každé $u(t) \in [-1,1]$, ktoré spĺňa podmienku prípustnosti (2.20) resp. (2.24). Navyše sa dá ľahko ukázať, že každé takéto riadenie je optimálne. Dôkaz urobíme pre riadenie $u^*(t)$, $t \in \left[\hat{t}, T\right]$ z Vety 2.3.4.

Označme symbolom $J(t)$ hodnotu účelovej funkcie v čase t. Zrejme $J(t) = x(t) + p(t)\,y(t)$. Ďalej zaveďme označenie $\hat{J} := J\left(\hat{t}\right)$. Deriváciou $J(t)$ podľa času dostávame

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \dot{x}(t) + \dot{p}(t)\,y(t) + p(t)\,\dot{y}(t) \tag{2.25}$$

Dosadením stavových rovníc z (2.2) do predošlého vzťahu (2.25) a využitím predpokladu $c = a_2$ dostaneme, že na intervale $\left[\hat{t}, T\right]$ platí

$$\frac{dJ(t)}{dt} = -cy(t) - p(t)\,u(t) + cy(t) + p(t)\,u(t) = 0 \;\Rightarrow\; J(t) = \hat{J}, \quad t \in \left[\hat{t}, T\right]$$

To znamená, že účelová funkcia $J(t)$ bez ohľadu na voľbu riadenia $u(t)$ na $\left[\hat{t}, T\right]$, nadobúda na tomto intervale zakaždým tú istú konštantnú hodnotu. Z toho ale vyplýva, že všetky prípustné riadenia (riadenia spĺňajúce (2.24)) sú zároveň aj optimálne.

Anologický popstup aj závery by sme mali aj v prípade neurčeného riadenia z Vety 2.3.2.

2.4 Obchodovanie s komoditami v prípade skokovej cenovej funkcie

V tejto podkapitole budeme opäť skúmať komoditnú úlohu (2.2), avšak s odlišným typom cenovej funkcie. Budúca cena je v tomto prípade reprezentovaná jednoduchou skokovou funkciou, ktorú si môžeme matematicky popísať nasledovným spôsobom.

$$p(t) = \begin{cases} k_1 & \text{pre } 0 \le t \le \hat{t}, \\ k_2 & \text{pre } \hat{t} < t \le T \end{cases} \tag{2.26}$$

Od parametrov k_1, k_2 budeme vyžadovať, aby $0 \le k_1 < k_2$ a tiež predpokladáme $0 < \hat{t} < T$. Riešenie úlohy je sformulované v nasledovnej Vete.

Veta 2.4.1. *Nech $c > 0$. Označme $t_1 := d - \frac{l}{2c}$ a $t_2 := d + \frac{l}{2c}$. Potom riadenie spĺňajúce nutné podmienky Vety 1.0.1, pre úlohu (2.2), (2.26) má tvar*

1. *Ak* $t_1 \geq 0$ *a* $t_2 \leq T$

   (a) $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in [y_0, t_1) \\ 1 & t \in [t_1, \hat{t}] \\ -1 & t \in (\hat{t}, t_2) \\ 0 & t \in [t_2, T] \end{cases},$

   pre $y_0 \leq t_1$

   (b) $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, t_1') \\ 1 & t \in [t_1', \hat{t}] \\ -1 & t \in (\hat{t}, t_2') \\ 0 & t \in [t_2', T] \end{cases},$

   pre $T - \frac{l}{c} \leq \hat{t}$, $t_1 < y_0 < 3T - 2\left(\hat{t} + \frac{l}{c}\right)$, *kde* $t_1' = \frac{1}{3}\left(y_0 + 2\hat{t} - \frac{l}{c}\right)$, $t_2' = \frac{1}{3}\left(y_0 + 2\hat{t} + 2\frac{l}{c}\right)$

   (c) $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, \bar{t}) \\ 1 & t \in [\bar{t}, \hat{t}] \\ -1 & t \in (\hat{t}, T] \end{cases},$

   pre $T - \frac{l}{c} \leq \hat{t}$, $y_0 \geq 3T - 2\left(\hat{t} + \frac{l}{c}\right)$, *alebo* $T - \frac{l}{c} > \hat{t}$, $t_1 < y_0 < \hat{t} + \frac{l}{c}$, *kde* $\bar{t} = T - \frac{l}{c}$

   (d) $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in [y_0, T] \end{cases},$

   pre $T - \frac{l}{c} > \hat{t}$, $\hat{t} + \frac{l}{c} \leq y_0 < T$

   (e) $u^*(t) = -1,\ t \in [0, T]$,

   pre $T - \frac{l}{c} > \hat{t}$, $y_0 \geq T$

   (f) $u^*(t) = 0,\ t \in [0, T]$,

   pre $y_0 = 0$, $\frac{l}{c} < T - \hat{t}$

2. *Ak* $t_1 < 0$ *a* $t_2 \leq T$

   (a) $u^*(t) \begin{cases} -1 & t \in [0, \gamma) \\ 1 & t \in [\gamma, \hat{t}] \\ -1 & t \in (\hat{t}, T] \end{cases},$

   pre $y_0 > T - 2\hat{t} + 2\gamma$, *kde* $\gamma := \begin{cases} 0 & \bar{t} < 0 \\ \bar{t} & 0 \leq \bar{t} < \hat{t} \\ \hat{t} & \bar{t} \geq \hat{t} \end{cases}$, $\bar{t} = T - \frac{l}{c}$

   (b) $u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \hat{t}] \\ -1 & t \in (\hat{t}, t_2') \\ 0 & t \in [t_2', T] \end{cases},$

   pre $y_0 \leq T - 2\hat{t} + 2\gamma$, $T - \frac{l}{c} \leq 0$, *alebo* $y_0 \leq T - 2\hat{t} + 2\gamma$, $T - \frac{l}{c} > 0$,

$y_0 \leq \frac{l}{c} - 2\hat{t}$, *kde* $t_2^{'} = 2\hat{t} + y_0$

(c) $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in \left[0, t_1^{'}\right) \\ 1 & t \in \left[t_1^{'}, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, t_2^{'}\right) \\ 0 & t \in \left[t_2^{'}, T\right] \end{cases}$,

pre $y_0 \leq T - 2\hat{t} + 2\gamma$, $T - \frac{l}{c} > 0$, $\frac{l}{c} - 2\hat{t} < y_0 < \hat{t} + \frac{l}{c}$, *kde* $t_1^{'} = \frac{1}{3}\left(y_0 + 2\hat{t} - \frac{l}{c}\right)$, $t_2^{'} = \frac{l}{c} + t_1^{'}$

(d) $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in [y_0, T] \end{cases}$,

pre $y_0 \leq T - 2\hat{t} + 2\gamma$, $T - \frac{l}{c} > 0$, $y_0 \geq \hat{t} + \frac{l}{c}$

(e) $u^*(t) = 0$, $t \in [0, T]$,

pre $y_0 = 0$, $\frac{l}{c} < T - \hat{t}$

3. *Ak* $t_1 \geq 0$ *a* $t_2 > T$

(a) $u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[0, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, T\right] \end{cases}$,

pre $T - \frac{l}{c} < 0$

(b) $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in \left[0, t_1^{'}\right) \\ 1 & t \in \left[t_1^{'}, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, T\right] \end{cases}$,

pre $y_0 \geq T - \frac{l}{c} \geq 0$, *kde* $t_1^{'} = T - \frac{l}{c}$

(c) $u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in \left[y_0, t_1^{'}\right) \\ 1 & t \in \left(t_1^{'}, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, T\right] \end{cases}$,

pre $0 \leq y_0 < T - \frac{l}{c}$

4. *Ak* $t_1 < 0$ *a* $t_2 > T$

(a) $u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[0, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, T\right] \end{cases}$,

pre $y_0 + \hat{t} \geq T - \hat{t}$

(b) $u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[0, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, 2\hat{t} + y_0\right) \\ 0 & t \in \left[2\hat{t} + y_0, T\right] \end{cases}$,

pre $y_0 + \hat{t} < T - \hat{t}$

Dôkaz: Na začiatok analýzy tohoto problému predpokladajme tzv. "základný prípad" s počiatočnou podmienkou $y_0 = 0$. Toto je výhodné ako sa neskôr ukáže z toho hľadiska, že pomocou tohoto "základného prípadu" sa podarí identifikovať 4 hlavné kvalitatívne podprípady vzájomných vzťahov jednotlivých parametrov úlohy. Neskôr každý z týchto štyroch podprípadov budeme podrobne samostatne analyzovať a hlbšie členiť, až kým nezískame úplné riešenie úlohy.

Poďme teda späť k "základnému prípadu" a pokúsme sa pre neho špecifikovať ako musí vyzerať $\lambda_2(t)$ spĺňajúce nutné podmienky maxima. Pripomíname, že $\lambda_2(t)$ je rastúca lineárna funkcia, ktorá môže mať vo vstupnom čase skok nadol. Predpokladajme, že oba časové intervaly $\left[0, \hat{t}\right]$ aj $\left(\hat{t}, T\right]$ sú dostatočne veľké. Pojmom "dostatočne veľké" myslíme, že $\frac{l}{c} < \hat{t} \wedge \frac{l}{c} < T - \hat{t}$. Začnime našu úvahu o tvare funkcie $\lambda_2(t)$ predpokadom, že $\lambda_2(0) > k_1$. Potom vďaka tomu, že úsek $\left[0, \hat{t}\right]$ je dostatočne veľký, by platilo $\lambda_2\left(\hat{t}\right) > k_2$ (lebo $\lambda_2(t)$ by musela byť spojitá na tomto úseku). To by znamenalo, že aj na celom $\left(\hat{t}, T\right]$ by $\lambda_2(t)$ spojite pokračovala, bez možnosti skoku nadol, keďže optimálnym riadením by podľa (2.4) bolo $u^*(t) = 1$ (k tomu aby nastal skok by muselo predchádzať $u^*(t) = -1$). Z toho vyplýva, že by tiež platilo $\lambda_2(T^-) > p(T)$ a to by bol spor s (2.6). Preto je potrebné posunúť $\lambda_2(t)$ nadol, a to minimálne tak, aby $\lambda_2\left(\hat{t}\right) < k_2$. Zároveň by takýto posun znamenal, že $\lambda_2(0) < k_1$ (opäť s ohľadom na to, že $\frac{l}{c} < \hat{t}$ a nevyhnutnú spojitosť $\lambda_2(t)$ na $\left[0, \hat{t}\right]$). Ďalej ukážeme, že bude existovať bod, označme ho t_1, v ktorom $\lambda_2(t_1) = k_1$. Vzhľadom na to, čo sme vyvodili doteraz, stačí vlastne ukázať, že nemôže nastať $\lambda_2(t) < p(t)$, pre $t \in \left[0, \hat{t}\right)$. Uvažujme najmenší posun $\lambda_2(t)$ taký, že $\lambda_2(t) < p(t)$, $t \in \left[0, \hat{t}\right)$, t.j $\lambda_2(t) = c\left(t - \hat{t}\right) + k_1$. Z predpokladu, že interval $\left(\hat{t}, T\right]$ je dostatočne veľký vyplýva, že $t_2 < T$, kde t_2 je bod, v ktorom $\lambda_2(t_2) = k_2$. Keďže $\lambda_2(t)$ musí byť takto spojitá na celom intervale $[0, T]$ (vzhľadom na to, že riadením na intervale $[0, t_2)$, spĺňajúcim princíp maxima by bolo $u(t) = 0$ a teda nemohol by existovať vstupný ani kontaktný čas, v ktorých môže nastať nespojitosť), znamenalo by to , že $\lambda_2(T^-) > p(T)$, čo by bol spor.

Podobne by sme došli k sporu, aj keby sme uvažovali ľubovoľný väčší posun nadol ako ten, ktorý sme diskutovali. Jedinou výnimkou by bol druhý hraničný posun $\lambda_2(t) = c(t - T) + k_2$, pri ktorom by spolu s riadením $u(t) = 0$ boli splnené všetky nutné podmienky princípu maxima. Práve v prípade, keď $y_0 = 0$ a $\frac{l}{c} < T - \hat{t}$ dochádza k patologickej situácii, že existujú dve riešenia spĺňajúce nutné podmienky maxima Vety 1.0.1 (existencia druhého riešenia sa ukáže až v neskoršej časti dôkazu). Už na prvý pohľad je zrejmé, že toto nulové riadenie nemôže byť skutočne aj optimálne. Potvrdenie tejto domnienky sa jednoznačne preukáže vzájomným porovnaním hodnôt účelovej funkcie, ktoré ponúkame za dôkazom tejto Vety. Táto pozoruhodná situácia (dve riadenia spĺňajúce nutné podmienky) nevyplýva zrejme z povahy úlohy ako takej, ale je dôsledkom voľnejšej formulácie nutných podmienok Vety 1.0.1. Pretože ak si zoberieme na pomoc "silnejšiu teóriu", reprezentovanú Vetou 1.0.3, a testujeme ňou obe riadenia, potom zistíme, že v tomto prípade už nulové riadenie nespĺňa nutné podmienky.

Vráťme sa však teraz naspäť k pôvodným úvahám. Už vieme, že naozaj bude existovať bod t_1, v ktorom $\lambda_2(t_1) = k_1$. Na intervale $\left(t_1, \hat{t}\right]$ bude teda $\lambda_2(t) > p(t)$ a preto podľa (2.4) tu bude optimálnym riadením $u^*(t) = 1$. V bode $\hat{t}$ bude $y\left(\hat{t}\right) > 0$ a preto bude musieť $\lambda_2(t)$ spojite nadväzovať minimálne $y\left(\hat{t}\right) = \hat{t} - t_1$ časových jednotiek za časom $\hat{t}$ (aspoň toľko času je potrebných na to, aby y poklesol na 0 a mohol nastať skok v $\lambda_2(t)$). Na $\left[0, \hat{t} + \left(\hat{t} - t_1\right)\right)$ môžeme $\lambda_2(t)$ analyticky vyjadriť nasledovne.

$$\lambda_2(t) = c(t - t_1) + k_1, \qquad 0 \leq t < 2\hat{t} - t_1$$

Označme teraz t_2 prvý časový okamih spĺňajúci $(\lambda_2(t_2) = k_2 \wedge y(t_2) \geq 0) \vee (y(t_2) = 0 \wedge \lambda_2(t_2) \leq k_2)$. Vďaka tomu, že požadujeme $\lambda_2\left(\hat{t}\right) < k_2$, bod t_2 bude určite existovať. Teraz chceme dokázať, že v skutočnosti musí v t_2 platiť

$$\lambda_2\left(t_2^-\right) = k_2 \wedge y(t_2) = 0 \tag{2.27}$$

Sporom. Nech by bolo t_2 také, že $\lambda_2\left(t_2^-\right) = k_2 \wedge y(t_2) > 0$. Potom by však $\lambda_2(t) > k_2$ pre $t > t_2$, pretože na tomto intervale by $u^*(t) = 1$ a $y(t) > 0$. A to je spor s (2.10). Analogicky nech by t_2 bolo také, že $\lambda_2\left(t_2^-\right) < k_2 \wedge y(t_2) = 0$. Z toho však okamžite plynie spor (2.6), lebo t_2 by bol v takom prípade vstupný/kontaktný čas. Takže ostáva jediná možnosť, že platí (2.27). Aby však mohlo skutočne nastať (2.27), musí byť dĺžka intervalu $\left(t_1, \hat{t}\right]$ rovnaká ako dĺžka intervalu $\left(\hat{t}, t_2\right)$. Jednoznačné vyjadrenie t_1, t_2 môžeme dostať napríklad riešením sústavy

$$\begin{aligned} \lambda_2(t_2) &= k_2, \\ y(t_2) &= 0, \end{aligned}$$

čo po dosadení príslušných hodnôt za $\lambda_2(t_2)$ a $y(t_2)$ vedie na systém

$$\begin{aligned} c(t_2 - t_1) + k_1 &= k_2, \\ \hat{t} - t_1 - \left(t_2 - \hat{t}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Vyriešením (2.28) a zavedením označenia $l = k_2 - k_1$ dostávame

$$\begin{aligned} t_1 &= d - \frac{l}{2c}, \\ t_2 &= d + \frac{l}{2c} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Vďaka nášmu doterajšiemu predpokladu o tom, že $\hat{t}$ aj $T - \hat{t}$ sú dostatočne veľké, zrejme t_1 a t_2 ležia v intervale $[0, T]$. Vo všeobecnosti to však už nemusí byť pravda a jeden z časových okamihov v (2.29), alebo aj obidva môžu ležať mimo intervalu $[0, T]$. A práve na základe tohoto prichádzame k rozčleneniu úlohy na 4 hlavné vetvy.

1. podprípad ($t_1 \geq 0$, $t_2 \leq T$):
Je to situácia, kedy je pre $y_0 = 0$ celá predchádzajúca uvaha správna a pre $t \in [0, t_2)$ platí, že

$$\lambda_2(t) = c(t - t_1) + k_1 \tag{2.30}$$

V bode t_2 bude musieť byť skok nadol a to taký, aby $\lambda_2(T^-) = p(T)$. Čiže pre $t \in [t_2, T]$ dostávame

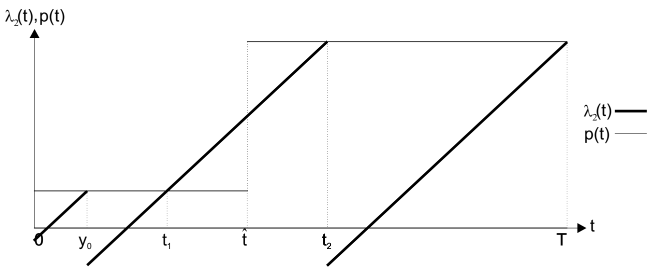
$$\lambda_2(t) = c(t - T) + k_2 \tag{2.31}$$

Čo sa bude diať s $\lambda_2(t)$ ak počiatočný stav bude $y_0 > 0$? Na to, aby zostalo v platnosti (2.30), (2.31) minimálne na $(t_1, T]$ musí platiť $y(t_1) = 0$. Toto možno zabezpečiť v prípade, že $y_0 \leq t_1$ tak, že do času t_1 odpredáme všetko počiatočné množstvo y_0. To zodpovedá nasledovnému umiestneniu $\lambda_2(t)$ na intervale $[0, y_0)$

$$\lambda_2(t) = c(t - y_0) + k_1 \tag{2.32}$$

V bode y_0 bude skok funkcie $\lambda_2(t)$ a pre $t > y_0$ bude platiť pôvodný tvar (2.30), (2.31). Ak je teda $y_0 \leq t_1$, tak budeme mať

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} c(t - y_0) + k_1 & t \in [0, y_0) \\ c(t - t_1) + k_1 & t \in [y_0, t_2) \\ c(t - T) + k_2 & t \in [t_2, T] \end{cases}, \qquad u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in [y_0, t_1) \\ 1 & t \in \left[t_1, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, t_2\right) \\ 0 & t \in [t_2, T] \end{cases} \tag{2.33}$$



Obr. 8: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.33)

Majme teraz $y_0 > t_1$. Povedzme, že by aj tak platilo (2.30), (2.31), pre $t \in (t_1, T]$. Potom na $[0, t_1]$ by muselo byť $\lambda_2(t)$ spojitím predĺžením (2.30), pretože určite by muselo byť $y(t) > 0$ na danom intervale. Z toho, že $y(t_1) > 0$ tiež plynie $y(t_2) > 0 \wedge \lambda_2(t_2) = k_2$, čo by viedlo k sporu, ako už bolo ukázané v prvej časti dôkazu. Aby sme opäť v nejakom bode, označme ho $t_2' < T$, dosiahli $\lambda_2(t_2'^-) = k_2 \wedge y\left(t_2'\right) = 0$

musíme posunúť $\lambda_2(t)$ doprava, čím predĺžime obe periódy predaja a skrátime periódu nákupu. Nech t_1' je nový bod, v ktorom $\lambda_2(t_1'^-) = k_1$. Presnú hodnotu t_1' získame z rovnice

$$y_0 - t_1' + (\hat{t} - t_1') - \left(\frac{l}{c} + t_1' - \hat{t}\right) = 0$$

$$y_0 - 3t_1' + 2\hat{t} - \frac{l}{c} = 0$$

$$t_1' = \frac{1}{3}\left(y_0 + 2\hat{t} - \frac{l}{c}\right)$$

Zrejme čím väčšie y_0, tým väčší bude posun. Avšak sú tu isté medze. Aby bolo všetko korektné, musíme dávať pozor na to, aby

$$t_2' = \frac{l}{c} + t_1' \leq T, \tag{2.34}$$

$$t_1' < \hat{t} \tag{2.35}$$

Najprv predpokladajme, že konfigurácia parametrov je taká, že aj keby bola $\lambda_2(t)$ v krajnej polohe, t.j. $\lambda_2(t) = c(t - T) + k_2$, $t \in [0, T]$, tak existuje jej priesečník s tou časťou cenovej funkcie, kde $p(t) = k_1$. Označme tento priesečník $\bar{t}$ a nájdime jeho hodnotu

$$c(\bar{t} - T) + k_1 = k_2$$

$$\bar{t} = T - \frac{l}{c}$$

Aby $\bar{t}$ skutočne existoval musíme požadovať

$$T - \frac{l}{c} \leq \hat{t} \tag{2.36}$$

Pre parametre úlohy spĺňajúce (2.36) môžeme zanedbať (2.35), pretože v takom prípade bude automaticky splnenie (2.34) implikovať aj platnosť (2.35). Nás zaujíma, aké je za predpokladu (2.36) hraničné $\bar{y_0}$, pre ktoré $t_2' = T$

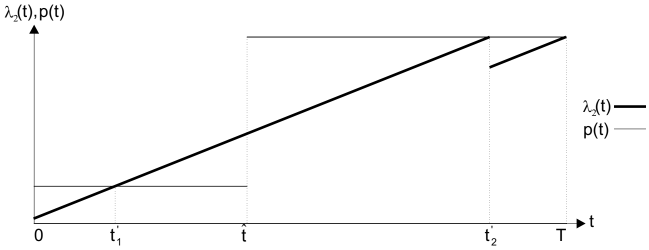
$$t_2' = t_1' + \frac{l}{c} = T$$

$$\frac{1}{3}\left(\bar{y_0} + 2\hat{t} - \frac{l}{c}\right) + \frac{l}{c} = T$$

$$\bar{y_0} = 3T - 2\left(\hat{t} + \frac{l}{c}\right)$$

Identifikovali sme teda ďalšie dva podprípady. Ak $T - \frac{l}{c} \leq \hat{t}$, $t_1 < y_0 < \bar{y_0}$, máme

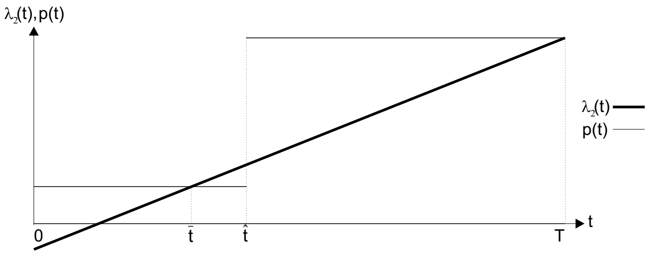
$$\lambda_2(t) = \begin{cases} c\left(t - t_1'\right) + k_1 & t \in \left[0, t_2'\right) \\ c\left(t - T\right) + k_2 & t \in \left[t_2', T\right] \end{cases}, \qquad u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in \left[0, t_1'\right) \\ 1 & t \in \left[t_1', \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, t_2'\right) \\ 0 & t \in \left[t_2', T\right] \end{cases} \tag{2.37}$$



Obr. 9: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.37)

A ak platí $T - \frac{l}{c} \leq \hat{t}$, ale $y_0 \geq \bar{y_0}$, potom

$$\lambda_2(t) = c(t - T) + k_2,\ t \in [0, T], \qquad u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, \bar{t}) \\ 1 & t \in \left[\bar{t}, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, T\right] \end{cases} \tag{2.38}$$



Obr. 10: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.38)

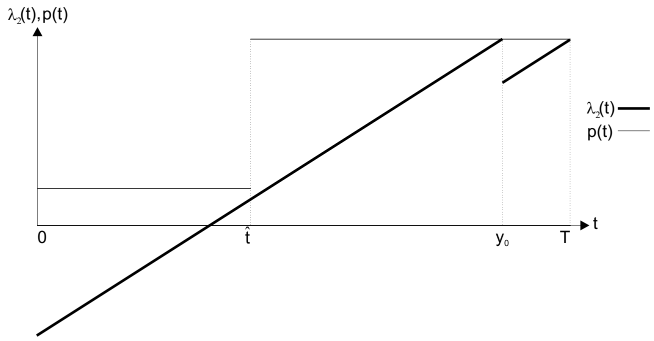
V nasledujúcej časti vyriešime situáciu, keď $T - \frac{l}{c} > \hat{t}$. Vtedy musíme sledovať, či platí (2.35). Ekvivalentná k tejto požiadavke je voľba $y_0 < \tilde{y_0}$, kde $\tilde{y_0}$ zodpovedá takému posunu, že $t_1' = \hat{t}$.

$$\frac{1}{3}\tilde{y_0} + 2\hat{t} - \frac{l}{c} = \hat{t}$$

$$\tilde{y_0} = \hat{t} + \frac{l}{c}$$

Teda ak máme $T - \frac{l}{c} > \hat{t}$ a zároveň $t_1 < y_0 < \tilde{y_0}$, tak riešením je opäť (2.37). Pre $y_0 \geq \tilde{y_0}$ znovu budeme musieť posunúť $\lambda_2(t)$ vpravo, tak aby $y\left(t_2'\right) = 0$. Avšak takýto posun bude mať za následok, že $\lambda_2(t)$ bude ležať pod cenovou funkciou $p(t)$, čím zanikne fáza riadenia $u^*(t) = 1$. Ak má existovať záverečná fáza, počas ktorej $u^*(t) = 0$, pre $t \in \left[t_2', T\right]$, tak musí platiť $y_0 < T$. Nech teda $T - \frac{l}{c} > \hat{t}$ a $\tilde{y_0} \leq y_0 < T$, potom

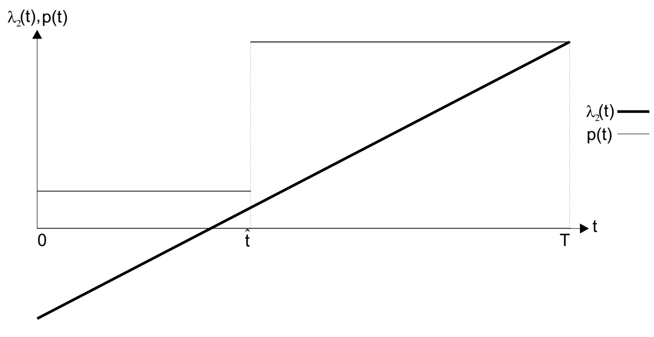
$$\lambda_2(t) = \begin{cases} c(t - y_0) + k_2 & t \in [0, y_0) \\ c(t - T) + k_2 & t \in [y_0, T] \end{cases}, \qquad u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, y_0) \\ 0 & t \in [y_0, T] \end{cases} \tag{2.39}$$



Obr. 11: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.39)

No a napokon pre $T - \frac{l}{c} > \hat{t}$ a $y_0 \geq T$

$$\lambda_2(t) = c(t - T) + k_2,\ t \in [0, T], \qquad u^*(t) = -1,\ t \in [0, T] \tag{2.40}$$



Obr. 12: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.40)

2. podprípad ($t_1 < 0$, $t_2 \leq T$):

Začnime tentokrát takpovediac z opačného konca. Povedzme nech $\lambda_2(t)$ sa nachádza v krajnej polohe, čiže

$$\lambda_2(t) = c(t - T) + k_2,\ t \in [0, T] \tag{2.41}$$

To je korektné vtedy ak $y(T) > 0$, teda ak

$$y_0 - \gamma + \left(\hat{t} - \gamma\right) - \left(T - \hat{t}\right) > 0, \text{ kde } \quad \gamma := \begin{cases} 0 & \bar{t} < 0 \\ \bar{t} & 0 \leq \bar{t} < \hat{t} \\ \hat{t} & \bar{t} \geq \hat{t} \end{cases}, \tag{2.42}$$

pričom $\bar{t} = T - \frac{l}{c}$ je riešením $\lambda_2(\bar{t}) = k_1$. V prípade, že $\gamma = \bar{t}$ je nevyhnutné k tomu, aby $\lambda_2(t)$ mohla mať uvedený tvar (2.41), aby

$$y_0 \geq \bar{t}, \tag{2.43}$$

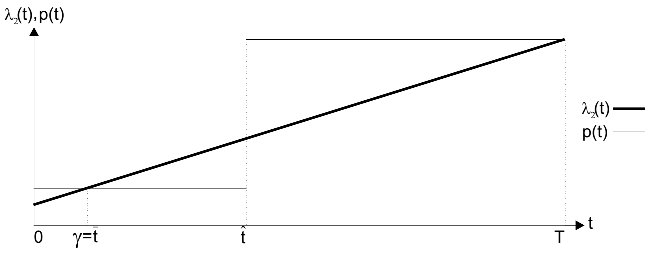
inak by existoval bod $\tilde{t} < \bar{t}$, taký že $y\left(\tilde{t}\right) = 0 \wedge y(t) > 0, t < \tilde{t} \wedge \lambda_2\left(\tilde{t}^-\right) < k_1$, čo by bol spor s (2.10). Ľahko však ukážeme, že (2.42)⇒(2.43).

$$y_0 - \bar{t} + \left(\hat{t} - \bar{t}\right) - \left(T - \hat{t}\right) > 0$$

$$y_0 > \bar{t} + \underbrace{\left[\underbrace{\left(T - 2\hat{t}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\bar{t}}_{\geq 0}\right]}_{\geq 0} \quad \Rightarrow \quad y_0 > \bar{t}$$

Naozaj ak máme $y_0 > T - 2\hat{t} + 2\gamma$, potom je riešením

$$\lambda_2(t) = c(t - T) + k_2, \ t \in [0, T], \quad u^*(t) \begin{cases} -1 & t \in [0, \gamma) \\ 1 & t \in \left[\gamma, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, T\right] \end{cases} \tag{2.44}$$



Obr. 13: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.44), pre $\gamma = \bar{t}$

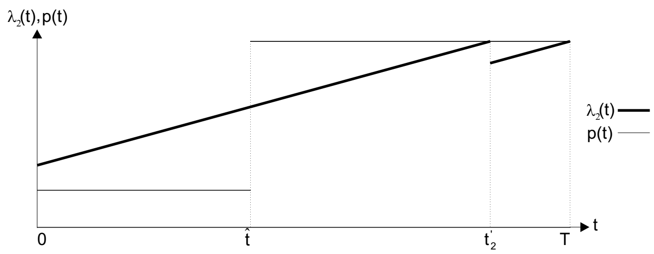
V celej zvyšnej časti tohoto podprípadu sa budeme zaoberať už len počiatočnými hodnotami $y_0 \leq T - 2\hat{t} + 2\gamma$. Predpokladajme, že $y_0 = 0$. Z toho, že $t_1 < 0$ vyplýva, že nemôže byť $\lambda_2(t) = c(t - t_1) + k_1$, pre $t \in [0, t_2)$, tak ako sme uvažovali v úvode dôkazu, pretože by existoval bod $\tilde{t} < t_2$, pre ktorý by $y\left(\tilde{t}\right) = 0 \wedge y(t) > 0, t < \tilde{t} \wedge \lambda_2\left(\tilde{t}^-\right) < k_2$ a to by viedlo k sporu s (2.10). Aby sme opäť obnovili symetriu (interval nakupovania=interval predávania) posunieme $\lambda_2(t)$ vľavo tak, aby nový priesečník s $p(t) = k_2$ bol $t_2' = 2\hat{t}$, čiže $\lambda_2(t) = c\left(t - 2\hat{t}\right) + k_2$, $t \in \left[0, 2\hat{t}\right)$. Na $\left[2\hat{t}, T\right]$ by už tradične muselo byť $\lambda_2(t) = c(t - T) + k_2$. Čo ak necháme postupne y_0 zväčšovať? Zrejme bude potrebné $\lambda_2(t)$ posunúť vpravo o y_0 jednotiek, tak aby $t_2' = 2\hat{t} + y_0$. Aby však takto posunutá $\lambda_2(t)$ spĺňala všetky podmienky maxima, musíme kontrolovať, aby aj po posune

$$\lambda_2(t) \geq k_1, \ t \in \left[0, \hat{t}\right] \tag{2.45}$$

V situácii, keď $\gamma = 0$, t.j. $T - \frac{l}{c} \leq 0$, bude pre $y_0 \leq T - 2\hat{t}$ zaručené jednak $t_2' \leq T$ a tiež (2.45). Teda budeme mať

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} c\left(t - t_2'\right) + k_2 & t \in \left[0, t_2'\right) \\ c(t - T) + k_2 & t \in \left[t_2', T\right] \end{cases}, \quad u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[0, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, t_2'\right) \\ 0 & t \in \left[t_2', T\right] \end{cases}, \tag{2.46}$$

kde $t_2' = 2\hat{t} + y_0$



Obr. 14: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.46)

Ak však nastane $T - \frac{l}{c} > 0$, tak na to, aby malo riešenie charakter (2.46), môže počiatočný stav nadobudnúť maximálne istú hraničnú hodnotu $\tilde{y_0}$, ktorá zabezpečí platnosť (2.45). Podmienka (2.45) je vzhľadom na rastúcosť $\lambda_2(t)$ ekvivalentná s podmienkou $\lambda_2(0) \geq k_1$, čiže $\tilde{y_0}$ určíme nasledovne

$$\lambda_2(0) = k_1$$

$$c\left(-\left(2\hat{t} + \tilde{y_0}\right)\right) + k_2 = k_1$$

$$\tilde{y_0} = \frac{l}{c} - 2\hat{t}$$

Taktiež pre $y_0 < \tilde{y_0}$ bude určite splnené $t_2' = 2\hat{t} + y_0 < T$, pretože

$$2\hat{t} + y_0 < 2\hat{t} + \tilde{y_0} = 2\hat{t} + \frac{l}{c} - 2\hat{t} = \frac{l}{c} < T$$

Ak teda platí $T - \frac{l}{c} > 0$ a $y_0 \le \tilde{y_0}$, tak optimálnym riešením je (2.46). Pre $T - \frac{l}{c} > 0$ a zároveň $y_0 > \tilde{y_0}$ posunieme $\lambda_2(t)$ ešte viac vpravo, čím sa vytvorí úvodná fáza $\left[0, t_1^{'}\right]$ s $u^*(t) = -1$, kde $t_1^{'}$ je riešením $\lambda_2\left(t_1^{'}\right) = k_1$. Hodnotu $t_1^{'}$ vypočítame z podmienky $y\left(t_2^{'}\right) = 0$, pričom $t_2^{'}$ je zase riešením $\lambda_2\left(t_2^{'}\right) = k_2$

$$y\left(t_2^{'}\right) = 0$$

$$y\left(\tfrac{l}{c} + t_1^{'}\right) = 0$$

$$y_0 - t_1^{'} + \left(\hat{t} - t_1^{'}\right) - \left(\frac{l}{c} - \hat{t} + t_1^{'}\right) = 0$$

$$t_1^{'} = \frac{1}{3}\left(y_0 + 2\hat{t} - \frac{l}{c}\right) = \frac{1}{3}\left(y_0 - \tilde{y_0}\right) \tag{2.47}$$

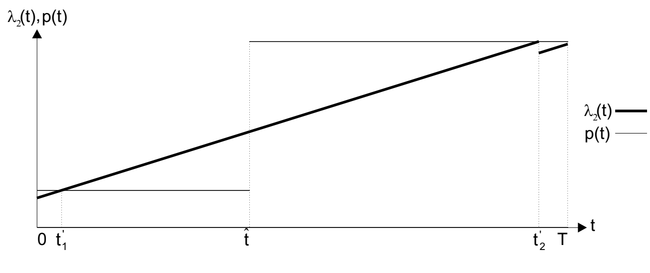
To však ešte nie je všetko, lebo pri istej veľkosti posunu, pre $\breve{y_0}$, môže nastať situácia, že $\lambda_2(t) < p(t)$, pre $t \in \left[0, t_2^{''}\right)$, kde $t_2^{''}$ je riešením $\lambda_2(t) = k_2$. Pre $t < t_2^{''}$ sa optimálne riadenie mení na $u^*(t) = -1$. Preto budeme mať $t_2^{''} = y_0$. Hodnotu $\breve{y_0}$ nájdeme tak,že položíme $t_1^{'} = \hat{t}$, pričom za $t_1^{'}$ dosadíme (2.47)

$$\frac{1}{3}\left(\breve{y_0} + 2\hat{t} - \frac{l}{c}\right) = \hat{t}$$

$$\breve{y_0} = \hat{t} + \frac{l}{c}$$

Môžeme sumarizovať. Pre $T - \frac{l}{c} > 0$, $\tilde{y_0} < y_0 < \breve{y_0}$, je optimálnym riešením

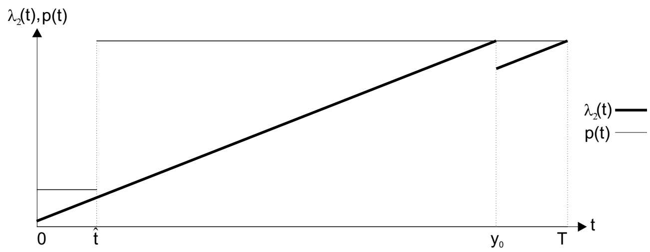
$$\lambda_2(t) = \begin{cases} c\left(t - t_2^{'}\right) + k_2 & t \in \left[0, t_2^{'}\right) \\ c(t - T) + k_2 & t \in \left[t_2^{'}, T\right] \end{cases}, \qquad u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in \left[0, t_1^{'}\right) \\ 1 & t \in \left[t_1^{'}, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, t_2^{'}\right) \\ 0 & t \in \left[t_2^{'}, T\right] \end{cases} \tag{2.48}$$



Obr. 15: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.48)

Napokon pre $T-\frac{l}{c}>0$ a $y_0 \geq \breve{y}_0$ máme

$$\lambda_2(t)=\begin{cases} c(t-y_0)+k_2 & t\in[0,y_0) \\ c(t-T)+k_2 & t\in[y_0,T] \end{cases}, \qquad u^*(t)=\begin{cases} -1 & t\in[0,y_0) \\ 0 & t\in[y_0,T] \end{cases} \tag{2.49}$$

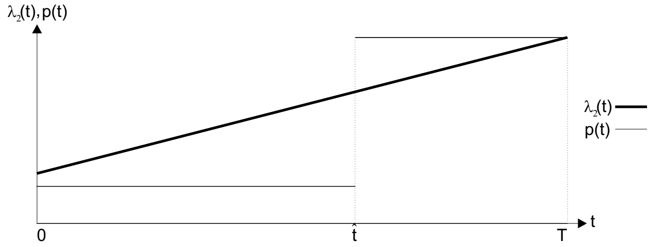


Obr. 16: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.49)

3. podprípad ($t_1 \geq 0,\ t_2 > T$):

Vráťme sa na začatok dôkazu, kde sme predpokladali $y_0 = 0$. Tam sme uvažovali "symetrickú" polohu adjungovanej funkcie, konkrétne $\lambda_2(t) = c(t-t_2)+k_2$, pre $t \in [0,t_2)$. Keďže $t_2 > T$ znamenalo by to, že $\lambda_2(t) < k_2$ na intervale $\left(\hat{t},T\right]$, čo by bol spor s nutnou podmienkou $\lambda_2(T^-) = p(T)$. Teda uvedený tvar $\lambda_2(t)$ je neprípustný. Ako už niekoľkokrát doteraz, musíme urobiť posun nahor, aby sme vyhoveli podmienke $\lambda_2(T^-) = p(T)$. Tým dostaneme $\lambda_2(t) = c(t-T)+k_2$. Zaujíma nás, či takto definovaná $\lambda_2(t)$ spĺňa ostatné podmienky maxima a taktiež, čo sa stane, ak upustíme od predpokladu $y_0 = 0$. Označme t_1' nový priesečník $\lambda_2(t)$ a $p(t)$. Jeho hodnota je $t_1' = T-\frac{l}{c}$ ako už bolo odvodené v predošlých častiach dôkazu. Zrejme pre $T-\frac{l}{c}<0$ takýto posun znamená, že $\lambda_2(t) > k_1$, $t\in[0,T]$. To by sme potom mali $u^*(t) = 1$, pre $t\in\left[0,\hat{t}\right]$ a $u^*(t)=-1$, pre $t\in\left(\hat{t},T\right]$. Ak však naozaj má platiť uvedený tvar $\lambda_2(t)$ a $u^*(t)$, potom musíme mať zabezpečené $y(t)>0$, $t\in(0,T)$. Na $\left(0,\hat{t}\right]$ to bude elmentárne platiť, keďže tu máme $u^*(t)=1$. Pre $t\in\left(\hat{t},T\right)$ si to vyžaduje krátku diskusiu. Vieme, že platí $t_2-\hat{t}=\hat{t}-t_1$. Ďalej ak si uvedomíme, že $T<t_2$ a $0\leq t_1$, tak dostaneme $T-\hat{t}<\hat{t}-0$. To potom znamená, že úsek nakupovania je určite dlhší ako úsek predávania, z čoho už ľahko usúdime, že $y(t)>0$, pre $t\in\left(\hat{t},T\right)$ a to pre ľubovoľné $y_0\geq 0$. Teda ak $T-\frac{l}{c}<0$, tak pre všetky $y_0\geq 0$ máme

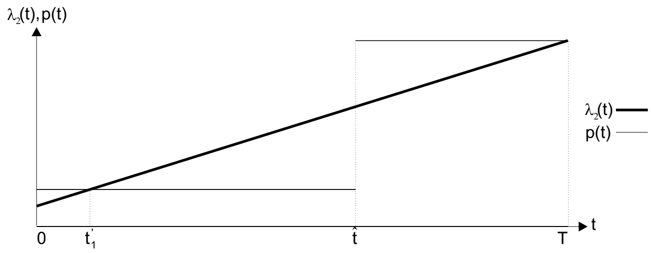
$$\lambda_2(t)=c(t-T)+k_2,\ t\in[0,T], \qquad u^*(t)=\begin{cases} 1 & t\in\left[0,\hat{t}\right] \\ -1 & t\in\left(\hat{t},T\right] \end{cases} \tag{2.50}$$



Obr. 17: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.50)

Samozrejme, môže platiť aj $T-\frac{l}{c}\geq 0$. Aj vtedy môžeme písať $T-\hat{t}<\hat{t}-t_1'$ a teda aj $y(t)>0$, $t\in(\hat{t},T)$, čo korešponduje s uvažovaným tvarom $\lambda_2(t)$. Pre $t\in[0,t_1')$ bude $u^*(t)=-1$, podľa (2.4), pretože musí byť $y(t)>0$, $t\in(0,t_1')$ ak má zostať v platnosti predpokladaný tvar $\lambda_2(t)$. Aby to tak naozaj bolo, musíme mať počiatočnú hodnotu $y_0\geq t_1'$. Ak teda platí $y_0\geq T-\frac{l}{c}\geq 0$, potom je riešením

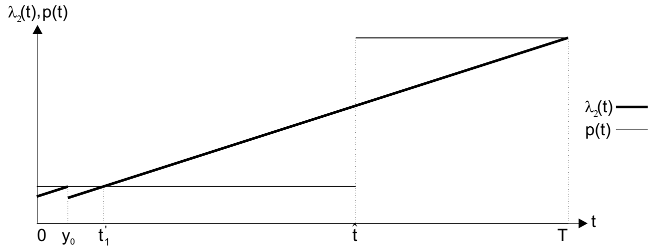
$$\lambda_2(t)=c(t-T)+k_2,\ t\in[0,T],\qquad u^*(t)=\begin{cases}-1 & t\in[0,t_1')\\ 1 & t\in[t_1',\hat{t}]\\ -1 & t\in(\hat{t},T]\end{cases}\tag{2.51}$$



Obr. 18: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.51)

Ak je $y_0<t_1'$, potom $u^*(t)=-1$, len pre $t\in[0,y_0)$ a pre $t\in[y_0,t_1')$ bude $u^*(t)=0$, podľa (2.5). Navyše na intervale $[0,y_0)$ musíme upraviť $\lambda_2(t)$, pretože y_0 je takto vstupný čas a $\lambda_2(y_0)<p(y_0)=k_1$. Pre $0\leq y_0<T-\frac{l}{c}$ máme

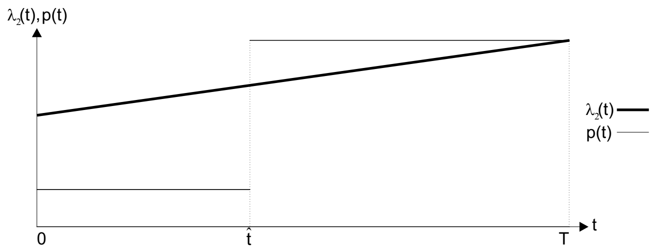
$$\lambda_2(t)=\begin{cases}c(t-y_0)+k_1 & t\in[0,y_0)\\ c(t-T)+k_2 & t\in[y_0,T]\end{cases},\qquad u^*(t)=\begin{cases}-1 & t\in[0,y_0)\\ 0 & t\in[y_0,t_1')\\ 1 & t\in(t_1',\hat{t}]\\ -1 & t\in(\hat{t},T]\end{cases}\tag{2.52}$$



Obr. 19: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.52)

4. podprípad ($t_1 < 0$, $t_2 > T$):
Vzhľadom na to, že aj v tomto prípade je $t_2 > T$, môžeme s odvolaním sa na úvahy z 3. podprípadu predpokladať $\lambda_2(t) = c(t-T) + k_2$. Fakt, že $t_1 < 0$ nám hovorí, že pôvodne uvažovaná funkcia $\lambda_2(t) > k_1$, $t \in [0,T]$. Keďže "novú" $\lambda_2(t)$ sme získali posunutím pôvodnej nahor, určite sa uvedená nerovnosť pre ňu zachová. Na základe tohoto poznatku môžeme s istotou písať, že $u^*(t) = 1$, pre $t \in \left[0,\hat{t}\right]$. Pre nasledujúci interval budeme mať $u^*(t) = -1$, ak $y(t) > 0$ a $u^*(t) = 0$ v opačnom prípade. Ak zvolíme y_0 dostatočne veľké, tak zabezpečíme $y(t) > 0$, $t \in (0,T)$ a tým aj platnosť uvažovanej $\lambda_2(t)$. Konkrétne ak $y_0 + \hat{t} \geq T - \hat{t}$ dostávame riešenie

$$\lambda_2(t) = c(t-T) + k_2,\ t \in [0,T], \qquad u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[0,\hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t},T\right] \end{cases} \tag{2.53}$$

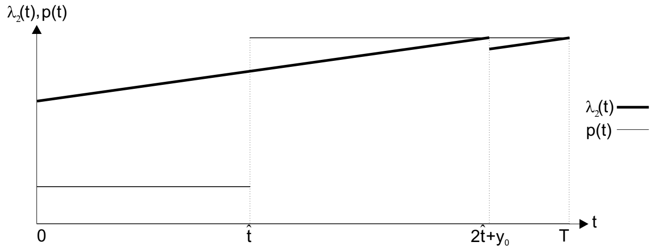


Obr. 20: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.53)

Keď je však $y_0 + \hat{t} < T - \hat{t}$, situácia bude čiastočne odlišná. V čase $\hat{t}$ budeme mať maximálnu zásobu $y\left(\hat{t}\right) = y_0 + \hat{t}$. Preto za daného predpokladu dôjde v čase $2\hat{t} + y_0 < T$ k vypredaniu celej zásoby a $t = 2\hat{t} + y_0$ sa tak stane vstupným časom. To si vyžiada úpravu $\lambda_2(t)$ na $\left[0, 2\hat{t} + y_0\right)$, tak aby $\lambda_2\left(2\hat{t} + y_0\right) = p\left(2\hat{t} + y_0\right) = k_2$. Pre $t \in \left[2\hat{t} + y_0, T\right]$ ponecháme $\lambda_2(t)$ nezmenené, lebo práve takto spolu s $u^*(t) = 0$ spĺňa podmienky maxima. Ak to zhrnieme, tak pre $y_0 + \hat{t} < T - \hat{t}$ dostávame riešenie

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} c\left(t - \tilde{t}\right) + k_2 & t \in \left[0,\tilde{t}\right) \\ c(t-T) + k_2 & t \in \left[\tilde{t},T\right] \end{cases}, \qquad u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[0,\hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t},\tilde{t}\right) \\ 0 & t \in \left[\tilde{t},T\right] \end{cases}, \tag{2.54}$$

kde $\tilde{t} := 2\hat{t} + y_0$ □



Obr. 21: Príklad funkcie $\lambda_2(t)$ z (2.54)

Poznámka 2.4.2. V štandartných formuláciách nutných podmienok sa predpokladá, že funkcie $F(x,u,t)$ a $f(x,u,t)$ sú spojite diferencovateľné vo všetkých svojich argumentoch. Ak si však vezmeme "našu" funkciu $f_1(x,u,t) = -cy(t) - p(t)\,y(t)$, tak vidíme, že pri použití cenovej funkcie $p(t)$ v tvare (2.26) je f_1 nespojitá v čase $t = \hat{t}$. To by znamenalo, že použitie nutných podmienok Vety 1.0.1 aj Vety 1.0.3 je nekorektné. Nie je to celkom pravda. V Poznámke ([2],87) sa totiž uvádza, že spomínané podmienky spojitej diferencovateľnosti je možné relaxovať. T.j., že postačujúci je takýto predpoklad: Existuje konečná, alebo spočitateľná množina bodov C v $(0,T)$ tak, že funkcia f je spojitá v každom bode $\left(\acute{x},\acute{u},\acute{t}\right) \in E = \mathbb{R}^n \times U \times [0,T]$ ak $\acute{t} \notin C$, zatiaľ čo pre $\acute{t} \in C$ sa vyžaduje existencia jednostranných limít $\lim_{(x,u,t)\to\left(\acute{x},\acute{u},\acute{t}+\right)} f(x,u,t)$ a $\lim_{(x,u,t)\to\left(\acute{x},\acute{u},\acute{t}-\right)} f(x,u,t)$, $(x,u,t) \in E$. Takto definovaný oslabený predpoklad už funkcia f_1 spĺňa.

2.4.1 Nejednoznačnosť riadenia spĺňajúceho nutné podmienky Vety 1.0.1, pre prípad $y_0 = 0$ a $\frac{l}{c} < T - \hat{t}$

Vráťme sa v tejto kapitole ešte na chvíľu k samotnému riešeniu úlohy so skokovitou cenovou funkciiou. Z matematického hľadiska stojí za povšimnutie, že pre $y_0 = 0$, $\frac{l}{c} < T - \hat{t}$ máme až dve riešenia spĺňajúce nutné podmienky. Tákáto situácia sa vyskytla iba v dvoch hlavných, nami uvažovaných podrípadoch - prvom a treťom. V prvom podrípade je to dvojica riešení 1.a a 1.f, v tom druhom zase dvojica 2.b, 2.e. Na tomto mieste však ukážeme, že v oboch prípadoch nulové riadenie nemôže byť optimálne. Spravíme to jednoducho porovnaním hodnôt účelovej funkcie s druhým riadením. Zamerajme sa len na dvojicu 1.a, 1.f (pre 2.b, 2.e by to bolo úplne analogicky). Označme J_1 hodnotu účelovej funkcie prislúchajúcu riadeniu 1.a a J_2 hodnotu prislúchajúcu 1.f. Potom

$$\begin{gathered} J_1 = x(T) + p(T)\,y(T) = x_0 - k_1\left(\hat{t} - t_1\right) + k_2\left(t_2 - \hat{t}\right) + 0.k_2 = \\ x_0 + \left(\hat{t} - t_1\right)(k_2 - k_1) > x_0 \end{gathered}$$

$$J_2 = x(T) + p(T)\,y(T) = x_0 + 0.k_2 = x_0$$

Takže $J_1 > J_2$ a z toho už priamo plynie, že 1.f nie je optimálne.

Práve dokázaná neoptimalita nulového riadenia nachádza svoju oporu aj v nasledujúcej Vete, ktorá hovorí o tom, že pri použití odlišnej formulácie nutných podmienok ako vo Vete 1.0.1, takéto riadenie už nebude ani kandidátom na optimálne riadenie.

Veta 2.4.3. *Riadenie $u(t) = 0$, $t \in [0, T]$ pre úlohu so skokovou cenovou funkciou, počiatočným stavom $y_0 = 0$ a parametrami limitovanými ohraničením $\frac{l}{c} < T - \hat{t}$ síce spĺňa nutné podmienky optimality Vety 1.0.1, ale nespĺňa podmienky Vety 1.0.3.*

Dôkaz: Veta 1.0.3 hovorí, že v každom čase t musí $u^*(t)$ maximalizoavť Hamiltonián, t.j. musí v súlade s (1.13) platiť

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) \geq H(x^*(t), u, \lambda(t), t) \text{ pre všetky } u \text{ také, že}$$
$$g_j(x^*(t), u, t) > 0 \text{ pre } j = 1, \ldots, s'$$

Konkrétne pre našu úlohu dostávame, že

$$(\lambda_2(t) - p(t)).0 - cy^*(t) \geq (\lambda_2(t) - p(t))\, u(t) - cy^*(t) \text{ pre } u(t) \in (-1, 1)$$

Ak má byť táto podmienka splnená v riadení $u(t) \equiv 0$, potom musí platiť, že $\lambda_2(t) = p(t)$, pre všetky $t \in [0, T]$. Ďalej z teórie vieme, že musí exitovať spojitá funkcia $\lambda_2^*(t)$, pre ktorú podľa (1.14), (1.15) platí

$$\lambda_2^*(t) = \lambda_2(t) - \eta^T(t)\left[\partial h(x^*(t), t)/\partial x\right] = \lambda_2(t) - \eta(t)$$
$$\dot{\lambda}_2^*(t) = \dot{\lambda}_2(t) - \dot{\eta}(t) = -\partial L^*/\partial x = c$$

Vzhľadom na to, že $p(t)$ je po častiach konštantná, z posledného vzťahu nám vyplýva, že $\eta(t)$ vyhovuje diferenciálnej rovnici

$$\dot{\eta}(t) = -c \tag{2.55}$$

Keďže $\lambda_2(t) \equiv p(t)$ je spojitá všade okrem bodu $t = \hat{t}$, musí byť spojitá na celom intervale s výnimkou bodu $\hat{t}$ aj funkcia $\eta(t)$, lebo práve vtedy bude spojitá $\lambda_2^*(t)$. Naopak v bode $\hat{t}$ bude $\eta(t)$ nevyhnutne nespojitá a to takým sposobom, aby sa v rozdieli funkcií $\lambda_2(t) - \eta(t)$ eliminovala nespojitosť v tomto bode, ktorú tam vnáša $\lambda_2(t)$. Na základe predošlej diskusie a rovnice (2.55) dostávame pre $\eta(t)$ takéto vyjadrenie

$$\eta(t) = \begin{cases} -ct + k & t \in \left[0, \hat{t}\right] \\ -ct + d + k & t \in \left(\hat{t}, T\right) \end{cases},$$

kde k je ľubovoľná konštanta a $d = k_2 - k_1 > 0$ je označenie pre veľkosť skoku cenovej funkcie. Práve vďaka tomu, že $d > 0$ dostávame, že $\eta\left(\hat{t}^-\right) < \eta\left(\hat{t}^+\right)$, čo však vedie k sporu s tým, že $\eta(t)$ musí byť podľa Vety 1.0.3 nerastúca funkcia. Teda riadenie $u(t) = 0$, $t \in [0, T]$ nespĺňa nutné podmienky maxima vo formuláci Vety 1.0.3. $\square$

Poznámka 2.4.4. Je potrebné dodať, že obe netriviálne riešenia 1.f aj 2.e podmienkam Vety 1.0.3 vyhovujú. Konštruktívny dôkaz tohoto tvrdenia je ľahký, ale pomerne zdĺhavý. Preto ho na tomto mieste nebudeme ani robiť. Uvedieme len výslednú podobu jednolivých funkcií a multiplikátorov, ktoré spolu s riadením 1.f pre počiatočný stav $y_0 = 0$ spĺňajú podmienky Vety 1.0.3 (prípad 2.e by bol podobný, nebudeme ho teda uvádzať). Jenoduchým dosadením týchto funkcií do podmienok Vety si môžeme overiť správnosť takéhoto riešenia. Pre $y_0 = 0$, $\frac{l}{c} < T - \hat{t}$, $t_1 \geq 0$ a $T \leq 0$ (t_1, t_2 ako vo Vete 2.4.1) máme teda riadenie

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_1) \\ 1 & t \in \left[t_1, \hat{t}\right] \\ -1 & t \in \left(\hat{t}, t_2\right) \\ 0 & t \in [t_2, T] \end{cases}$$

ako riešenie nutných podmienok Vety 1.0.3. K nemu prislúchajúca dvojica adjungovaných funkcií má tvar

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} k_1 & t \in [0, t_1) \\ c(t - t_2) + k_2 & t \in [t_1, t_2] \\ k_2 & t \in (t_2, T] \end{cases}, \quad \lambda_2^*(t) = c(t - t_2) + k_2,\ t \in [0, T]$$

Celú mozaiku riešenia dotvárajú multiplikátory

$$\mu_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, \hat{t}\right) \\ -c(t - t_2) & t \in \left[\hat{t}, t_2\right] \\ 0 & t \in (t_2, T] \end{cases}, \quad \mu_2(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_1) \\ -c(t - t_2) + k_1 - k_2 & t \in \left[t_1, \hat{t}\right] \\ 0 & t \in \left(\hat{t}, T\right] \end{cases},$$

$$\eta(t) = \begin{cases} -c(t - t_1) & t \in [0, t_1) \\ 0 & t \in [t_1, t_2] \\ -c(t - t_2) & t \in (t_2, T] \end{cases}$$

Poznamenávame, že zmienené $\lambda_2^*(t)$ a $\eta(t)$ nie sú jediné správne. Riešením je taktiež každá dvojica $\widetilde{\lambda}_2^*(t) = \lambda_2(t) + d$, $\tilde{\eta}(t) = \eta(t) + d$, kde d je ľubovoľné reálne číslo.

Skutočnosti uvedené v tejto kapitole do istej miery potvrdzujú závery práce ([4], Lema 1.1). V nej bolo ukázané, že ak nejaké riadenie spĺňa podmienky Vety 1.0.3, potom spĺňa aj podmienky Vety 1.0.1. Opačná implikácia však dokázaná nebola a ani z inej, nám dostupnej literatúry, nie sú známe žiadne výsledky týkajúce sa jej platnosti. Uvedený príklad ukazuje, že takáto implikácia vo všeobecnosti nemusí platiť (a to prinajmenšom pre úlohy, v ktorých je nespojitosť v čase).

Záver

Hlavným cieľom a náplňou práce bolo nájsť analytické riešenie úlohy obchodovania s komoditami, založené na Pontryaginovom princípe maxima . Podnet pre takýto zámer nám poskytla práca [1], z ktorej sme model prevzali, pretože je v nej venovaná len minimálna pozornosť jeho riešeniu. Túto medzeru sme chceli aspoň čiastočne vyplniť touto diplomovou prácou. Zrekapitulujme si na tomto mieste jej obsah a najdôležitejšie dosiahnuté výsledky.

Na začiatok sme definovali všeobecný tvar modelu obchodovania s komoditami. Následne sme špecifikovali dva typy cenových funkcií (lomená a skoková) a niektoré ďalšie zjednodušenia, ktoré zabezpečujú, že riešenia sa dajú explicitne vyjadriť. Pri hľadaní riešenia sme sa opierali o formuláciu nutných podmienok v znení Vety 1.0.1. Jej aplikáciou na "našu" verziu komoditnej úlohy sme obdržali systém podmienok, ktorý môžeme nájsť v ďalšej kapitole. Na jeho základe sme najprv dokázali dve pomocné tvrdenia (Veta 2.2.2 a Dôsledok 2.2.3), ktoré sa spolu s nutnými podmienkami stali východiskom pri odvodzovaní riešenia. Samotné riešenie, reprezentujúce jadro práce, je zhrnuté do Viet 2.2.2 až 2.3.4 (lomená cenová funkcia) a Vety 2.4.1 (skoková cenová funkcia). Vidíme, že aj napriek voľbe pomerne jednoduchých cenových funkcií a niektorých ďalších vstupov, je získané riešenie dosť komplikované. Vyplýva to z veľkého počtu voľných parametrov, ktoré sú zahrnuté v uvažovanom modeli. Na prvý pohľad prekvapujúco sa tiež javí, že prítomnosť skokovej funkcie v modeli, v porovnaní s lomenou, vedie k zložitejšiemu výsledku, hoci je skoková cenová funkcia z matematického aj vecného hľadiska jednoduchšia. Je potrebné zdôrazniť, že ak kdekoľvek v práci hovoríme o "riešení" komoditnej úlohy, máme na mysli také riadenie, ktoré spolu so svojou odozvou spĺňa nutné podmienky maxima. Overovanie optimality, čiže verifikácia postačujúcich podmienok, nebolo predmetom nášho záujmu. Dodajme, že všetky dôkazy uvedené v práci sú pôvodné.

Okrem cieľa stanoveného v úvode, ktorým bolo riešiť komoditný model, podarilo sa nám dospieť v tejto práci k ešte jednému zaujímavému výsledku. Ten z čisto matematického hľadiska stojí azda najviac za pozornosť. Reč je o už toľko zmieňovanom príklade, ktorý, ako sa zdá spochybňuje možnú platnosť implikácie, ktorá by hovorila, že ak nejaké riadenie spĺňa nutné podmienky Vety 1.0.1, potom spĺňa aj nutné podmienky Vety 1.0.3.

Literatúra

[1] Sethi S.P., Thompson G.L.: *Optimal Control Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 2000

[2] Seierstad A., Sydsaeter K.: *Optimal Control Theory with Economic Aplications*, North-Holland, Amsterdam, 1987

[3] Hartl R.F., Sethi S.P., Vickson R.G.: *A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints*, SIAM J., 1995

[4] Jurča P.: *Sustainability Constraint in Models of Optimal Economic Growth*, Písomná práca k dizertačnej skúške, FMFI UK, 2006

[5] Halická M.: *Optimálne riadenie I, II*, Učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 1999/2000