

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave



Diskrétny model fluktuácií výmenného kurzu

Diplomová práca

Bratislava 2006

Jana Szolgayová

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Odbor Matematika, špecializácia Ekonomická a finančná matematika



Diskrétny model fluktuácií výmenného kurzu

Diplomová práca

Diplomant: Jana Szolgayová

Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.

Bratislava 2006

Zadanie

Úlohou práce je:

1. pokúsiť sa o dôkaz ohraničenosti trajektórií diskrétného modelu fluktuácií výmenných kurzov bez použitia počítača,
2. vypracovať geometrickú analýzu zmeny stabilných vlastností rovnovážneho stavu spomínaného modelu,
3. zhrnúť poznatky o rotačnom čísle zobrazenia kružnice v súvislosti s jeho použitím v spomínanom modeli.

Čestne prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracovala samostatne, iba s pomocou literatúry, uvedenej v zozname, konzultácií s vedúcim diplomovej práce a vedomostí získaných počas štúdia.

.....

V Bratislave dňa 1. mája 2006

Jana Szolgayová

Týmto sa chcem poďakovať prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za odborné vedenie, množstvo cenných pripomienok, ako aj za prejavenu ochotu a ľudský prístup.

Abstrakt

V mojej diplomovej práci nadväzujem na diplomovú prácu *Boďová (2004)* [2]. Zaoberám sa v nej uvedeným diskretným modelom fluktuácií výmenného kurzu a uvádzam základy teórie o rotačnom čísle. Rotačné číslo poskytuje kvalitatívnu charakteristiku orientáciu zachovávajúceho homeomorfizmu na kružnici. Model transformáciou vedie k systému diferenčných rovníc, ktorého správanie sa skúmam v závislosti od parametra. Pre určité hodnoty parametra existuje invariantná množina, čo umožňuje na zobrazenie zúžené na túto množinu aplikovať teóriu rotačného čísla.

Obsah

Úvod	2
1 Stabilita nulového riešenia	5
1.1 Teória redukcie na centrálnu varietu	6
1.2 Zmena stability v závislosti od parametra	8
2 Prípád $a > 1$	16
2.1 Základné vlastnosti homeomorfizmu	16
2.2 Ohraničenosť trajektórií	17
2.3 Vlastnosti invariantnej množiny	24
2.4 Riemannova veta	27
3 Rotačné číslo	29
3.1 Definícia rotačného čísla	29
3.1.1 Alternatívna definícia	30
3.2 Rotačné číslo v závislosti od parametra	32
Záver	34
A Ohraničenosť trajektórií	35
Literatúra	40

Úvod

Táto práca nadväzuje na diplomovú prácu *Bodová (2004)* [2]. Tu je predstavený model odchýlky od rovnovážneho výmenného kurzu, ktorý vedie k dvojrozmernému systému diferencných rovníc:

$$x_{n+1} = x_n + ay_n(1 - |x_n|)^+ - b|x_n|x_n \quad (1)$$

$$y_{n+1} = ay_n(1 - |x_n|)^+ - b|x_n|x_n \quad (2)$$

Bodová (2004) [2] vo svojej práci skúma a interpretuje charakter pevného bodu a trajektórie systému v závislosti od parametra. Výsledky a numerické simulácie ukazujú, že napriek svojej jednoduchosti má systém komplikovanú dynamiku. Cieľom tejto práce je pokračovať v analýze systému, najmä správania sa trajektórií v prípade $a > 1$.

Výmenný kurz hrá významnú úlohu v otvorených ekonomikách s voľným režimom výmenného kurzu. K otázke modelovania výmenného kurzu existuje veľa prístupov, medzi najrozšírenejšie patrí napr. parita kúpnej sily, skrytá parita úrokovej miery. Ich spoločnou črtou je vysvetľovanie zmeny výmenného kurzu zmenou ekonomických fundamentov. Avšak fluktuácie výmenného kurzu nastávajú na dennej báze, kým ekonomické fundamenty sa menia dlhodobo. Tento fakt naznačuje, že ekonomické fundamenty nie sú schopné úplne vysvetliť pohyby výmenného kurzu. To je dôležitým podnetom na modelovanie nie samotného výmenného kurzu, ale jeho odchýlky od rovnovážneho stavu určeného ekonomickými fundamentmi. Krátkodobé fluktuácie majú trhovú príčinu a sú spôsobené správaním sa agentov na trhu. Myšlienke modelovať odchýlku od rovnovážneho výmenného kurzu sa venovali aj *Jeanne, Rose (2002)* [12] a *De Grauwe, Grimaldi (2002)* [8]. Spoločnou myšlienkou je zjednodušená charakteristika správania sa agentov, z ktorej je odvodený rekurentný model. V práci *Bodová (2004)* [2] je predstavený model vo forme diferencnej rovnice druhého rádu:

$$x_{n+1} = x_n + A(x_n - x_{n-1})(M - |x_n|)^+ - B|x_n|x_n. \quad (3)$$

Model predpokladá dva typy reakcií agentov:

Ak výmenný kurz oslabuje (posilňuje), agenti s cieľom profitovať z tohto pohybu majú tendenciu kupovať (predávať) cudziu menu. Táto akcia spôsobí nárast (pokles) dopytu po cudzej mene, čo má za následok ďalšie oslabenie (posilnenie). Citlivosť investorov je reprezentovaná v modeli parametrom A .

Ak však odchýlka je príliš vysoká (nízka), agenti vedia, že skutočný výmenný kurz je pod (nad) jeho "prirodzenou" hodnotou a že tento stav nie je dlhodobý. Podľa ich očakávaní sa chcú proti poklesu (nárastu) zabezpečiť, teda začnú predávať (kupovať) cudziu menu. Čím je odchýlka väčšia, tým viac agentov reaguje týmto spôsobom, citlivosť agentov reprezentuje parameter B .

Model teda zmenu odchýlky uvažuje ako vážený priemer týchto dvoch reakcií s váhami $(M - |x_n|)$ a $|x_n|$ (pre $x_n < M$). Pre $|x_n| > M$ už všetci agenti očakávajú návrat k "prirodzenému" kurzu a druhý člen zaniká.

Vhodnou substitúciou vieme jeden parameter redukovať a dostávame diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$x_{n+1} = x_n + a(x_n - x_{n-1})(1 - |x_n|)^+ - b|x_n|x_n, \quad (4)$$

ktorú štandardnou transformáciou prevedieme na dvojrozmerný systém diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$x_{n+1} = G_1(x_n, y_n) = x_n + ay_n(1 - |x_n|)^+ - b|x_n|x_n; \quad (5)$$

$$y_{n+1} = G_2(x_n, y_n) = ay_n(1 - |x_n|)^+ - b|x_n|x_n. \quad (6)$$

Tento systém má jediný pevný bod – nulu. Jeho charakter závisí od parametra a . Vlastné hodnoty linearizácie G v pevnom bode sú $a, 1$. Teda pre $a > 1$ je nula asymptoticky nestabilným pevným bodom. O stabilite v prípade $a < 1$ teda rozhoduje teória redukcie na centrálnu varietu. Zaujímavou črtou systému je, že prechodom parametra a cez hodnotu 1 sa mení nielen vlastná hodnota linearizácie G v pevnom bode zo stabilnej na nestabilnú, ale zároveň sa mení aj stabilita redukcie na centrálnu varietu. Tomuto výsledku sa venujeme v prvej kapitole, kde hľadáme dôvod a geometrickú interpretáciu tohoto javu. V nej zhrnieme teóriu redukcie na centrálnu varietu. Pomocou nej ukážeme analogický výsledok pre širšiu triedu dynamických systémov s podobnou vlastnosťou.

Numerické simulácie ukazujú, že v prípade $a > 1$ sú trajektórie bodov v okolí nuly ohraničené a konvergujú k invariantnej množine, ktorá je podmnožinou oblasti, na ktorej je G homeomorfizmus. Navyše simulácie naznačujú, že invariantná množina je topologická kružnica. S cieľom dokázať takéto správanie bola ohraničenosť trajektórií pre konkrétne hodnoty parametra v *Bodová (2004)* [2] ukázaná pomocou počítača. V prvej časti druhej

kapitoly dokážeme ohraničenosť bez pomoci počítača využitím inverzného zobrazenia G . V druhej časti naviažeme na výsledky o existencii monotónnej postupnosti uzavretých kriviek a invariantnosti ich limity (*Bodová 2004* [2]). So zámerom dokázať odpozorované správanie sa trajektórií dokážeme jednoduchú súvislosť oblasti ohraničenej limitnou kružnicou. Využitie Riemannovej vety a výsledkov na ňu nadväzujúcich nám umožní definovať na invariantnej množine rotačné číslo.

V tretej kapitole vysvetlíme pojem rotačného čísla zobrazenia, jeho vlastnosti týkajúce sa existencie periodických trajektórií a črty grafu závislosti rotačného čísla od parametra. Uvedieme takisto výsledky simulácie priebehu funkcie rotačného čísla G premennej a .

Kapitola 1

Stabilita nulového riešenia

V tejto kapitole sa budeme zaoberať dvojrozmernými systémami diferenčných rovníc, presnejšie analýzou stability ich pevných bodov v závislosti od parametra. Zhrnieme teóriu redukcie na centrálnu varietu. Odvodíme všeobecný výsledok o stabilite systémov určitého typu v závislosti od parametra. Podnetom pre túto analýzu je výsledok odvodený v diplomovej práci *Boďová(2004)* [2]:

Veta 1. *Pre $b > 0$ je pevný bod $\hat{x} = (0, 0)$ systému*

$$x_{n+1} = x_n + a(x_n - y_n)(1 - |x_n|) - bx_n|x_n| \quad (1.1)$$

$$y_{n+1} = x_n \quad (1.2)$$

- *asymptoticky stabilný pre $a < 1$,*
- *nestabilný pre $a > 1$.*

Zaujímavým a prekvapujúcim rysom vety je vlastnosť, že pri prechode parametra a cez kritickú hodnotu jedna sa nielen zmení vlastná hodnota linearizácie systému v pevnom bode zo "stabilnej" (t.j. v absolútnej hodnote menšej ako jedna) na "nestabilnú" (väčšiu ako jedna), ale zmení sa aj stabilita redukcie na centrálnu varietu. Tým sa zmení aj charakter pevného bodu z atraktora na repelora (t.j. atraktor inverzného zobrazenia). V záverečnej časti tejto kapitoly uvedená veta dáva zasadením do širšieho kontextu geometrické vysvetlenie tohoto "negenerického" javu.

Dôvodom zmeny charakteru pevného bodu je fakt, že prechodom parametra cez kritickú hodnotu dochádza k "prekriženiu" vlastných vektorov, a tým k obráteniu projekcie akcie kvadratického člena na centrálnej variete.

1.1 Teória redukcie na centrálnu varietu

V tejto časti podávame známe výsledky o analýze charakteru pevného bodu dvojrozmerného systému diferencných rovníc. Podrobnejšie sa venujeme prípadu, keď má linearizácia zobrazenia v pevnom bode jednu vlastnú hodnotu v absolútnej hodnote menšiu ako jedna a jednu s vlastnou hodnotou rovnou jednej. Prípadná stabilita, resp. nestabilita pôvodného systému potom zodpovedá stabilite, resp. nestabilite systému redukovaného na centrálnu varietu. Zhrnieme teóriu o redukcii na centrálnu varietu pre systém diferencných rovníc uvedenú v Carr (1981) [5] pre dvojrozmerné systémy, a v Iooss (1979) [11] pre n -rozmerné.

Pre stabilitu systému diferencných rovníc

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.3)$$

v pevnom bode \hat{x} , kde $x_n \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\hat{x} = f(\hat{x})$ sú rozhodujúce vlastné hodnoty matice $Df(\hat{x})$, t.j. Jacobiho matice zobrazenia f v pevnom bode.

$$Df(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Konkrétne platí:

Veta 2. *Nech f je C^1 a nech \hat{x} je pevným bodom zobrazenia f . Potom \hat{x} je:*

- *asymptoticky stabilný, ak sú absolútne hodnoty všetkých vlastných hodnôt operátora $Df(\hat{x})$ menšie ako jedna,*
- *nestabilný, ak má niektorá z vlastných hodnôt operátora $Df(\hat{x})$ absolútnu hodnotu väčšiu ako jedna.*

Ak sú však absolútne hodnoty všetkých vlastných čísel $Df(\hat{x})$ menšie alebo rovné ako jeden a niektorá vlastná hodnota má absolútnu hodnotu rovnú jednej, o stabilite, či nestabilite pevného bodu nevieme rozhodnúť len na základe vlastných čísel Jacobiho matice f . Vtedy je pre charakter pevného bodu dôležitá reakcia členov vyšších rádov zobrazenia f na centrálnej variete.

Skúmame systém diferenčných rovníc

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = T(x_n, y_n), \quad (1.5)$$

kde $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má tvar

$$T(x, y) = (ax + f(x, y), by + g(x, y)), \quad (1.6)$$

kde $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, $|a| = 1$, $|b| < 1$, $f, g \in C^2$ a $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, $Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$.

Centrálnou varietou nazývame invariantnú varietu, ktorej dotykovým priestorom v bode nula je vlastný priestor linearizácie zodpovedajúci vlastným hodnotám s absolútnou hodnotou jedna. Presnejšie definujeme

Definícia 1. Funkcia h , $h \in C^1$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pre $|x| < \varepsilon$ sa nazýva centrálna varieta systému (1.5), ak

- je invariantná, teda ak $(x_n, y_n)^T$ je riešením systému (1.5) s $y_1 = h(x_1)$, potom $y_n = h(x_n)$ kým $|x_n| < \varepsilon$.
- $h(x)$ sa dotýka sa x -ovej osi v počiatku súradnicovej sústavy, teda h spĺňa

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0. \quad (1.7)$$

Platí:

Veta 3. Pre systém (1.5) existuje centrálna varieta h . Teda existuje $\varepsilon > 0$ také, že existuje C^1 funkcia $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kde $h(0) = h'(0) = 0$ také, že $|x| < \varepsilon$ a $a(x_1, y_1) = T(x, h(x))$ implikuje $y_1 = h(x_1)$

Asymptotické správanie sa systému (1.5) je určené správaním sa jeho redukcie na centrálnu varietu:

$$u_{n+1} = au_n + f(u_n, h(u_n)) \quad (1.8)$$

Vzťah medzi systémami (1.5) a (1.8) upresňuje nasledujúca veta.

Veta 4.

- Nech je nula stabilným (asymptoticky stabilným, nestabilným) pevným bodom (1.8). Potom je nula stabilným (asymptoticky stabilným, nestabilným) pevným bodom systému (1.5).
- Nech je nula stabilným (asymptoticky stabilným, nestabilným) pevným bodom systému (1.5) a (x_n, y_n) riešenie (1.5) kde (x_n, y_n) sú dostatočne malé. Potom existuje riešenie u_n (1.8) také, že $|x_n - u_n| \leq K\beta^n$ a $|y_n - h(u_n)| \leq K\beta^n$ pre každé n . kde K a β sú kladné konštanty a $\beta < 1$

1.2 Zmena stability v závislosti od parametra

Najprv dokážeme potrebné pomocné tvrdenie, ktoré využijeme pri dôkaze o stabilite všeobecného systému (1.9). Okrem toho nám poskytne geometrickú predstavu o správaní sa vlastných vektorov linearizácie v závislosti od parametra v okolí jeho kritickej hodnoty, ktorá je podstatou výsledku tvrdenia dokázaného v závere kapitoly. Záverečná veta poskytuje všeobecnejšiu analýzu charakteru pevného bodu dvojrozmerného systému diferenciálnych rovníc v závislosti od parametra.

Skúmame všeobecný systém:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + A(\alpha) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

kde $g = (g_1, g_2)^T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $A(\alpha) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Nech navyše platí: Nula je jednoduchou vlastnou hodnotou matice $A(\alpha)$ a dvojnásobnou vlastnou hodnotou $A(0)$ a $\text{rank } A(0) = 1$. Z týchto predpokladov vieme zistiť niečo viac o matici $A(\alpha)$ a jej vlastných vektoroch. Označme

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a_1(\alpha) & a_2(\alpha) \\ a_3(\alpha) & a_4(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Predpokladajme, že $a_2(0) = a_3(0) = 0$. Potom $a_1(0)$, $a_4(0)$ sú vlastnými hodnotami matice $A(0)$ čiže platí $a_1(0) = a_4(0) = 0$, čo je v spore s predpokladom $\text{rank } A(0) = 1$. Teda $(a_2(0), a_3(0)) \neq (0, 0)$. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $a_2(0) \neq 0$. Keďže $A(\alpha)$ je spojitá funkcia α , tak existuje $\varepsilon_1 > 0$ také, že pre $\alpha < \varepsilon_1$ je $a_2(\alpha) \neq 0$. Vlastný vektor w_α matice $A(\alpha)$ patriaci k vlastnej hodnote nula je jednoznačne určený až na konštantu z rovnice

$$A \begin{pmatrix} w_\alpha^1 \\ w_\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Z toho dostávame $a_1(\alpha)w_\alpha^1 + a_2(\alpha)w_\alpha^2 = 0$ a keďže $a_2(\alpha) \neq 0$, tak

$$w_\alpha = \xi \begin{pmatrix} a_2(\alpha) \\ -a_1(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

Analogicky druhý vlastný vektor v_α prislúchajúci k nenulovej vlastnej hodnote λ_α matice $A(\alpha)$ musí vyhovovať rovnici

$$A \begin{pmatrix} v_\alpha^1 \\ v_\alpha^2 \end{pmatrix} = \lambda_\alpha \begin{pmatrix} v_\alpha^1 \\ v_\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Z toho plynie

$$v_\alpha = \zeta \begin{pmatrix} a_2(\alpha) \\ a_4(\alpha) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

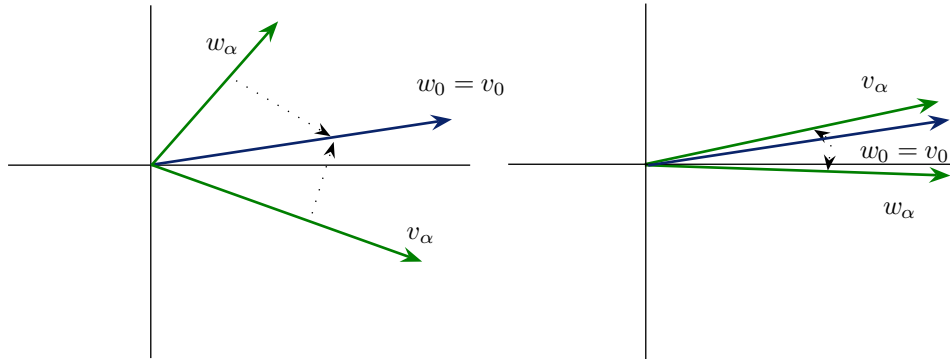
Keďže $a_2(\alpha) \neq 0$, tak vlastné vektory w_α, v_α vieme jednoznačne normalizovať nasledovnými podmienkami: $\|w_\alpha\| = \|v_\alpha\| = 1$ a $w_\alpha^T e_1 > 0$, resp. $v_\alpha^T e_1 > 0$, kde (e_1, e_2) je štandardná báza v \mathbb{R}^2 . Vlastné vektory teda uvažujeme jednotkové a ležiace v polrovine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Nasledujúca lema analyzuje závislosť vlastných vektorov matice $A(\alpha)$ od parametra α v okolí jeho kritickej hodnoty.

Lema 5. *Nech $A(\alpha) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je hladkou funkciou parametra α a nech platí:*

- $\det A(\alpha) = 0$ pre ľubovoľné α
- $\operatorname{tr} A(0) = 0$, $\frac{d}{d\alpha} \operatorname{tr} A(0) \neq 0$
- $\operatorname{rank} A(0) = 1$

Potom existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre $|\alpha| < \varepsilon$ platí: Nula je dvojnásobnou vlastnou hodnotou matice $A(\alpha)$ pre $\alpha = 0$, jednoduchou vlastnou hodnotou pre $\alpha \neq 0$. Navyše $A(0)$ má jediný vlastný vektor, ktorý je spoločnou limitou vlastných vektorov w_α, v_α matice $A(\alpha)$ a w_α leží v opačnej polrovine vzhľadom na v_α pre $\alpha > 0$ ako pre $\alpha < 0$.



Obr. 1.1: "Prekríženie" vlastných vektorov pri prechode parametra α cez nulu, vľavo situácia pre $\alpha < 0$ idúce k nule, vpravo pre $\alpha > 0$.

Dôkaz. Keďže $\det A(\alpha) = 0$ pre ľubovoľné α , tak $A(\alpha)$ je singulárna. Z toho vyplýva, že nula je vlastnou hodnotou $A(\alpha)$ pre každé α . Druhá vlastná hodnota λ_α matice $A(\alpha)$ je rovná stope matice $A(\alpha)$, čiže $\lambda_0 = \operatorname{tr} A(0) = 0$. Teda nula je dvojnásobnou vlastnou hodnotou $A(0)$. Navyše keďže

$$\frac{d}{d\alpha} \lambda_\alpha = \frac{d}{d\alpha} \operatorname{tr} A(0) \neq 0, \quad (1.15)$$

tak existuje $\varepsilon_2 > 0$ také, že nula je jednoduchou vlastnou hodnotou $A(\alpha)$ pre $|\alpha| < \varepsilon_2$, $\alpha \neq 0$. Už vieme, že existuje $\varepsilon_1 > 0$, že pre $|\alpha| < \varepsilon_1$ platí (1.12) a (1.14), kde $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$ vieme určiť z normalizačných podmienok. Teda pre $|\alpha| < \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ platí

$$w_\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{a_1(\alpha)^2 + a_2(\alpha)^2}} \begin{pmatrix} a_2(\alpha) \\ -a_1(\alpha) \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

$$v_\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{a_2(\alpha)^2 + a_4(\alpha)^2}} \begin{pmatrix} a_2(\alpha) \\ a_4(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Keďže $A(\alpha)$ je spojitou funkciou a $a_2(\alpha) \neq 0$ je vlastný vektor $w_0 = v_0$ matice $A(0)$ skutočne spoločnou limitou w_α, v_α . Označme $n_\alpha = w_\alpha^\perp$ taký vektor, že $\|n_\alpha\| = 1$ a $n_\alpha^T e_2 > 0$ (Poznamenanajme, že keďže $a_2(\alpha) \neq 0$, tak je danými podmienkami určený jednoznačne). Potom

$$n_\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{a_1(\alpha)^2 + a_2(\alpha)^2}} \begin{pmatrix} a_1(\alpha) \\ a_2(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Sledujme funkciu $\Phi(\alpha) = C(\alpha)n_\alpha^T v_\alpha$, kde

$$C(\alpha) = \frac{1}{\delta^2} \sqrt{(a_1(\alpha)^2 + a_2(\alpha)^2)(a_2(\alpha)^2 + a_4(\alpha)^2)} = \frac{1}{\|n_\alpha\|\|v_\alpha\|} > 0 \quad (1.19)$$

Teda

$$\Phi(\alpha) = C(\alpha)n_\alpha^T v_\alpha = \frac{1}{\|n_\alpha\|\|v_\alpha\|} \|n_\alpha\|\|v_\alpha\| \cos \phi = \cos \phi, \quad (1.20)$$

kde ϕ je uhol, ktorý zvierajú vektory n_α, v_α a

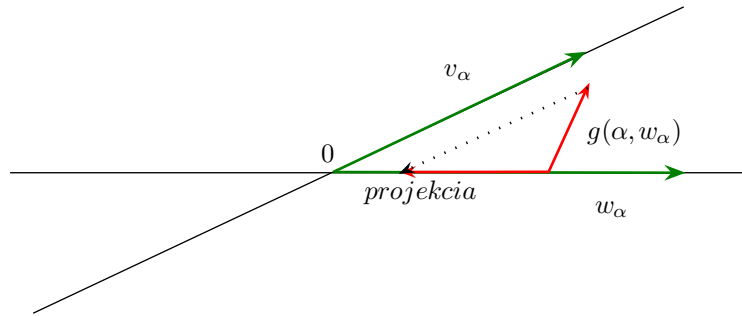
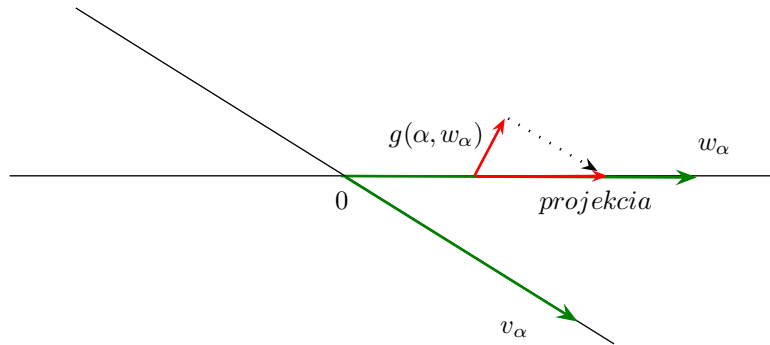
$$\Phi(\alpha) = C(\alpha)n_\alpha^T v_\alpha = (a_1(\alpha)a_2(\alpha) + a_2(\alpha)a_4(\alpha)) = a_2(\alpha)\text{tr}(\alpha) \quad (1.21)$$

Platí $\Phi(0) = 0$ a navyše

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \text{tr}(\alpha) \frac{d a_2(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + a_2(\alpha) \frac{d \text{tr}(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \\ &= a_2(0) \frac{d \text{tr}(0)}{d\alpha} \neq 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Tým dostávame, že pre $|\alpha| < \varepsilon$ funkcia $\Phi(\alpha) = \cos \phi$ mení pri prechode cez nulu znamienko. Teda uhol medzi vektormi n_α a v_α sa pri prechode α cez nulu mení z ostrého na tupý alebo naopak. A keďže $n_\alpha \perp w_\alpha$, tak w_α leží v opačnej polrovine vzhľadom na v_α pre $\alpha > 0$ ako pre $\alpha < 0$. \square

Nasledujúca veta podáva analýzu pevného bodu systému (1.9) v závislosti od parametra α . Pri prechode parametra α cez kritickú hodnotu nula sa mení nielen vlastná hodnota linearizácie systému z menšej ako jedna na väčšiu ako jedna, ale mení sa aj stabilita redukcie na centrálnu varietu. Dôvodom zmeny celkového charakteru pevného bodu systému (1.9) je výsledok

Obr. 1.2: Charakter pevného bodu pre $\alpha < 0$ Obr. 1.3: Charakter pevného bodu pre $\alpha > 0$

predchádzajúcej lemy. Vlastné vektory sa pri prechode α cez nulu "križujú". Keďže však kvadratický člen nelineárnej časti zobrazenia je spojitý, prechodom α cez nulu sa zmení smer jeho reakcie na centrálnej variete a tým sa z atraktora systému (1.9) stane repelór.

Veta 6. *Nech $A(\alpha) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je hladkou funkciou parametra α a nech platí:*

- (a) $\det A(\alpha) = 0$ pre ľubovoľné α ,
- (b) $\text{tr} A(0) = 0$, $\frac{d}{d\alpha} \text{tr} A(0) > 0$,
- (c) $\text{rank} A(0) = 1$.

Nech $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je C^1 a platí:

- (d)

$$g(\alpha, x) = |p(\alpha)^T x| Q(\alpha)x + o(x^2), \quad (1.23)$$

kde $p(\alpha) \in \mathbb{R}^2$, $Q(\alpha) = (q_1(\alpha), q_2(\alpha))^T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$(e) \quad \frac{1}{a_2(0)} \det \begin{pmatrix} Qw_0 & w_0 \end{pmatrix} > 0, \quad (1.24)$$

Potom existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre $|\alpha| < \varepsilon$ je nula asymptoticky stabilným pevným bodom systému (1.9) pre $\alpha > 0$ a asymptoticky stabilným bodom inverzného systému pre $\alpha < 0$.

Dôkaz. Z predchádzajúcej vety vieme, že existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre $|\alpha| < \varepsilon$ je nula dvojnásobnou vlastnou hodnotou $A(\alpha)$, jednoduchou pre $\alpha \neq 0$ v okolí nuly a navyše nenulová vlastná hodnota $\lambda_\alpha > 0$ pre $\alpha > 0$ a naopak. Platí

$$\det(A(\alpha) - 0I) = \det(I + A(\alpha) - I) \quad (1.25)$$

$$\det(A(\alpha) - \lambda_\alpha I) = \det(I + A(\alpha) - (\lambda_\alpha + 1)I) \quad (1.26)$$

A teda existuje $\varepsilon' > 0$ také, že pre $|\alpha| < \varepsilon'$ je jedna dvojnásobnou vlastnou hodnotou matice $I + A(\alpha)$ pre $\alpha = 0$, jednoduchou pre $\alpha \neq 0$ a navyše pre druhú vlastnú hodnotu μ_α matice $I + A(\alpha)$ platí $0 < \mu_\alpha < 1$ pre $\alpha < 0$ a $\mu_\alpha > 0$ pre $\alpha > 0$. Teda $I + A(\alpha)$ je regulárna. A keďže Jacobiho matica systému 1.9 v pevnom bode nula je práve $I + A(\alpha)$, tak z $\alpha > 0$, $\alpha < \varepsilon'$ priamo vyplýva nestabilita pevného bodu systému 1.9 a existencia inverzného systému. Keďže však jedna z vlastných hodnôt Jacobiho matice je rovná jednej, o stabilite (1.9) v prípade $\alpha < 0$ a inverzného systému pre $\alpha > 0$ ešte nevieme rozhodnúť. Stabilita, resp. nestabilita je závislá od stability, resp. nestability redukovaného systému na centrálnu varietu.

Transformáciou systému (1.9) pomocou matice vlastných vektorov $V = (w_\alpha \ v_\alpha)$ do súradníc $y = V^{-1}x$ dostávame systém s diagonalizovanou lineárnou časťou

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ m_n \end{pmatrix} + V^{-1}A(\alpha)V \begin{pmatrix} u_n \\ m_n \end{pmatrix} + V^{-1}g \left(V \begin{pmatrix} u_n \\ m_n \end{pmatrix} \right) \quad (1.27)$$

kde

$$V = (w_\alpha \ v_\alpha) = \delta \begin{pmatrix} a_2(\alpha) & a_2(\alpha) \\ -a_1(\alpha) & a_4(\alpha) \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

a z toho

$$V^{-1} = \frac{\delta}{a_2(\alpha)\lambda_\alpha} \begin{pmatrix} a_4(\alpha) & -a_2(\alpha) \\ a_1(\alpha) & a_2(\alpha) \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Úpravou dostávame (1.27) v tvare:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{\delta a_4(\alpha)}{a_2(\alpha)\lambda_\alpha} g_1(\alpha, u_n w_\alpha + m_n v_\alpha) - \frac{\delta a_2(\alpha)}{a_2(\alpha)\lambda_\alpha} g_2(\alpha, u_n w_\alpha + m_n v_\alpha) \\ m_{n+1} &= m_n(1 + \lambda_\alpha) + \frac{\delta a_1(\alpha)}{a_2(\alpha)\lambda_\alpha} g_1(\alpha, u_n w_\alpha + m_n v_\alpha) + \\ &\quad + \frac{\delta a_2(\alpha)}{a_2(\alpha)\lambda_\alpha} g_2(\alpha, u_n w_\alpha + m_n v_\alpha) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Teória redukcie na centrálnu varietu zaručuje existenciu centrálnej variety $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pre systém (1.30) (čiže platí $h \in C^1$ a $h(0) = h'(0) = 0$). Teda stabilita pevného bodu systému (1.30) pre $\lambda_\alpha < 0$ je ekvivalentná stabilite pevného bodu redukovaného systému:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{\delta}{a_2(\alpha)\lambda_\alpha} a_4(\alpha) g_1(\alpha, u_n w_\alpha + h(u_n) v_\alpha) - \\ &\quad - \frac{\delta}{a_2(\alpha)\lambda_\alpha} a_2(\alpha) g_2(\alpha, u_n w_\alpha + h(u_n) v_\alpha) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Potom pre $\lambda_\alpha < 0$ asymptotická stabilita pevného bodu systému (1.31) implikuje asymptotickú stabilitu pevného bodu systému (1.9) a stačí ukázať, že nula je asymptoticky stabilným pevným bodom (1.31) pre $\lambda_\alpha < 0$ a nestabilným pevným bodom (1.31) pre $\lambda_\alpha > 0$.

Keďže $h(0) = h'(0) = 0$, tak $h(u_n) = o(u_n)$ a platí:

$$\begin{aligned} g_i(\alpha, u_n w_\alpha + h(u_n) v_\alpha) &= \\ &= |p(\alpha)^T (u_n w_\alpha + h(u_n) v_\alpha)| q_i(\alpha) (u_n w_\alpha + h(u_n) v_\alpha) + o(u_n^2) \\ &= \operatorname{sgn} (p(\alpha)^T (u_n w_\alpha + h(u_n) v_\alpha)) (u_n p(\alpha)^T w_\alpha + h(u_n) p(\alpha)^T v_\alpha) \\ &\quad (u_n q_i(\alpha)^T w_\alpha + h(u_n) q_i(\alpha)^T v_\alpha) + o(u_n^2) \\ &= \operatorname{sgn} (p(\alpha)^T (u_n w_\alpha + h(u_n) v_\alpha)) u_n^2 p(\alpha)^T w_\alpha q_i(\alpha)^T w_\alpha + o(u_n^2) \end{aligned} \quad (1.32)$$

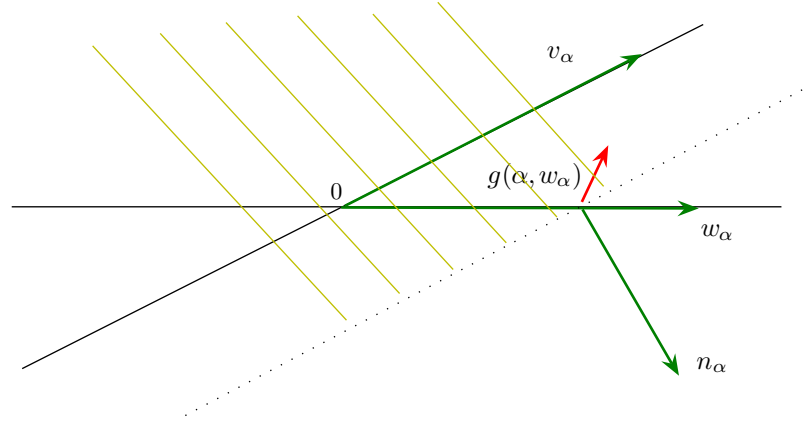
Keďže $g(0, w_0) \neq 0$ a $g(\alpha, w_\alpha)$ je spojitá funkcia α , tak existuje $\varepsilon_1 > 0$ také, že pre $|\alpha| < \varepsilon_1$ platí $g(\alpha, w_\alpha) \neq 0$. Teda taktiež $p(\alpha)^T w_\alpha \neq 0$. A keďže $h(u_n) = o(u_n)$, tak existuje $\delta_1(\alpha) > 0$ také, že pre $|u_n| < \delta_1(\alpha)$ platí $\operatorname{sgn} (p(\alpha)^T (u_n w_\alpha + h(u_n) v_\alpha)) = \operatorname{sgn} (u_n p(\alpha)^T w_\alpha)$. A teda

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + |u_n| u_n \frac{\delta |p(\alpha)^T w_\alpha|}{a_2(\alpha)\lambda_\alpha} (a_4(\alpha) q_1(\alpha)^T w_\alpha - a_2(\alpha) q_2(\alpha)^T w_\alpha) + o(u_n^2) \\ &= u_n + \frac{K(\alpha)}{\lambda_\alpha} |u_n| u_n + \omega(u_n), \end{aligned} \quad (1.33)$$

kde

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= \frac{1}{a_2(\alpha)} |p(\alpha)^T w_\alpha| (\delta a_4(\alpha), -\delta a_2(\alpha))^T Q(\alpha) w_\alpha = \\ &= \frac{1}{a_2(\alpha)} \det (|p(\alpha)^T w_\alpha| Q(\alpha) w_\alpha \quad v_\alpha) \end{aligned} \quad (1.34)$$

a $\omega(u_n) = o(u_n^2)$. Ako neskôr presnejšie formulujeme, keďže $\omega(u_n)$ je vyššieho rádu ako ostatné členy v (1.33), môžeme $\omega(u_n)$ pre dostatočne malé u_n zanedbať. Kľúčovým pre asymptotickú stabilitu nuly teda je znamienko $K(\alpha)$.



Obr. 1.4: Geometrický pohľad na asymptotickú stabilitu pevného bodu systému (1.9)

Geometrickou interpretáciou sa dostaneme k rovnakému výsledku. Dôležitá pre stabilitu systému (1.9) pre $\lambda_\alpha < 0$ je projekcia člena najnižšieho rádu $g(\alpha, w_\alpha)$, t.j. $|p(\alpha)^T w_\alpha| Q(\alpha) w_\alpha$ na w_α podľa v_α . Označme $n_\alpha = v_\alpha^\perp$ taký vektor, že $n_\alpha^T w_\alpha > 0$ (obr. 1.4). Potom

$$n_\alpha = \frac{\delta}{a_2(\alpha)\lambda_\alpha} (a_4(\alpha), -a_2(\alpha))^T. \quad (1.35)$$

Aby bol pevný bod systému (1.9) atraktorom, musí $g(\alpha, w_\alpha)$, presnejšie jeho členy najnižšieho rádu, t.j. $|p(\alpha)^T w_\alpha| Q(\alpha) w_\alpha$ ležať v polrovine (obr. 1.4) určenej podmienkou

$$n_\alpha^T |p(\alpha)^T w_\alpha| Q(\alpha) w_\alpha < 0. \quad (1.36)$$

Teda musí platiť práve

$$\frac{|p(\alpha)^T w_\alpha|}{a_2(\alpha)\lambda_\alpha} (\delta a_4(\alpha) q_1(\alpha)^T w_\alpha - \delta a_2(\alpha) q_2(\alpha)^T w_\alpha) < 0. \quad (1.37)$$

Keďže $K(\alpha)$ je spojitou funkciou α a $K(0) > 0$, tak existuje $\varepsilon_2 > 0$ také, že pre $|\alpha| < \varepsilon_2$ platí $K(\alpha) > 0$. A teda existuje $\delta_2(\alpha) > 0$ také, že pre $|u_n| < \delta_2(\alpha)$ je $|\omega(u_n)| < |u_n|^2 K(\alpha)/2|\lambda_\alpha|$ a navyše aj $|u_n| K(\alpha)/\lambda_\alpha > -1$. Z toho pre $\alpha < 0$ (teda $\lambda_\alpha < 0$), $|\alpha| < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ a $|u_n| < \min(\delta_1, \delta_2)$ dostávame, že platí:

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| &= |u_n(1 + \frac{K(\alpha)}{\lambda_\alpha}|u_n|) + \omega(u_n)| \leq |u_n|(1 + \frac{K(\alpha)}{\lambda_\alpha}|u_n|) + |\omega(u_n)| \\
&\leq |u_n|(1 + \frac{K(\alpha)}{\lambda_\alpha}|u_n|) + \frac{K(\alpha)}{2\lambda_\alpha}|u_n|^2 \leq |u_n|(1 + \frac{K(\alpha)}{2\lambda_\alpha}|u_n|) \\
&= |u_n|(1 - \frac{K(\alpha)}{2|\lambda_\alpha|}|u_n|) < |u_n|
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Analogicky pre $\alpha > 0$ (teda $\lambda_\alpha > 0$), $|\alpha| < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ a $|u_n| < \min(\delta_1, \delta_2)$ platí:

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| &= |u_n(1 + \frac{K(\alpha)}{\lambda_\alpha}|u_n|) + \omega(u_n)| \geq |u_n|(1 + \frac{K(\alpha)}{\lambda_\alpha}|u_n|) - |\omega(u_n)| \\
&\geq |u_n|(1 + \frac{K(\alpha)}{\lambda_\alpha}|u_n|) - \frac{K(\alpha)}{2\lambda_\alpha}|u_n|^2 \geq \\
&\geq |u_n|(1 + \frac{K(\alpha)}{2\lambda_\alpha}|u_n|) > |u_n|.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Z toho už priamo vyplýva pre $|\alpha| < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ asymptotická stabilita pevného bodu systému (1.31) pre $\alpha < 0$ a nestabilita pre $\alpha > 0$. Teda pre $|\alpha| < \varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ je nula asymptoticky stabilným pevným bodom (1.9) pre $\alpha < 0$ a asymptoticky stabilným pevným bodom inverzného systému pre $\alpha > 0$.

Kapitola 2

Prípád $a > 1$

V tejto kapitole prejdeme od štúdia všeobecných systémov späť ku konkrétnemu systému

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= G_1(x_n, y_n) = x_n + ay_n(1 - |x_n|)^+ - bx_n|x_n| \\y_{n+1} &= G_2(x_n, y_n) = +ay_n(1 - |x_n|)^+ - bx_n|x_n|\end{aligned}\quad (2.1)$$

ktorý je transformáciou modelu odchýlky od rovnovážneho výmenného kurzu (*Bodňová, 2004* [2]) spomínaného v úvode.

Z vety 1 z prvej kapitoly vieme, že nula je asymptoticky stabilným pevným bodom systému (2.1) pre $a < 1$, a nestabilným pevným bodom pre $a > 1$. Numerické simulácie však ukazujú, že má význam skúmať trajektórie (2.1) aj pre $a > 1$. Indikujú, že trajektórie bodov v okolí nuly sú ohraničené a konvergujú k invariantnej množine. Keďže G je na množine $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ homeomorfizmus, v prvej časti uvedieme vlastnosti homeomorfizmov, ktoré budeme ďalej potrebovať. Následne ukážeme ohraničenosť trajektórií pre konkrétne hodnoty parametrov a a v druhej časti odvodíme vlastnosti invariantnej množiny. Použitím Riemannovej vety a výsledkov na ňu naväzujúcich definujeme na nej rotačné číslo.

2.1 Základné vlastnosti homeomorfizmu

V ďalších častiach práce budeme pracovať so zobrazením G zúženým na oblasť $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, kde $G \equiv f$, $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f_1(x, y) = x + ay(1 - |x|) - b|x|x, \quad (2.2)$$

$$f_2(x, y) = ay(1 - |x|) - b|x|x. \quad (2.3)$$

Navyše G , teda aj f je na X homeomorfizmus (*Bodňová, 2004* [2]). Ako neskôr uvidíme, táto vlastnosť zobrazenia bude kľúčová. V tejto časti uvedieme

základné vlastnosti homeomorfizmov, ktoré budeme v ďalších dôkazoch potrebovať. Dôkaz nižšie uvedenej vety sa nachádza v diplomovej práci *Bodová (2004)* [2].

Definícia 2. Zobrazenie $G : X \rightarrow Y$, kde $X \subset \mathbb{R}^2$, $Y \subset \mathbb{R}^2$ sa nazýva homeomorfizmus, ak existuje k nemu inverzné zobrazenie G^{-1} a G aj G^{-1} sú spojité.

Veta 7. Nech $f : X \rightarrow Y$, kde $X \subset \mathbb{R}^2$, $Y \subset \mathbb{R}^2$, X a Y kompaktné, je homeomorfizmus. Potom platí:

- (1) $O \subset X$ je otvorená $\Leftrightarrow f(O) \subset Y$ je otvorená;
- (2) $K \subset X$ je kompaktná $\Leftrightarrow f(K) \subset Y$ je kompaktná;
- (3) $O \subset X$ je otvorená a súvislá $\Leftrightarrow f(O) \subset Y$ je otvorená a súvislá;
- (4) $x \in X \setminus \partial X \Leftrightarrow f(x) \in Y \setminus \partial Y$;
- (5) $x \in \partial X \Leftrightarrow f(x) \in \partial Y$.

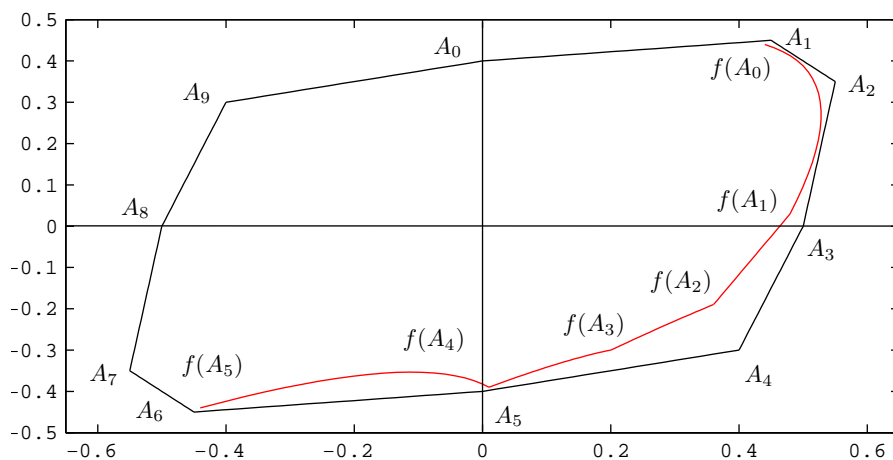
2.2 Ohraničenosť trajektórií

Numerické simulácie naznačujú, že v prípade, keď je pevný bod nestabilný (t.j. $a > 1$), sú trajektórie bodov dostatočne blízko k počiatku ohraničené, a konvergujú k invariantnej množine, ktorá leží v oblasti, kde je G homeomorfizmus. Existenciou a vlastnosťami invariantnej množiny sa budeme zaoberať v ďalších častiach práce.

V tejto časti dokážeme ohraničenosť trajektórií pre konkrétne hodnoty parametrov a a b . Ukážeme, že pre $a = 1.1$, $b = 1.2$ existuje $P \subset X$ taká, že $G(P) \subset P$, z čoho priamo plynie, že riešenie systému (2.1) pre počiatkové stavy v P je ohraničené. Presnejšie, ukážeme, že uvedené podmienky spĺňa oblasť ohraničená desaťuholníkom $A_0A_1 \dots A_9$, kde

$$\begin{array}{ll} A_0 = (0, 0.4) & A_5 = (0, -0.4) \\ A_1 = (0.45, 0.45) & A_6 = (-0.45, -0.45) \\ A_2 = (0.55, 0.35) & A_7 = (-0.55, -0.35) \\ A_3 = (0.5, 0) & A_8 = (-0.5, 0) \\ A_4 = (0.4, -0.3) & A_9 = (-0.4, 0.3) \end{array}$$

Veta 8 (O ohraničenosti trajektórií). Pre $a = 1.1$, $b = 1.2$ existuje oblasť $P \subset X$ s vlastnosťou $G(P) \subset P$.

Obr. 2.1: Desaťuholník ∂P a $f(\partial P \cap \{(x, y) : x > 0\})$

Dôkaz. Nech P je oblasť ohraničená desaťuholníkom $A_0A_1 \dots A_9$. Ukážeme, že P spĺňa podmienky vety. Keďže $P \subset X$, môžeme namiesto G uvažovať zobrazenie f definované predpisom (2.2)–(2.3). Pripomeňme, že f je na P homeomorfizmus. Dokážeme, že existuje $x \in \partial P : f(x) \in P \setminus \partial P$ a $f(\partial P) \cap \partial P = \emptyset$. Podľa bodu (5) vety 7 je $\partial f(P) = f(\partial P)$ a spolu s $f(0, 0) = (0, 0)$ a bodom (2) vety 7 z uvedeného priamo vyplýva $f(P) \subset P$.

Nahliadnime, že $f(A_i) \in P \setminus \partial P$ pre ľubovoľné i . Teda $x \in \partial P : f(x) \in P \setminus \partial P$ skutočne existuje. Keďže P je stredovo súmerná oblasť a f je nepárne zobrazenie, stačí sledovať f na $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1\}$. Tam platí:

$$f_1(x, y) = x + ay(1 - x) - bx^2 \quad (2.4)$$

$$f_2(x, y) = a(1 - x) - bx_2 \quad (2.5)$$

Transformáciou súradníc do $(m, n) = (x - y, y)$ dostaneme zobrazenie vo vhodnejšom tvare:

$$\xi = g_1(m, n) = m + n \quad (2.6)$$

$$\eta = g_2(m, n) = an(1 - (m + n)) - b(m + n)^2, \quad (2.7)$$

z čoho sa už ľahko dá vyjadriť inverzné zobrazenie ku $g = (g_1, g_2)$:

$$n = \frac{\eta + b\xi^2}{a(1 - \xi)}$$

$$m = \xi - \frac{\eta + b\xi^2}{a(1 - \xi)} \quad (2.8)$$

Pomocou (2.8) vieme zistiť, čo je obrazom úsečky $A_{i-1}A_i$ danej rovnicou $m = \varepsilon - (1 + \delta)n$ (v súradniciach (x, y) tomu zodpovedá $x = \varepsilon - \delta y$).

Dosadením za m, n z (2.8) a úpravou dostávame:

$$\eta = \frac{a}{\delta} \left(1 - \frac{b}{a} \delta\right) \xi^2 - \frac{a}{\delta} (1 + \varepsilon) \xi + \frac{a}{\delta} \varepsilon. \quad (2.9)$$

Označme $(m_i, n_i), (\mu_i, \nu_i)$ súradnice bodu A_i , resp. $f(A_i)$ v súradnicovom systéme (m, n) (t.j. $A_i = (m_i, n_i)$ a $f(A_i) = (\mu_i, \nu_i)$). Potom obrazom úsečky

$$n = \frac{\varepsilon}{1 + \delta} - \frac{1}{1 + \delta} m, \quad (2.10)$$

kde $m \in [m_{i-1}, m_i]$, je úsek paraboly (2.9) pre $\xi \in [\mu_{i-1}, \mu_i]$.

Treba dokázať, že $f(\partial P) \cap \partial P = \emptyset$. Avšak keďže P je stredovo súmerná a f je na P nepárna, stačí sledovať f na množine $X = \{(x, y) : x \geq 0\}$, teda stačí ukázať $f(\partial P \cap X) \cap \partial P = \emptyset$. Toto urobíme v piatich krokoch, kde v i -tom kroku dokážeme, že

$$f(\overline{A_{i-1}A_i}) \cap \partial P = \emptyset, \quad i = \{1, 2, 3, 4, 5\}. \quad (2.11)$$

Všeobecne je $f(\overline{A_{i-1}, A_i})$ v súradnicovom systéme (m, n) úsek paraboly (2.9) na intervale $[\mu_{i-1}, \mu_i]$. V i -tom kroku dôkazu treba overiť, že $f(\overline{A_{i-1}, A_i}) \cap \overline{A_{j-1}A_j} = \emptyset$ pre $j \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Keďže $f(A_i) \in P \setminus \partial P$, tak pre j také, že $[\mu_{i-1}, \mu_i] \cap [m_{j-1}, m_j]$ je prázdna množina, alebo jediný bod, je to zrejmé. Stačí si všímať tie j , pre ktoré je vnútro uvedeného prieniku neprázdne.

$\overline{A_{j-1}A_j}$ je v súradnicovom systéme (m, n) určená rovnicou

$$n = L_j(m) = \frac{\varepsilon_j}{1 + \delta_j} - \frac{1}{1 + \delta_j} m \quad (2.12)$$

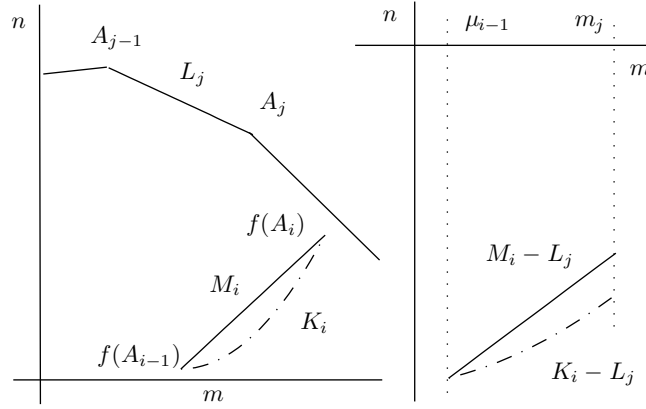
na $[m_{j-1}, m_j]$. $f(\overline{A_{i-1}A_i})$ je v súradniciach (m, n) daná

$$n = K_i(m) = \frac{a}{\delta_i} \left(1 - \frac{b}{a} \delta_i\right) m^2 - \frac{a}{\delta_i} (1 + \varepsilon_i) m + \frac{a}{\delta_i} \varepsilon_i \quad (2.13)$$

na $[\mu_{i-1}, \mu_i]$.

Označme $R_i = \{j : I_{ij} \text{ má vnútorný bod}\}$. Potom v i -tom kroku dôkazu treba overiť, že pre každé $j \in R_i$ nemajú grafy funkcií $K_i(m), L_j(m)$ na I_{ij} spoločný bod, resp. že nulové body funkcie $K_i(m) - L_j(m)$ ležia mimo intervalu I_{ij} . Keďže $K_i(m) - L_j(m)$ je kvadratická funkcia, jej nulové body sa dajú explicitne vyjadriť:

$$x_{1,2} = \frac{a \frac{1+\varepsilon_i}{\delta_i} - \frac{1}{1+\delta_j} \pm \sqrt{D_{ij}}}{2(a \frac{1}{\delta_i} - b)} \quad (2.14)$$



Obr. 2.2: Situácia $\text{sgn}(M_i(m) - L_j(m)) \neq \text{sgn}(a/\delta_i - b)$. Priebeh funkcie $K_i - L_j$ na intervale I_{ij}

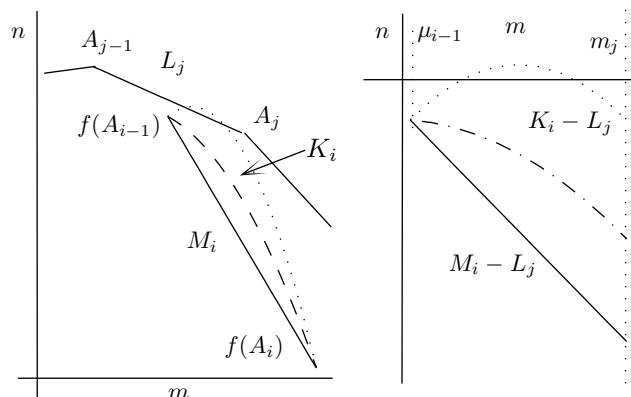
$$D_{ij} = \left(a \frac{1 + \varepsilon_i}{\delta_i} - \frac{1}{1 + \delta_j}\right)^2 - 4\left(a \frac{1}{\delta_i} - b\right)\left(a \frac{\varepsilon_i}{\delta_i} - \frac{\varepsilon_j}{1 + \delta_j}\right) \quad (2.15)$$

Označme $n = M_i(m)$ rovnicu popisujúcu úsečku $f(A_{i-1})f(A_i)$. Všimnime si teraz podrobnejšie funkcie $n = M_i(m) - L_j(m)$ a $n = K_i(m) - L_j(m)$ a súvis medzi nimi. Keďže P je konvexná oblasť a navyše pre ľubovoľné i platí $f(A_i) \in P \setminus \partial P$, tak $\overline{f(A_{i-1})f(A_i)} \cap \overline{A_{j-1}A_j} = \emptyset$ pre ľubovoľné i, j . Teda $n = M_i(m) - L_j(m)$ je lineárna a na I_{ij} sa jej znamienko nemení. Funkcia $n = K_i(m) - L_j(m)$ je kvadratická a o jej konvexnosti rozhoduje koeficient pri kvadratickom člene $(a/\delta_i - b)$. Z konštrukcie $M_i(m)$ vyplýva, že $K_i(m) = M_i(m)$ pre $m \in \{\mu_{i-1}, \mu_i\}$.

To znamená, že ak $a/\delta_i - b < 0$ (t.j. $n = K_i(m)$ je konkávna a leží na I_{ij} nad grafom $n = M_i(m)$) a $\text{sgn}(M_i(m) - L_j(m)) > 0$ a (obr. 2.2) (t.j. graf $n = M_i(m)$ leží na I_{ij} nad grafom $n = L_j(m)$), potom na I_{ij} platí $K_i(m) - L_j(m) \geq M_i(m) - L_j(m) > 0$. A teda K_i nemá prienik s L_j na I_{ij} . Analogicky v prípade $\text{sgn}(M_i(m) - L_j(m)) < 0$ a $a/\delta_i - b > 0$ dostaneme, že $K_i(m) - L_j(m)$ nemá nulový bod na I_{ij} .

Označme $S_i = \{j \in R_j : \text{sgn}(M_i(m) - L_j(m)) = \text{sgn}(a/\delta_i - b)\}$. Z uvedého vyplýva, že sa stačí zaoberať takými dvojicami (i, j) , pre ktoré $j \in S_i$, v tých prípadoch totiž nevieme všeobecne vylúčiť možný prienik K_i s L_j na I_{ij} (obr. 2.3).

Jednotlivé parametre ε_i, δ_i , takisto aj súradnice bodov $A_i, f(A_i)$ v súradnicovom systéme (m, n) a I_{ij}, R_j sa dajú explicitne vyjadriť z pôvodných



Obr. 2.3: Situácia $\text{sgn}(M_i(m) - L_j(m)) = \text{sgn}(a/\delta_i - b)$ pre rôzne K_i . Priebeh funkcie $K_i - L_j$ na I_{ij}

súradníc A_i , $f(A_i)$ v súradnicovom systéme (x, y) . Takisto vieme určiť S_i . Keďže tieto numerické výpočty sú pomerne rozsiahle, sú uvedené v prílohe A. S týmito údajmi už môžeme pristúpiť k záveru dôkazu.

- (1) $f(\overline{A_0 A_1})$: $S_1 = \{2, 3\}$. Podrobnejšie treba ukázať, že $f(\overline{A_0 A_1})$ nemá prienik

- (a) s $\overline{A_1 A_2}$ na I_{12} :

$$\begin{aligned} D_{12} &= \left(a \frac{1 + \varepsilon_1}{\delta_1} - \frac{1}{1 + \delta_2}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{\delta_1} - b\right)\left(a \frac{\varepsilon_1}{\delta_1} - \frac{\varepsilon_2}{1 + \delta_2}\right) = \\ &= \dots = -\frac{1.5944}{81} < 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

- (b) a s $\overline{A_2 A_3}$ na I_{13} .

$$\begin{aligned} D_{13} &= \left(a \frac{1 + \varepsilon_1}{\delta_1} - \frac{1}{1 + \delta_3}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{\delta_1} - b\right)\left(a \frac{\varepsilon_1}{\delta_1} - \frac{\varepsilon_3}{1 + \delta_3}\right) = \\ &= \dots = -\frac{109.2384}{2916} < 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

- (2) $f(\overline{A_1 A_2})$: $S_2 = \{3, 4\}$. Overiť ostáva, že neexistuje prienik $f(\overline{A_1 A_2})$

- (a) s $\overline{A_2 A_3}$ na $I_{23} = [0.45, 0.5]$. Treba dokázať, že nulové body kvadratickej funkcie

$$\left(\frac{a}{\delta_2} - b\right)m^2 - \left(a \frac{1 + \varepsilon_2}{\delta_2} - \frac{1}{1 + \delta_3}\right)m + \left(a \frac{\varepsilon_2}{\delta_2} - \frac{\varepsilon_3}{1 + \delta_3}\right) \quad (2.18)$$

ležia mimo I_{23} . Vrchol paraboly $K_2 - L_3$ je v bode m_{23}^* , kde

$$m_{23}^* = \frac{a \frac{1+\varepsilon_2}{\delta_2} - \frac{1}{1+\delta_3}}{2\left(\frac{a}{\delta_2} - b\right)} = \dots = -\frac{5.54}{1.2} < 0 < 0.45, \quad (2.19)$$

teda mimo $I_{23} = [0.45; 0.5]$. Čiže funkcia je na I_{23} monotónna a stačí overiť, že má v krajných bodoch intervalu rovnaké znamienko.

$$-0.10 \cdot 0.45^2 - \frac{5.54}{6} \cdot 0.45 + \frac{2.44}{6} = -\frac{0.1745}{6} < 0 \quad (2.20)$$

$$-0.10 \cdot 0.5^2 - \frac{5.54}{6} \cdot 0.5 + \frac{2.44}{6} = -\frac{0.48}{6} < 0 \quad (2.21)$$

(b) s $\overline{A_3 A_4}$ na $I_{24} = [0.5; 0.55]$. Treba dokázať, že nulové body kvadratickej funkcie

$$\left(\frac{a}{\delta_2} - b\right)m^2 - \left(a \frac{1+\varepsilon_2}{\delta_2} - \frac{1}{1+\delta_4}\right)m + \left(a \frac{\varepsilon_2}{\delta_2} - \frac{\varepsilon_4}{1+\delta_4}\right) \quad (2.22)$$

ležia mimo $I_{24} = [0.5; 0.55]$. Vrchol paraboly $K_2 - L_4$ je v bode m_{24}^* , kde

$$m_{24}^* = \frac{a \frac{1+\varepsilon_2}{\delta_2} - \frac{1}{1+\delta_4}}{2\left(\frac{a}{\delta_2} - b\right)} = \dots = -\frac{0.59}{0.2} < 0 < 0.5, \quad (2.23)$$

teda mimo I_{24} a funkcia je na I_{24} monotónna. Treba už len overiť, že má v krajných bodoch intervalu rovnaké znamienko.

$$-0.10 \cdot 0.5^2 - 0.59 \cdot 0.45 + 0.24 = -0.08 < 0 \quad (2.24)$$

$$-0.10 \cdot 0.55^2 - 0.59 \cdot 0.5 + 0.24 = -0.11475 < 0 \quad (2.25)$$

(3) $f(\overline{A_2 A_3})$: $S_3 = \{4\}$ a teda treba dokázať, že $f(\overline{A_2 A_3})$ nemá prienik

(a) s $\overline{A_3 A_4}$ na I_{34} . Treba dokázať, že nulové body kvadratickej funkcie

$$\left(\frac{a}{\delta_3} - b\right)m^2 - \left(a \frac{1+\varepsilon_3}{\delta_3} - \frac{1}{1+\delta_4}\right)m + \left(a \frac{\varepsilon_3}{\delta_3} - \frac{\varepsilon_4}{1+\delta_4}\right) \quad (2.26)$$

ležia mimo $I_{24} = [0.5; 0.55]$. Vrchol paraboly $K_3 - L_4$ je v bode m_{34}^* , kde

$$m_{34}^* = \frac{a \frac{1+\varepsilon_3}{\delta_3} - \frac{1}{1+\delta_4}}{2\left(\frac{a}{\delta_3} - b\right)} = \dots = \frac{13.05}{17.8} > 0.7 > 0.5, \quad (2.27)$$

teda mimo I_{34} a funkcia je na I_{34} monotónna. Treba už len overiť, že má v krajných bodoch intervalu rovnaké znamienko.

$$-8.90.5^2 + 13.050.45 - 4.6 = -0.3 < 0 \quad (2.28)$$

$$-8.90.55^2 + 13.050.5 - 4.6 = -0.11475 < 0 \quad (2.29)$$

(4) $f(\overline{A_3A_4})$: $S_4 = \{3\}$ a stačí overiť, že neexistuje prienik $f(\overline{A_3A_4})$ s

(a) $\overline{A_2A_3}$ na I_{43} . Keďže determinant funkcie

$$\begin{aligned} D_{43} &= \left(a \frac{1 + \varepsilon_3}{\delta_3} - \frac{1}{1 + \delta_4}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{\delta_3} - b\right)\left(a \frac{\varepsilon_3}{\delta_3} - \frac{\varepsilon_4}{1 + \delta_4}\right) = \\ &= \dots = -\frac{100.31}{36} < 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

je záporný, funkcia nemá nulové body.

(5) $f(\overline{A_4A_5})$: $S_5 = \{2, 3\}$. Dokázať treba, že $f(\overline{A_4A_5})$ nemá prienik

(a) s $\overline{A_1A_2}$ na I_{52}

$$\begin{aligned} D_{52} &= \left(a \frac{1 + \varepsilon_5}{\delta_5} - \frac{1}{1 + \delta_2}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{\delta_5} - b\right)\left(a \frac{\varepsilon_5}{\delta_5} - \frac{\varepsilon_2}{1 + \delta_2}\right) = \\ &= \dots = -3.774775 < 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

(b) a s $\overline{A_2A_3}$ na I_{53} .

$$\begin{aligned} D_{53} &= \left(a \frac{1 + \varepsilon_5}{\delta_5} - \frac{1}{1 + \delta_3}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{\delta_5} - b\right)\left(a \frac{\varepsilon_5}{\delta_5} - \frac{\varepsilon_3}{1 + \delta_3}\right) = \\ &= \dots = -\frac{89.8919}{36} < 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Teda $f(\partial P) \subset P \setminus \partial P$ a z toho $f(P) \subset P$ □

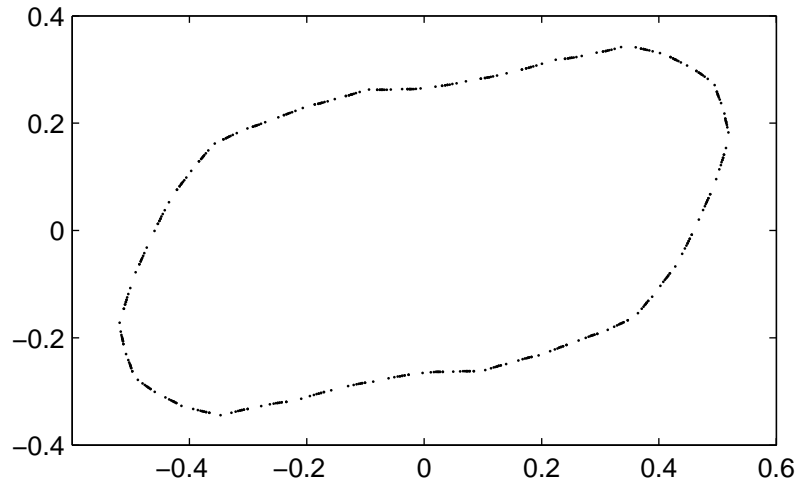
Poznámka 1. Keďže G je homeomorfizmus, tak zo spojitosti dostávame, že $G(P) \subset P$ aj v určitom okolí bodu $a = 1.1$, $b = 1.2$.

Poznámka 2. Analogický dôkaz vieme previesť pre $a = 1$, $b = 1.3$ a oblasť ohraničenú desaťuholníkom.

$$\begin{array}{ll} A_0 = (0, 0.3) & A_5 = -A_0 \\ A_1 = (0.4, 0.35) & A_6 = -A_1 \\ A_2 = (0.45, 0.05) & A_7 = -A_2 \\ A_3 = (0.35, -0.15) & A_8 = -A_3 \\ A_4 = (0.23, -0.23) & A_9 = -A_4 \end{array}$$

2.3 Vlastnosti invariantnej množiny

Ako už bolo spomenuté v predchádzajúcej časti, numerické simulácie indikujú, že trajektórie bodov konvergujú k invariantnej množine (obr. 2.3). V tejto časti nadviažeme na výsledok z diplomovej práce (Boďová, 2004 [2]) o existencii monotónnej postupnosti uzavretých kriviek:



Obr. 2.4: Invariantná množina pre $a = 1.3$, $b = 1$

Veta 9. *Nech G je definované (2.1). Potom existuje postupnosť $K_i \in \mathbb{R}^2$, kde $K_{i+1} = G(K_i)$ taká, že K_i je súvislá, kompaktná a platí:*

- (1) ∂K_i je homeomorfná s kružnicou
- (2) $\partial K_i \cap \partial K_{i+1} = \emptyset$
- (3) $K_i \subset K_{i+1}$

pre každé $i \in \mathbb{R}$ kým $K_i \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$.

Pre konkrétne hodnoty parametrov a , b sme ukázali, že existuje $P \subset X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ taká, že $G(P) \subset P$, kde G je určené (2.1). Keďže G je na X homeomorfizmus, spolu s predchádzajúcou vetou dostávame, že $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \subset P$.

Poznamenajme, že Boďová (2004) [2] dokázala, že $\partial K = \partial \bigcup K_i$, ktorú nazývame invariantná množina, je naozaj množinou ω -limitných bodov zobrazenia G a na základe vety uvedenej v Robinson (1995)[13], pp. 23 je skutočne invariantná.

V tejto časti sa budeme zaoberať množinou K a jej vlastnosťami. Poznamenajme, že o K môžeme hovoriť len pre konkrétne hodnoty parametrov a, b , pre ktoré máme dokázaný výsledok o ohraničenosti trajektórií. Najprv dokážeme niekoľko pomocných tvrdení, ktoré nám pomôžu odvodiť, že K je jednoducho súvislá. Tento výsledok je dôležitý, lebo nám umožní aplikovať Riemannovu vetu o mapách, čím ukážeme, že existuje bijektívne a holomorfné zobrazenie, ktoré K zobrazí na jednotkový disk.

Najprv definujeme pojmy, ktoré v tejto časti budeme potrebovať.

Definícia 3. *Množina S sa nazýva nesúvislá, ak existujú dve disjunktné otvorené množiny U, V také, že platí:*

- (a) $U \cup V \supseteq S$,
- (b) $U \cap S, V \cap S$ sú neprázdne.

Definícia 4. *Množina S sa nazýva súvislá, ak nie je nesúvislá.*

Definícia 5. *Nech $S \in \mathbb{R}^2$ je otvorená. Potom S je jednoducho súvislá práve vtedy, keď S aj komplement S v Riemannovej sfére sú súvislé.*

Keďže sa v tejto časti zaoberáme len podmnožinami P , kde $P \subset X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$, tak za priestor môžeme považovať množinu X . Potom ľubovoľná podmnožina P je jednoducho súvislá, ak je súvislá a aj jej komplement v X je súvislý.

Najprv ukážeme, že K je otvorená. Vieme, že spočítateľné zjednotenie otvorených množín je otvorená množina. Nájdeme teda postupnosť otvorených množín, ktorých zjednotením dostaneme K . K_i sú sice uzavreté, ale $L_i = K_i \setminus \partial K_i$ je otvorená pre každé i . Ukážeme, že $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$.

Veta 10. *Nech $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$. Potom $L=K$.*

Dôkaz. Sporom. Predpokladajme, že $L \neq K$. Keďže $L_i \subset K_i$, tak $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = K$. Teda existuje $x \in K$ také, že $x \notin L$ (a teda $x \notin L_i$ pre každé i). Potom existuje najmenšie j také, že $x \in K_j$. Z $x \notin L_j$ vyplýva $x \in \partial K_j$. Keďže $K_{j+1} \supset K_j$, tak $x \in K_{j+1}$. Keďže $x \notin L_{j+1}$, tak $x \in \partial K_{j+1}$. Z toho $\partial K_j \cap \partial K_{j+1} \neq \emptyset$ a dostávame spor. Teda $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = K$. \square

Veta 11. *L_i je jednoducho súvislá pre každé i .*

Dôkaz. Najprv dokážeme, že L_i je súvislá pre každé i . Sporom. Uvažujme najmenšie i také, že L_i nie je súvislá. Čiže L_{j-1} je súvislá a existujú disjunktné otvorené U_i, V_i také, že $U_i \cup V_i \supseteq L_i$, $U_i \cap L_i, V_i \cap L_i$ sú neprázdne. f je na množine X homeomorfizmus, teda z vety 7 vyplýva $f(\partial K_{i-1}) = \partial K_i$. Z toho dostávame $f(L_{i-1}) = L_i$. Navyše existujú $U_{j-1} = f^{-1}(U_j)$, $V_{j-1} = f^{-1}(V_j)$, kde U_{j-1}, V_{j-1} sú neprázdne, disjunktné a otvorené (z vety 7) a platí:

$$U_{j-1} \cup V_{j-1} = f^{-1}(U_j) \cup f^{-1}(V_j) = f^{-1}(U_j \cup V_j) \supseteq f^{-1}(L_j) = L_{j-1} \quad (2.33)$$

Teda L_{j-1} nie je súvislá a dostávame spor.

Dokážeme sporom, že L_i je jednoducho súvislá pre každé i . Keďže $L_i \subset P \subset X$, kde $x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, tak stačí uvažovať ako priestor množinu X , t.j. množinu, na ktorej je f homeomorfizmus. Z konštrukcie K_i vyplýva, že L_1 je jednoducho súvislá (K_1 je oblasť ohraničená elipsou). Nech $M = \{i; L_i \text{ nie je jednoducho súvislá}\}$ je neprázdna a j je jej minimálny prvok. Označme $S_i = X \setminus L_i$. Potom keďže L_j je súvislá, tak S_j je nesúvislá, teda existujú disjunktné otvorené množiny U_j, V_j také, že $U_j \cup V_j \supseteq S_j$ a $U_j \cap S_j, V_j \cap S_j$ sú neprázdne. Keďže f je na X homeomorfizmus, môžeme definovať $U_{j-1} = f^{-1}(U_j)$, $V_{j-1} = f^{-1}(V_j)$. Keďže $f^{-1}(\partial K_j) = \partial K_{j-1}$, tak navyše platí $S_{j-1} = f^{-1}(S_j)$. Potom z vety 7 vyplýva, že U_{j-1}, V_{j-1} sú otvorené, disjunktné a platí:

$$U_{j-1} \cup V_{j-1} = f^{-1}(U_j) \cup f^{-1}(V_j) = f^{-1}(U_j \cup V_j) \supseteq f^{-1}(S_j) = S_{j-1} \quad (2.34)$$

Navyše $U_{j-1} \cap S_{j-1} = f^{-1}(U_j) \cap f^{-1}(S_j) = f^{-1}(U_j \cap S_j)$, čiže $U_{j-1} \cap S_{j-1}$ a analogicky $V_{j-1} \cap S_{j-1}$ sú neprázdne. Z toho plynie, že S_{j-1} je nesúvislá, a teda L_{i-1} nie je jednoducho súvislá a dostávame sa k sporu. \square

Veta 12. K je súvislá.

Dôkaz. Sporom. Predpokladajme, že K je nesúvislá. Teda z definície existujú disjunktné a otvorené množiny U, V také, že $U \cup V \supseteq K$ a $U \cap K, V \cap K$ sú neprázdne. K_1 je súvislá a keďže $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = K \subseteq U \cup V$, tak jedna z množín $U \cap K_1, V \cap K_1$ je prázdna. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to U . Keďže $U \cap K$ je neprázdna, tak existuje $x \in U \cap K$. Teda $x \in K$ a keďže $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, tak existuje najmenšie j také, že $x \in K_j$. Čiže $x \in K_j \cap U$ a z toho $K_j \cap U \neq \emptyset$. Avšak $K_1 \subseteq K_j$ a teda $K_j \cap V \supseteq K_1 \cap V \neq \emptyset$. Z toho dostávame, že K_j je nesúvislá, čo je v spore s tým, že K_i je súvislá pre každé i . Teda K je súvislá. \square

Veta 13. K je jednoducho súvislá.

Dôkaz. Keďže $L_i \subset P \subset X$, stačí uvažovať ako priestor množinu X , t.j. množinu, na ktorej je f homeomorfizmus. Sporom. Predpokladajme, že K nie je jednoducho súvislá.

Potom zo súvislosti K dostávame, že

$$S = X \setminus K = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus L_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i \quad (2.35)$$

nie je súvislá. Čiže existujú disjunktné a otvorené množiny U, V také že $U \cup V \supseteq S$ a $U \cap S, V \cap S$ sú neprázdne. Označme $T_i = S_i \setminus (U \cup V)$. Keďže L_i, U, V sú otvorené, tak T_i je uzavretá. Navyše keďže S_i je súvislá, tak T_i je neprázdna. Platí $T_{i+1} \subseteq T_i$. Keďže $K_{i+1} \supset K_i$ a $\partial K_{i+1} \cap \partial K_i = \emptyset$, tak $\partial K_i \cap \partial K_j = \emptyset$ pre $i \neq j$. Teda $T = \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$ je neprázdna a platí:

$$T = \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (S_i \setminus (U \cup V)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \setminus (U \cup V) = S \setminus (U \cup V) \neq \emptyset. \quad (2.36)$$

Tým sme dostali spor s predpokladom $U \cup V \supseteq S$, teda S je súvislá a K je jednoducho súvislá. \square

2.4 Riemannova veta

Riemannova veta sama o sebe poskytuje dôležité tvrdenie v komplexnej analýze. Zaručuje, že ľubovoľná otvorená a jednoducho súvislá podmnožina komplexnej roviny (okrem celej \mathbb{C}) sa dá bijektívne a holomorfné zobrazit' na jednotkový disk. Toto tvrdenie je do značnej miery prekvapivé, keďže jednoducho súvislé množiny v \mathbb{C} môžu byť komplikované, napr. ich hranicou môže byť v žiadnom bode nediferencovateľná krivka nekonečnej dĺžky, aj keď množina sama o sebe je ohraničená. Skutočnosť, že takáto množina sa dá bijektívne a uhly zachovávajúcou funkciou zobrazit' na jednotkový disk vôbec nie je intuitívna.

Veta 14 (Riemannova). *Nech $U \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ je otvorená a jednoducho súvislá. Potom existuje bijektívne holomorfné zobrazenie $h : U \rightarrow D$, kde D je otvorený jednotkový disk.*

Keďže h je bijektívne a holomorné, h je konformné zobrazenie, a teda aj uhol zachovávajúce. Intuitívne povedané, také zobrazenie zachová tvar dostatočne malého vzoru, len jeho otočením, alebo natiahnutím.

Dodajme ešte, že f je v podstate jednoznačná : ak $x \in U$ a ϕ je ľubovoľný uhol, potom existuje jediné zobrazenie h spĺňajúce vyššie uvedené

podmienky s doplňujúcou vlastnosťou: $h(x) = 0$ a argument derivácie h v bode x je rovný ϕ .

V našom prípade Riemannova veta zaručuje existenciu konformného zobrazenia $h : K \rightarrow D$, teda implikuje, že K je homeomorfná s jednotkovým diskom. Toto je kľúčové pre zavedenie teórie rotačného čísla f na ∂K . Aj keď numerické simulácie naznačujú, že ∂K je homeomorfná kružnici, v skutočnosti to nemusí byť pravda. Body ∂K môžeme rozlíšiť na dosiahnuteľné (cestou z vnútra K) a nedosiahnuteľné. Pre orientáciu zachovávajúci homeomorfizmus G majú dosiahnuteľné body ∂K dobre definované rotačné číslo. Výsledky nadväzujúce na Riemannovu vetu o zobrazení (*Alligood, York 1992* [1], *Collingwood, Lohwater 1966* [6]) umožňujú definovať rotačné číslo homeomorfizmu G na ∂K nasledovne.

Caratheodory (1913) [4] zaručuje existenciu kompaktifikácie K^* množiny K takej, že homeomorfizmus $h : K \rightarrow D$ sa dá rozšíriť na K^* . Označme h^* rozšírenie h na K^* . Zobrazenie $\hat{G} = h^* \circ G \circ (h^*)^{-1}$ je orientáciu zachovávajúci homeomorfizmus $\bar{D} \setminus D \rightarrow \bar{D} \setminus D$ a teda má rotačné číslo $\rho(\hat{G})$. Definujeme $\rho(G) = \rho(\hat{G})$.

Ostáva otvorená otázka, či je G definované v našom prípade (2.1) orientáciu zachovávajúce. Numerické simulácie to naznačujú, na dôkaze momentálne pracujeme. Problémom rotačného čísla ako funkcie parametra navyše je, že nie je jasná závislosť kompaktifikácie od parametra.

Kapitola 3

Rotačné číslo

V tejto kapitole predstavujeme základy teórie okolo pojmu rotačného čísla. Rotačné číslo je invariantná charakteristika orientáciu zachovávajúceho zobrazenia f z kružnice na kružnicu, ktorá postihuje kvalitatívne znaky zobrazenia. Inými slovami, podstatu dynamiky trajektórie iterácií f vieme uchopiť jediným číslom. Rotačné číslo takisto zachytáva existenciu periodických bodov zobrazenia.

V prvej časti definujeme pojem rotačného čísla pomocou liftu zobrazenia f (Hale, Koçak 1991 [10]) a uvádzame jeho vlastnosti. Predstavujeme alternatívnu definíciu (Guckenheimer, Holmes 1983 [9]), ktorá nám umožní z iného pohľadu porozumieť jeho invariantnosti. V druhej časti sa zaoberáme rotačným číslom zobrazenia závislým na parametri ako funkciou daného parametra. Uvádzame typické znaky a vlastnosti týchto funkcií.

3.1 Definícia rotačného čísla

Definícia 6. *Nech $f : S^1 \rightarrow S^1$ je homeomorfizmus kružnice. Homeomorfizmus $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je liftom zobrazenia f , ak platí $f(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi iF(\theta)}$.*

Podotknime, že F nie je určené jednoznačne, avšak ak F aj G sú liftom f , tak $F = G + n$ pre nejaké $n \in \mathbb{Z}$. Pomocou liftu f vieme jednoducho objasniť aj pojem orientáciu zachovávajúci homeomorfizmus. f je orientáciu zachovávajúci homeomorfizmus, ak F je neklesajúca.

Pomocou liftu F môžeme definovať rotačné číslo f .

Definícia 7. *Nech f je orientáciu zachovávajúci homeomorfizmus a F jeho lift. Označme*

$$\rho_0(F, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) - t}{n}. \quad (3.1)$$

Číslo

$$\rho(f) = \rho_0(F, t) \pmod{1} \quad (3.2)$$

nazývame rotačné číslo zobrazenia f .

Geometricky môžeme $\rho(f)$ vnímať ako priemerný uhol otočenia bodu t na kružnici iteráciou f . Ako definícia navodzuje, $\rho(f)$ je invariant zobrazenia f a ako uvidíme neskôr, popisuje jeho základné kvalitatívne črty. Základné vlastnosti rotačného čísla zhrňa nasledovná veta.

Veta 15. *Nech S^1 je orientáciu zachovávajúci homeomorfizmus s liftom F . Potom*

- (1) *limita definujúca $\rho_0(F, t)$ existuje a je nezávislá od $t \in \mathbb{R}$,*
- (2) *$\rho(f)$ nezávisí od voľby F a*
- (3) *$\rho(f)$ je spojitá v f .*

Do akej miery zachytáva $\rho(f)$ dynamiku trajektórií bodov nám predstaví nasledujúca veta. Racionalita rotačného čísla totiž úzko súvisí s existenciou periodických bodov zobrazenia f .

Veta 16. *$\rho(f) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f$ má periodický bod. Presnejšie $\rho(f) = p/q$, kde p/q je v normalizovanom tvare, práve vtedy keď f má periodický bod periódy p .*

3.1.1 Alternatívna definícia

Rotačné číslo môžeme definovať úplne iným spôsobom, ktorý je však vyššie načrtnutému ekvivalentný. Alternatívna definícia nm umožní z inej strany uchopiť pojem rotačného čísla a jeho jednoznačnosť. Neskôr pomocou nej budeme simulovať rotačné číslo G .

Označme S^1 jednotkovú kružnicu a uvažujme homeomorfizmus $f : S^1 \rightarrow S^1$. S^1 vnímame ako množinu $\{e^{2\pi i\theta}\}$, kde θ uvažujeme ($\pmod{1}$). Dôležitým predpokladom je vlastnosť zachovania orientácie. Na S^1 máme orientáciu, ktorú by f malo zachovávať. Môžeme formulovať nasledovne: Nech $f : S^1 \rightarrow S^1$ je orientáciu zachovávajúci difeomorfizmus a $x < y < z$ v zmysle orientácie S^1 . Potom $f(x) < f(y) < f(z)$. Táto požiadavka zachovania orientácie značne ovplyvňuje dynamiku zobrazenia na kružnici, asi do tej miery, že f má asymptoticky "skoro" rovnakú dynamiku ako pevné otočenie R_α definované predpisom $R_\alpha = \theta + \alpha$.

Nech $f : S^1 \rightarrow S^1$ je orientáciu zachovávajúci difeomorfizmus a zvolíme orientáciu S^1 . Zvolíme ľubovoľný bod $x \in S^1$ a rozdelíme S^1 na dva oblúky $I_0 = [x, f(x))$ a $I_1 = [f(x), x)$. Pre ľubovoľný bod $y \in S^1$, definujeme

$$\rho_y(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\text{počet prvkov množiny } \{f^i(y) \mid 0 \leq i \leq n \wedge f^i(y) \in I_0\}). \quad (3.3)$$

trajektórie y , ktoré ležia v I_0 . Zaujímavé sú vlastnosti takto definovaného $\rho_y(f)$.

Veta 17. $\rho_y(f)$ existuje a je nezávislé od y .

S touto vetou uvádzame aj podstatu jej dôkazu, ktorý nám umožní lepšie nahliadnúť príčiny tejto invariantnosti.

Dôkaz. Označme $N(y, k)$ počet prvkov množiny $\{f^i(y) \mid 0 \leq i \leq n \wedge f^i(y) \in I_0\}$ a teda $\rho_y(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/nN(y, n)$. Pre N platí:

$$(1) \quad N(y, k+l) = N(y, k) + N(f^k(y), l); \quad (3.4)$$

(2) Pre ľubovoľné $y, z \in S^1$ a $k \in \mathbb{Z}$

$$|N(y, k) - N(z, k)| \leq 1. \quad (3.5)$$

Prvé pozorovanie plynie priamo z definície. Druhú časť dostaneme analýzou bodov nespojitosti funkcie $N(y, k)$ premennej y . Keďže hranicu I_0 tvoria body x a $f(x)$, body nespojitosti musia byť tvaru $f^{-i}(x)$ pre $k \geq i \geq -1$. Ak však $y < z$ a y, z sú dostatočne blízko $f^{-1}(x)$ a $y < f^{-i}(x) < z$, tak $f^i(y) < x < f^i(z) < f(x)$ a $f^{i+1}(y) < f(x) < f^{i+1}(z)$. Teda jediné možné body nespojitosti sú $f^{-k}(x)$ a $f(x)$. Ak $f^{-k}(x) \neq f(x)$, potom $f^{-k}(x)$ a $f(x)$ rozdeľujú S^1 na dva oblúky, na ktorých je $N(y, k)$ konštantná s hodnotami líšiacimi sa o jedna.

Z týchto pozorovaní dostávame nerovnosť

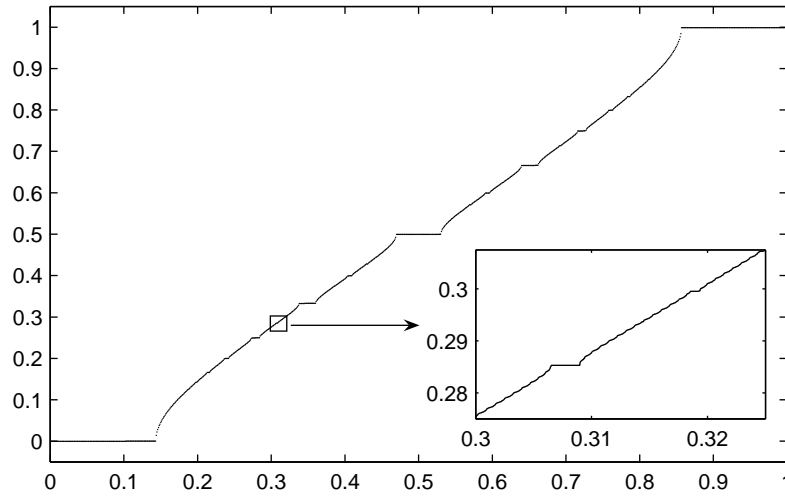
$$|N(y, nk+l) - (nN(y, k) + N(y, l))| \leq n. \quad (3.6)$$

A pre $n \rightarrow \infty$ vidíme, že $\rho_y(f)$ existuje a

$$|\rho_y(f) - \frac{1}{k}N(y, k)| \leq \frac{1}{k}. \quad (3.7)$$

Spolu s (3.5) ihneď dostávame, že $\rho_y(f)$ je nezávislé od y a môžeme písať $\rho(f)$. Číslo $\rho(f)$ je rotačným číslom f . \square

Poznámka 3. Analogickou úvahou, len pre priebeh $N(y, k)$ pri zmene bodu x , sa dá ukázať, že $\rho(f)$ je nezávislé aj na voľbe x , ak $\rho(f) \neq 0$ alebo 1.



Obr. 3.1: Graf rotačného čísla $\rho(\omega, \bar{\epsilon})$ ako funkcia ω pre pevné $0 < \bar{\epsilon} \leq 1$.

3.2 Rotačné číslo v závislosti od parametra

Ako aj v našom prípade, často je potrebné zaoberať sa zobrazením závislým na parametri. Teória o rotačnom čísle nám poskytuje určité výsledky pri štúdiu takýchto zobrazení.

Skúmajme najprv na príklade, ako môže vyzeráť $\rho(\lambda)$. Uvažujme

$$f(\omega, \epsilon, x) = F(\omega, \epsilon, x) \pmod{1} = \omega + x + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin(2\pi x) \pmod{1} \quad (3.8)$$

Pre $0 \leq \epsilon < 1$ je $f : S^1 \rightarrow S^1$ difeomorfizmus, keďže $F(\omega, \epsilon, x + 1) = F(\omega, \epsilon, x) + 1$ a $(d/dx)F(\omega, \epsilon, x) > 0$. Pre $\epsilon = 1$ je f homeomorfizmus, pre $\epsilon > 1$ nie je bijektívne. Rotačné číslo f teda môžeme uvažovať pre $0 \leq \epsilon \leq 1$.

$$\rho(\omega, \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(\omega, \epsilon, x_0) - x_0}{n} \quad (3.9)$$

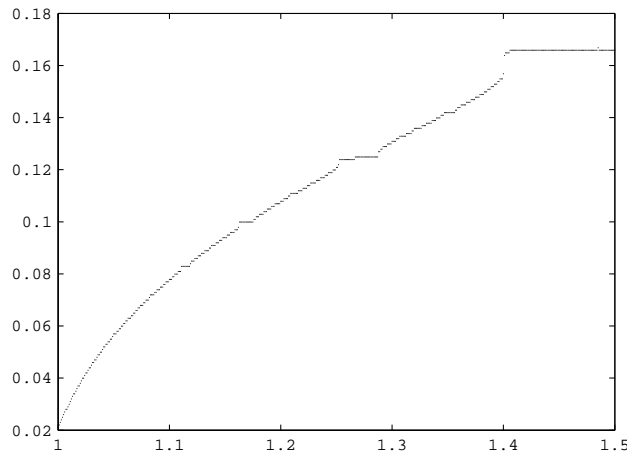
Pre $\epsilon = 0$ prípad degeneruje na pevné otočenie o uhol ω , čiže $\rho(\omega, 0) = \omega$. Pre každé pevné $\epsilon = \bar{\epsilon}$, kde $0 < \bar{\epsilon} \leq 1$, má rotačné číslo $\rho(\omega, \bar{\epsilon})$ nasledovné vlastnosti.

- (1) $\rho(\omega, \bar{\epsilon})$ je neklesajúca a spojitá funkcia ω .
- (2) Pre ľubovoľné racionálne p/q existuje interval $I_{p/q}$ s neprázdny vnútorom taký, že pre každé $\omega \in I_{p/q}$ je $\rho(\omega, \bar{\epsilon}) = p/q$.
- (3) Pre ľubovoľné α iracionálne existuje jediné ω také, že $\rho(\omega, \bar{\epsilon}) = \alpha$.

Typický priebeh $\rho(\omega, \bar{\epsilon})$ pre pevné $0 < \bar{\epsilon} \leq 1$, nazývaný "Diablovo schodisko" (obr. 3.2) je príkladom Cantorovej funkcie.

Všeobecnejšie sa o priebehu $\rho(\lambda)$ ako funkcii parametra dozvieme z nasledovného výsledku. Uvažujme $f_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$ jedno parametrickú triedu difeomorfizmov. Funkcia $\rho(\lambda) = \rho(f_\lambda)$ nám dáva predstavu, ako sa mení dynamika pri zmene λ . Uvažujme f_λ rastúce v λ . Platí:

- (1) $\rho(\lambda)$ je neklesajúcou funkciou λ ;
- (2) ak $\rho(\lambda_0) = m/n$ je racionálne a $f_{\lambda_0}^m < x$ pre niektoré $x \in S^1$, potom existuje $\lambda_1 > \lambda_0$ kde $\rho(\lambda_1) = \rho(\lambda_0)$;
- (3) Lebegueova miera množiny $\{\lambda | \rho(\lambda) \text{ je iracionálne}\}$ je kladná, ak $\rho(\lambda)$ nie je konštantná.



Obr. 3.2: Simulácia rotačného čísla $\rho(G_a)$ pre pevné $b = 1.2$.

Na základe alternatívnej definície rotačného čísla vieme simulovať závislosť rotačného čísla homeomorfizmu G (definovaného (2.1) od parametra a pre $a > 1$. Nevieime síce, ako vyzerá ∂K pre jednotlivé a , ale vieme, že je stredovo súmerná (G je nepárne). Zvoľme za referenčný bod x z ∂K bod $(0, \hat{y}) \in \partial K \wedge \hat{y} > 0$. Potom $G(x) = (a\hat{y}, a\hat{y})$. A teda pre $y \in \partial K$ vieme podmienku $G^i(y) \in I_0$ formulovať ako $G_1^i(y) > 0 \wedge G_1^i(y) < G_2^i(y)$. Celý postup môžeme zhrnúť nasledovne. Dostatočným počtom iterácií dostaneme zo štartovacieho bodu blízko nuly bod $y \in \partial K$. Potom dostatočným množstvom iterácií n y odhadneme $\rho(a) = \rho(G_a)$ ako $\frac{1}{n}N(y, n)$. Takto vytvorený graf (obr. 3.2) obsahuje skutočne veľa spoločných črt s vyššie popísaným grafom funkcie rotačného čísla od parametra.

Záver

Vychádzame z diplomovej práce *Bodová (2004)* [2], kde bol predstavený parametrický model odchýlky od rovnovážneho výmenného kurzu vo forme dvojrozmerného systému diferencných rovníc. Numerické simulácie ukázali, že v prípade nestabilného pevného bodu sú trajektórie bodov blízko počiatku ohraničené a konvergujú k invariantnej množine.

V tejto práci pokračujeme v analýze systému. V prvej časti uvádzame teóriu redukcie na centrálnu varietu a pomocou nej dokazujeme vetu platnú pre širšiu triedu diskretných systémov, ktorá objasňuje príčinu zmeny dynamiky systému pri prechode parametra a cez kritickú hodnotu jedna. Stále ostáva otvorená otázka stability pevného bodu systému pre $a = 1$.

V druhej časti sa zaoberáme prípadom $a > 1$. Dokazujeme ohraničenosť trajektórií pre konkrétne hodnoty parametra a skúmame vlastnosti oblasti K ohraničenej invariantnou množinou. Keďže K je jednoducho súvislá a G je na K homeomorfizmus, Riemannova veta o zobrazeniach zaručuje existenciu konformného zobrazenia $h : K \rightarrow D$. Výsledky na ňu nadväzujúce nám umožnia rozšíriť h na kompaktifikáciu K^* a pomocou neho definovať pre dosiahnuteľné body ∂K rotačné číslo homeomorfizmu G . Uvádzame pojem rotačného čísla a jeho význam a vlastnosti pri analýze dynamiky orientáciu zachovávajúcich homeomorfizmov kružnice. Zaoberáme sa aj priebehom grafu závislosti rotačného čísla od parametra. Numerická simulácia rotačného čísla G ako funkcie parametra a vykazuje podobné črty. Výsledky nasvedčujú, že G je orientáciu zachovávajúci, na dôkaze pracujeme.

Dodatok A

Ohraničenost trajektorií

Podľa $(m, n) = (x - y, y)$ a (2.6) vieme vyjadriť jednotlivé súradnice m_i , n_i , μ_i , ν_i z x_i , y_i pre $1 \geq x_i \geq 0$ pomocou vzťahov:

$$m_i = x_i - y_i \quad (\text{A.1})$$

$$n_i = y_i \quad (\text{A.2})$$

$$\mu_i = x_i, \quad (\text{A.3})$$

$$\nu_i = ay_i(1 - x_i) - bx_i^2, \quad (\text{A.4})$$

kde (x_i, y_i) sú súradnice A_i v súradniciach (x, y) . Teda pre $a = 1$, $b = 1.2$ vieme vypočítať m_i , n_i a μ_i , ν_i :

i	m_i	n_i	μ_i	ν_i
0	-0.4	0.4	0	0.44
1	0	0.45	0.45	0.0293
2	0.2	0.35	0.55	-0.1898
3	0.5	0	0.5	-0.3
4	0.7	-0.3	0.4	-0.39
5	0.4	-0.4	0	-0.44
6	0	-0.45		
≥ 7	≤ -0.2	≤ 0.3		

Z predchádzajúcej tabuľky ľahko vypočítame $I_{ij} = [\mu_{i-1}, \mu_i] \cap [m_{j-1}, m_j]$:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	≥ 7
1	{0}	[0; 0.2]	[0.2; 0.45]	\emptyset	[0.4; 0.45]	[0; 0.4]	\emptyset
2	\emptyset	\emptyset	[0.45; 0.5]	[0.5; 0.55]	[0.45; 0.55]	\emptyset	\emptyset
3	\emptyset	\emptyset	{0.5}	[0.5; 0.55]	[0.5; 0.55]	\emptyset	\emptyset
4	\emptyset	\emptyset	[0.4; 0.5]	{0.5}	[0.4; 0.5]	{0.4}	\emptyset
5	{0}	[0; 0.2]	[0.2; 0.4]	\emptyset	{0.4}	[0; 0.4]	\emptyset

Parametre δ_i , ε_i priamky $A_{i-1}A_i$ danej rovnicou

$$x = \varepsilon_i - \delta_i x \quad (\text{A.5})$$

vieme vyjadriť ako:

$$\delta_i = -\frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} \quad (\text{A.6})$$

$$\varepsilon_i = x_i + \delta_i y_i \quad (\text{A.7})$$

A teda vieme vyčíslieť δ_i , ε_i spolu s ostatnými pomocnými výrazmi.

i	δ_i	ε_i	$a \frac{1+\varepsilon_i}{\delta_i}$	$a \frac{\varepsilon_i}{\delta_i}$	$\frac{1}{1+\delta_i}$	$\frac{\varepsilon_i}{1+\delta_i}$	$\frac{a}{\delta_i} - b$	R_i
1	-9	-3.6	$\frac{2.86}{9}$	0.44	-0.125	0.45	$-\frac{11.9}{9}$	{2, 3, 5, 6}
2	1	0.9	2.09	0.99	0.5	0.45	-0.1	{3, 4, 5}
3	$-\frac{1}{7}$	0.5	-11.55	-3.85	$\frac{7}{6}$	$\frac{3.5}{6}$	-8.9	{4, 5}
4	$-\frac{1}{3}$	0.5	-4.95	-1.65	1.5	0.75	-4.5	{3, 5, 6}
5	-4	1.6	-0.713	-0.44	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1.6}{3}$	-1.475	{2, 3, 5, 6}
6	-9	3.6			-0.125	-0.45		

Nájďeme $S_i = \{j \in R_i \mid \text{sgn}(M_i(m) - L_j(m)) = \text{sgn}(a/\delta_i - b)\}$, kde $m \in I_{ij}$ pre $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Keďže $(M_i(m) - L_j(m))$ nemení na I_{ij} znamienko, stačí určiť hodnotu funkcie v jednom z krajných bodov I_{ij} . Poznamenajme ešte, že keďže funkcia $M_i(m)$ zodpovedá priamke $f(A_{i-1})f(A_i)$ a K_i naopak $f(\overline{A_{i-1}A_i})$, tak $M_i(\mu_i) = K_i(\mu_i) = \nu_i$, analogicky pre μ_{i-1} . Pre

(1) $i = 1$ je $R_i = \{2, 3, 5, 6\}$ a $\text{sgn}(a/\delta_i - b) = -1$. Pre $j \in R_1$ určíme $\text{sgn}(M_1(m) - L_j(m))$. Pre

(a) $j = 2$, $I_{12} = [0; 0.2] = [\mu_0, m_2]$. Potom

$$M_1(\mu_0) = K_1(\mu_0) = \nu_0 = 0.44 \quad (\text{A.8})$$

$$L_2(\mu_0) = \frac{\varepsilon_2}{1 + \delta_2} - \frac{1}{1 + \delta_2} \mu_0 = \dots = 0.45 \quad (\text{A.9})$$

Teda

$$\text{sgn}(M_1(m) - L_2(m)) = \text{sgn} - 0.01 = \text{sgn}(a/\delta_1 - b). \quad (\text{A.10})$$

Teda $2 \in R_1$.

(b) $j = 3$, $I_{13} = [0.2; 0.45] = [m_2, \mu_1]$.

$$M_1(\mu_1) = K_1(\mu_1) = \nu_1 = 0.0293 \quad (\text{A.11})$$

$$L_3(\mu_1) = \frac{\varepsilon_3}{1 + \delta_3} - \frac{1}{1 + \delta_3} \mu_1 = \dots = \frac{0.35}{6} \quad (\text{A.12})$$

Z toho dostávame:

$$\text{sgn}(M_1(m) - L_3(m)) = \text{sgn} - 0.1742/6 = \text{sgn}(a/\delta_1 - b), \quad (\text{A.13})$$

čiže $3 \in R_1$.

(c) $j = 5$, $I_{15} = [0.4; 0.45] = [m_5, \mu_1]$.

$$M_1(\mu_1) = K_1(\mu_1) = \nu_1 = 0.0293 \quad (\text{A.14})$$

$$L_5(\mu_1) = \frac{\varepsilon_5}{1 + \delta_5} - \frac{1}{1 + \delta_5} \mu_1 = \dots = -\frac{1.15}{3} \quad (\text{A.15})$$

Teda

$$\text{sgn}(M_1(m) - L_5(m)) = \text{sgn } 1.3258/3 \neq \text{sgn}(a/\delta_1 - b), \quad (\text{A.16})$$

a $5 \notin R_1$.

(d) $j = 6$, $I_{16} = [0; 0.4] = [\mu_0, m_5]$. Potom

$$M_1(\mu_0) = K_1(\mu_0) = \nu_0 = 0.44 \quad (\text{A.17})$$

$$L_6(\mu_0) = \frac{\varepsilon_6}{1 + \delta_6} - \frac{1}{1 + \delta_6} \mu_0 = \dots = -0.45 \quad (\text{A.18})$$

a

$$\text{sgn}(M_1(m) - L_6(m)) = \text{sgn } 0.01 \neq \text{sgn}(a/\delta_1 - b). \quad (\text{A.19})$$

Teda $6 \notin R_1$.

A z toho už dostávame $R_1 = \{2, 3\}$.

(2) $i = 2$ je $R_2 = \{3, 4, 5\}$ a $\text{sgn}(a/\delta_i - b) = -1$. Pre $j \in R_2$ určíme $\text{sgn}(M_2(m) - L_j(m))$. Pre

(a) $j = 3$, $I_{23} = [0.45; 0.5] = [\mu_1, \mu_2]$.

$$M_2(\mu_1) = K_2(\mu_1) = \nu_1 = 0.0293 \quad (\text{A.20})$$

$$L_3(\mu_1) = \frac{\varepsilon_3}{1 + \delta_3} - \frac{1}{1 + \delta_3} \mu_1 = \dots = \frac{0.35}{6} \quad (\text{A.21})$$

Z toho dostávame:

$$\text{sgn}(M_2(m) - L_3(m)) = \text{sgn } -0.1742/6 = \text{sgn}(a/\delta_2 - b), \quad (\text{A.22})$$

čiže $3 \in R_2$.

(b) $j = 4$, $I_{24} = [0.5; 0.55] = [m_3, \mu_2]$.

$$M_2(\mu_2) = K_2(\mu_2) = \nu_2 = -0.1898 \quad (\text{A.23})$$

$$L_4(\mu_2) = \frac{\varepsilon_4}{1 + \delta_4} - \frac{1}{1 + \delta_4} \mu_2 = \dots = -0.075 \quad (\text{A.24})$$

Teda

$$\text{sgn}(M_2(m) - L_4(m)) = \text{sgn } -0.1148 = \text{sgn}(a/\delta_2 - b), \quad (\text{A.25})$$

a $4 \in R_2$.

(c) $j = 5$, $I_{25} = [0.45; 0.55] = [\mu_1, \mu_2]$.

$$M_2(\mu_1) = K_2(\mu_1) = \nu_1 = 0.0293 \quad (\text{A.26})$$

$$L_5(\mu_1) = \frac{\varepsilon_5}{1 + \delta_5} - \frac{1}{1 + \delta_5} \mu_1 = \dots = -\frac{1.15}{3} \quad (\text{A.27})$$

Teda

$$\text{sgn}(M_2(m) - L_5(m)) = \text{sgn } 1.3258/3 \neq \text{sgn}(a/\delta_2 - b), \quad (\text{A.28})$$

a $5 \notin R_2$.

Dostávame $R_2 = \{3, 4\}$.

(3) $i = 3$ je $R_3 = \{4, 5\}$ a $\text{sgn}(a/\delta_i - b) = -1$. Pre $j \in R_3$ určíme $\text{sgn}(M_3(m) - L_j(m))$. Pre

(a) $j = 4$, $I_{34} = [0.5; 0.55] = [m_3, \mu_2]$.

$$M_3(\mu_2) = K_3(\mu_2) = \nu_2 = -0.1898 \quad (\text{A.29})$$

$$L_4(\mu_2) = \frac{\varepsilon_4}{1 + \delta_4} - \frac{1}{1 + \delta_4} \mu_2 = \dots = -0.075 \quad (\text{A.30})$$

Teda

$$\text{sgn}(M_3(m) - L_4(m)) = \text{sgn } -0.1148 = \text{sgn}(a/\delta_3 - b), \quad (\text{A.31})$$

a $4 \in R_3$.

(b) $j = 5$, $I_{35} = [0.5; 0.55] = [\mu_3, \mu_2]$.

$$M_3(\mu_3) = K_3(\mu_3) = \nu_3 = -0.3 \quad (\text{A.32})$$

$$L_5(\mu_3) = \frac{\varepsilon_5}{1 + \delta_5} - \frac{1}{1 + \delta_5} \mu_3 = \dots = -\frac{1.1}{3} \quad (\text{A.33})$$

Teda

$$\text{sgn}(M_3(m) - L_5(m)) = \text{sgn } 0.2 \neq \text{sgn}(a/\delta_3 - b), \quad (\text{A.34})$$

a $5 \notin R_3$.

Teda $R_3 = \{4\}$.

(4) $i = 4$ je $R_4 = \{3, 5\}$ a $\text{sgn}(a/\delta_i - b) = -1$. Pre $j \in R_4$ určíme $\text{sgn}(M_4(m) - L_j(m))$. Pre

(a) $j = 3$, $I_{43} = [0.4; 0.5] = [\mu_4, \mu_3]$.

$$M_4(\mu_3) = K_4(\mu_3) = \nu_3 = -0.3 \quad (\text{A.35})$$

$$L_3(\mu_3) = \frac{\varepsilon_3}{1 + \delta_3} - \frac{1}{1 + \delta_3} \mu_3 = \dots = 0 \quad (\text{A.36})$$

Z toho dostávame:

$$\operatorname{sgn}(M_4(m) - L_3(m)) = \operatorname{sgn} - 0.3 = \operatorname{sgn}(a/\delta_4 - b), \quad (\text{A.37})$$

čiže $3 \in R_4$.

$$(b) \ j = 5, \ I_{45} = [0.4; 0.5] = [\mu_4, \mu_3].$$

$$M_4(\mu_3) = K_4(\mu_3) = \nu_3 = -0.3 \quad (\text{A.38})$$

$$L_5(\mu_3) = \frac{\varepsilon_5}{1 + \delta_5} - \frac{1}{1 + \delta_5} \mu_3 = \dots = -\frac{1.1}{3} \quad (\text{A.39})$$

Teda

$$\operatorname{sgn}(M_4(m) - L_5(m)) = \operatorname{sgn} 0.2 \neq \operatorname{sgn}(a/\delta_4 - b), \quad (\text{A.40})$$

a $5 \notin R_4$.

Z toho plynie $R_4 = \{3\}$.

(5) $i = 5$ je $R_5 = \{2, 3, 6\}$ a $\operatorname{sgn}(a/\delta_5 - b) = -1$. Pre $j \in R_5$ určíme $\operatorname{sgn}(M_5(m) - L_j(m))$. Pre

(a) $j = 2, \ I_{52} = [0; 0.2] = [\mu_5, m_2]$. Potom

$$M_5(\mu_5) = K_5(\mu_5) = \nu_5 = -0.44 \quad (\text{A.41})$$

$$L_2(\mu_5) = \frac{\varepsilon_2}{1 + \delta_2} - \frac{1}{1 + \delta_2} \mu_5 = \dots = 0.45 \quad (\text{A.42})$$

Teda

$$\operatorname{sgn}(M_5(m) - L_2(m)) = \operatorname{sgn} - 0.89 = \operatorname{sgn}(a/\delta_5 - b). \quad (\text{A.43})$$

Teda $2 \in R_5$.

(b) $j = 3, \ I_{53} = [0.2; 0.4] = [m_2, \mu_4]$.

$$M_5(\mu_4) = K_5(\mu_4) = \nu_4 = -0.39 \quad (\text{A.44})$$

$$L_3(\mu_4) = \frac{\varepsilon_3}{1 + \delta_3} - \frac{1}{1 + \delta_3} \mu_4 = \dots = \frac{0.7}{6} \quad (\text{A.45})$$

Z toho dostávame:

$$\operatorname{sgn}(M_5(m) - L_3(m)) = \operatorname{sgn} - 3.04/6 = \operatorname{sgn}(a/\delta_5 - b), \quad (\text{A.46})$$

čiže $3 \in R_5$.

(c) $j = 6, \ I_{56} = [0; 0.4] = [\mu_5, \mu_4]$. Potom

$$M_5(\mu_5) = K_5(\mu_5) = \nu_5 = -0.44 \quad (\text{A.47})$$

$$L_6(\mu_5) = \frac{\varepsilon_6}{1 + \delta_6} - \frac{1}{1 + \delta_6} \mu_5 = \dots = -0.45 \quad (\text{A.48})$$

a

$$\operatorname{sgn}(M_5(m) - L_6(m)) = \operatorname{sgn} 0.01 \neq \operatorname{sgn}(a/\delta_5 - b). \quad (\text{A.49})$$

Teda $6 \notin R_5$.

Dostávame $R_5 = \{2, 3\}$.

Literatúra

- [1] Alligood, K.T., York, J.A. (1992) *Accessible saddles on fractal basin boundaries*. Ergod. Th. and Dynam. Sys., 12, pp. 377–400.
- [2] Boďová, K. (2004) *Oscillations of the Foreign Exchange Rate and the Devil's Staircase*, Diploma Thesis FMFI UK, advisor Brunovský P., Bratislava.
- [3] Brunovský, P., *Dynamické systémy a diferenciálne rovnice*, Študijný materiál, FMFI UK, Bratislava, <http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/skripta>.
- [4] Caratheodory (1913) *Über die Begrenzung einfach zusammenhängenden Gebiete*. Math. Ann. 73 (1913), pp. 323–370
- [5] Carr, J. (1981) *Applications of Center Manifold Theory*, Springer – Verlag, New York, pp.33–36.
- [6] Collingwood, E.F., Lohwater, A.J. (1966) *Theory of Cluster Sets. Cambridge Tracts in Mathematics and Physics, No. 56* Cambridge University Press: Cambridge, 1966.
- [7] Erdélyi, A. (2003) *A Delay Differential Equation Model of Oscillations of Exchange Rates*, Diploma Thesis FMFI UK, advisor Brunovský P., Bratislava.
- [8] De Grauwe, P., Grimaldi, M. (2002) *The Exchange Rate and its Fundamentals. A Chaotic Perspective*, CESifo Discussion.
- [9] Guckenheimer, J., Holmes, P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields (AMS 42)*, Springer–Verlag, New York, pp. 295–305.
- [10] Hale, J., Koçak, H. (1991) *Dynamics and Bifurcations (TAM 3)*, Springer –Verlag, New York, pp. 147–166, 444–445.
- [11] Iooss, G. (1979) *Bifurcations of Maps and Applications*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, Chapter 5.2.

- [12] Jeanne, O., Rose, A.K. (2002) *Noise Trading and Exchange Rate Regimes*, Quarterly Journal of Economics 117, May, pp.537–569.
- [13] Robinson, C. (1995) *Dynamical Systems – Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Inc., pp. 49–57.