

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



## **Spriemerňovanie časových štruktúr výnosových kriviek a ich kalibrácia**

Zuzana Čintalová

2007

**Spriemerňovanie časových štruktúr výnosových kriviek  
a ich kalibrácia**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Zuzana Čintalová

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY**

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce  
doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2007

Čestne vyhlasujem, že som prácu vypracovala samostatne, s využitím teoretických vedomostí a s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, 2007

Zuzana Číntalová

Ďakujem diplomovému vedúcemu doc. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za všetky cenné rady, pripomienky a odborné vedenie počas vypracovávania diplomovej práce.

## Abstrakt

Náhodný vývoj úrokovej miery a s ním spojená časová štruktúra vyvoláva u finančných analytikov záujem vedieť modelovať rôzne tvary reálnych výnosových kriviek. V súčasnosti existuje veľa modelov, ktoré sa snažia identifikovať faktory vplývajúce na časovú štruktúru.

Cox-Ingersoll-Ross(CIR) model je jedným z najrozšírenejších rovnovážnych modelov časovej štruktúry. V práci je predstavený nový prístup odhadu parametrov tohto modelu v dvojfaktorovom prevedení. Predpokladáme, že okamžitá úroková miera je súčet dvoch skrytých faktorov, z ktorých každý sleduje stochastický mean-reversion proces. Pomocou hustoty rozdelenia daných faktorov sa zaoberáme priemernou cenou diskontného dlhopisu vzhľadom na tieto procesy. Kalibráciu modelu a odhady parametrov získavame minimalizáciou sumy štvorcov rozdielov medzi teoretickou CIR výnosovou krivkou a reálnou trhovou výnosovou krivkou. Hlavným cieľom je pomocou takto nakalibrovaných parametrov zachytiť rôzne tvary časových štruktúr, ktoré nie sú dosiahnuteľné pomocou jednofaktorového modelu.

**Kľúčové slová:** Časová štruktúra, výnosová krivka, Cox-Ingersoll-Ross(CIR) model, mean-reversion proces.

# Obsah

Úvod	5
<b>1 Základné pojmy</b>	<b>6</b>
<b>2 Prehľad modelov časovej štruktúry úrokových mier</b>	<b>8</b>
2.1 Jednofaktorové modely . . . . .	9
2.2 Multifaktorové modely časovej štruktúry . . . . .	12
<b>3 Cena dlhopisu</b>	<b>14</b>
3.1 Odvodenie ceny dlhopisu v jednofaktorovom modeli . . . . .	14
3.2 Cena dlhopisu v multi-faktorovom modeli . . . . .	16
<b>4 Multifaktorový CIR model - odvodenie modelu</b>	<b>18</b>
4.1 Hustota rozdelenia faktorov . . . . .	20
4.2 Spriemernená cena dlhopisu . . . . .	22
<b>5 Kalibrácia parametrov modelu</b>	<b>27</b>
5.1 Minimalizácia účelovej funkcie . . . . .	28
<b>6 Analýza údajov a numerické výsledky</b>	<b>30</b>
6.1 Zdroj dát . . . . .	30
6.2 Výsledky kalibrácie modelu . . . . .	32
6.3 Problémy pri optimalizácii . . . . .	37
<b>Záver</b>	<b>38</b>
<b>Literatúra</b>	<b>39</b>
<b>Príloha</b>	<b>41</b>

# Úvod

Stochastický vývoj úrokovej miery a s ňou spojená aj časová štruktúra je predmetom skúmania už niekoľkých generácií výskumníkov. Jej poznanie je dôležité v ekonomickom svete, ako aj pri oceňovaní derivátov úrokových mier. Práve preto vzniká stále veľké množstvo literatúry zaoberajúcej sa otázkou: Čím sú ovplyvnené pohyby výnosov dlhopisov?

Diplomová práca sa zaoberá jedným z multifaktorových modelov vývoja úrokovej miery. Jej cieľom je predstaviť možnú metódu jeho kalibrácie. Vychádzame z predpokladu, že okamžitá úroková miera je súčtom nezávislých skrytých faktorov. Keďže tieto skryté faktory nie sú pozorovateľné, pokúsime sa spriemerniť výnosové krivky vzhľadom na tieto faktory.

V prvej kapitole definujeme základné pojmy pre vývoj úrokovej miery a vzájomné vzťahy medzi cenou dlhopisu a úrokovou mierou. Druhá kapitola je venovaná prehľadu existujúcich jedno a viacfaktorových modelov. Pri viacfaktorových modeloch uvádzame rôzne možnosti zahrnutia ďalších faktorov. V tretej kapitole odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom modeli a taktiež pre viacfaktorový model, kde zostávame vo všeobecnej úrovni s bližšie nešpecifikovanými faktormi. V štvrtej kapitole je odvodený model, ktorého kalibráciou sa v práci zaoberáme. Konkrétne ide o multifaktorovú verziu Cox-Ingersoll-Ross modelu [5], kde krátkodobá úroková miera je daná ako súčet nezávislých stochastických procesov. Pre tento model existuje explicitné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu. Keďže jednotlivé faktory sú nepozorovateľné veličiny, pomocou hustoty rozdelenia týchto skrytých faktorov odvodíme spriemernenú cenu dlhopisu. Možnú metódu kalibrácie tohto modelu predstavuje piata kapitola. Na záver, v poslednej kapitole, prinášame výsledky kalibrácie spriemernených výnosových kriviek pre konkrétne reálne časové štruktúry úrokovej miery a pomocou týchto výsledkov diskutujeme vlastnosti modelu a komplikácie pri kalibrácii.

# Kapitola 1

## Základné pojmy

Základný kontrakt, ktorého hodnoty v čase sú ovplyvnené úrokovými mierami, je *bez-kupónový dlhopis*. Je to záväzok vyplatiť vopred dohodnutú sumu v čase splatnosti  $T$ . Cena takéhoto dlhopisu sa v čase mení v závislosti od doby do maturity, fluktuácii úrokovej miery a iných faktorov. Vo všeobecnosti je funkcia ceny dlhopisu  $P(t, T)$  klesajúca s časom približujúcim sa k dobe splatnosti. *Nominálna hodnota* dlhopisu je hodnota, ktorá má byť vyplatená v čase splatnosti  $T$ . Pre diskontné dlhopisy predpokladáme, že  $P(T, T) = 1$ . Pomocou cien dlhopisov vieme potom určiť aj úrokové miery v danom čase. Pri spojitom úročení je cena dlhopisu s dobou splatnosti  $T$  v čase  $t$  daná vzťahom:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}.$$

Pre úrokové miery potom platí:

$$R(t, T) = -\frac{\ln[P(t, T)]}{T-t}.$$

Časovú závislosť výnosu dlhopisu od času do maturity vyjadruje *časová štruktúra úrokových mier*. Jej grafická podoba sa nazýva aj *výnosová krivka*. Začiatok výnosovej krivky určuje tzv. *okamžitá úroková miera*, čo znamená hodnota  $R(t, T)$  pre čas  $t$  blížiaci sa k dobe splatnosti  $T$ :

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t),$$

resp.

$$r(t) = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T}.$$

V praxi sa okamžitá úroková miera ztotožňuje s *overnight*-om, čo je úroková miera na veľmi krátke obdobie.



Ďalším dôležitým typom úrokových mier sú forwardové úrokové miery. Hodnoty týchto úrokov sú určené bezarbitrážnymi cenami forwardových kontraktov. Obchod je založený na dohode v čase  $t$ , v ktorej sa jedna strana zaviazne kúpiť dlhopis v čase  $T_1$  za cenu  $x$  s dobou splatnosti  $T_2$ . Z podmienky bezarbitrážnosti vychádza ako jediná možná cena takéhoto kontraktu hodnota  $x = \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)}$ . Forwardová úroková miera  $f(t, T_1, T_2)$  platná v čase  $t$  na obdobie  $(T_1, T_2)$  sa určí zo vzťahu

$$x = e^{-f(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)}.$$

Podobne ako pri úrokových mierach, pre  $T_2 \rightarrow T_1$  dostávame okamžitú forwardovú úrokovú mieru  $f(t, T_1)$ :

$$f(t, T_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t, T_1, T_1 + \Delta t).$$

## Kapitola 2

# Prehľad modelov časovej štruktúry úrokových mier

Časová štruktúra úrokovej miery vyjadruje funkčnú závislosť výnosu default-free ceného papiera od doby do splatnosti (čas do maturity). Jej grafické vyjadrenie sa nazýva *výnosová krivka*. Poznanie časovej štruktúry poskytuje finančným analytikom nástroj pre predpovedanie, ako vplývajú zmeny v podkladových aktívach na tvar výnosovej krivky. Ďalej budeme za podkladové aktívum považovať bezkupónový dlhopis. Časová štruktúra ceny dlhopisu je teda funkciou času do maturity, stavových premenných ako *overnight* a rôznych parametrov modelu. Na nasledujúcich obrázkoch je prehľad rôznych tvarov výnosových kriviek. Samotný vývoj úrokových mier je charakterizovaný prostredníctvom cien dlhopisov.

Medzi tradičné prístupy modelovania časovej štruktúry patrí snaha zachytiť jej tvar pomocou dynamiky krátkodobej úrokovej miery. Nemusí však vždy ísť len o krátkodobú úrokovú mieru, niektoré modely uvažujú aj o forwardovej úrokovej miere, alebo dlhodobej úrokovej miere.

Existujú dva hlavné typy modelov časovej štruktúry:

**Rovnovážny (equilibrium) model:** Vychádza zo súčasného stavu podkladového ceného papiera a berie do úvahy aj preferencie investora. Zároveň predpokladá stochastický vývoj jedného alebo viacerých exogénnych faktorov. Výstupom z modelu je počítačová časová štruktúra a jej dynamika. Nedostatkom tohto typu modelu je, že nie vždy vystihuje súčasnú výnosovú krivku. Vhodným nastavením (kalibráciou) parametrov možno však tento nedostatok odstrániť. Príkladom rovnovážneho modelu je Vašíčkov model [2], Cox, Ingersoll, Ross model [2].

**Bez arbitrážny (noarbitrage) model:** Vstupom do modelu je počiatková časová štruktúra, a teda model automaticky presne vystihuje súčasný stav. Výstupom sú odvodené cieľové ceny aktíva, za predpokladu absencie arbitrážnych príležitostí. Patria sem napríklad modely Ho and Lee [8], v ktorom sa zameriavajú na pohyby výnosových kriviek, alebo Heath, Jarrow and Morton model [2], ktorý sleduje zmeny forwardových úrokových mier. Posledný spomínaný model v sebe nezahŕňa Markovov proces, čo znamená, že ich praktické použitie je vzhľadom na výpočtovú náročnosť značne obmedzené. Autori článku [8] pomocou tohto modelu predstavili možnosť ocenenia derivátov úrokovej miery.

## 2.1 Jednofaktorové modely

Jednofaktorové modely patria medzi najjednoduchšie modely úrokovej miery. Celá časová štruktúra je určená len jedným faktorom, za ktorý sa tradične berie krátkodobá úroková miera. Predpokladáme, že  $r_t$  sleduje spojitý Markovov stochastický proces [2], ktorý je opísaný nasledovnou stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw, \quad (2.1)$$

kde  $\mu(r, t)$  tvorí deterministickú zložku a označuje drift, zatiaľ čo  $\sigma(r, t)$  je *volatilita* spolu s  $dw$  (zmena tzv. *Wienerovho procesu*) spôsobuje náhodné fluktuácie.

**Definícia 2.1.1** *Štandardný Wienerov proces  $\{w(t), t \geq 0\}$  je  $t$  - parametrický systém náhodných veličín. Platí:*

- $w(0) = 0$ ,
- *prírastky  $dw$  sú navzájom nekorelované v čase,*
- $E(dw) = 0$ , *teda stredná hodnota je nulová,*
- $var(dw) = dt$ , *teda variancia je lineárnou funkciou času, čiže môžeme povedať, že platí:  $dw \approx \varepsilon\sqrt{dt}$ , kde  $\varepsilon$  je náhodná premenná s normálnym rozdelením.*

Podľa tvaru funkcií  $\mu(r, t)$  a  $\sigma(r, t)$  vznikla široká škála jednofaktorových modelov. Spomenieme tie najrozšírenejšie:

- **Merton, 1973**

Najstarší model vývoja úrokovej miery. Vychádza z predpokladu, že úroková miera je normálne rozdelená, čím teoreticky môže nadobúdať aj záporné hodnoty:

$$dr_t = \beta r_t dt + \sigma dW_t.$$

- **Vašíček, 1977**

Jeden z prvých 1-faktorových modelov spomínaných v literatúre. Rovnako ako Mertonov model, aj v tomto prípade môže úroková miera nadobúdať záporné hodnoty. Predpokladá, že okamžitá miera sleduje Ornstein-Uhlenbeck proces s konštantnými koeficientami:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t.$$

- **Dothan, 1978**

Vznik tohto modelu bol podnietený požiadavkou, aby úroková miera nadobúdala kladné hodnoty. Dothan predstavil lognormálny model pre úrokovú mieru, v ktorom logaritmus úrokovej miery sleduje Brownov pohyb s konštantným driftom:

$$dr_t = \kappa r_t dt + \sigma r_t dW_t.$$

- **Exponenciálny Vašíčkov model**

Predpokladá že logaritmus okamžitej úrokovej miery sleduje Ornstein-Uhlenbeck proces s kladnými konštantami  $\kappa, \theta$ :

$$dr_t = r_t(\theta - \kappa \log r_t)dt + \sigma r_t dW_t.$$

- **Cox-Ingersoll-Ross (CIR), 1985**

Ide o mean-reverting proces s časovo konštantnými koeficientami, v ktorom okamžitá úroková miera nenadobúda záporné hodnoty:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t.$$

- **Ho a Lee, 1986**

Ide o prvý bezarbitrážny model úrokovej miery, v ktorom  $r$  sleduje proces:

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dW,$$

kde  $\sigma$ , je konštantná, zatiaľ čo  $\theta(t)$  je funkcia závislá od času, ktorá má zabezpečiť, aby model dobre fitoval počiatočnú časovú štruktúru:

$$\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t.$$

- **Hull a White, 1990**

Tento bezarbitrážny model predstavuje rozšírenie CIR a Vašíčkovho modelu, v ktorom je dynamika krátkodobej úrokovej miery opísaná rovnicou:

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t.$$

Závislosť koeficientov  $\theta(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\sigma(t)$  od času umožní zhodu so súčasťou časovou štruktúrou. Treba poznamenať, že nie všetky koeficienty musia byť závislé od času.

O využití jednofaktorových modelov pri oceňovaní rôznych finančných aktív a ich porovnaní sa možno dočítať v článku [7].

Treba podotknúť, že všetky spomínané modely opisujú dynamiku krátkodobej úrokovej miery. V praxi však táto miera na trhu neexistuje, preto sa stotožňuje s *overnight*-om, čo je jednodňová medzibanková miera.

V súčasnosti sú jednofaktorové modely vystavené značnej kritike. Prvým nedostatkom je predpoklad, že všetky výnosy dlhopisov sú perfektne korelované s maturitami - vlastnosť jasne nekonzistentná s realitou a empirickými pozorovaniami. Ďalším dôvodom na kritiku je fakt, že jednofaktorové modely poskytujú len niekoľko tvarov výnosových kriviek, zvyčajne len monotónne rastúce alebo klesajúce krivky. Dalo by sa teda povedať, že nie je v silách jednofaktorových modelov dostatočne charakterizovať časovú štruktúru úrokových mier a jej meniaci sa tvar v čase. Naopak, pozitívna vlastnosť je relatívne jednoduchá forma explicitného riešenia pre ceny dlhopisov.

## 2.2 Multifaktorové modely časovej štruktúry

O vplyve viacerých faktorov na vývoj úrokovej miery v súčasnosti už niet pochýb. K tomuto presvedčeniu viedla hlavne snaha zachytiť rozmanitejšie podoby výnosových kriviek, ako aj vysvetliť nereálne črty jednofaktorových modelov. Vzhľadom na to vzniklo mnoho teoretických štúdií, ktoré uvádzajú viacfaktorové oceňovanie dlhopisov. Viacero faktorov teda prináša väčšiu flexibilitu do modelu, na druhej strane však rastie náročnosť analýzy takýchto modelov a s tým súvisiace explicitné riešenia pre ceny dlhopisov. Počet faktorov, ktoré by dokonale opisovali dynamiku úrokovej miery, zostáva aj naďalej veľmi subjektívnou premennou. Empirické testy ukazujú, že až 99% pohybov výnosových kriviek je zachytených tromi faktormi. Litterman a Scheinkman [6] sa vo svojej práci detailnejšie zaoberali konkrétnou špecifikáciou týchto troch faktorov. Pomocou faktorovej analýzy zistili, že sú to všeobecná úroveň úrokovej miery, sklon výnosovej krivky a krivosť výnosovej krivky, ktorá je spájaná s volatilitou procesu.

Tvar multifaktorového modelu môže byť rôzny. Vo všeobecnosti môžeme jeho dvojfaktorový prípad zapísať nasledovným systémom:

$$\begin{aligned}dr &= \mu_r(r, y, t)dt + \sigma_r(r, y, t)dw_1, \\dy &= \mu_y(r, y, t)dt + \sigma_y(r, y, t)dw_2,\end{aligned}\tag{2.2}$$

kde predpokladáme, že medzi dvoma Wienerovými procesmi  $w_1$  a  $w_2$  je konštantná korelácia  $\rho$ .

K vzniku rôznych tvarov multifaktorových modelov viedlo uvedomenie si, že vývoj úrokovej miery môže závisieť od vývoja iných faktorov. Tieto faktory buď priamo súvisia s krátkodobou úrokovou mierou, napríklad dlhodobá úroková miera, stochastická volatilita, alebo môže ísť o iné pozorovateľné makroekonomické veličiny<sup>1</sup>.

Tak ako v prípade jednofaktorových modelov, spomenieme niekoľko z prvotných modelov, resp. tie najznámejšie:

- **CIR, 1985**

CIR model je vo veľkej miere prezentovaný ako jednofaktorový, avšak v článku [5] autori predstavili jeho predĺženie na dvojfaktorový, kde za druhý faktor zvolili exogénne určenú infláciu. Tento model sa ukázal ako výhodný, najmä pri nominálnom oceňovaní.

---

<sup>1</sup>Napríklad Duffie and Kan (1996), Berardi (2001), Dewachter a kol. (2001a, 2002)

- **Longstaff a Schwartz, 1992 [3]**

Druhým faktorom v tomto modeli je volatilita úrokovej miery. Výhodou oproti CIR modelu je fakt, že dynamika volatility je daná endogénne.

- **Brennan a Schwartz, 1979**

V tomto modeli je krátkodobá úroková miera tlačaná k dlhodobej rovnovážnej miere, ktorá tiež sleduje stochastický proces.

- **Schaefer a Schwartz, 1984**

Model využíva rozptyl medzi dlhodobou a krátkodobou úrokovou mierou.

- **Modely s volatilitou**

Do tejto kategórie patrí veľké množstvo modelov. Volatilita je do istej miery považovaná za intuitívny faktor, pretože je hlavným determinantom pri oceňovaní finančných derivátov. Výsledky empirických pozorovaní [14] potvrdzujú jej stochastický charakter. Patria sem už spomínaný Longstaff a Schwartz model, Chen (1996)<sup>2</sup>, Hull a White (1990) a iné.

Všetky spomenuté modely tvoria jeden typ multifaktorových modelov, v ktorých je vývoj jednotlivých faktorov navzájom korelovaný. Existuje však ešte iný prístup k multifaktorovým modelom, v ktorom sa predpokladá, že krátkodobá úroková miera je súčet skrytých faktorov, nepozorovateľných premenných. O faktoroch predpokladáme, že sú navzájom nezávislé a sledujú nejaký druh stochastických procesov. Takýto tvar má napríklad multifaktorová verzia CIR modelu. Výhodou v tomto prípade je, že model poskytuje relatívne jednoduché riešenie pre ceny dlhopisov práve vďaka nezávislosti faktorov. Všeobecný tvar takéhoto modelu môžeme zapísať nasledovným systémom:

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^n r_i, \\ r_i(t) &= \mu_i(r_i, t)dt + \sigma_i(r_i, t)dW_i. \end{aligned} \tag{2.3}$$

---

<sup>2</sup>Ide o trojfaktorový model, známy ako model so stochastickým priemerom a stochastickou volatilitou.

# Kapitola 3

## Cena dlhopisu

Ako sme už spomínali, základom modelov pre vývoj úrokových mier (ich spojitej verzie) je predpoklad, že vývoj okamžitej úrokovej miery  $r(t)$  je určený stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw.$$

Ceny dlhopisov a tým aj časové štruktúry úrokových mier sú určené ako riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice.

### 3.1 Odvodenie ceny dlhopisu v jednofaktorovom modeli

Cena dlhopisu  $P(r, t, T)$  je funkcia okamžitej úrokovej miery, času  $t$  a maturity  $T$ . S využitím postupu v [10] a aplikovaním Itôvej lemy [2] dostaneme stochastickú diferenciálnu rovnicu pre funkciu  $P$

$$dP = \mu_P(r, t)dt + \sigma_P(r, t)dw, \quad (3.1)$$

kde

$$\mu_P = \frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}, \quad \sigma_P = \sigma \frac{\partial P}{\partial r}.$$

S cieľom zachovať bezarbitrážne prostredie skonštruujeme portfólio pozostávajúce z dlhopisu s maturitou  $T_1$  a  $\gamma$  dlhopisov s maturitou  $T_2$ . Hodnota tohto portfólia bude:

$$\pi = P_1(r, t, T_1) + \gamma P_2(r, t, T_2).$$

Zmena hodnoty portfólia za čas  $dt$  je:

$$d\pi = dP_1 + \gamma dP_2.$$

Po dosadení do (3.1) a po úprave dostávame, že na vytvorenie bezrizikového portfólia potrebujeme zvoliť  $\gamma = -\frac{\sigma_P(T_1)}{\sigma_P(T_2)}$ .

Zmena hodnoty portfólia je teraz deterministická, bez stochastického člena:

$$d\pi = \left( \mu_P(T_1) - \frac{\sigma_P(T_1)}{\sigma_P(T_2)} \mu_P(T_2) \right) dt.$$



Aby nevznikla možnosť arbitráže, musíme zabezpečiť, aby bol výnos portfólia rovný okamžitej úrokovej miere, a teda:

$$\mu_P(T_1) + \gamma\mu_P(T_2) = rP(T_1)\gamma rP(T_2),$$

z čoho vyplýva

$$\frac{rP(T_1) - \mu_P(T_1)}{\sigma_P(T_1)} = \frac{rP(T_2) - \mu_P(T_2)}{\sigma_P(T_2)}.$$

Táto rovnica nezávisí od maturity  $T$ , pretože  $T_1$  a  $T_2$  boli ľubovoľné. Funkcia

$$\lambda(t, r) = \frac{rP(r, t, T) - \mu_P(r, t, T)}{\sigma_P(r, t, T)} \quad (3.2)$$

sa nazýva trhovú cenu rizika.

Dosadením  $\mu_P$  a  $\sigma_P$  do (3.2) dostávame odvodenú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu  $P(r, t, T)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, t \in (0, T) \quad (3.3)$$

$$P(r, T, T) = 1.$$

Funkciu  $\lambda = \lambda(r, t)$  treba určiť. Napríklad vo Vašíčkovom modeli je táto hodnota konštantná, kým v CIR modeli je násobkom  $\sqrt{r}$ . Pre takto určené hodnoty trhovej ceny rizika sú známe aj explicitné riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice (3.3). V práci [11] autor predstavil odvodenie explicitného riešenia pre všeobecný tvar jednofaktorového modelu

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw,$$

pre Vašíčkov ( $\gamma = 0$ ) a CIR model ( $\gamma = 1/2$ ).

Konkrétne pre CIR model a  $\lambda(r, t) = \bar{\lambda}\sqrt{r}$  má cena dlhopisu s časom do maturity  $\tau = T - t$  tvar

$$P(\tau, r) = A(\tau)e^{B(\tau)r},$$

ktorý po dosadení do (3.3) vedie k nasledovnému systému diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \kappa\theta A(\tau)B(\tau), \\ B(\tau) &= -(\kappa + \lambda\sigma)B - \frac{1}{2}\sigma^2 B(\tau)^2 + 1, \\ A(0) &= 0, B(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Z [10] vyplýva, že riešením tohto systému je:

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \frac{2(1 - e^{(T-t)\gamma})}{2\gamma + (\kappa + \lambda + \gamma)(e^{(T-t)\gamma} - 1)}, \\ A(t, T) &= \left[ \frac{2\gamma e^{(\kappa + \lambda + \gamma)(T-t)/2}}{2\gamma + (\kappa + \lambda + \gamma)(\exp(T-t)\gamma - 1)} \right]^{2\kappa\theta/\sigma^2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde

$$\gamma = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}.$$

### 3.2 Cena dlhopisu v multi-faktorovom modeli

V jednofaktorovom modeli závisela cena dlhopisu od vývoja okamžitej úrokovej miery a doby splatnosti. Špecifikovaním funkcie trhovej ceny rizika sme vedeli určiť celú výnosovú krivku.

V multifaktorovom modeli bude cena dlhopisu závisieť aj od ďalších faktorov, o ktorých predpokladáme, že taktiež sledujú nejaký stochastický proces.

V nasledujúcej časti odvodíme cenu dlhopisu pre dvojfaktorový model. Cena v multi-faktorovom modeli by sa odvodila podobne. Inšpirovaní postupom v [10] vychádzame zo všeobecného tvaru dvojfaktorového modelu:

$$\begin{aligned} dr &= \mu_r(t, r, y)dt + \sigma_r(t, r, y)dw_1, \\ dy &= \mu_y(t, r, y)dt + \sigma_y(t, r, y)dw_2, \end{aligned}$$

kde  $r$  je okamžitá úroková miera a  $y$  je zatiaľ nešpecifikovaný faktor. Jeho bližším určením sa budeme zaoberať neskôr. Vzájomnú koreláciu prírastkov  $w_1$  a  $w_2$  označíme  $\rho$ . Aplikovaním viacrozmernej Itôvej lemy pre cenu dlhopisu  $P(t, r, y)$  dostávame stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu  $P$ :

$$dP = \mu(T)dt + \sigma_1(T)dw_1 + \sigma_2(T)dw_2, \quad (3.6)$$

kde

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \sigma_r \sigma_y \rho \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y}, \\ \sigma_1(T) &= \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r}, \quad \sigma_2(T) = \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

Podobne ako v prípade jednofaktorového modelu, zostrojíme portfólio z dlhopisov so splatnosťami v časoch  $T_1, T_2, T_3$  v množstvách  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ :

$$\pi = \gamma_1 P(T_1) + \gamma_2 P(T_2) + \gamma_3 P(T_3).$$

Zmena ceny portfólia za čas  $dt$  je

$$d\pi = \gamma_1 dP(T_1) + \gamma_2 dP(T_2) + \gamma_3 dP(T_3).$$

Po dosadení za  $dP(T_i)$  dostaneme:

$$\begin{aligned} d\pi &= (\gamma_1 \mu(T_1) + \gamma_2 \mu(T_2) + \gamma_3 \mu(T_3)) dt + \\ &+ (\gamma_1 \sigma_1(T_1) + \gamma_2 \sigma_1(T_2) + \gamma_3 \sigma_1(T_3)) dw_1 + \\ &+ (\gamma_1 \sigma_2(T_1) + \gamma_2 \sigma_2(T_2) + \gamma_3 \sigma_2(T_3)) dw_2. \end{aligned}$$

Portfólio bude bezrizikové, ak zvolíme také množstvá dlhopisov, že výrazy pri členoch  $dw_1$  a  $dw_2$  budú nulové:

$$\gamma_1 \sigma_1(T_1) + \gamma_2 \sigma_1(T_2) + \gamma_3 \sigma_1(T_3) = 0,$$

$$\gamma_1\sigma_2(T_1) + \gamma_2\sigma_2(T_2) + \gamma_3\sigma_2(T_3) = 0,$$

a teda bude platiť

$$d\pi = (\gamma_1\mu(T_1) + \gamma_2\mu(T_2) + \gamma_3\mu(T_3)) dt.$$

Pre zachovanie bezarbitrážneho prostredia sa musí v každom okamihu výnos z portfólia rovnať okamžitej úrokovej miere, a teda:

$$\gamma_1\mu(T_1) + \gamma_2\mu(T_2) + \gamma_3\mu(T_3) = r(\gamma_1P(T_1) + \gamma_2P(T_2) + \gamma_3P(T_3)).$$

Hodnoty  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  budú riešením systému rovníc:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(T_1) & \sigma_1(T_2) & \sigma_1(T_3) \\ \sigma_2(T_1) & \sigma_2(T_2) & \sigma_2(T_3) \\ \mu(T_1) - rP(T_1) & \mu(T_2) - rP(T_2) & \mu(T_3) - rP(T_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tento systém bude mať netriviálne riešenie, ak je matica systému singularárna. V takom prípade sú riadky lineárne závislé a existujú funkcie  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ , nezávislé od  $T$  také, že:

$$\mu(T) - rP(T) = \lambda_1\sigma_1(T) + \lambda_2\sigma_2(T).$$

Dosadením za  $\mu, \sigma_1, \sigma_2$  dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu  $P$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r - \lambda_1\sigma_r)\frac{\partial P}{\partial r} + (\mu_y - \lambda_2\sigma_y)\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_y^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \sigma_r\sigma_y\rho\frac{\partial^2 P}{\partial r\partial y} - rP = 0, \quad (3.7)$$

s koncovou a okrajovými podmienkami:

$$\begin{aligned} P(0, r, y) &\equiv 1, & \text{pre } \forall r > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \\ P(\tau, 0, y) &\equiv 1, \\ P(\tau, +\infty, y) &\equiv 0, & \text{pre } \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Funkcie  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  rovnako ako v jednofaktorovom modeli predstavujú trhovú cenu rizika pre  $r$  a  $y$ . Pre získanie konkrétneho riešenia (3.7) potrebujeme tieto funkcie zvoliť a takisto potrebujeme špecifikovať druhý faktor  $y$ .

## Kapitola 4

# Multifaktorový CIR model - odvodenie modelu

V predchádzajúcej časti sme odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu v jedno a viacfaktorových modeloch. V nasledujúcej kapitole predstavíme multifaktorovú verziu CIR modelu. V multifaktorovom CIR modeli sa o krátkodobej úrokovej miere predpokladá, že je daná ako súčet  $K$  skrytých faktorov,

$$r = \sum_{i=1}^K y_i,$$

ktoré sú nezávislé a sledujú Bessel square root difúzny proces:

$$dy_i = \kappa_i(\theta_i - y_i)dt + \sigma_i\sqrt{y_i}dw_i, \quad i = 1, \dots, K. \quad (4.1)$$

Môžeme si všimnúť, že dynamika každého faktoru má tvar jednofaktorového CIR modelu s parametrami  $\kappa_i, \sigma_i, \theta_i, \lambda_i$ .  $\kappa_i$  predstavuje rýchlosť priťahovania faktoru  $r_i$  k dlhodobej rovnovážnej hodnote  $\theta_i$ .  $\sigma_i\sqrt{r_i}$  je volatilita procesu a  $\lambda_i\sqrt{r_i}$  je trhovú cenu rizika. Keďže každý faktor sleduje proces totožný s procesom v jednofaktorovom CIR modeli, zostávajú zachované aj vlastnosti CIR modelu [5]:

- Hodnoty úrokových mier  $r_i$  nadobúdajú len kladné hodnoty,
- Volatilita procesu je rastúca s rastúcou hodnotou  $r_i$ ,
- Existuje rozdelenie pre proces  $r_i$  v ustálenom stave.

V ďalších krokoch analýzy modelu budeme uvažovať o prípade dvoch faktorov, čiže budeme skúmať dvojfaktorový CIR model. Jeho konkrétny tvar je potom:

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2, \\ dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1\sqrt{r_1}dw_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2\sqrt{r_2}dw_2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

kde Wienerove procesy  $w_1$  a  $w_2$  sú nezávislé. Keďže trhová cena rizika pre  $r_1$  resp.  $r_2$  je daná ako  $\lambda_1\sqrt{r_1}$  resp.  $\lambda_2\sqrt{r_2}$ , existuje pre tento model aj explicitné riešenie, analogické k riešeniu pre jednofaktorový CIR model.

Vychádzajúc z [5], riešenie pre cenu diskontného dlhopisu v čase  $\tau = T - t$  do doby splatnosti je dané nasledovne:

$$P(\tau, r_1, r_2) = A_1(\tau)A_2(\tau)e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2}, \quad (4.3)$$

kde funkcie  $A_i(\tau)$  a  $B_i(\tau)$  sú riešením systému diferenciálnych rovníc (3.4). Pre lepšiu orientáciu toto riešenie pripomíname:

$$B_i(\tau) = \frac{2(e^{\gamma_i\tau} - 1)}{(\gamma_i + \kappa_i + \lambda_i)(e^{\gamma_i\tau} - 1) + 2\gamma_i}, \quad (4.4)$$

$$A_i(\tau) = \left[ \frac{2\gamma_i e^{(\kappa_i + \lambda_i + \gamma_i)\tau/2}}{(\kappa_i + \gamma_i + \lambda_i)(e^{\gamma_i\tau} - 1) + 2\gamma_i} \right]^{2\kappa_i\theta_i\sigma_i^2}, \tau > 0, \quad (4.5)$$

$$\gamma_i = ((\kappa_i + \lambda_i)^2 + 2\sigma_i^2)^{1/2}.$$

Následne, z ceny dlhopisu (4.3) vieme vyjadriť výnos dlhopisu v čase  $\tau$  do maturity:

$$R(\tau) = \frac{\ln P(\tau, r_1, r_2)}{\tau},$$

čo môžeme zapísať ako lineárnu kombináciu:

$$R(\tau) = \sum_{i=1}^2 \frac{\ln A_i(\tau)}{\tau} + \frac{B_i(\tau)r_i}{\tau}.$$

Zaujímavá otázka vzniká pri výpočte konkrétnych cien dlhopisov určených takýmto modelom. Keďže nepoznáme presné hodnoty  $r_1$  a  $r_2$ , nemôžeme ich priamočiaro dosadiť do (4.3). Poznáme však hodnotu ich súčtu, a teda je potrebná metóda zakomponovania tejto informácie do ceny dlhopisu. Jednou z možností je spriemernenie ceny dlhopisu vzhľadom na súčet faktorov  $r_1$  a  $r_2$ .

## 4.1 Hustota rozdelenia faktorov

Ako sme už uviedli, procesy  $r_1$  a  $r_2$  nie sú priamo pozorovateľné. Poznáme však ich rozdelenie hustoty, [5] a podobne [10].

Vychádzajúc zo stochastickej diferenciálnej rovnice procesov  $r_1$  a  $r_2$ :

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw, \quad (4.6)$$

pravdepodobnostné rozdelenie hustoty úrokovej miery v čase  $t$ , podmienené jej počiatočným stavom v čase  $s$  je dané:

$$f(r(s), s; r(t), t) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2(uv)^{1/2}), \quad (4.7)$$

kde

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})}, \\ u &= cr(s)e^{-\kappa(t-s)}, \\ v &= cr(t), \\ q &= \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2 - 1}, \end{aligned}$$

a  $I_q(\cdot)$  je modifikovaná Besselova funkcia prvého druhu rádu  $q$  ([13]). Základné charakteristiky rozdelenia podmieneného stavom procesu v čase  $s$  sa dajú odvodiť priamočiarými výpočtami:

$$\begin{aligned} E(r(t)|r(s)) &= r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}), \\ \text{var}(r(t)|r(s)) &= r(s) \left(\frac{\sigma^2}{\kappa}\right) (e^{-\kappa(t-s)} - e^{-2\kappa(t-s)}) + \\ &+ \theta \left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right) (1 - e^{-\kappa(t-s)})^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Analýzou očakávanej hodnoty a variancie procesu  $r$  si môžeme všimnúť, že ak  $\kappa \rightarrow \infty$ , stredná hodnota sa blíži k  $\theta$  a variancia k 0. Naopak, ak  $\kappa \rightarrow 0$ , stredná hodnota sa blíži k aktuálnej úrokovej miere a variancia k hodnote  $\sigma^2 r(t)(s - t)$ . Táto skutočnosť potvrdzuje vlastnosti mean-reversion procesu.

Pre rozdelenie (4.7 existuje aj jeho limitná verzia pre  $t \rightarrow \infty$ , (pozri napr. [9]). Toto znamená, že ak úroková miera sleduje mean reversion proces (teda  $\kappa, \theta > 0$ ), rozdelenie procesu  $r$  sa limitne blíži ku gamma rozdeleniu. Funkcia hustoty už potom nezávisí od počiatočného stavu  $r(s)$ , závisí len od parametrov modelu a jej limitný tvar je:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, y|y(s)) = \begin{cases} 0 & \text{ak } y \leq 0, \\ \frac{1}{\Gamma(q+1)} \left(\frac{2\kappa}{v^2}\right)^{q+1} e^{-\frac{2\kappa}{v^2}y} y^q & \text{ak } y > 0. \end{cases}$$

Preznačením limitného tvaru dostávame funkciu hustoty náhodnej premennej s Gamma rozdelením s parametrami  $(a, b)$ :

$$f(r) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} e^{-ar} r^{b-1}, \quad (4.9)$$

kde  $a = \frac{2\kappa}{\sigma^2}$ ,  $b = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}$ , pre  $r > 0$ .

Charakteristiky gamma rozdelenia procesu (4.6) sú:

$$\begin{aligned} E(r) &= \theta, \\ \text{var}(r) &= \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

## 4.2 Spriemernená cena dlhopisu

V predchádzajúcich častiach sme ukázali, že riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (3.7), ak oba faktory sledujú CIR - modifikáciu stochastického procesu (4.6), vieme vyjadriť v explicitnom tvare (4.3). Cenu dlhopisu  $P(\tau, r_1, r_2)$  vieme pre dané  $\tau$  a hodnoty  $r_1$  a  $r_2$  presne určiť. Keďže  $r_1$  a  $r_2$  sú skryté faktory a na reálnom trhu nie sú pozorovateľné, budeme sa zaoberať spriemernením ceny dlhopisu vzhľadom na ich súčet. Ich súčet poznáme, je to krátkodobá úroková miera  $r$ .

Keďže poznáme rozdelenia procesov  $r_1$  a  $r_2$  (4.9), môžeme spriemerniť cenu dlhopisu vzhľadom  $r_1 + r_2 = r$ , kde hodnota  $r$  je známa z reálnych dát:

$$E(P(r, r_1, r_2) | r_1 + r_2 \in \Omega) = \frac{\int_{\Omega} P(\tau, r_1, r_2) f_1(r_1) f_2(r_2) dr_1 dr_2}{\int_{\Omega} f_1(r_1) f_2(r_2) dr_1 dr_2}, \quad (4.11)$$

kde  $f_i$  je hustota procesu  $r_i$ ,  $P(\tau, r_1, r_2)$  je cena dlhopisu (4.3) a  $\Omega$  označíme tzv. pravdepodobnostný pás so stredom  $r$ :

$$\Omega_{\epsilon} = \langle r - \epsilon, r + \epsilon \rangle.$$

Po substitúcii premenných  $r_2 = r - r_1$  a stlačení pravdepodobnostného pásu:  $\epsilon \rightarrow 0$  môžeme cenu dlhopisu pretransformovať na tvar:

$$\begin{aligned} \bar{P}(\tau, r_1, r - r_1) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\epsilon} \int_0^r \int_{r-\epsilon-r_1}^{r+\epsilon-r_1} P(\tau, r_1, r - r_1) f_1(r_1) f_2(r - r_1) dr_2 dr_1}{\frac{1}{\epsilon} \int_0^r \int_{r-\epsilon-r_1}^{r+\epsilon-r_1} f_1(r_1) f_2(r - r_1) dr_2 dr_1} \\ &= \frac{2 \int_0^r P(\tau, r_1, r - r_1) f_1(r_1) f_2(r - r_1) dr_1}{2 \int_0^r f_1(r_1) f_2(r - r_1) dr_1}. \end{aligned}$$

Pre lepšiu orientáciu, zavedieme ešte označenie zjednodušujúce (4.11):

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^r f_1(s) f_2(r - s) ds, \\ \bar{P}(\tau, r) &= \int_0^r P(\tau, r_1, r - r_1) f(r_1, r) dr_1, \\ f(r_1, r) &= \frac{f_1(r_1) f_2(r - r_1)}{M(r)}. \end{aligned}$$

Nakoniec, vzťah pre spriemernenú cenu dlhopisu má tvar:

$$\bar{P}(\tau, r) = \int_0^r P(\tau, r_1, r - r_1) f(r, r_1) dr_1. \quad (4.12)$$

Podobným spôsobom, spriemernená časová štruktúra:

$$R(\tau, r) = \int_0^r \left[ -\frac{\ln P(\tau, r_1, r - r_1)}{\tau} \right] f(r, r_1) dr_1. \quad (4.13)$$

Dosadením výrazov pre cenu dlhopisu (4.3) môžeme spriemernenú cenu dlhopisu vyjadriť v tvare:

$$\bar{P}(\tau, r) = A_1 A_2 e^{-B_2 r} \int_0^r e^{(B_2 - B_1) r_1} f(r, r_1) dr_1. \quad (4.14)$$



Pre kompletné vyjadrenie priemernenej ceny v zmysle všetkých parametrov máme dve možnosti. Prvou je priame dosadenie parametrov do funkcie hustoty  $f(r, r_1)$  v (4.14):

$$\bar{P}(\tau, r) = A_1 A_2 e^{-B_2 r} \frac{\int_0^r e^{(B_2 - B_1 + a_2 - a_1)r_1} r_1^{(b_1 - 1)} (r - r_1)^{(b_2 - 1)} dr_1}{\int_0^r e^{(a_2 - a_1)r_1} r_1^{(b_1 - 1)} (r - r_1)^{(b_2 - 1)} dr_1}, \quad (4.15)$$

kde  $a_i = \frac{2\kappa_i}{\sigma_i^2}$ ,  $b_i = \frac{2\kappa_i\theta_i}{\sigma_i^2}$ , a funkcie  $A_i = A_i(\tau)$ ,  $B_i = B_i(\tau)$  sú funkciami času  $\tau$ .

Druhý spôsob vyjadrenia nám umožňuje tvar funkcie v integráli. Ide o tzv. Kummerove hypergeometrické funkcie, ktoré sa dajú vyjadriť podľa [13] pomocou gamma funkcie.

**Lema 4.2.1** *Platí nasledujúca rovnosť:*

$$\int_0^r e^{-ax} x^{b-1} (r-x)^c dx = r^{r+c} \frac{\Gamma(b)\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+b+c)} {}_1F_1(b, 1+b+c, -ar),$$

funkcia  ${}_1F_1$  sa dá rozvinúť do radu:

$${}_1F_1(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}z^2 + \dots$$

V zmysle predchádzajúcej lemy vyjadríme  $M(r)$  a funkciu hustoty  $f(r, r_1)$ :

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^r f_1(r_1) f_2(r_2) dr_1 \\ &= \frac{a_1^{b_1} a_2^{b_2}}{\Gamma(b_1 + b_2)} e^{-a_2 r} r_1^{b_1 + b_2 - 1} {}_1F_1(b_1, b_1 + b_2, -(a_1 - a_2)r), \end{aligned}$$

kde  $a_i$  resp.  $b_i$ , pre  $i = 1, 2$  sú parametre gamma rozdelenia z funkcie hustoty  $f_i$ .

Podobne, vyjadrením hustoty  $f(r, r_1)$ :

$$\begin{aligned} f(r_1, r) &= \frac{1}{M(r)} f_1(r_1) f_2(r - r_1) = \\ &= \frac{1}{{}_1F_1(b_1, b_1 + b_2, -(a_1 - a_2)r)} \frac{\Gamma(b_1 + b_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} \frac{1}{r^{b_1 + b_2 - 1}} \left[ e^{-(a_1 - a_2)r_1} r_1^{b_1 - 1} (r - r_1)^{b_2 - 1} \right]. \end{aligned}$$

Nakoniec, po dosadení do ceny dlhopisu (4.14), dostávame:

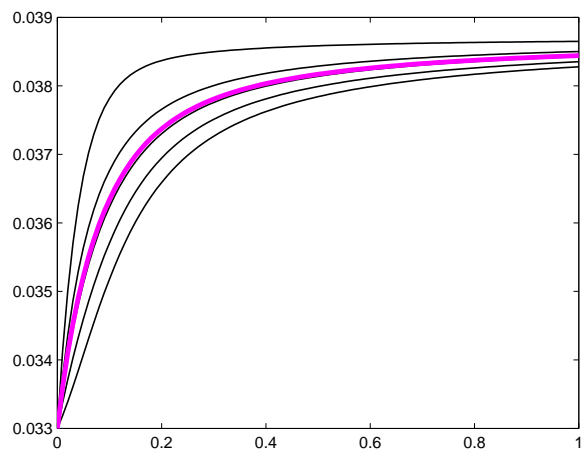
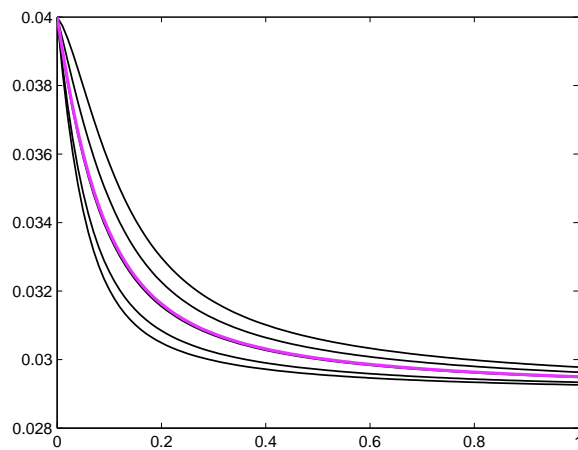
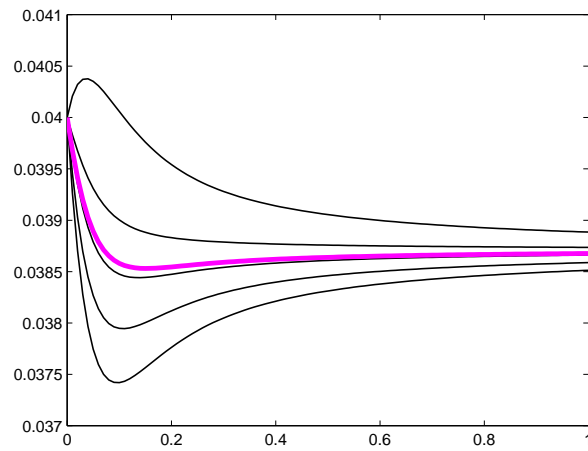
$$\bar{P}(r, \tau) = A_1 A_2 e^{-B_2 r} \frac{{}_1F_1(b_1, b_1 + b_2, (B_2 - B_1 + a_2 - a_1)r)}{{}_1F_1(b_1, b_1 + b_2, (a_2 - a_1)r)}. \quad (4.16)$$

Na obrázku 4.2 sú príklady spriemernenej výnosovej krivky pre rôzne kombinácie súčtov  $r_1 + r_2$ .

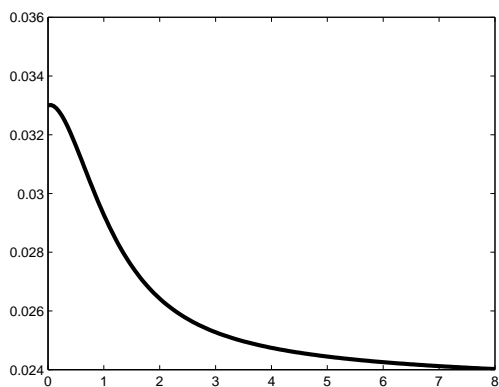
Na obrázku 4.2 uvádzame rôzne tvary výnosových kriviek, ktoré sme dostali pri rôznej voľbe parametrov modelu. Konkrétne hodnoty parametrov pre tieto výnosové krivky uvádzame v tabuľke 4.1. Môžeme si všimnúť, že model spriemernenej výnosovej krivky naozaj poskytuje široké spektrum tvarov.

	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
(a)	0.6	0.8	0.5	1.4	0.012	0.03	0.2	0.1
(b)	0.6	3.8	0.8	1.05	0.025	0.02	-3.2	8.1
(c)	6.9	11.2	5.6	8.44	0.091	0.022	13	17.65
(d)	1	0.5	0.6	0.34	0.021	0.022	-0.05	5.65
(e)	1	0.5	0.6	0.34	0.031	0.022	-0.05	5.65
(f)	2.3	0.6	1.4	2.3	0.01	0.2	2.5	-1

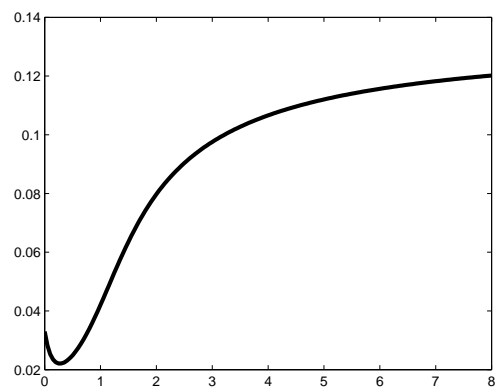
Tabuľka 4.1: Hodnoty parametrov pre krivky na obrázku 4.2.



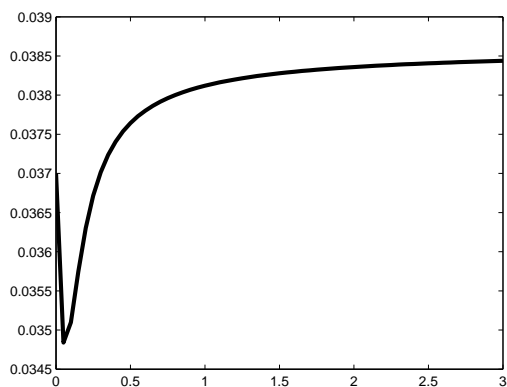
Obr. 4.1: Výnosové krivky pre rôzne kombinácie  $r_1 + r_2 = r$ . Zvýraznená hodnota je spriemernená výnosová krivka.



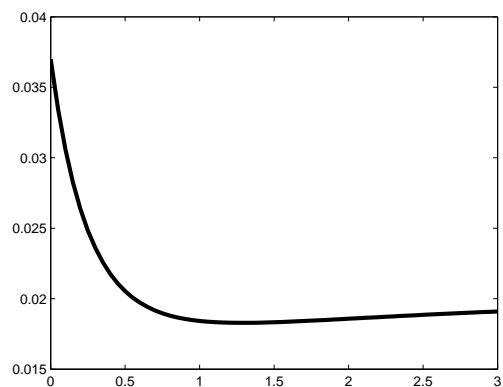
(a)



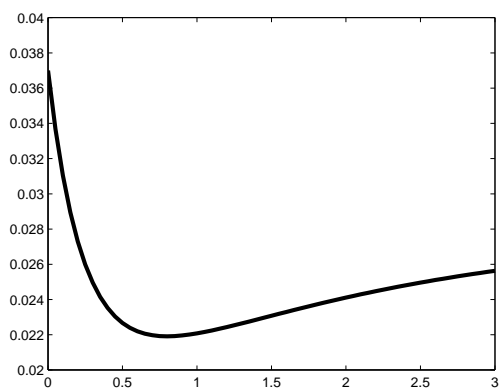
(b)



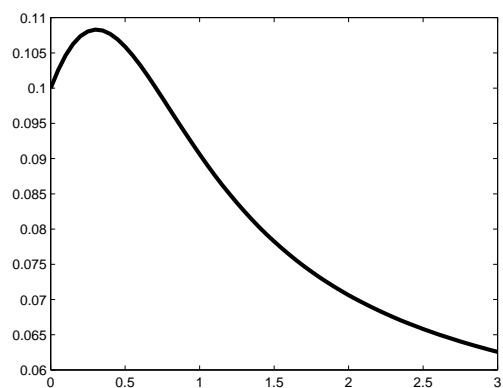
(c)



(d)



(e)



(f)

Obr. 4.2: Príklady priemerných výnosových kriviek pre rôzne voľby parametrov.

## Kapitola 5

# Kalibrácia parametrov modelu

Vo finančnej literatúre vyvinuli už mnoho metód pre kalibráciu modelov. Spomedzi všetkých spomenieme tie najrozšírenejšie. *Maximum Likelihood*, *ML* je metóda, ktorá sa vo veľkom využíva najmä tam, kde sme schopní vyjadriť likelihood funkciu.

Ak sú stavové premenné nepozorovateľné veličiny, najvhodnejšia metóda je *Kalmanov filter*, ktorý má dlhú tradíciu v ekonometrickom prístupe. Často sa používa v spojení s *QML-Quasi Maximum Likelihood* metódou. V tomto prístupe, Kalmanov filter slúži na generovanie nepozorovateľných procesov a následne, použitím QML metódy sa získavajú kalibrované parametre. Použitie tejto metódy vyžaduje znalosť podmienenej hustoty rozdelenia stavovej premennej, ktorá v prípade CIR modelu je práve okamžitá úroková miera.

Ďalšou metódou na odhad parametrov sú *Monte Carlo simulácie*, alebo *Zovšeobecnená metóda Momentov*. *MCMC-Markov Chain Monte Carlo* metóda je nástroj pre odhadovanie modelov, ktoré sú ne-normálne, alebo ne-lineárne. Táto metóda vychádza z podmienených rozdelení parametrov, preto je veľmi dôležité zvoliť správne typ rozdelenia. V opačnom prípade je kalibrácia časovo veľmi náročná.

Iný typ metód predstavuje priamy fit ceny dlhopisu, alebo jeho výnosu na reálne údaje v určitom časovom období. Kalibrácia modelu sa nesie v zmysle minimalizácie účelovej funkcie, ktorá môže byť napríklad rozdiel medzi reálnou výnosovou krivkou a výnosovou krivkou vypočítanou modelom. Výhodou tejto metódy je, že využíva celú časovú štruktúru, teda každý bod výnosovej krivky.

Z obrovského počtu modelov pre kalibráciu parametrov je zložité vybrať ten najefektívnejší. Niektoré prístupy sa zdajú byť málo flexibilné, najmä kvôli podmienkam, pri ktorých je možné ich použiť. Na druhej strane, zvýšením flexibility a tým lepšieho odhadu výnosových kriviek rastie časová a výpočtová náročnosť.

## 5.1 Minimalizácia účelovej funkcie

Metóda, ktorú použijeme na kalibráciu parametrov modelu imituje metódu najmenších štvorcov, avšak s tým rozdielom, že v našom prípade pôjde o nelineárny prípad. Základom metódy najmenších štvorcov je minimalizácia súčtu štvorcov rozdielov reálnych hodnôt a príslušných hodnôt získaných modelom.

Na rovnakom princípe budeme postupovať aj pri kalibrovaní parametrov dvojfaktorového CIR modelu. Zdefinujeme účelovú funkciu, ako vážený priemer štvorcov rozdielov reálnej výnosovej krivky a krivky vypočítanej modelom:

$$\min U_1 = \min \frac{1}{n} \frac{1}{m} \sum_{i,j}^{m,n} (R_j^i - \bar{R}_j^i)^2 \tau_j^2, \quad (5.1)$$

kde  $R_j^i, j = 1, \dots, m$  je reálna výnosová krivka dĺžky  $m$  v čase  $i = 1, \dots, n$ . Hodnoty  $R_j^i$  zodpovedajú úrokovým mieram pre diskontný dlhopis v čase  $\tau_j$  do maturity. Váhy v tomto prípade predstavujú časy  $\tau_j$ . Keďže uvažujeme  $\tau \in (0, 1 >$ , intuitívne by sa dalo očakávať, že model lepšie zachytí reálnu výnosovú krivku pri vyšších hodnotách maturity dlhopisu, teda pri  $\tau \rightarrow 1$ . Vzniká teda otázka, ako zvoliť vektor váh, aby čo najlepšie aproximovali reálnu výnosovú krivku. Vzhľadom k tejto intuícii sa budeme zaoberať ešte jedným typom účelovej funkcie:

$$\min U_2 = \min \frac{1}{m} \frac{1}{n} \sum_{i,j}^{m,n} (R_j^i - \bar{R}_j^i)^2, \quad (5.2)$$

kde budeme predpokladať, že všetky váhy sú uniformne rovné 1.

Účelová funkcia  $U$ , rovnako pre prípad  $U_1$ , aj  $U_2$ , je funkcia 8 parametrov, konkrétne

$$U = U(\kappa_1, \kappa_2, \theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2).$$

Pôjde teda o hľadanie minima v 8-rozmernom priestore. Prirodzená otázka by bola, či existuje spôsob, ktorým by sa podarilo zredukovať počet premenných. V jednofaktorovom modeli to je možné. V článku [12] je predstavená metóda kalibrácie 1-faktorového CIR modelu. Ide o tzv. dvojfázovú minmaxovú metódu, ktorej prvá fáza zahŕňa redukciiu priestoru parametrov a následne nájdenie minima na 1-dimenzionálnej krivke. V druhej fáze je použitá metóda maximum likelihood na nájdenie globálneho maxima vzhľadom k získanej 1-dimenzionálnej krivke. Agregáciu v 1-faktorovom modeli umožnil najmä fakt, že rýchlosť priťahovania  $\kappa$  a prémia za riziko  $\lambda$  sa v funkciách  $A, B$  vyskytuje len v tvare súčtu  $\kappa + \lambda$ , na čo poukázal Pearson and Sun (1994). Išlo o nasledovnú agregáciu parametrov:

$$\beta = e^{-\eta}, \quad \xi = \frac{\kappa + \lambda + \eta}{2\eta}, \quad \rho = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}, \quad (5.3)$$

kde  $\eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$ . V zmysle tejto agregácie sa dajú prepísať aj funkcie  $A, B$  v cene dlhopisu. To znamená, že ceny dlhopisu a následne aj celá výnosová krivka sú funkciami troch parametrov  $\beta, \xi$  a  $\rho$ .

Dvojfaktorový CIR model sa od jednofaktorového líši v tom, že podobnú agregáciu parametrov nevieme spraviť. Spôsobil to hlavne fakt, že v priemernej cene dlhopisu vystupujú funkcie hustoty, ktorých tvar neumožňuje transformáciu parametrov na agregáty (5.3). Z toho vyplýva, že spriemernené ceny dlhopisov a príslušné časové štruktúry budú funkciami 8 parametrov.

## Kapitola 6

# Analýza údajov a numerické výsledky

### 6.1 Zdroj dát

Okamžitá úroková miera  $r_t$ , ktorá v modeloch vývoja úrokovej miery sleduje stochastický proces vyjadrený rovnicou (2.1), vyjadruje v reálnom svete výnos dlhopisu s maturitou vo veľmi krátkom časovom úseku. Takéto hodnoty sú však nepozorovateľné, a teda sa okamžitá úroková miera stotožňuje s *overnight*-om, čo je jednodňová medzibanková miera.

Existuje mnoho verejne dostupných medzibankových mier, z európskych patria medzi najrozšírenejšie LIBOR(London Interbank Offered Rate), EURIBOR(Euro Interbank Offer Rate), EONIA(Euro Overnight Index Average), ...

LIBOR je fixovaný na dennej báze britskej bankovej asociácie(BBA). Je odvodený z priemernej hodnoty medzibankových depozitných mier zo svetovo najlikvidnejších bánk, pokiaľ ide o schopnosť poskytnúť vysoký úver na medzibankovom trhu.

EURIBOR je úroková miera, za ktorú si požičiavajú panelové banky<sup>1</sup> úvery na EU medzibankovom trhu.

EONIA je štandardná úroková miera pre depozity v euro-mene. Stanovuje ju Európska centrálna banka ako vážený priemer zo všetkých *overnight*-ových transakcií z nezabezpečených úverov na medzibankovom trhu.

Kalibráciu parametrov nášho modelu sme uskutočnili na dátach LIBORu. Túto referenčnú mieru sme zvolili najmä preto, lebo patrí medzi svetovo najpoužívanéjšie krátkodobé úrokové miery. Medzi krajiny, ktoré sa orientujú na LIBOR, patria napr. USA, Kanada, Švajčiarsko a samozrejme Veľká Británia.

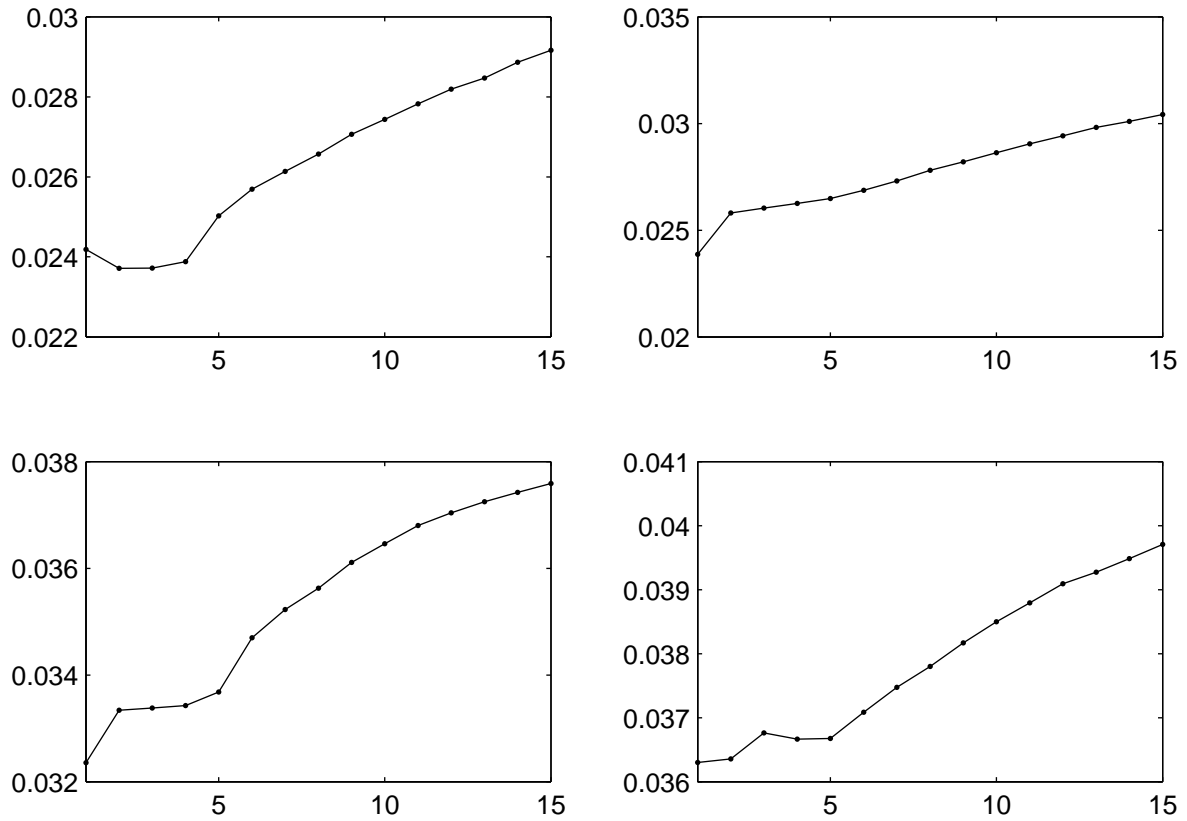
EURO-LIBOR a USD-LIBOR časové štruktúry obsahujú diskontné dlhopisy s nasledu-

---

<sup>1</sup>Panelové banky - skupina bánk, ktorá pozostáva z najväčších členov Euro menového trhu. Zaznamenávajú najobjemnejšie transakcie v rámci Euro-trhu a zabezpečujú stabilitu a likviditu. Tieto banky nemusia mať sídlo v EU [16].



júcimi maturitami: 1 a 2 týždne, a postupne 1 až 12 mesiacov, spolu to tvorí 14 hodnôt časovej štruktúry. Príklady niektorých časových štruktúr EURO-LIBORu sa nachádzajú na obrázku č.6.1.



Obr. 6.1: Reálne časové štruktúry 2006. Po riadkoch: 3. februára, 3. marca, 9. októbra, 20. decembra

## 6.2 Výsledky kalibrácie modelu

V nasledujúcej časti prezentujeme výsledky kalibrácie pre rôzne zvolené časové štruktúry z dát LIBORu.

Základom kalibrácie bola minimalizácia účelovej funkcie (5.1), ktorej výsledky sme priamo porovnali s výsledkami minimalizácie s uniformnou účelovou funkciou (5.2). Pre porovnanie uvádzame aj hodnoty odhadnutých parametrov, ako aj hodnotu účelovej funkcie. Prirodzene sa dá očakávať, že hodnota minimálnej účelovej funkcie bude pre uniformný typ (5.2) vyššia. Je to spôsobené hlavne tým, že čas do maturity  $\tau < 1$ , z čoho vyplýva, že pri váhach  $\tau_j^2$  budú hodnoty váženej sumy štvorcov o 10 až 100 nižšie ako v prípade uniformnej účelovej funkcie.

Cieľom minimalizácie v oboch prípadoch bolo minimalizovanie funkcie 8 premenných, pre ktoré sme stanovili základné ohraničenia, uvedené v tabuľke 6.2.

parameter	dolné	horné
$\kappa_i$	0	$\infty$
$\sigma_i$	0	$\infty$
$\theta_i$	0	0.2
$\lambda_i$	$-\infty$	$\infty$

Tabuľka 6.1: Ohraničenia na parametre pri kalibrácii.

Sila prifahovania  $\kappa$  k dlhodobo rovnovážnej hodnote  $\theta$  by mala nadobúdať len nezáporné hodnoty a podobne aj volatilita  $\sigma$ . Keďže  $\theta$  je úroková miera, očakávame, že nebude vyššia ako 20% a napokon nesmie byť ani záporná, pretože to neumožňuje CIR model. Trhová miera rizika môže nadobúdať aj kladné hodnoty, očakáva sa však, že bude záporná.

Na optimalizáciu sme použili minimalizačnú funkciu *fmincon* v programe Matlab®. V každom kroku počítame diskrétné hodnoty priemernenej ceny, resp. výnosu v časoch  $\tau_j, j = 1, \dots, n$  a v jednotlivých dňoch  $i = 1, \dots, m$ . Tie následne použijeme na výpočet účelovej funkcie.

Na nasledujúcich obrázkoch je príklad odhadu parametrov a časovej štruktúry z dát LIBORu, konkrétne EURO-LIBORu. Zvolili sme optimalizáciu cez 5 dní. V tabuľke (6.2) sú výsledky optimalizácie pre oba typy účelovej funkcie pre zvolené reálne časové štruktúry. Môžeme si všimnúť, že hodnota účelovej funkcie  $U_1$  je rádovo 10-krát vyššia. Takýto výsledok sme očakávali kvôli už spomínanej voľbe váhových koeficientov  $\tau_j^2$ . Hodnota odhadnutých trhových mier rizika nespĺnila naše očakávania, nadobudla vysoko kladné hodnoty. Tento fakt však nie je chyba, je známe, že reálne dáta EURO-LIBORu môžu zahŕňať aj kladné hodnoty trhových cien rizika. Ostatné odhadnuté parametre splnili očakávania. Porovnaním výsledkov z minimalizácie oboch účelových funkcií si môžeme

všimnúť, že parametre nie sú úplne totožné, čo je však spôsobené rôznymi váhami v účelových funkciách.

	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$U(x10^{-8})$
$U_1$	6.954	11.219	5.624	8.444	0.091	0.022	13.07	17.65	1.531
$U_2$	4.787	11.507	7.689	11.714	0.068	0.097	21.91	29.43	19.05

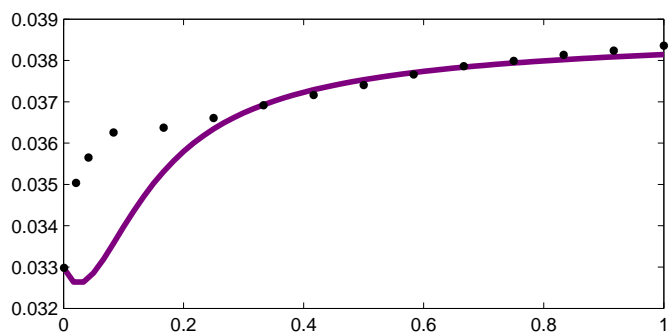
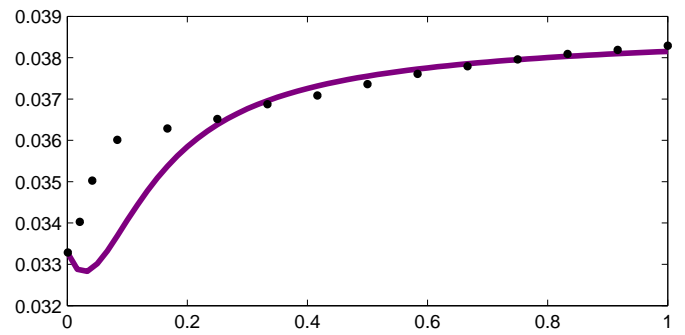
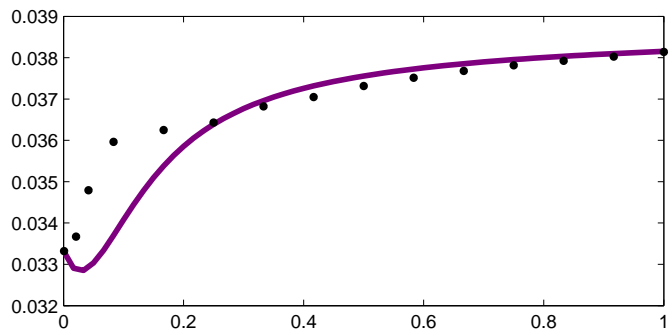
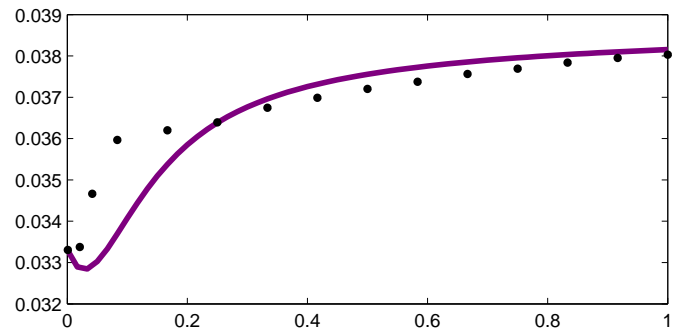
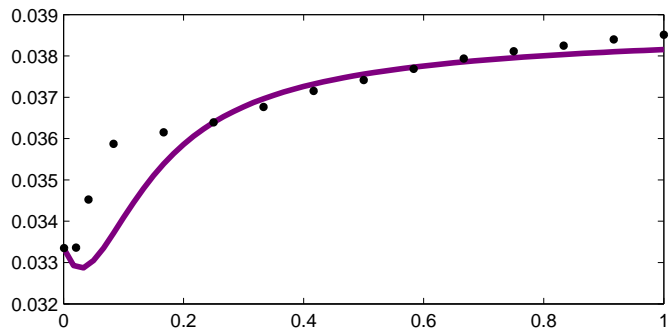
Tabuľka 6.2: Príklad kalibrácie parametrov na reálnych časových štruktúrach LIBORu v rozmedzí 5 dní.

Na obrázku (6.2) je výsledok optimalizácie účelovej fcie  $U_1$  pre každý deň. Každá výnosová krivka vychádza z *overnight* príslušného dňa a vyvíja sa podľa procesu s parametrami danými v tabuľke (6.2). Môžeme si všimnúť, že synchronná optimalizácia cez 5 dní pomerne dobre vystihuje aj reálne časové štruktúry v každom dni zvlášť. Z pohľadu na grafy je zrejmé, že model nezachytil body časovej štruktúry s nízkou maturitou. Zároveň však môžeme konštatovať, že pre vyššie maturity je vypočítaná výnosová krivka dobrou aproximáciou.

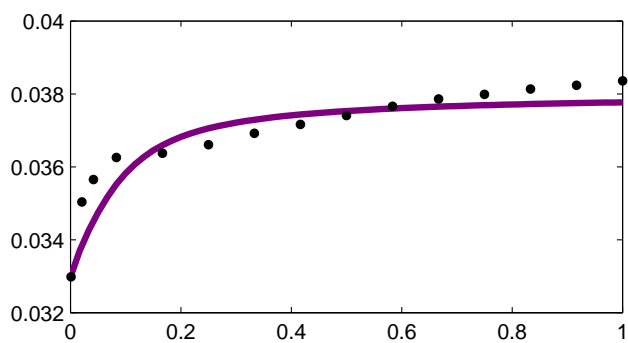
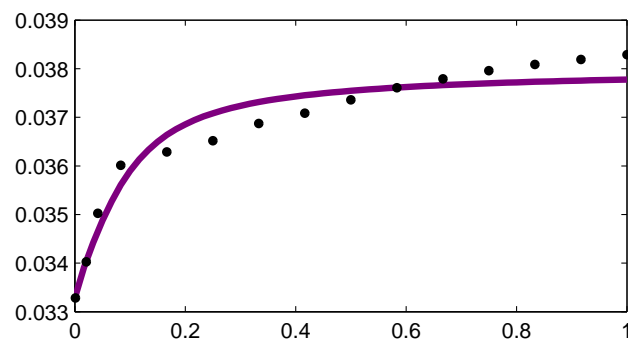
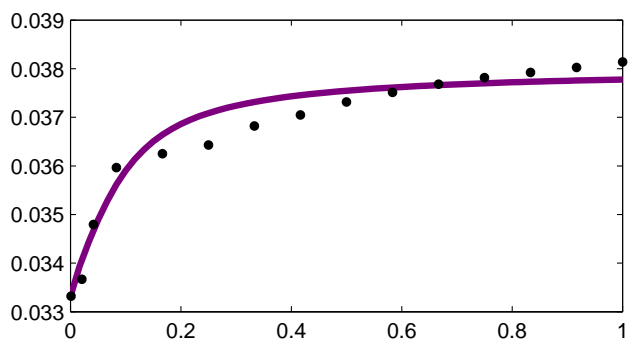
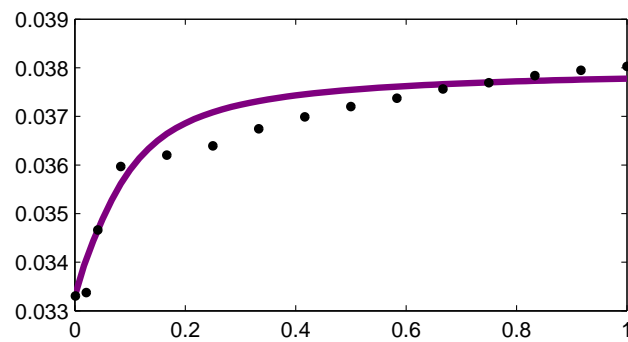
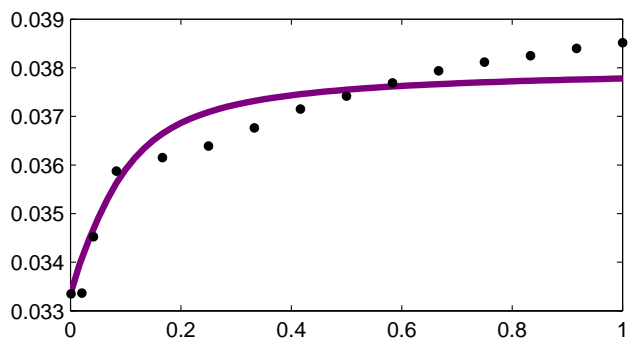
Pre nižšie maturity, naopak, máme lepšie výsledky z optimalizácie účelovej funkcie  $U_2$ . Tu je však aproximácia pre vyššie maturity horšia ako v prípade účelovej funkcie  $U_1$ . Grafy pre tú istú päťicu dní sú na obrázku (6.2).

Keďže sme priemernú výnosovú krivku získali kalibrovaním reálnych časových štruktúr z 5 dní, zaujímavým pozorovaním by mohol byť fakt, či priemerná výnosová krivka dobre odhaduje aj priemerné reálne hodnoty. Na obrázkoch (6.2), (6.2) je zobrazená priemerná výnosová krivka, ktorá vychádza z priemeru *overnight*ov príslušných 5 dní. Aj v tomto prípade môžeme pozorovať, že účelová funkcia  $U_1$  nám lepšie odhadne vyššie maturity, zatiaľ čo  $U_2$  lepšie odhaduje začiatok časovej štruktúry.

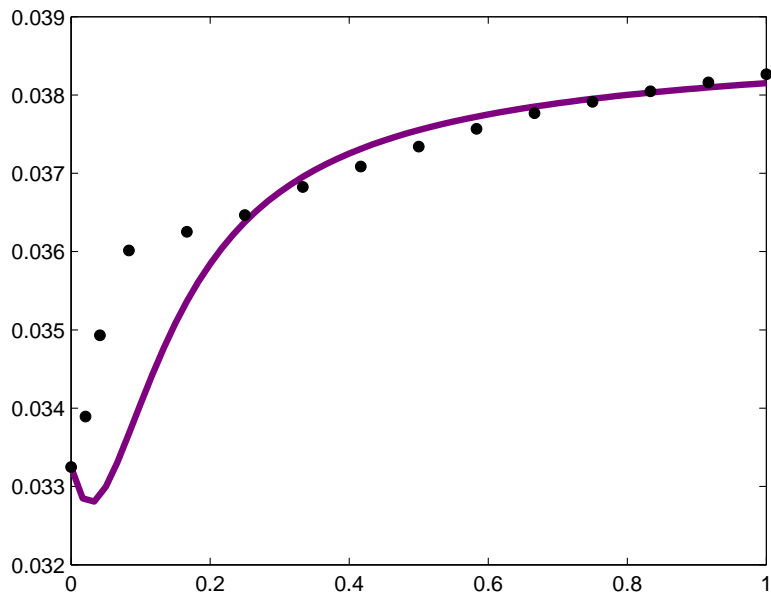
Z uvedených výsledkov vyplýva, že pre kompletne zachytenie reálnych časových štruktúr potrebujeme vhodne zvoliť vektor váh v účelovej funkcii. Navrhovaným riešením by mohlo byť zahrnutie nejakého dodatočného parametra do optimalizácie, vďaka ktorému by sme získali lepší vektor váh.



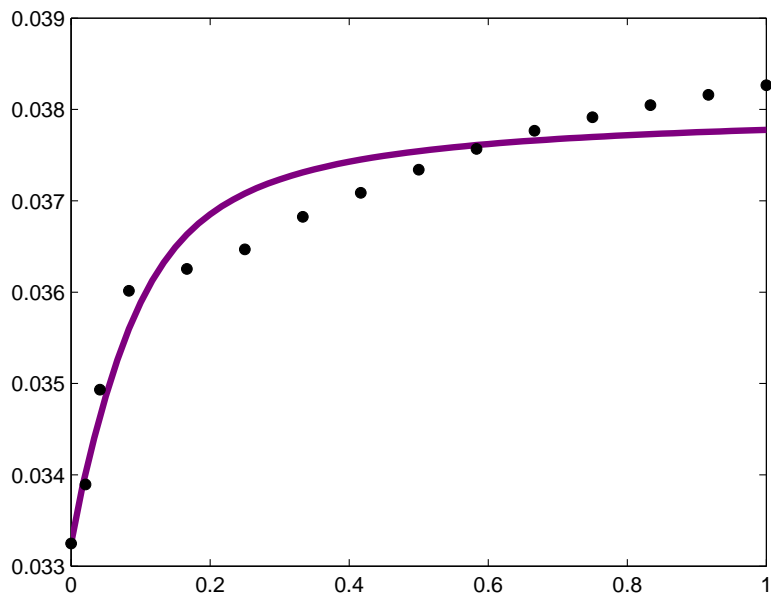
Obr. 6.2: Výsledok minimalizácie  $U_1$  z 5 dní.



Obr. 6.3: Výsledok minimalizácie  $U_2$  z 5 dní.



Obr. 6.4: Spriemernená výnosová krivka cez  $U_1$  porovnaná s priemerom reálnych časových štruktúr 5 dní.



Obr. 6.5: Spriemernená výnosová krivka cez  $U_2$  porovnaná s priemerom reálnych časových štruktúr 5 dní.

### 6.3 Problémy pri optimalizácii

V tejto časti by sme chceli poukázať na problémy, ktoré vznikali pri kalibrácii modelu. V každom optimalizačnom kroku počítame priemernú hodnotu ceny dlhopisu (4.15). Pri týchto výpočtoch nám program častokrát zlyhával, najmä z numerického hľadiska. Hlavnou príčinou je tvar vzťahu pre priemernú hodnotu. V ňom hodnota exponenciálnej časti  $e^{(B_2 - B_1 + a_2 - a_1)r_1}$  je veľmi citlivá na voľbu parametrov, ktoré vstupujú do funkcií  $B_i$  a  $a_i$ . Pri nevhodnej voľbe parametrov častokrát hodnota exponentu nadobúdala extrémne hodnoty a následne celý výpočet zlyhal. Aby sme sa vyhli týmto extrémom, zistili sme, že treba vhodne zvoliť počiatočné parametre tak, aby výraz

$$a_2 - a_1 = \frac{2\kappa_2\theta_2}{\sigma_2^2} - \frac{2\kappa_2\theta_2}{\sigma_2^2}$$

nenadobúdal veľké záporné hodnoty. Za veľké hodnoty v tomto prípade pokladáme napríklad menšie ako -500.

Ďalším numerickým obmedzením bola minimalizácia účelovej funkcie. Pri minimalizácii sme sa pohybovali rádovo okolo  $10^{-7}$ , čo numerický aparát programu Matlab častokrát považoval za dosiahnuté optimum a výpočet ukončil. S cieľom pokračovať v optimalizácii sme v každej iterácii pre násobili hodnotu účelovej funkcie hodnotou  $10^{4.4}$  a až tak sa nám podarilo dosiahnuť optimálne minimum, cca.  $10^{-8}$ . Mocninu, v tomto prípade 4.4, sme získali postupným skúšaním, napríklad pre 3 alebo 5 nám výpočet zlyhal.

# Záver

V diplomovej práci sme sa zaoberali multifaktorovým modelom vývoja úrokovej miery. Konkrétne vychádzame z multifaktorovej verzie CIR modelu, v ktorej je okamžitá úroková miera daná ako súčet nezávislých stochastických procesov. Hlavnou témou bolo na základe hustoty rozdelenia skrytých faktorov spriemerniť ceny dlhopisov vzhľadom na súčet faktorov. Takto spriemernený model sme použili pri kalibrácii parametrov. Základom kalibrácie bola minimalizácia účelovej funkcie, ktorá predstavovala vážený priemer štvorcov rozdielov medzi reálnymi výnosovými krivkami a krivkami vypočítanými modelom. V štvrtej kapitole uvádzame príklady spriemernených výnosových kriviek pre rôzne kombinácie parametrov. Týmto dokazujeme lepšiu schopnosť dvojfaktorového modelu zachytiť rôzne tvary výnosových kriviek, ktoré jednofaktorový model neposkytuje.

Jedným z ďalších cieľov bola kalibrácia parametrov pomocou reálnych dát. Z výsledkov sa ukázalo, že pre dokonalý odhad reálnej časovej štruktúry potrebujeme citlivejšie zvoliť vektor váh, ktorý vystupuje v minimalizovanej účelovej funkcii.

Priestor pre ďalšie skúmania vzniká najmä pri voľbe váhových koeficientov v kalibrácii parametrov modelu. Navrhovaným riešením by mohlo byť pridanie ďalšieho parametra, ktorý by umožnil lepšie ohýbanie spriemernenej výnosovej krivky a tým aj lepší odhad reálnej výnosovej krivky.



# Literatúra

- [1] Boudoukh, J., Richardson, M., Stanton, R., Whitelaw, R. F., *A multifactor, nonlinear, continuous - Time model of interest rate volatility*,
- [2] Hull, J. C., *Options, Futures and Other Derivatives*, Upper Saddle River, Prentice - Hall, Inc., 2000.
- [3] Longstaff, F. A., Schwartz, E.S., *Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model*, The Journal of Finance, 47 (1992), 1259 - 1282.
- [4] Ren-Raw Chen, Louis Scott, *Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Test From a Kalman Filter Model*, NJ-London, July 1993 (revised September 2002).
- [5] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. A., *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, Volume 53 1985 (385-408).
- [6] Litterman, R., Scheinkman, J., *Common Factors Affecting Bond Returns*, The Journal of Fixed Income, 1 (1991), 54 - 61.
- [7] Chan, K. C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A., Sanders, A.S. *An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate*, The Journal of Finance, 47 (1992), 1209 - 1227.
- [8] Ho, Thomas S.Y., Lee, Sang-Bin, *Term Structure Movements and Pricing Ingerest Rate Contingent Claims*, The Journal of Finance, 41 (1986), 1011 - 1029.
- [9] Stehlíková, B., *Analýza dvojfaktorového modelu vývoja úrokovej miery so stochastickou volatilitou*, Diplomová práca. FMFI UK Bratislava 2004.
- [10] Kwok, Y. K., *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer-Verlag. 1998.
- [11] Vajdička, V., *Analýza modelov úrokovej miery s využitím explicitných riešení*, Diplomová práca. FMFI UK Bratislava 2005.
- [12] Ševčovič, D., Urbánová Csajková, A., *On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model*, Institute of Appl.Mathematics, UK Bratislava 200x.

- [13] Abramovitz, M., Stegun, I., *Handbook on Mathematical functions.*, National Bureau of standards, Applied Mathematics series 55, 10th edition, 1972.
- [14] Koopman, S.J, Uspensky, E.H., *The Stochastic Volatility in Mean model: Empirical evidence from international stock markets*, Dep. of Econometrics, Free University Amsterdam, Dep. of Accounting and Finance, University of Birmingham, 2001.
- [15] Anderson, T.G, Lund, J., *The Short Rate Diffusion Revisited: A Tour Guided by the Efficient Method of Moments.*, Working paper, J. L. Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, 1996.
- [16] Investopedia, <http://www.investopedia.com/terms/p/panelbank.asp>

# Príloha

Program pre kalibráciu parametrov dvojfaktorového CIR modelu:

```
global R; global r; global Tau; global cnt;
global
MaxPocetIteracii;
global parametre_in; global parametre_out;
global nR1;

data=dlmread('Tau-December-Libor.csv'); R=data(:,2:6);
Tau=data(:,1);
%Tau(1)=0.01;
for x=1:size(R,1)
    for y=1:size(R,2)
        R(x,y)=R(x,y)/100;
    end
end r=R(1,:);
parametre_in = Nastav_premenne; cnt=0;
MaxPocetIteracii=100; MaxPocetFunkcii = 100000; zaciatok=now;
%obmedzenia na parametre
lowerb=[0,0,0.0001,0.0001,0,0,-Inf,-Inf,-100];
upperb=[Inf,Inf,Inf,Inf,0.1,0.1,Inf,Inf,100];
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=
    fmincon(@A,parametre_in,
            [], [], [], [], lowerb, upperb, [],
            optimset('TolFun',1e-7,'Tolx',1e-7,'MaxIter',
                    MaxPocetIteracii,'LargeScale','off','MaxFunEvals',MaxPocetFunkcii));
koniec=now;
%vykreslenie vysledku
for i=1:size(R,2)
    subplot(3,3,i)
    [Px,Rx]=P_priemer(parametre_out,r(i));
```

```

    plot([0:1/60:1],Rx,'Color',[0.5 0 0.5],'LineWidth',3);
    hold on;
    plot(Tau,R(:,i),'ok','MarkerSize',3,'LineWidth',1.5);
end
figure
ERx=mean(R');
[Px,Rx]=P_priemer(parametre_out,mean(r));
plot([0:1/60:1],Rx,'Color',[0.5 0 0.5],'LineWidth',3); hold on;
plot(Tau,ERx,'ok','MarkerSize',5,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k');
%-----
%Funkcie pouzite v programe
%-----
function ff = A (param)

global r; global R; global nR1; global Tau; global
MaxPocetIteracii;
[P1]=pocitaj_P(param); F=0;
%Ucelova funkcia
Vahy =Tau.^2;
for t=2:length(Tau)
    for s=1:size(P1,2)
        F=F+Vahy(t)*(R(t,s)+log(P1(t,s))/Tau(t))^2;
    end
end ff=F/((length(Tau)-1)*size(P1,2));
ff=ff*10^4.4;

function [P1] = pocitaj_P(nove)

global r; global R; global Tau; global nR1;
k1=nove(1);
k2=nove(2); s1=nove(3); s2=nove(4); t1=nove(5); t2=nove(6);
L1=nove(7); L2=nove(8);
gama1=sqrt((k1+L1)^2+2*s1^2);
gama2=sqrt((k2+L2)^2+2*s2^2);
alf1 = 2*k1/s1^2;
alf2 = 2*k2/s2^2;
%alfa2-alfa1
alfx = alf2 - alf1;
lamda1=alf1*t1;

```

```

lamda2=alf2*t2;
for s=2:length(Tau)
b1 =
2*(1-exp(-gama1*Tau(s)))/
(2*gama1*exp(-gama1*Tau(s))+(k1+L1+gama1)*(1-exp(-gama1*Tau(s))));
b2 =
2*(1-exp(-gama2*Tau(s)))/
(2*gama2*exp(-gama2*Tau(s))+(k2+L2+gama2)*(1-exp(-gama2*Tau(s))));
a1 = [(2*gama1*exp(Tau(s)*(k1+L1+gama1)/2))
/(2*gama1+(k1+L1+gama1)*(exp(gama1*Tau(s))-1))]^lamda1;
a2 =
[(2*gama2*exp(Tau(s)*(k2+L2+gama2)/2))
/(2*gama2+(k2+L2+gama2)*(exp(gama2*Tau(s))-1))]^lamda2;
for m=1:size(R,2)
rr=r(m);
F1=inline('exp((b2-b1+alfx)*rr*x)*x^(lamda1-1)*(1-x)^(lamda2-1)');
F2=inline('exp(alfx*rr*x)*x^(lamda1-1)*(1-x)^(lamda2-1)');
C1=abs(quad(F1,0,1,[],[],b1,b2,alfx,lamda1,lamda2,rr));
M1=abs(quad(F2,0,1,[],[],alfx,lamda1,lamda2,rr));
%C1=hypergeom(lamda1,lamda1+lamda2,(b1-b2+alfx)*rr);
%M1=hypergeom(lamda1,lamda1+lamda2,alfx*rr);
%Cena dlhopisu za den m a cas s
P1(s,m) = a1*a2*exp(-b2*rr)*C1/M1;
nR1(s,m)= -log(P1(s,m))/Tau(s);
end;
end;

```