FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Všeobecná obálková veta

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Ivana Kosírová
Bratislava

29. apríla 2007

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika

Všeobecná obálková veta

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Ivana Kosírová

Vedúci diplomovej práce: Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.

Bratislava 2007

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že túto diplomovú prácu som vypracovala samostatne len s použitým teoretických vedomostí a uvedenej citovanej literatúry.

V Bratislave, máj 2007 ....

Poďakovanie

Touto cestou by som sa chcela poďakovať môjmu školiteľovi p.prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc., za jeho vysoko odbornú spoluprácu na tejto diplomovej práci a jeho nesmiernu ochotu a cenné rady.

Abstrakt

Téma diplomovej práce: ***Obálková veta***
Diplomant: ***Ivana Kosírová***
Vedúci diplomovej práce: ***Prof. RNDr. Pavol Brunovský,DrSc.***
Predseda komisie pre obhajoby: ***Doc. RNDr. Daniel Ševčovič,CSc.***
Univerzita Komenského. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky;
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.
Stupeň odbornej kvalifikácie: magister odboru matematika
Špecializácia: ekonomická a finančná matematika
Bratislava: FMFI UK, 2007, 43 s.

Obálková veta má mnohé aplikácie v mikroekonomickej teórii, akými sú napríklad Royova rovnosť, Shepardova lema, Hotellingova lema a Viner-Wongova obálková veta. Táto práca zahŕňa klasické znenie obálkovej vety pre úlohy na voľný ako aj viazaný extrém. Obsahuje aj rozšírenú verziu Viner-Wongovej vety pre subdiferencovateľné krátkodobé a dlhodobé náklady, ktorá vychádza z práce A. Horsleyho a A. J. Wrobela.
Ďalej sa zaoberá platnosťou obálkovej vety za všobecných podmienok pre funkcie $h(t) = \max_x f(x, t)$, kde t je jedno až viacrozmerný parameter bez špeciálnych predpokladov na argmax.

Kľúčové slová: obálková veta, hodnotová funkcia

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Obálková veta je jedným zo základných nástrojov na riešenie maximalizačných úloh v mikroekonomickej teórii. Pôvodne bola navrhnutá v roku 1931 kanadským ekonómom Jacobom Vinerom a neskôr prepracovaná americkým ekonómom Paulom Samuelsonom. Jej slovenský preklad obálková veta z anglického *envelope theorem* nie práve najvhodnejší. Jej názov je odvodený od slova obalovať, obklopovať. Obálka je krivka, ktorá obklopuje nejakú triedu kriviek, z ktorých má každá s obálkovou krivkou aspoň jeden bod spoločný. Vinerova obálková veta pôvodne poukazovala na vzťahy hraničných krátkodobých a dlhodobých nákladov.

Vo všeobecnosti obálková veta hovorí o zmene hodnotovej funkcie pri zmene parametra. Majme úlohu maximalizácie účelovej funkcie $f(x,t)$, kde t je parameter. Potom hodnotová funkcia definovaná vzťahom

$$h(t) = \max_{x \in K} f(x,t)$$

udáva optimálnu hodnotu účelovej funkcie pri danej hladine parametra t. Nech sa maximum účelovej funkcie pre t nadobúda v $x(t)$. Obálková veta dáva do vzťahu diferenciál hodnotovej funkcie a parciálny diferenciál účelovej funkcie pre $x(t)$ optimálne.

$$\nabla h(t) = \nabla_t f(x,t)\big|_{x=x(t)}$$

Toto tvrdenie platí len za špeciálnych predpokladov kladených na $x(t)$, branú ako funkciu parametra t. V našej práci sme sa snažili oslabiť tieto predpoklady a dokázať znenie obálkovej vety v slabšom tvare.

Práca sa skladá z úvodu, troch kapitol a záveru.

V prvej kapitole sformulujeme obálkovú vetu pre voľný aj viazaný extrém a zároveň interpretujeme význam Lagrangeových multiplikátorov ako tieňových cien.

Ako sme už spomínali, obálková veta má veľa aplikácii v mikroekonomickej teórii. Mnohé známe lemy sú jej priamym dôsledkom. V druhej kapitole sformulujeme úlohy maximalizácie zisku, maximalizácie úžitku a minimalizácie výdavkov a pomocou obálkovej vety sformulujeme Hottelingovu lemu, Royovu nerovnosť a Shepardovu lemu. Spomenieme aj Viner-Wongovu obálkovú vetu o vzťahu medzi krátkodobými a dlhodobými nákladovými krivkami.

V poslednej kapitole sa budeme venovať hodnotovej funkcii a jej vlastnostiam pri menších predpokladoch kladených na účelovú funkciu $f(x,t)$. Nakoľko pre dané t sa maximum môže nadobúdať na hranici množiny K alebo nie je dané jednoznačne iba pre jedno $x(t)$, teda

$$G(t) = \arg\max_{x \in K} f(x,t)$$

je viacprvková množina, nemôžeme známu obálkovú vetu na hodnotovú funkciu $h(t)$ aplikovať. Najprv všeobecne definujeme hodnotovú funkciu

$$h(t) = \sup_{x \in K} f(x,t)$$

a dokážeme, že je Lipschitzovsky spojitá. Potom sformulujeme tvrdenie nazvané ako všeobecná obálkova veta pre účelovú funkciu $f(x,t)$, kde $x \in K$ je kompaktná bez predpokladov diferencovaťeľnosti účelovej funkcie podľa x a C^1-hladkosti krivky $x(t)$. Pre jednorozmerný parameter dostaneme slabšiu integrálnu verziu obálkovej vety a pre viacrozmerný parameter dokážeme jej platnosť skoro všade v zmysle Lebegueovej miery. Pokúsime sa o jej aplikáciu v teórii optimálneho riadenia pre diskrétne úlohy na konečnom horizonte. Nakoniec pre úplnosť sformulujeme už známu lemu Benveniste-Schienkmana pre viacrozmerné konkávne funkcie, ktorá je tiež akousi obálkovou vetou. Následne ju aplikujeme na dôkaz diferencovateľnosti hodnotovej funkcie pre diskontované diskrétne úlohy na nekonečnom horizonte.

V závere zhrnieme výsledky tejto práce a načrtneme ďaľšie problematiky, s ktorými sme sa stretli a pre ktoré by mohla mať všeobecná obálková veta význam.

Kapitola 2

Obálková veta

2.1 Obálková veta pre voľnú maximalizáciu

Najprv zavedieme pojem Obálkovej vety pre prípad maximalizácie funkcie bez ohraničení na premennú x.

$$\max_{x \in V \subseteq \mathbb{R}^n} \left\{ f(x,t); \quad t \in U \subseteq \mathbb{R}^l \right\} \tag{2.1}$$

kde t je l-rozmerný parameter.

Obálková veta 2.1.1. *Nech U, V sú otvorené množiny v $\mathbb{R}^l$ respektíve $\mathbb{R}^n$. Nech je funkcia $f : V \times U \to \mathbb{R}$ C^1-hladká a nech $x^* : U \to V$ je C^1-hladká funkcia taká, že*

$$f(x^*(t), t) \geq f(x,t) \qquad x \in V \subseteq \mathbb{R}^n$$

Teda je riešením úlohy (2.1). Definujme hodnotovú funkciu $h : U \to \mathbb{R}$ nasledovne

$$h(t) = f(x^*(t), t)$$

Potom pre všetky $t \in U$ a $i = 1, \ldots, l$ platí

$$\frac{\partial}{\partial t_i} h(t) = \frac{\partial}{\partial t_i} f(x,t)\Big|_{x=x^*(t)}$$

Dôkaz. Keďže $h(t) = f(x^*(t), t)$, derivovaním zloženej funkcie dostávame

$$\frac{\partial h}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)\Big|_{x=x^*(t)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*(t), t) \frac{\partial x_j^*(t)}{\partial t_i}$$

a keďže $f(x^*(t),t) \geq f(x,t)$ a f je C^1 hladká, nutne platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*(t),t) = 0 \quad j = 1,\ldots,n$$

Teda

$$\frac{\partial h}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial}{\partial t_i} f(x,t)\Big|_{x=x^*(t)}$$

□

2.2 Obálková veta pre viazaný extrém

Podobne môžme formulovať Obálkovú vetu pre optimalizáciu funkcie pri ohraničeniach na x.

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(x,t); \quad g_k(x,t) = c_k \text{ pre } k = 1,\ldots,m \right\} \tag{2.2}$$

kde $t \in \mathbb{R}^l$ je parameter exogénne daný, ktorý vstupuje do funkcie f a prípadne aj ohraničení g_k, $k = 1,\ldots,m$. Riešenie hľadáme pomocou Lagrangeovej funkcie

$$L(x,t,\lambda) = f(x,t) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(c_k - g_k(x,t)) \quad x \in \mathbb{R}^n;\ t \in \mathbb{R}^l;\ \lambda \in \mathbb{R}^m$$

Z nutných podmienok pre viazaný extrém dostávame

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x(t,c),t,\lambda(t,c)) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t,c),t) - \sum_{k=1}^{m} \lambda(t,c)\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x(t,c),t) = 0 \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k}(x(t,c),t,\lambda(t,c)) = c_k - g_k(x(t,c),t) = 0 \qquad k = 1,\ldots,m$$

kde $x(t,c)$ a $\lambda(t,c)$ sú riešenia systému pre dané t a c. Definujme hodnotovú funkciu

$$h(t,c) = f(x(t,c),t) = L(x(t,c),t,\lambda(t,c))$$

Táto nám určuje maximálnu hodnotu funkcie f pre daný parameter t a pri daných ohraničeniach, preto zavisí od c.

Obálková veta 2.2.1. *Nech sú f, g_k pre $k = 1, \dots, m$ C^1-hladké funkcie oboch premenných . Nech riešenie úlohy (2.2) $x(t,c)$ ako aj prislúchajúci Lagrangeov multiplikátor $\lambda(t,c)$ sú C^1 hladké a Jacobiho matica s prvkami $\left\{\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x(t,c),t)\right\}_{j=1,\dots,n}^{k=1,\dots,m}$ má hodnosť m, teda existuje jediné $\lambda(t,c)$ také, že spolu s $x(t,c)$ spĺňa nutné podmienky extrému Lagrangeovej funkcie $L(x(t),t,\lambda(t))$. Potom*

$$\frac{\partial h}{\partial t_i}(t,c) = \frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)\Big|_{x=x(t,c)} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t,c)\frac{\partial g_k}{\partial t_i}(x,t)\Big|_{x=x(t,c)} \quad i = 1,\dots,l$$

$$\frac{\partial h}{\partial c_k}(t,c) = \lambda_k(t,c) \qquad k = 1,\dots,m$$

Dôkaz. Ako v predchádzajúcom prípade použijeme pravidlo derivácie zloženej funkcie

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t_i}(t,c) &= \frac{\partial L}{\partial t_i}(x,t,\lambda)\Big|_{x=x(t,c);\ \lambda=\lambda(t,c)} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_j}(x(t,c),t,\lambda(t,c))\frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t,c) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial \lambda_k}(x(t,c),t,\lambda(t,c))\frac{\partial \lambda_k}{\partial t_i}(t,c) \\ &= \frac{\partial L}{\partial t_i}(x,t,\lambda)\Big|_{x=x(t,c);\ \lambda=\lambda(t,c)} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)\Big|_{x=x(t,c)} - \sum_{k=1}^{m}\lambda_k(t,c)\frac{\partial g_k}{\partial t_i}\Big|_{x=x(t,c)} \quad i=1,\dots,l\end{aligned}$$

Pretože z nutných podmienok extrému platí

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x(t,c),t(\lambda(t,c)) = 0 \quad j = 1,\dots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k}(x(t,c),t(\lambda(t,c)) = 0 \quad k = 1,\dots,m$$

Teda nepriamy efekt nekonečne malej zmeny parametra na zmenu hodnotovej funkcie h je nulový. Veta sa dá dokázať aj z rovnosti $h(t,c) = f(x(t),t)$ iným spôsobom:

$$(2.3) \quad \frac{\partial h}{\partial t_i}(t,c) = \frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)\Big|_{x=x(t,c)} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t,c),t)\frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t,c) \quad i = 1,\dots,l\,,$$

z nutných podmienok extrému máme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t,c),t) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t,c) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x(t,c),t) \qquad j = 1,\ldots,n$$

Zároveň platí väzba $g_k(x(t,c),t) = c_k$ pre všetky k a derivovaním podľa t_i dostávame

$$\frac{\partial g_k}{\partial t_i}(x,t)\big|_{x=x(t,c)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x(t,c),t) \frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t,c) = 0$$

čo nám po dosadení do (2.3) dáva

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t_i}(t,c) &= \frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)\big|_{x=x(t,c)} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t,c) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x(t,c),t) \frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t,c) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)\big|_{x=x(t,c)} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t,c) \frac{\partial g_k}{\partial t_i}(x,t)\big|_{x=x(t)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Podobne dostaneme aj druhé tvrdenie, ktoré poukazuje na význam Lagrangeových multiplikátorov ako tieňových cien.

$$\frac{\partial h}{\partial c_k}(t,c) = \frac{\partial L}{\partial c_k}(x(t,c),t,\lambda(t,c)) = \lambda_k(t,c) \quad k = 1,\ldots,m$$

□

Teda ak chceme zmenšiť c_k, na hodnotovej funkcii $h(t,c)$ zaplatíme stratou $\lambda_k(t,c)\triangle c_k$, čiže Lagrangeov multiplikátor prislúchajúci k ohraničeniu k je tieňová cena, ktorú treba "zaplatiť"na hodnotovej funkcii, ak sa sprísni k-te obmedzenie.

Kapitola 3

Aplikácie v ekonomickej teórii

3.1 Hotellingova lema

Hotellingova lema bola prvýkrát dokázaná Haroldom Hotellingom. Vzťah medzi ponukou tovaru a ziskovou funkciou je často používaný v teórii firmy. Vezmime si **problém maximalizácie zisku**, kde firma vyrába jeden produkt, pomocou jedného vstupu x s jednotkovou cenou w. Získaný produkt z daného množstva x je daný produkčnou funkciou $f(x)$. Následne sa predáva za jednotkovú cenu p, ktorá je daná exogénne trhom. Potom je zisková funkcia daná vzťahom

$$\Pi(x, p, w) = pf(x) - wx$$

Nech $x^*(p, w)$ je také, že pre danú cenu produktu p a cenu vstupu w firma dosahuje maximálny zisk, teda:

$$\Pi(x^*(p, w), p, w) = \max_x \Pi(x, p, w)$$

Definujme funkciu $\Pi^*(p, w) = \Pi(x^*(p, w), p, w)$, teda $\Pi^*(p, w)$ nám udáva optimálnu hodnotu zisku firmy pre dané cenové podmienky p a w a niekedy sa nazýva jednoducho zisková funkcia.

Ak by sa trochu zmenila jedna z cien, ako sa to prejaví na zisku firmy? Zdalo by sa, že firma musí celú úlohu riešiť odznovu, vypočítať nové optimálne množstvo vstupu $x^*(p, w)$, dosadiť do ziskovej funkcie a vyrátať. Ak však poznáme obálkovú vetu 2.1.1, stačí ziskovú funkciu zderivovať podľa príslušného parametra za predpokladu, že zisková funkcia spĺňa jej predpoklady. Špeciálne máme

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial p}(p,w) = \frac{\partial \Pi}{\partial p}(x,p,w)\big|_{x=x^*(p,w)} = f(x^*(p,w))$$
$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial w}(p,w) = \frac{\partial \Pi}{\partial w}(x,p,w)\big|_{x=x^*(p,w)} = -x^*(p,w)$$

Teda ak vzrastie cena produktu p o $\triangle p$, v limite pre $\triangle p \to 0$ sa zisk firmy zvýši o množstvo $f(x^*(p,w))$ vyrobeného tovaru krát zmena ceny $\triangle p$. Naopak, ak stúpnu náklady na produkčný faktor w, firma stratí na množstve vstupného faktora $x^*(p,w)$. Intuitívne, ak by sa w zmenila o veľa, v najhoršom prípade môže firma stále vyrábať rovnaké množstvo a teda stratí nanajvýš $x^*(p,w)\Delta w$.

Naviac, ak poznáme ziskovú funkciu firmy, nemusíme poznať produkčnú funkciu na to, aby sme stanovili optimálne množstvo vstupného faktora. Z obálkovej vety vyplýva

$$x^*(p,w) = -\frac{\partial \Pi^*}{\partial w}(p,w)$$

čo je tvrdenie známe ako **Hotellingova lema**. Zderivovaním ziskovej funkcie podľa p zistíme aj optimálne množstvo vyprodukovaného tovaru $f(x^*(p,w))$.

3.2 Royova rovnosť

Dôsledok obálkovej vety je aj **Royova rovnosť**. Majme úlohu **optimalizácie úžitku**, kde p_x a p_y sú ceny tovarov x a y a I je rozpočtové obmedzenie.

$$V(p_x,p_y,I) = \max_{x,y} \left\{U(x,y); \quad p_x x + p_y y \le I\right\}$$

Teda maximalizujeme úžitkovú funkciu vzhľadom na rozpočtové obmedzenie pri danej cenovej hladine, kde $V(p_x,p_y,I)$ je nepriama úžitková funkcia, určujúca optimálnu hodnotu úžitku pri daných parametroch.

Optimálne riešenie na ohraničenej množine sa dá nájsť pomocou Lagrangeovej funkcie

$$L(x,y,\lambda) = U(x,y) + \lambda(I - p_x x - p_y y)$$

ako riešenie sústavy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x^d, y^d, \lambda^d) &= \frac{\partial U}{\partial x}(x^d, y^d) - \lambda^d p_x = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y}(x^d, y^d, \lambda^d) &= \frac{\partial U}{\partial y}(x^d, y^d) - \lambda^d p_y = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^d, y^d, \lambda^d) &= I - \; p_x\, x \; - \; p_y\, y \quad = 0
\end{aligned}$$

kde $x^d = x^d(p_x, p_y, I)$ a $y^d = y^d(p_x, p_y, I)$ sa nazývajú Marshallovské dopyty[1]. Keďže predpokladáme, že úžitková funkcia je rastúca v oboch premenných, teda $\lambda^d \neq 0$, použijeme obálkovú vetu 2.2.1 pre Lagrangeovu funkciu a dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial I}(p_x, p_y, I) &= \frac{\partial L}{\partial I}(x^d, y^d, \lambda^d) = \quad \lambda^d \\
\frac{\partial V}{\partial p_x}(p_x, p_y, I) &= \frac{\partial L}{\partial p_x}(x^d, y^d, \lambda^d) = -\lambda^d x^d \\
\frac{\partial V}{\partial p_y}(p_x, p_y, I) &= \frac{\partial L}{\partial p_y}(x^d, y^d, \lambda^d) = -\lambda^d y^d \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

To možno interpretovať nasledovne:

- λ^d je konštanta úmernosti zmeny úžitku pri infinitesimálnej zmene I. Ak zväčšíme rozpočet o jednotku, úžitok sa rádovo zväčší o λ^d.
- Ak cena tovaru x stúpne o jednotku, úžitok nám klesne o $x = x^d(p_x, p_y, I)$ jednotiek, z ktorých každá má úžitkovú hodnotu $\lambda^d(p_x, p_y, I)$.
- Rovnako pri jednotkovej zmene ceny tovaru y. Strata na úžitku sa rovná zníženiu úžitku $\lambda^d(p_x, p_y, I)$ v dôsledku jednotkovej zmeny ceny krát množstvo tovaru $y = y^d(p_x, p_y, I)$, na ktorom tratíme úžitok. Správnejšie by ale bolo povedať, že zmena ceny spôsobí aj zmenu x^d a y^d, ale tieto nepriame efekty zmeny ceny sa na zmene hodnotovej funkcie V neprejavia.

[1] x^d resp. y^d sa nazývajú aj *uncompensated*, lebo zmena cenovej hladiny zmení dosiahnuteľný úžitok

Royova rovnosť je špeciálny prepis (3.1) vyjadrujúci Marshallovské dopyty:

$$x^d(p_x, p_y, I) = -\frac{\frac{\partial V(p_x,p_y,I)}{\partial p_x}}{\frac{\partial V(p_x,p_y,I)}{\partial I}}$$

$$y^d(p_x, p_y, I) = -\frac{\frac{\partial V(p_x,p_y,I)}{\partial p_y}}{\frac{\partial V(p_x,p_y,I)}{\partial I}}$$

3.3 Shepardova lema

Podobne možno dokázať **Shepardovu lemu**, ktorá sa vzťahuje k úlohe **minimalizácie výdavkov**, ak chceme dosiahnuť konkrétnu hodnotu úžitku.

$$E(p_x, p_y, v) = \min_{x,y} \left\{ p_x x + p_y y; \quad U(x, y) \geq v \right\}$$

Teda $E(p_x, p_y, v)$ je výdavková funkcia, ktorá udáva najnižšiu sumu, ktorú treba minúť pri danej cenovej hladine p_x a p_y, aby sa dosiahol úžitok hodnoty v.
Úloha sa dá riešiť pomocou Lagrangeovej funkcie:

$$L(x, y, \beta) = p_x x + p_y y + \beta(v - U(x, y))$$

Optimálne riešenie nutne spĺňa:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x^c, y^c, \beta^c) &= p_x - \beta^c \frac{\partial U}{\partial x}(x^c, y^c) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y}(x^c, y^c, \beta^c) &= p_y - \beta^c \frac{\partial U}{\partial y}(x^c, y^c) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \beta}(x^c, y^c, \beta^c) &= \ v \ - \ U(x^c, y^c) \quad = 0
\end{aligned}$$

Prvé dve rovnice systému sa podobajú na rovnice z predchádzajúcej úlohy **maximalizácie úžitku** pre $\beta^c = \frac{1}{\lambda^d}$, ale tretia rovnica je iná. Riešenia $x^c = x^c(p_x, p_y, v)$ a $y^c = y^c(p_x, p_y, v)$ sa nazývajú Hicksovské dopyty[2].

Rovnako ako v prípade **maximalizacie výdavkov** môžno použiť vetu 2.2.1, z ktorej vyplýva, že derivácia optimálnej výdavkovej funkcie podľa

[2] c pochádza z anglického *compensated*, pretože pri zmene cien sa nezmení hodnota dosiahnutého úžitku

parametra je rovná derivácii Lagrangeovej funkcie podľa tohto parametra pre $x = x^c$, $y = y^c$ a $\lambda = \lambda^c$ optimálne.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial v}(p_x, p_y, v) &= \frac{\partial L}{\partial v}(x^c, y^c, \beta^c) = \beta^c \\
\frac{\partial E}{\partial p_x}(p_x, p_y, v) &= \frac{\partial L}{\partial p_x}(x^c, y^c, \beta^c) = x^c \\
\frac{\partial E}{\partial p_y}(p_x, p_y, v) &= \frac{\partial L}{\partial p_y}(x^c, y^c, \beta^c) = y^c
\end{aligned}$$

Čo možno interpretovať nasledovne:

- Ak chceme zvýšiť dosiahnutý úžitok o jednotku, musíme zaplatiť β^c naviac, čiže β^c je tieňová cena dodatočnej jednotky úžitku.
- Ak cena tovaru x vzrastie o jednotku, nové optimálne výdavky vzrastú o množstvo tovaru x, ktoré bolo pred zdražením optimálne. Tento vzťah medzi výdavkovou funkciou a Hicksovskými dopytmi sa nazýva **Shepardova lema**.
- Rovnako pre tovar y. Keďže sme predtým optimalizovali, nemôžme kúpiť menej tovaru y a kvôli zdraženiu ani viac, aby sme dosiahli rovnakú úroveň úžitku v[3].

3.4 Viner-Wongova obálková veta

Ďaľšou významnou aplikáciou je **Viner-Wongova obálková veta**, ktorá má svoje počiatky vo Vinerovom článku o krátkodobých a dlhodobých nákladových krivkách z roku 1931. Spočiatku sa mu nezdalo, prečo by pre ľubovoľný bod krivky dlhodobých nákladov mali mať priemerné dlhodobé náklady rovnaký sklon ako priemerné krátkodobé náklady pre fixný kapitál rovný optimálnemu.

Pre jednoduchosť použijeme model s dvoma produkčnými faktormi. Nech sú celkové, priemerné a hraničné náklady odvodené z **úlohy minimalizácie nákladov**:

$$\min \left\{ wL + rK; \quad f(L, K) = y \right\} \tag{3.2}$$

[3]Všimnime, si, že rozpočtové obmedzenie nie je dané, automaticky sa prispôsobí, aby sa mohla daná hladina úžitku dosiahnuť. $E(p_x, p_y, v)$ nám udáva, aké musí byť minimálne.

Kde w a r sú ceny produkčných faktorov L a K. Teda môžme definovať funkciu $C^*(y)$, ktorá udáva najnižšiu hladinu nákladov na výrobu tovaru množstva y. $C^*(y)$ získame riešením úlohy (3.2) pre všetky y. Riešením získame optimálne $K^* = K(y)$ a $L^* = L(y)$, preto C^* závisí len od y, pre w, r fixné. Nezaujíma nás, aké množstvo y bude firma vyrábať na základe optimalizácie zisku, teda w a r sú pevne dané a y je náš parameter.

Pozrime sa na nákladovú funkciu v okolí bodu y_0. Pre dané množstvo y_0 firma optimálne využíva množtvo K_0 a L_0 produkčných faktorov. Predpokladajme, že firma z krátkodobého hľadiska drží kapitál na hladine K_0.

$$SC(y) = \min_{L} \left\{ wL + rK_0; \quad f(K_0, L) = y \right\}$$

Pre ľubovoľné množstvo y rôzne od y_0 sú krátkodobé náklady $SC(y)$ väčšie nanajvýš rovné ako dlhodobé náklady $C^*(y)$, lebo tieto sú minimálne náklady na výrobu množstva y. Samozrejme pre $y = y_0$ sa náklady rovnajú. Viď obrázok 3.2.

$$\begin{aligned} SC(y) &\geq C^*(y) \\ SC(y_0) &= C^*(y_0) \end{aligned}$$

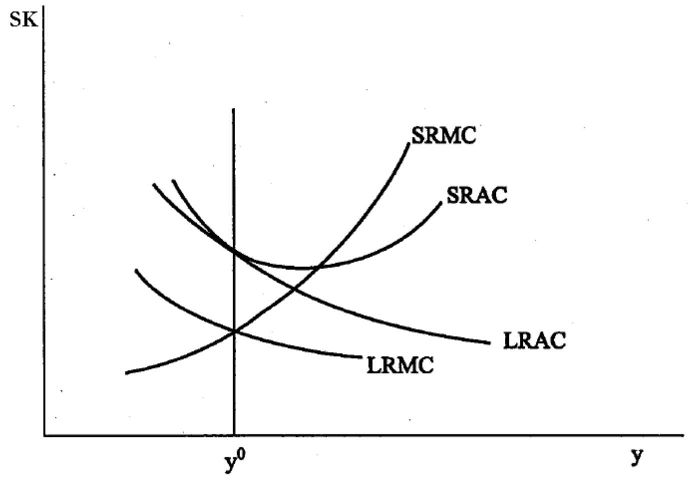
Teda ak predpokladáme hladkosť nákladových funkcií, dostávame, že SC sa dotýka C^* v y_0 a v okolí y_0 je SC vypuklejšia ako C^*. V y_0 majú obe nákladové funkcie rovnaké derivácie, teda rovnaké hraničné náklady

$$SRMC(y_0) = LRMC(y_0) \tag{3.3}$$

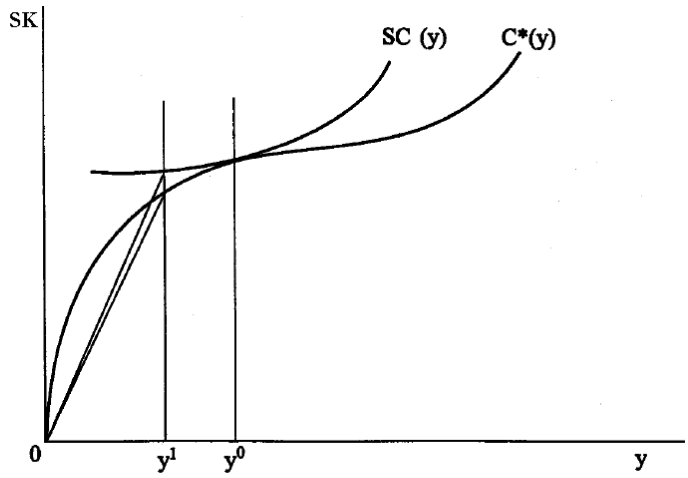
Naviac, keďže SC je vypuklejšia ako C^* v okolí y_0, musí mať väčšiu druhú deriváciu: $SC''(y) \geq C^{*''}(y)$. Z toho ale vyplýva, že krátkodobé hraničné náklady $SRMC$ rastú rýchlejšie resp. klesajú pomalšie ako dlhodobé hraničné náklady $LRMC$. Preto $SRMC$ pretínajú $LRMC$ v y_0 na obrázku 3.1 zospodu nahor.

Čo sa týka vzťahu medzi priemernými krátkodobými a dlhodobými nákladmi, pre ľubovoľné množstvo y je $SRAC$ resp. $LRAC$ smernica tetivy, ktorá spája začiatok súradnicovej sústavy a prislúchajúci graf.

$$AC(y) = \frac{C(y)}{y}$$



Obrázok 3.1: Krátkodobé a dlhodobé hraničné a priemerne náklady



Obrázok 3.2: Krátkodobé a dlhodobé náklady

Keďže pre $y \neq y_0$ je $SC(y) \geq C^*(y)$, je zjavné, že táto nerovnosť platí aj pre priemerné náklady.

$$\begin{aligned} SRAC(y) &\geq LRAC(y) \\ SRAC(y_0) &= LRAC(y_0) \end{aligned}$$

Podľa E.Silberberga [10] teda Viner-Wongov diagram jednoducho vyplýva z faktu, že minimum získané pri menšom počte obmedzení musí ležať pod minimom získaným z viacerých obmedzení (kapitál rovný K_0) a v bode, kde je dodatočné obmedzenie nadbytočné sa minimá rovnajú.

Obálková veta nemusí byť zrejmá. Treba si uvedomiť, že SC je funkcia y a K. Teda

$$\begin{aligned} SC(y,K) &= \min_{L} \{wL + rK; \quad f(K,L) = y\} \\ C^*(y) &= \min_{K,L} \{wL + rK; \quad f(K,L) = y\} \\ &= \min_{K} \{SC(y,K)\} \end{aligned}$$

Teda rovnosť (3.3) sa dá prepísať ako

$$C^{*'}(y_0) = \frac{\partial}{\partial y} SC(y_0, K)\Big|_{K=K^*(y_0)}$$

3.5 Zovšeobecnená Viner-Wongova obálková veta

Problém nastáva, ak krátkodobé náklady SRC nie sú všade diferencovateľné. Prípadom subdiferencovateľných krátkodobých nákladov na výrobu elektrickej energie sa zaoberá práca A. Horsleyho a A. J. Wrobela. Keďže v skutočnosti dva výrobné faktory často nebývajú nahraditeľné jeden druhým ako je to napríklad v probléme oceňovania špičkového zaťaženia počas cyklu T, nie sú krátkodobé náklady všade diferencovateňé, ale zato všade existuje subdiferenciál (definícia A.1, 38).

Nech y je množstvo vyrobenej elektrickej energie, v spojitom prípade je to vlaste funkcia času $y(t)$ na $[0,T]$. Podľa predpokladov funkcia y patrí medzi esenciálne ohraničené na $[0,T]$ teda $y \in L^\infty[0,T]$. Energia nech sa získava pre jednoduchosť z jedného typu tepelného zdroja. Potom fixný produkčný faktor k je prevádzková kapacita, ktorá sa vskutku nedá nahradiť variabilným produkčným faktorom v, ktorým je vyťaženosť prevádzky. Ak cena v menovej jednotke za kW a periódu T pre k prevádzkovú kapacitu je r a náklady na palivo v menovej jednotke za kWh sú w, ktoré budeme ďalej považovať v danom časovom horizonte za nemenné, potom

$$SRC(y,k) = \begin{cases} w\int_0^T y(t)dt & \text{ak } 0 \leq y \leq k \\ \infty & \text{inde} \end{cases}$$

Teda ak v priebehu periódy pre nejaký čas t je $y(t)$ rovné k (teda v čase t už nie je možnosť zvýšiť výkonnosť prevádzky), kratkodobé náklady SRC sú konvexné, ale nie sú diferencovateľné. Zato existuje subdiferenciál $\partial_y SRC$.[4] Dlhodobé náklady

$$\begin{aligned} LRC(y,r) &= \inf_k < r,k > + SRC(y,k) \\ &= r \sup_{t\in[0,T]} y(t) + w\int_0^T y(t)dt \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nemôžme použiť VinerWongovu vetu, ktorá by v diferencovateľnom prípade hovorila, že ak k je optimálna prevádzková kapacita pri danej cenovej hladine r, potom

$$\nabla_y SRC(y,k) = \nabla_y LRC(y,r)$$

Intuitívne by sa mohlo zdať, že v subdiferencovateľnom prípade stačí jednoducho nahradiť diferenciál ∇ subdiferenciálom ∂, ale toto zdanie je mylné. V skutočnosti $\partial_y LRC(y,r) \subseteq \partial_y SRC(y,k)$ a nie naopak. Aby sme mohli určiť pre aké p z $\partial_y SRC(y,k)$ je p zároveň z $\partial_y LRC(y,r)$, použijeme vetu známu pod názvom *Subdifferential Sections Lemma(SSL)*. Jej znenie ako aj potrebné definície sa nachádzajú v dodatku A.3 respektíve podrobnejšie v [13] a [14]. Podľa nej je združený subdiferenciál $\partial_{y,k} SRC(y,k)$ podmnožinou kartézskeho súčinu $\partial_y SRC(y,k)$ a $\partial_k SRC(y,k)$. Naviac pre každé p z $\partial_y SRC(y,k)$ je úsek z $\partial_k SRC(y,k)$ patriaci $\partial_{y,k} SRC(y,k)$ cez dané p je rovný práve $-\widehat{\partial}_k \pi_{SR}(p,k)$,

[4] Podľa definície A.1 $p \in \partial_y SRC(y,k)$, ak pre dané p nadobúda funkcia

$$< p, y > - SRC(y,k)$$

maximum v y. Teda $p \in \partial_y SRC(y,k)$ ak $p(t) \geq w$ keď $y(t) = k$, $p(t) = w$ keď $y(t) < k$ a $p(t) \leq w$ pre $y(t) = 0$ na $[0,T]$.

kde π_{SR} je krátkodobá zisková funkcia definovaná ako

$$\begin{aligned} \pi_{SR}(p,k) &= \sup_y < p, y > -SRC(y,k) \\ &= \int_0^T (p(t)-w)^+ k\, dt \end{aligned} \tag{3.5}$$

Kde funkcia $^+$ je definovaná ako $(x)^+ = \max\{x, 0\}$.

V prípade ziskovej funkcie definovanej podľa (3.5), π_{SR} je ako funkcia p konvexne združená so SRC ako funkciou y pre pevné k a w. Naproti tomu je funkcia dlhodobých nákladov LRC definovaná podľa (3.4) braná ako funkcia r konkávne združenou s $-SRC$ ako funkciou k pre y a w pevné. Teda sa dá povedať, že $-LRC$ je konvexne združená k SRC cez priestory R a K. Analogicky ako pre funkciu π_{SR} môžme povedať, že cez každé $-r \in \partial_k SRC(y,k)$ je úsek $\partial_y SRC(y,k)$, ktorý patrí aj združenému subdiferenciálu $\partial_{y,k} SRC(y,k)$ rovný práve supradiferenciálu $-\widehat{\partial}_y - LRC(y,r)$, ktorý je rovný podľa definície supradiferenciálu $\partial_y LRC(y,r)$. Ak teda na oboje funkcie aplikujeme vetu A.3(SSL), dostávame tri ekvivalentné vzťahy zapísané v nasledujúcej vete.

Všeobecná Viner-Wongova Veta 3.5.1. *Nech $SRC : Y \times K \to \mathbb{R}$ je konvexná, zdola ohraničená funkcia, ktorá definuje $LRC(y,r)$ a $\pi_{SR}(p,k)$ podľa (3.4) a (3.5). Potom nasledujúce tri podmienky sú si ekvivalentné.*

- $p \in \partial_y SRC(y,k)$ *a* $r \in \widehat{\partial}_k \pi_{SR}(p,k)$
- $(p, -r) \in \partial_{y,k} SRC(y,k)$
- $-r \in \partial_k SRC(y,k)$ *a* $p \in \partial_y LRC(y,r)$

Pre zovšeobecnenú obálkovú vetu sa dá vlastne povedať, že ak $r \in \widehat{\partial}_k \pi_{SR}(p,k)$ potom p patrí ako $\partial_y SRC(y,k)$, tak aj $\partial_y LRC(y,r)$.

Ak sa vrátime späť k príkladu oceňovania špičkového zaťaženia, naozaj ak v nejakej chvíli je $y(t)$ rovné prevádzkovej kapacite ($\sup_t y(t) = k$), skutočnosť, že $r \in -\partial_k SRC(y,k)$ nám nepovie nič okrem toho, že $r \geq 0$. Pritom je pre prevádzku optimálne, aby bola využívaná naplno, teda aby pre nejaké $t \in [0,T]$ bolo $y(t) = k$. Naproti tomu ak

$$r = \int_0^T (p(t)-w)^+ dt = \frac{\partial \pi_{SR}}{\partial k}(p,k)$$

Vieme, pre aké r je p zároveň z $\partial_y SRC(y,k)$ a $\partial_y LRC(y,r)$. Zároveň nám vzťah ukazuje aké má byť y pri danej cenovej hladine p. Teda $y(t)=k$ ak $p(t)>w$, $0\leq y(t)\leq k$ ak $p(t)=w$ a $y(t)=0$ akonáhle $p(t)<w$. Ak naviac $r\neq\int_0^T(p(t)-w)^+dt=\frac{\partial\pi_{SR}}{\partial k}(p,k)$, prevádzková kapacita na hladine k nie je pri daných nákladoch r optimálna. V prípade že je r väčšie, oplatí sa znižovať celkovú kapacitu generátora elektrickej energie, v opačnom prípade sa ju oplatí zvýšiť.

Kapitola 4

Všeobecná obálková veta

4.1 O diferencovateľnosti hodnotovej funkcie

Majme opäť úlohu maximalizácie funkcie a definujme hodnotovú funkciu nasledovne

$$h(t) = \max_{x \in K} f(x,t) \tag{4.1}$$

Hodnota premennej x, v ktorej sa pre dané t dosahuje maximum funkcie $f(x,t)$ vzhľadom na x nie je vo všeobecnosti jediná alebo sa nadobúda pre x na hranici K. V takom prípade nemôžeme na hodnotovú funkciu aplikovať obálkovú vetu(2.1.1), keďže niesú splnené jej podmienky. V tejto kapitole sa budeme snažiť oslabiť jej predpoklady a dokázať jej platnosť v slabšom zmysle.

Nie vždy musí $\max_{x \in K} f(x,t)$ existovať. Hodnotovú funkciu môžme v takom prípade definovať nasledovne

$$h(t) = \sup_{x \in K} f(x,t) \quad t \in T \tag{4.2}$$

V prípade, že dané suprémum je konečné, môžme sformulovať nasledovnú vetu.

Veta 4.1.1. *Nech je funkcia $f(x,.)$ na množine $T \subset \mathbb{R}^l$ β-Lipschitzovská pre všetky $x \in K \subset \mathbb{R}^n$. Nech je $f(.,t)$ na K ohraničená pre $t \in T \subset \mathbb{R}^l$. Potom je aj hodnotová funkcia definovaná vzťahom (4.1.1) Lipschitzovsky spojitá s rovnakou konštantou β.*

Dôkaz. Funkcia f je β-Lipschitzovská, teda pre ľubovoľné t, $t' \in T$ a $x \in K$ platí

$$\left|f(x,t) - f(x,t')\right| \leq \beta\left|t - t'\right|$$

Pre hodnotovú funkciu môžu pre rôzne t, $t' \in T$ nastať dva rôzne prípady:

- Ak je $h(t) = h(t')$, potom triviálne

  $$\left|h(t) - h(t')\right| = 0 \leq \beta\left|t - t'\right|$$

  .

- Ak sa $h(t)$ a $h(t')$ nerovnajú, bez újmy na všeobecnosti môžme vziať $h(t) > h(t')$. Z definície $h(.)$ existujú také dve postupnosti $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ a $\left\{x'_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, že

  $$\lim_{k\to\infty} f(x_k,t) = h(t) \text{ a } \lim_{n\to\infty} f(x'_n,t') = h(t) \tag{4.3}$$

  Pre ľubovoľné zvolené $n \in \mathbb{N}$ môžme napísať

  $$h(t') = f(x'_n,t') + \epsilon_n$$

  Potom pre postupnosť $\left\{\epsilon_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ z (4.3) vyplýva

  $$\epsilon_n \to 0 \text{ pre } n \to \infty$$

  Pre n existuje $k_n \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $k \geq k_n$ platí

  $$h(t) \leq f(x_k,t) + \epsilon_n$$

  Potom pre rozdiel hodnotových funkcií dostávame

  $$\begin{aligned}\left|h(t) - h(t')\right| = h(t) - h(t') &\leq f(x_k,t) + \epsilon_n - f(x'_n,t') - \epsilon_n \\ &= f(x_k,t) - f(x'_n,t') \quad \forall k \geq k_n \end{aligned} \tag{4.4}$$

  Nastať môžu dva prípady.

  a. $\exists n$ a k nemu také $k' \geq k_n$, že $f(x_{k'},t') \leq f(x'_n,t')$. Potom môžme nerovnosť (4.4) prepísať nasledovne:

  $$\begin{aligned}\left|h(t) - h(t')\right| &\leq f(x_{k'},t) - f(x'_n,t') \\ &= f(x_{k'},t) - f(x_{k'},t') + f(x_{k'},t') - f(x'_n,t') \\ &\leq \beta\left|t - t'\right| + 0\end{aligned}$$

b. Ak pre $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\forall k > k_n$ $f(x_k, t') > f(x'_n, t')$ aplikovaním limity pre $n \to \infty$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} f(x_k, t') \geq \lim_{n\to\infty} f(x'_n, t') = \lim_{n\to\infty} \big(h(t') - \epsilon_n\big) = h(t')$$

Ak $n \to \infty$ aj $k_n \to \infty$ a teda musí nutne aj

$$f(x_{k_n}, t') \to h(t')$$

Pre dané k_n môžme definovať postupnosť $\left\{\tilde{\epsilon}_{k_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\tilde{\epsilon}_{k_n} \to 0$ pre $n \to \infty$ a

$$f(x_{k_n}, t') = h(t') - \tilde{\epsilon}_{k_n}$$

Potom pre nerovnosť (4.4) máme

$$\begin{aligned} \big|h(t) - h(t')\big| &\leq f(x_{k_n}, t) - f(x_{k_n}, t') + f(x_{k_n}, t') - f(x'_n, t') \\ &\leq \beta\big|t - t'\big| + f(x_{k_n}, t') - f(x'_n, t') \\ &= \beta\big|t - t'\big| + h(t') - \tilde{\epsilon}_{k_n} - h(t') + \epsilon_n \\ &= \beta\big|t - t'\big| + h(t') - \tilde{\epsilon}_{k_n} + \epsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Keďže $f(x_{k_n}, t') > f(x'_n, t')$ pre $\forall n \in \mathbb{N}$, platí aj nasledujúca nerovnosť

$$\tilde{\epsilon}_{k_n} < \epsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definujme si postupnosť $\left\{\delta_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom: $\delta_n := \epsilon_n - \tilde{\epsilon}_{k_n} > 0$ Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \big(\epsilon_n - \tilde{\epsilon}_{k_n}\big) = 0$$

Teda ak na (4.5) aplikujeme limitu pre $n \to \infty$, dostávame

$$\begin{aligned} \big|h(t) - h(t')\big| &\leq \beta\big|t - t'\big| + \delta_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \big|h(t) - h(t')\big| &\leq \beta\big|t - t'\big| \end{aligned}$$

Čo značí, že hodnotová funkcia je Lipschitzovsky spojitá s rovnakou konštantou β. □

Pre funkcie f, ktoré sa rovnajú hodnotovej funkcii pre nejaké $x \in K$, platí špeciálne lema o Lipschitzovskej spojitosti, kde β konštanta je daná ako $\sup_{K\times T} |\nabla_t f(x,t)|$.

Dôsledok 4.1.2. *Nech je hodnotová funkcia $h(t)$ definovaná vzťahom (4.1) a $t \in T \subseteq \mathbb{R}$. Nech je funkcia $f(t,x)$ parciálne diferencovateľná podľa t a nech je $\nabla_t f(x,t)$ na $K \times T$ ohraničená, potom je $h(t)$ Lipschitzovská.*

4.2 Obálková veta pre jednorozmerný parameter

Ako sme už spomenuli, pre danú hodnotu parametra t nemusí existovať jediné x, pre ktoré nadobúda $f(x,t)$ svoje maximum na K. Preto sme sa začali zaoberať zobrazeniami, ktoré priradia k prvku množinu a volajú sa korešpondencie. Nasleduje niekoľko definícií vlastností korešpondencií, ktoré sú potrebné pre aplikáciu Maximovej vety(dodatok B, 40) a dôkaz obálkovej vety, platnej za všeobecnejších predpokladov. Definície ako aj Maximová veta vychádzajú z práce Nancy L. Stokeyovej a Roberta E. Lucasa [5].

Definícia 4.2.1. *Korešpondencia $\Gamma : X \to Y$ je* ***zdola hemispojitá****(zd.h.) v x ak $\Gamma(x)$ je neprázdna a ak pre každé $y \in \Gamma(x)$ a každú postupnosť $x_n \to x$ existuje $N \geq 1$ a postupnosť $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ taká, že $y_n \to y$ a $y_n \in \Gamma(x_n)$ pre všetky $n \geq N$.*

Definícia 4.2.2. *Korešpondencia $\Gamma : X \to Y$ je* ***zhora hemispojitá****(zh.h.) v x ak $\Gamma(x)$ je neprázdna a ak pre každú postupnosť $x_n \to x$ a každú postupnosť $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$, takú, že $y_n \in \Gamma(x_n)$ pre všetky n, existuje konvergentná podpostupnosť $\{y_n\}$, ktorá má limitu $y \in \Gamma(x)$.*

Definícia 4.2.3. *Korešpondencia $\Gamma : X \to Y$ je* ***spojitá*** *v $x \in X$ ak je zároveň zdola aj zhora hemispojitá v x.*

Aby sme mohli použiť Maximovú vetu(dodatok B, 40) na dôkaz hemispojitosti zhora zobrazenia $G(t) = \arg\max_{x \in K} f(x,t)$, dokážeme najprv nasledujúcu lemu.

Lema 4.2.4. *Nech K je neprázdna a kompaktná množina. Definujme zobrazenie $K : t \to x$ nasledovne $K(t) = K \ \forall t \in [0,T]$. Potom zobrazenie K je kompaktná spojitá korešpondencia.*

Dôkaz. $K(t) = K$ je pre $\forall t$ neprázdna. Pre $\forall\, t_n \to t$ a pre $\forall \{x_n\}$ $\big($zjavne $x_n \in K(t_n) = K\big)$ existuje podpostupnosť $\{\tilde{x}_n\}$, $\tilde{x}_n \to x \in K = K(t)$ z kompaktnosti K. Teda K je zhora hemispojitá korešpondencia.
Pre $\forall x \in K = K(t)$ a $\forall \{t_n\}$; $t_n \to t$ existuje postupnosť $\{x_n\}$; $x_n \to x$ a $x_n \in K(t_n) = K$ triviálne a teda K je zdola hemispojitá korešpondencia.
A teda K je kompaktná a spojitá korešpondencia. $\square$

Nasledujúci obrázok 4.1 slúži na ilustráciu obálkovej vety v prípade, že účelová funkcia $f(x,t)$ nadobúda pre nejaké t maximum pre rôzne $x \in K$. Teda ak

$$G(t) = \arg\max_{x\in K} f(x,t) \text{ je viacprvková}$$

V tomto prípade je množina K, z ktorej sa vyberá maximum $f(x,t)$, konečná. Z obrázka ľahko vidno, že hodnotová funkcia môže mať zlomy, tieto sú však zriedkavé. Znenie obálková veta platí vždy, ak má pre daný parameter t_0 množina $G(t_0)$ iba jeden prvok. Ani tu však nemôžeme aplikovať klasickú obálkovú vetu. Množina K je diskrétna a teda o existencii parciálnej derivácie účelovej funkcie $f(x,t)$ podľa premennej x nemôže byť ani reči. Ako ukážeme v nasledujúcej vete, pre K kompaktnú, hodnotová funkcia $h(t)$ má všade derivácie zľava aj zprava, pričom platí:

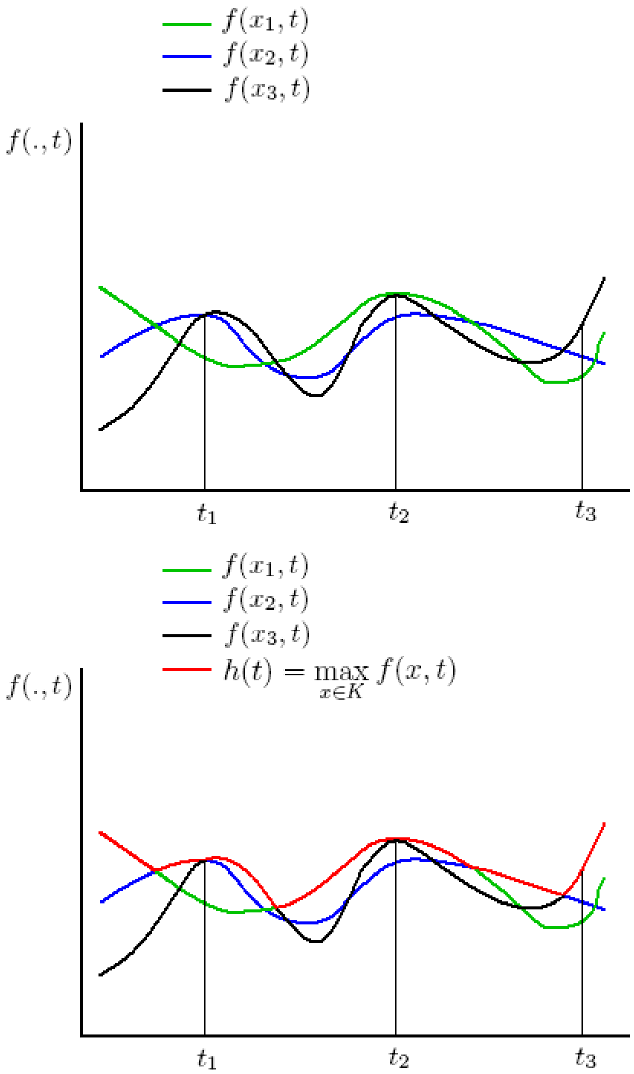
$$h'_-(t) = \min_{x\in G(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

$$h'_+(t) = \max_{x\in G(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

Akonáhle je $G(t)$ jednoprvková, nutne platí

$$h'_-(t) = h'_+(t)$$

a teda derivácia hodnotovej funkcie v takom prípade existuje, ako ilustruje obrázok pre hodnotu parametra t_3. Taktiež ale vidíme, že ak je $G(t)$ viacprvková, hodnotová funkcia môže a nemusí mať deriváciu ako je to v prípade parametra t_2, keď existuje a parametra t_1, keď sa $h'_-(t)$ a $h'_+(t)$ nerovnajú.



$$G(t_1) = \{x_2, x_3\} \quad \nexists h'(t_1)$$

$$G(t_2) = \{x_1, x_3\} \quad \exists h'(t_2)$$

$$G(t_3) = \{x_3\} \qquad \exists h'(t_3)$$

Obrázok 4.1: Hodnotová funkcia pre $K = \{x_1, x_2, x_3\}$

Aby sme mohli odvodiť všeobecnú obálkovú vetu, najprv ju dokážeme pre jednorozmerný parameter t, čo neskôr využijeme pri dôkaze existencie parciálnych derivácií hodnotovej funkcie viacrozmerného parametra.

Veta 4.2.5. *(Všeobecná obálková) Nech $x \in K$, kde K je neprázdna a kompaktná a nech $f(.,t) : K \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia pre $\forall t \in [0,T]$. Ďalej nech pre každé x a t existuje $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$, ktorá je spojitou funkciou oboch premenných, potom $G(t) = \arg\max_{x\in K} f(x,t)$ je neprázdna, kompaktná, zhora hemispojitá korešpondencia.*

Funkcia $h(t) = \max_{x\in K} f(x,t)$ je diferencovateľná skoro všade na $[0,T]$ a ak existuje $h'(t)$, platí

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{x},t)$$

pre ľubovoľné $\bar{x} \in G(t)$.

Dôkaz. K je z lemy 4.2.4 kompaktná a spojitá korešpondencia a teda môžme aplikovať Maximovú vetu (dodatok B, 40), z ktorej vyplýva

$$G(t) = \arg\max_{x\in K} f(x,t)$$

je neprázdna, kompaktná, zhora hemispojitá korešpondencia a funkcia

$$h(t) = \max_{x\in K} f(x,t)$$

je spojitá.

Ako vyplýva z lemy 4.1.2, hodnotová funkcia $h(t)$ je Lipschitovská a teda aj skoro všade diferencovateľná.[1] Stačí dokázať, že ak má v t deriváciu, potom je rovná $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ pre ľubovoľné $x \in G(t)$. Najprv dokážeme, že h má na $[0,T]$ derivácie zprava aj zľava.
Pre každé t zvoľme ľubovoľný bod

$$\underline{x}(t) \in \arg\min_{x\in G(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$$

Pre $t' < t$ platí $$\frac{h(t')-h(t)}{t'-t} = \frac{f(t',\underline{x}(t'))-f(t,\underline{x}(t))}{t'-t} \leq \frac{f(t',\underline{x}(t))-f(t,\underline{x}(t))}{t'-t}$$

[1] v zmysle Lebegueovej miery

z čoho vyplýva
$$\limsup_{t'\to t^-} \frac{h(t')-h(t)}{t'-t} \le \frac{\partial f}{\partial t}(t, \underline{x}(t))$$
Zároveň platí
$$\frac{h(t')-h(t)}{t'-t} \ge \frac{f(t', \underline{x}(t')) - f(t, \underline{x}(t'))}{t'-t} = \frac{\partial f}{\partial s}(s, \underline{x}(t'))\Big|_{s=\tau_{t'}} \qquad \text{kde } \tau_{t'} \in [t', t]$$
Zvoľme postupnosť $t_n \to t$ takú, že
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial s}(s, \underline{x}(t_n))\Big|_{s=\tau_{t_n}} = \liminf_{t'\to t^-} \frac{\partial f}{\partial s}(s, \underline{x}(t'))\Big|_{s=\tau_{t'}}$$
Potom platí
$$\liminf_{t'\to t^-} \frac{h(t')-h(t)}{t'-t} \ge \liminf_{t'\to t^-} \frac{\partial f}{\partial s}(s, \underline{x}(t')\Big|_{s=\tau_{t'}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial s}(s, \underline{x}(t_n))\Big|_{s=\tau_{t_n}} = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \tilde{x}),$$
keďže pre $n \to \infty$ ide $\tau_{t_n} \to t$ a z hemispojitosti G zhora $\underline{x}(t_n) \to \tilde{x} \in G(t)$ a $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ je spojitá v oboch premenných. Teda
$$\liminf_{t'\to t^-} \frac{h(t')-h(t)}{t'-t} \ge \frac{\partial f}{\partial t}(t, \tilde{x}) \ge \frac{\partial f}{\partial t}(t, \underline{x}(t))$$
$$\exists h'_-(t) = \min_{x\in G(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$$
Podobne označíme
$$\overline{x}(t) = \arg\max_{x\in G(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$$
Pre $t' > t$ máme $\quad \dfrac{h(t')-h(t)}{t'-t} = \dfrac{f(t', \overline{x}(t')) - f(t, \overline{x}(t))}{t'-t} \ge \dfrac{f(t', \overline{x}(t)) - f(t, \overline{x}(t))}{t'-t}$

A teda
$$\liminf_{t'\to t^+} \frac{h(t')-h(t)}{t'-t} \ge \frac{\partial f}{\partial t}(t, \overline{x}(t))$$
Zároveň platí
$$\frac{h(t')-h(t)}{t'-t} \le \frac{f(t', \overline{x}(t')) - f(t, \overline{x}(t'))}{t'-t} = \frac{\partial f}{\partial s}(s, \overline{x}(t'))\Big|_{s=\tau_{t'}} \qquad \text{kde } \tau_{t'} \in [t, t']$$

Zvoľme postupnosť $t_n \to t$ takú, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial s}(s, \overline{x}(t_n))\Big|_{s=\tau_{t_n}} = \limsup_{t'\to t^+} \frac{\partial f}{\partial s}(s, \overline{x}(t'))\Big|_{s=\tau_{t'}}$$

Potom dostávame

$$\limsup_{t'\to t^+} \frac{h(t')-h(t)}{t'-t} \leq \limsup_{t'\to t^+} \frac{\partial f}{\partial s}(s, \overline{x}(t'))\Big|_{s=\tau_{t'}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial s}(s, \overline{x}(t_n))\Big|_{s=\tau_{t_n}} = \frac{\partial f}{\partial t} f(t, \tilde{x})$$

keďže pre $n \to \infty$ platí $\tau_{t_n} \to t$ a z hemispojitosti G zhora $\overline{x}(t_n) \to \tilde{x} \in G(t)$ a funkcia $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ je spojitá v oboch premenných. Teda platí

$$\limsup_{t'\to t^+} \frac{h(t')-h(t)}{t'-t} \leq \frac{\partial f}{\partial t}(t, \tilde{x}) \leq \frac{\partial f}{\partial t}(t, \overline{x}(t))$$

$$\exists h'_+(t) = \max_{x\in G(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$$

Hodnotová funkcia $h(t)$ má na $[0, T]$ derivácie zľava respektíve zprava.

A teda ak $h'(t)$ existuje, tak potom $h'_+(t) = h'_-(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x^*, t)$ pre všetky $x^* \in G(t)$. Teda môžeme písať

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \bar{x})\Big|_{\forall\ \bar{x}\in G(t)} \text{ pre skoro všetky } t \in [0, T].$$

$\square$

Dôsledok 4.2.6. Keďže je h Lipschitzovská a teda absolutne spojitá, z vety 4.2.5 vyplýva, že pre t_0 a t z T môžme písať Obálkovú vetu v integrálnom tvare v zmysle Lebegueovho integrálu:

$$h(t) = h(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial s}(\bar{x}, s)|_{\bar{x}\in G(s)} ds \qquad t_0,\ t \in [0, T]$$

4.3 Obálková veta pre viacrozmerný parameter

Veta 4.3.1. *(Všeobecná obálková veta pre $t \in \mathbb{R}^l$) Nech K je neprázdna a kompaktná a T konvexná podmnožnina $\mathbb{R}^l$. Nech $f(.,.) : K \times T \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech na $K \times T$ existujú $\frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)$ pre $\forall\ i = 1, \ldots, l$, ktoré sú spojité funkcie oboch premenných, potom $G(t) = \arg\max_{x \in K} f(x,t)$ je neprázdna, kompaktná, zhora hemispojitá korešpondencia.*

Funkcia $h(t) = \max_{x \in K} f(x,t)$ je skoro všade na T diferencovateľná a ak existuje v t derivácia, platí

$$\nabla h(t) = \nabla_t f(t, \bar{x})$$

pre ľubovoľné $\bar{x} \in G(t)$.

Dôkaz. K je z lemy 4.2.4 kompaktná a spojitá korešpondencia a teda môžme aplikovať Maximovú vetu (dodatok B,str. 40), z ktorej vyplýva

$$G(t) = \arg\max_{x \in K} f(x,t)$$

je neprázdna, kompaktná, zhora hemispojitá korešpondencia a funkcia

$$h(t) = \max_{x \in K} f(x,t)$$

je spojitá.
Funkcia $h(t)$ je podľa lemy 4.1.2 Lipschitzovsky spojitá a z Rademacherovej vety(dodatok 2,str. 42) vyplýva, že h je skoro všade diferencovateľná. Stačí nám dokázať, že ak existuje, tak platí:

$$\nabla h(t) = \nabla_t f(t, \bar{x})\Big|_{\forall \bar{x} \in G(t)} \text{ skoro všade na } T$$

Analogicky ako vo vete 4.2.5 dokážeme, že má parciálne derivácie skoro všade. Označíme

$$\overline{x_i}(t) = \arg\max_{x \in G(t)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,x) \qquad i = 1, \ldots, n$$

a

$$\underline{x_i}(t) = \arg\min_{x \in G(t)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,x) \qquad i = 1, \ldots, n$$

a dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t_i} h_+(t) = \max_{x \in G(t)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t_i}(t, \overline{x_i})$$
$$\frac{\partial}{\partial t_i} h_-(t) = \min_{x \in G(t)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t_i}(t, \underline{x_i})$$

pre $i = 1, \ldots, l$ a teda použijúc vetu 4.2.5 pre jednorozmerné t_i, h má skoro všade parciálne derivácie a

$$\frac{\partial h}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial f}{\partial t_i}(t, \bar{x})\Big|_{\forall\, \bar{x} \in G(t)} \text{ skoro všade na } T \tag{4.6}$$

Ak teda $\nabla h(t)$ existuje pre nejaké $t \in T$, potom existujú aj parciálne derivácie v t a teda zo vzťahu(4.6) je nezávisle na výbere $\bar{x}$ z $G(t)$ rovná:

$$\nabla h(t) = \nabla_t f(t, \bar{x})\Big|_{\forall \bar{x} \in G(t)} \text{ skoro všade na } T$$

□

4.4 Diskrétne úlohy optimálneho riadenia

Majme diskrétnu úlohu optimálneho riadenia na konečnom horizonte. Hľadáme také riadenie $\mathbf{U} = \big(u(0), u(1), \ldots, u(T)\big)$ a k nemu prislúchajúcu odozvu $x = (x_0, x(1), \ldots, x(T))$, ktoré spĺňajú stavovú diferenčnú rovnicu

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t) \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1 \tag{4.7}$$

Počiatočná podmienka je daná ako $x(0) = x_0$ a riadiaca premenná spĺňa ohraničenia na riadenie $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$, v zmysle

$$u(t) \in U(t) \qquad t = 1, \ldots, T$$

pre ktoré nadobúda účelová funkcia

$$J(x_0, \mathbf{U}) = \sum_{t=0}^{T} f_0(x(t), u(t), t) \tag{4.8}$$

svoje maximum. Riadenie $\hat{\mathbf{U}}$, ktoré je riešením úlohy (4.8) a spĺňa stavovú diferenčnú rovnicu a ohraničenia na riadenie, nazývame optimálnym. Predpokladáme, že $U(t)$ je pre všetky $t = 1, \ldots, T$ kompaktná a funkcie f_0 a f sú C^1 hladké v oboch premenných.

Úlohu(4.8) vnoríme do systému úloh

$$D_\tau = \left\{ J_\tau(x_\tau, \mathbf{U}, T) = \sum_{t=\tau}^{T} f_0(x(t), u(t), t); \quad x(\tau) = x_\tau \right\}$$

Pričom platia rovnaké ohraničenia na stavové a riadiace premenné ako aj diferenčná rovnica. Definujme hodnotovú funkciu

$$V_\tau(x_\tau) = \max_{\mathbf{U}\in\mathcal{U}} J_\tau(x_\tau, \mathbf{U})$$

Pre každé $t > \tau$ je $x(t)$ z diferenčnej rovnice(4.7) C^1 hladká funkcia x_τ a $\mathbf{U}$. Keďže funkcia J_τ je suma C^1 hladkých funkcií $x(t)$ a U, sú aj J_τ spolu s $\frac{\partial J_\tau}{\partial x_\tau}$ spojité funkcie v x_τ a $\mathbf{U}$. Hľadáme optimálne riadenia $\mathbf{U}$ z kompaktnej množiny $\mathcal{U}$. Z všeobecnej obálkovej vety 4.3.1 vyplýva, že pre ľubovoľné τ pevné je $V_\tau(x_\tau)$ spojitá a diferencovateľná pre skoro všetky x_τ a ak derivácia podľa x_τ existuje, platí

$$\frac{\partial V_\tau}{\partial x_\tau}(x_\tau, T) = \frac{\partial J_\tau}{\partial x_\tau}(x_\tau, \hat{\mathbf{U}}, T) \tag{4.9}$$

Kde $\hat{\mathbf{U}}$ je nejaké prislúchajúce optimálne riadenie. Pre dané τ si môžme prepísať vzťah(4.8) ako

$$J_\tau(x_\tau, \mathbf{U}) = f_0(x_\tau, u(\tau), \tau) + \sum_{t=\tau+1}^{T} f_0(x(t), u(t), t)$$

Derivovaním podľa x_τ a využitím diferenčnej rovnice dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_\tau}{\partial x_\tau}(x_\tau, \mathbf{U}) &= \frac{\partial f_0}{\partial x_\tau}(x_\tau, u(\tau), \tau) + \frac{\partial J_{\tau+1}}{\partial x(\tau+1)}(x(\tau+1), \mathbf{U}) \frac{\partial x(\tau+1)}{\partial x(\tau)} \\
&= \frac{\partial f_0}{\partial x_\tau}(x_\tau, u(\tau), \tau) + \frac{\partial J_{\tau+1}}{\partial x(\tau+1)}(x(\tau+1), \mathbf{U}) \frac{\partial f}{\partial x_\tau}(x_\tau, u(\tau), \tau)
\end{aligned}$$

Nech $\psi_\tau = \left[\frac{\partial J_\tau}{\partial x_\tau}(x_\tau, \mathbf{U})\right]^T$, potom dostávame

$$\psi(\tau) = \frac{\partial f_0^T}{\partial x_\tau}(x_\tau, u(\tau), \tau) + \frac{\partial f^T}{\partial x_\tau}(x_\tau, u(\tau), \tau)\psi(\tau+1)$$

Ak za $\mathbf{U}$ dosadíme optimálne riadenie $\hat{\mathbf{U}}$, dostaneme adjungovaný vektor známy z Pontrjaginovho princípu maxima a rovnosť(4.9) môžme prepísať ako

$$\frac{\partial V_\tau}{\partial x_\tau}(x_\tau, T) = \psi^T(\tau)$$

Teda skoro pre všetky počiatočné stavy existuje derivácia hodnotovej funkcie a v nich je rovná príslušnému transponovanému adjugovanému vektoru ψ^T.

Bohužiaľ nám toto tvrdenie nevie nič povedať o platnosti rovnosti

$$\frac{\partial V_\tau}{\partial x_\tau} = \psi_\tau^T$$

pozdĺž optimálnej cesty $(x(\tau), \hat{u}(\tau))$ pre $\tau = 0, 1, \ldots, T$ resp. $0, 1, \ldots$ pre úlohy na nekonečnom horizonte. Špeciálny prípad diferencovateľnosti hodnotovej funkcie v dynamických modeloch rozoberá práca L. M. Benvenisteho a J. A. Scheinkmana, ktorá predpokladá konkávnosť hodnotovej funkcie.

Majme diskontovanú úlohu na nekonečnom horizonte

$$\max_{\mathbf{U}} J(x_0, \mathbf{U}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f_0(x(t), u(t)) \tag{4.10}$$

pri počiatočnej podmienke $x(0) = x_0$ a diferenčnej rovnici

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)) \quad \text{pre} \quad \forall t = 0, 1, \ldots$$

Kde $x \in X \subset \mathbf{R}^n$ je stavová premenná a $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ je riadenie v zmysle:

- $u(.)$ je m-rozmerný vektor v $\mathbb{R}^m$
- $u(t) \in U$ kde U je kompaktná pre všetky $t = 0, 1, \ldots$

Rovnako pri predpoklade C^1 hladkosti funkcií f_0 a f, dostávame, že pre ľubovoľné τ pevné je funkcia

$$J_\tau(x_\tau, \mathbf{U}) = \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^t f_0(x(t), u(t)) \tag{4.11}$$

tiež C^1 hladká v oboch premenných, kde $x(\tau) = x_\tau$. Predpokladajme, že pre všetky x_0 respektíve x_τ z $\mathbb{R}^n$ sú sumy (4.10) a (4.11) dobre definované. Naviac ak existuje optimálne riešenie, teda také prípustné $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathcal{U}$, pre ktoré nadobúda $J_0(x_0, \tilde{\mathbf{U}})$ maximum pre dané x_0, môžme definovať hodnotovú funkciu vzťahom:

$$\begin{aligned} V_0(x_0) &= \max_{\mathbf{U}\in\mathcal{U}} J_0(x_0, \mathbf{U}) \\ &= \max_{\mathbf{U}\in\mathcal{U}} \Big\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f_0(x(t), u(t)); \quad x(0) = x_0 \text{ a } x(t+1) = f(x(t), u(t)) \Big\} \end{aligned}$$

Nápodobne definujeme hodnotovú funkciu pre celé $\tau > 0$

$$\begin{aligned} V_\tau(x_\tau) &= \max_{\mathbf{U}\in\mathcal{U}} J_\tau(x_\tau, \mathbf{U}) \\ &= \max_{\mathbf{U}\in\mathcal{U}} \Big\{ \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^t f_0(x(t), u(t)); \quad x(\tau) = x_\tau \text{ a } x(t+1) = f(x(t), u(t)) \Big\} \end{aligned}$$

Z princípu optima sa dá ľahko nahliadnuť, že

$$\begin{aligned} V_0(x_0) &= \max_{\mathbf{U}\in\mathcal{U}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f_0(x(t), u(t)) \\ &= \max_{u(0)\in U(0)=U} \Big\{ f_0(x_0, u(0)) + \max_{u(t)\in U(t)=U;\, t>0} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t f_0(x(t), u(t)) \Big\} \\ &= \max_{u(0)\in U(0)=U} \Big\{ f_0(x_0, u(0)) + V_1(x(1)); \quad x(1) = f(x_0, u(0)) \Big\} \end{aligned}$$

Podobne môžme prepísať hodnotovú funkciu pre $\tau > 0$. Nasledujúci vzťah sa nazýva Bellmanova rovnica.

$$\begin{aligned} V_\tau(x_\tau) &= \max_{\mathbf{U}\in\mathcal{U}} \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^t f_0(x(t), u(t)) \\ &= \max_{u(\tau)\in U(\tau)=U} \Big\{ \beta^\tau f_0(x_\tau, u(\tau)) + \max_{u(t)\in U(t)=U;\, t>\tau} \sum_{t=\tau+1}^{\infty} \beta^t f_0(x(t), u(t)) \Big\} \\ &= \max_{u(\tau)\in U(\tau)=U} \Big\{ \beta^\tau f_0(x_\tau, u(\tau)) + V_\tau(x(\tau+1)); \quad x(\tau+1) = f(x_\tau, u(\tau)) \Big\} \end{aligned}$$

Táto hodnotová funkcia závisí od τ, preto sa častejšie pre diskontované optimalizačné úlohy udáva iná hodnotová funkcia, ktorá je daná vzťahom:

$$\tilde{V}(x_\tau) = \beta^{-\tau} V_\tau(x_\tau)$$

Nová hodnotová funkcia už od τ nezávisí. Bellmanovu rovnicu prepíšeme na tvar

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(x_\tau) &= \max_{\mathbf{U}\in\mathcal{U}} \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^{(t-\tau)} f_0(x(t), u(t)) \\
&= \max_{u(\tau)\in U(\tau)=U} \Big\{ f_0(x_\tau, u(\tau)) + \beta\tilde{V}(x(\tau+1)); \quad x(\tau+1) = f(x_\tau, u(\tau)) \Big\}
\end{aligned}$$

Ak si pre τ vyjadríme riadenie z diferenčnej rovnice nasledovne

$$x(\tau+1) = f(x(\tau), u(\tau)) \Leftrightarrow u(\tau) = g(x(\tau), x(\tau+1))$$

môžme definovať funkciu :

$$\mathbf{v} : X \times X \to \mathbb{R} \quad \mathbf{v}(x, y) = f_0(x, g(x, y))$$

Pre hodnotovú funkciu $\tilde{V}(x_\tau)$ dostávame nasledujúci prepis

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(x_\tau) &= \max_{u(\tau)\in U(\tau)=U} \Big\{ f_0(x_\tau, u(\tau)) + \beta\tilde{V}(x(\tau+1)); \quad x(\tau+1) = f(x_\tau, u(\tau)) \Big\} \\
&= \max_{x(\tau+1)\in\Gamma(x_\tau)} \Big\{ \mathbf{v}(x_\tau, x(\tau+1)) + \beta\tilde{V}(x(\tau+1)) \Big\}
\end{aligned}$$

kde $\Gamma(x_\tau)$ je taká korešpondencia, že ak

$$x(\tau+1) \in \Gamma(x_\tau) \Leftrightarrow u(\tau) \in U(\tau) = U \text{ pre } x(\tau+1) = f(x_\tau, u(\tau))$$

Pre pevne zvolené x_τ existuje také $x(\tau+1) = \phi(x_\tau, \tau+1)$, aby

$$\tilde{V}(x_\tau) = \mathbf{v}(x_\tau, \phi(x_\tau, \tau+1)) + \beta\tilde{V}(\phi(x_\tau, \tau+1))$$

Inak povedané, optimálna odpoveď na stav x_τ v nasledujúcom časovom kroku je $\phi(x_\tau, \tau+1)$.

Sformulujeme nasledujúcu lemu, ktorá je vlastne Obálkovou vetou pre konkávne funkcie.

Lema 4.4.1. *(Benveniste a Scheinkman) Nech je $V(x)$ konkávna funkcia na konvexnej množine X a nech je $O(x_0)$ okolie $x_0 \in X$. Ak existuje konkávna, diferencovateľná funkcia $W : O(x_0) \to \mathbb{R}$ taká, že $W(x) \leq V(x) \quad \forall x \in O(x_0)$ a $W(x_0) = V(x_0)$, tak potom je $V(x)$ diferencovateľná v x_0 a platí $V'(x_0) = W'(x_0)$.*

Dôkaz. Dokážeme, že V má v x_0 jedinný subgradient p. Z definície subgradientu[2] p, musí tento spĺňať nasledujúcu nerovnosť pre všetky $x \in X$

$$p(x - x_0) \geq V(x) - V(x_0) \quad \forall x \in X$$

Keďže $W(x) \leq V(x)$ na $O(x_0)$ okolí x_0, pre p platí

$$p(x - x_0) \geq V(x) - V(x_0) \geq W(x) - W(x_0) \text{ na } O(x_0)$$

Keďže je W diferencovateľná, p je jediné. Konkávna funkcia z jedinným subgradientom v x_0 je v x_0 aj diferencovateľná.[3]

□

Nech sú splnené nasledujúce podmienky:

(i) $\mathbf{v}(x(t), x(t+1))$ je rýdzorastúca v prvej premennej.

(ii) $\Gamma(x_\tau)$ je kompaktná a monotónna v zmysle $\Gamma(x) \subseteq \Gamma(x')$ ak $x \leq x'$

(iii) $\mathbf{v}(x(t), x(t+1))$ je rýdzokonkávna v $\big(x(t), x(t+1)\big)$

Veta 4.4.2. *(Benveniste a Scheinkman) Nech sú splnené podmienky (i),(ii),(iii) a nech je $X \subset \mathbf{R}^n$ konvexná a $\mathbf{v}$ v $(x(t), x(t+1))$ C^1 hladká. Potom je $\tilde{V}(x_\tau)$ v x_τ diferencovateľná a platí*

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_\tau}(x_\tau) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_\tau}(x_\tau, \phi(x_\tau, \tau)))$$

Dôkaz. Z podmienok (i),(ii) a (iii) existuje optimálne riešenie $\big\{\phi(t, x_\tau)\big\}_{t=\tau}^{\infty}$ úlohy(4.11) pre $\forall x_\tau \in X$ a aj τ a hodnotová funkcia je dobre definovaná na nejakom okolí $O(x_\tau)$ [5]. Definujeme si nasledujúcu funkciu, aby sme mohli použiť lemu 4.4.1

$$W(x) = \mathbf{v}(x, \phi(x_\tau)) + \beta\tilde{V}(\phi(x_\tau))$$

W je na okolí $O(x_\tau)$ dobre definovaná. Keďže $W(x) = \mathbf{v}(x, \phi(x_\tau, \tau)) + c$, kde c je konštanta, W je tiež konkávna a diferencovateľná. Zjavne platí, že

$$W(x) \leq \tilde{V}(x_\tau) \quad \text{na okolí } O(x_\tau)$$

[2]Pre konkávne funkcie je to vlastne supragradient v dodatku(A.2, 38)

[3]Rockafeller[[4], Theorem 25.1, str. 242]

Funkcia $\tilde{V}$ je z konkávnosti $\mathbf{v}$ a konvexnosti X konkávna, môžme použiť lemu 4.4.1. Podľa nej je hodnotová funkcia v x_τ diferencovateľná a platí

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_\tau}(x_\tau) = \frac{\partial W}{\partial x}(x_\tau) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_\tau}(x_\tau, y)\Big|_{y=\phi(x_\tau,\tau+1)}$$

Keďže táto rovnosť platí pre všetky $x_\tau \in X$ a τ, môžme písať

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_\tau}(x_\tau) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_\tau}(x_\tau, y)\Big|_{y=\phi(x_\tau,\tau+1)}$$

$\square$

Kapitola 5

Záver

Cieľom tejto práce bolo zhrnúť poznatky o obálkovej vete a dokázať jej slabšiu verziu pri oslabených predpokladoch na $\arg\max_{x \in K} f(x,t)$.

Do práce sme zahrnuli jej doteraz známe podoby pre maximalizačné úlohy a to pre voľný aj viazaný extrém. Mnohé známe vzťahy v mikroekonomickej teórii sme si sformulovali práve za pomoci obálkovej vety. Poukázali sme aj na nedostatok silného predpokladu C^1 hladkosti funkcie $x(t)$, aby sa spomínaná veta mohla aplikovať.

Podarilo sa nám sformulovať slabšie tvrdenia, poukazujúce na vlastnosti hodnotovej funkcie, ak sa maximum nenadobúda pre žiadne $x \in K$ respektíve sme za oslabených predpokladov dokázali všeobecnú obálkovú vetu. Táto už nekladie predpoklad na hladkosť krivky $x(t)$, nakoľko sme už vo veľmi jednoduchom prípade konečnej množiny K ukázali nejednoznačnosť takejto krivky. Preto sme sa zaoberali množinovými zobrazeniami, ktoré sa volajú korešpondencie. Dostali sme slabšiu verziu obálkovej vety, v ktorej sme narozdiel od klasickej obálkovej vety nekládli žiadne podmienky na existenciu parciálnej derivácie účelovej funkcie podľa premennej x.

Najprv sme vďaka dôkazu Lipschitzovskosti hodnotovej funkcie aj pre $h(t)$ definované ako suprémum dokázali, že za oslabených predpokladov je hodnotová funkcia absolútne spojitá a aj skoro všade diferencovateľná, naviac v prípade existencie derivácie vždy platí obálková veta a to bez ohľadu na mohutnosť množiny $G(t) = \arg\max_{x \in K} f(x,t)$. Pre jednorozmerný parameter t sme dané tvrdenie zapísali aj pomocou Lebegueovho integrálu.

Následne sme túto všeobecnú verziu obálkovej vety aplikovali pre diskrétne úlohy optimálneho riadenia na konečnom horizonte. Ukázali sme, že derivácia hodnotovej funkcie podľa počiatočného stavu existuje skoro pre všetky x_τ

a potom je rovná transponovanému adjungovanému vektoru, ktorý je známy z Pontriaginovho princípu maxima.

Toto tvrdenie sa nám zatiaľ nepodarilo zovšeobecniť aj na diskrétne úlohy na nekonečnom horizonte respektíve v spojitom prípade. I keď sme všeobecnú obálkovú vetu formulovali pre premenné x a parametre t z konečnorozmerných priestorov $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{R}^l$, zdá sa, že dôkaz ktorý sa opiera o maximovú vetu môže platiť aj v iných priestoroch, keďže maximová veta potrebná na dôkaz hemispojitosti korešpondencie $G(t)$ zhora nutne reálne priestory nevyžaduje.

Pre úplnosť sme pre nekonečnorozmerné diskrétne úlohy uviedli už známe tvrdenie vychádzajúce z Benveniste-Schienkmanovej lemy, ktorá je určitou obálkovou vetou pre konkávne funkcie.

Dodatok A

Definície sub a supradiferenciálov a *Subdifferential Sections Lemma*

Definícia A.1. ***(subdiferenciál)*** *Nech $C : Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ je konvexná funkcia na vektorovom priestore Y, ktorý je spojený s priestorom P skalárnym súčinom $\langle .,. \rangle : P \times Y \to \mathbb{R}$. Subgradient C v $y \in Y$ je každé také $p \in P$, že $C(y + \triangle y) \geq C(y) + \langle p, \triangle y \rangle$ pre každé $\triangle y \in Y$. Množina všetkých subgradientov v y sa nazýva subdiferenciál a značí sa $\partial C(y)$. Teda*

$$p \in \partial C(y) \Leftrightarrow y \textit{ maximalizuje } \langle p, . \rangle - C(.)$$

Definícia A.2. ***(supradiferenciál)*** *Nech $\pi : K \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ je konkávná funkcia na vektorovom priestore K, ktorý je spojený s priestorom R skalárnym súčinom $\langle .,. \rangle : R \times K \to \mathbb{R}$. Supragradient π v $k \in K$ je každé také $r \in R$, že $\pi(k + \triangle k) \leq \pi(k) + \langle r, \triangle k \rangle$ pre každé $\triangle k \in K$. Množina všetkých supragradientov v k sa nazýva supradiferenciál a značí sa $\widehat{\partial}\pi(k)$. Teda*

$$r \in \widehat{\partial}\pi(k) \Leftrightarrow k \textit{ maximalizuje } \pi(.) - \langle r, . \rangle$$

Supradiferenciál sa dá definovať pomocou subdiferenciálu ako

$$\widehat{\partial}\pi(k) = -\partial - \pi(k)$$

Lema A.3. ***(Subdifferential Section Lemma)*** *Predpokladajme, že $C : Y \times K \to \mathbb{R} \cup +\{\infty\}$ je konvexná funkcia na karteziánskom súčine vektorových priestorov Y a K, ktoré sú spojené s priestormi P a R. Nech $\pi : P \times K \to \mathbb{R} \cup \pm\{\infty\}$ je parciálne konvexne združená s C, teda*

$$\pi(p,k) = \sup_y \langle p, y \rangle - C(y,k) \quad \forall p \in P \, \forall k \in K$$

Potom sú nasledujúce dve podmienky ekvivalentné.

1. *$(p, -r) \in \partial C(y,k)$*

2. *$p \in \partial_y C(y,k)$ a $r \in \widehat{\partial}_k \pi(p,k)$*

Naviac obe podmienky implikujú, že obe $C(y,k)$ aj $\pi(p,k)$ sú konečné.

Dôkaz. Dôkaz spočíva v porovnaní nutných podmienok 1.rádu pre maximalizáciu naraz cez obe premenné a pre postupnú maximalizáciu najprv cez y a potom k. Z konvexnosti sú tieto podmienky nutné aj postačujúce. Podmienka *1.* platí z definície subgradientu vtedy, ak (y,k) maximalizuje $\langle p, -r, ., . \rangle - C(., .)$. To platí vtedy a len vtedy ak y maximalizuje $\langle p, . \rangle - C(., k)$ na $\pi(p,k)$ a následne k maximalizuje $\pi(p, .) - \langle r, . \rangle$. Teda tieto podmienky su ekvivalentné *2.* z definície A.1 a A.2.

Nakoniec, keďže C je všade väčšia ako $-\infty$, funkcia

$$\pi(p,k) = \langle p, y \rangle - C(y,k) < \infty$$

Rovnako sa dá $\pi(p,k)$ zapísať aj ako

$$\pi(p,k) = \langle r, k \rangle + \sup_{y,k} \{\langle p, -r, y, k \rangle - C(y,k)\} > -\infty$$

Pretože $C(y,k)$ nadobúda niekde konečné hodnoty. $\pi(p,k)$ je konečná a teda aj $C(y,k)$. □

Dodatok B

Maximová veta

Nasledujúce tvrdenia vychádzjú z práce [5]

Veta 1. *(Maximová veta) Nech* $X \subseteq \mathbb{R}^l$ *a* $T \subseteq \mathbb{R}^m$ *a* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia a* $\Gamma : X \to Y$ *je kompaktná a spojitá korešpondencia. Potom funkcia* $h : X \to \mathbb{R}$ *definovaná ako* $h(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y)$ *je spojitá a korešpondencia* $G : X \to Y$ *definovaná ako* $G(x) = \arg\max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y)$ *je neprázdna, kompaktná a hemispojitá zhora.*

Dôkaz. Pre $x \in X$ pevné je $\Gamma(x)$ neprázdna a kompaktná a $f(x, .)$ je spojitá, čiže na $\Gamma(x)$ nadobúda maximum, teda $G(x)$ je neprázdna. Navyše, keďže $G(x) \subseteq \Gamma(x)$ a $\Gamma(x)$ je kompaktná, množina $G(x)$ je ohraničená. Predpokladajme, že $y_n \to y$ a $y_n \in G(x)$ pre $\forall n$. Keďže $\Gamma(x)$ je uzavretá, $y \in \Gamma(x)$. Taktiež zo spojitosti f a z $h(x) = f(x, y_n)$ pre všetky n dostávame $f(x, y) = h(x)$. Teda $y \in G(x)$, čiže $G(x)$ je uzavretá. Preto $G(x)$ je neprázdna a kompaktná pre všetky x.

Následne ukážeme, že $G(x)$ je hemispojitá zhora. Pre pevné x nech $\{x_n\}$ je ľubovoľná postupnosť konvergujúca k x. Vezmime takú postupnosť $\{y_n\}$, že $y_n \in G(x_n)$ pre $\forall n$. Keďže Γ je zh.h., existuje konvergentná podpostupnosť $\{y_{n_k}\}$, $y_{n_k} \to y$, $y \in \Gamma(x)$. Nech $z \in \Gamma(x)$ a Γ je zd.h, teda existuje postupnosť $z_{n_k} \to z$, kde $z_{n_k} \in \Gamma(x_{n_k})$ pre všetky k. Keďže $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \geq f(x_{n_k}, z_{n_k})$ *pre* k a f je spojitá, dostávame $f(x, y) \geq f(x, z)$ pre $z \in \Gamma(x)$ a teda $y \in G(x)$. Čiže $G(x)$ je zh.h.

Nakoniec dokážeme, že h je spojitá. Pre pevné x nech $\{x_n\}$ je ľubovoľná postupnosť konvergujúca k x. Vezmime takú postupnosť $\{y_n\}$, že $y_n \in G(x_n)$ pre $\forall n$. Nech $\bar{h} = \limsup h(x_n)$ a $\underline{h} = \liminf h(x_n)$. Potom existuje podpostupnosť $\{x_{n_k}\}$ taká, že $\bar{h} = \lim f(x_{n_k}, y_{n_k})$. Ale G je zh.h. a teda existuje podpostupnosť postupnosti $\{y_{n_k}\}$, nazvime ju $\{y'_j\}$, konvergujúca k $y \in G(x)$. Teda $\bar{h} = \lim f(x_j, y'_j) = f(x, y) = h(x)$. Analogicky dostaneme, že $\underline{\mathrm{h}} = h(x)$, teda $\{h(x_n)\}$ konverguje k $h(x)$. $\square$

Dodatok C

Rademacherova veta

Nasledujúce tvrdenia vychádzaju z [3].

Definícia 1. Nech (P_1, ρ_1), (P_2, ρ_2) sú metrické priestory a $\beta > 0$. Zobrazenie $f : P_1 \to P_2$ sa nazýva (β)-Lipschitzovské ak

$$\rho_2(f(x), f(y)) \leq \beta\rho_1(x, y)$$

pre všetky $x, y \in P_1$.

Rademacherova veta 2. *Nech f je (β)-Lipschitzovská funkcia na otvorenej množine $G \subset \mathbb{R}^n$, potom f je diferencovateľná skoro všade na G.*

Dôkaz. Nazvime E množinu všetkých bodov, kde f nemá niektorú parciálnu deriváciu. Z Fubiniho vety vyplýva, že E je miery nula.

Pre dané $p, q \in \mathbf{Q}^n$ a $m \in \mathbf{N}$ definujme

(C.1)

$$S_{p,q,m} = \left\{ x \in G \backslash E : p_i < \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} < q_i \quad i = 1, \ldots, n \ a \ \forall t \in (-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}) \right\}$$

Nech $\bar{S}_{p,q,m}$ je množina všetkých hromadných bodov $S_{p,q,m}$. Z vety o Lebegueovej miere vyplýva $\lambda(\bar{S}_{p,q,m} \backslash S_{p,q,m}) = 0$, kde λ je Lebegueova miera. A teda

$$N := \bigcup_{p,q,m} (\bar{S}_{p,q,m} \backslash S_{p,q,m}),$$

má mieru nula. Tvrdíme, že f je diferencovateľná v každom bode $G \backslash (N \bigcup E)$.

Pre $x \in G\backslash(N \bigcup E)$ a $\varepsilon \in (0,1)$ vyberme $p, q \in \mathbf{Q}^n$ tak, aby

$$q_i - \varepsilon < p_i < \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) < q_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Potom existuje také $m \in \mathbf{N}$, že $x \in S := S_{p,q,m}$. Keďže x neleží v N, je zároveň hromadným bodom množiny S. Vezmime $\delta \in (0, \frac{1}{m})$ také, aby $\lambda(U(x,r)\backslash S) \le \frac{\varepsilon}{2}\lambda(U(x,r))$ pre všetky $r \in (0, 2\delta)$. Všimnime si, že pre τ z intervalu $(0,\delta)$, $U(x,(1+\varepsilon)\tau)\backslash S$ neobsahuje žiadnu guľu s polomerom $\varepsilon\tau$. Vyberme $y \in U(x,\delta)$ a označme $y^i = (y_1, \ldots, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Pre $i \in \{1, \ldots, n\}$ nazvyme U_i guľu so stredom y^i a polomerom $\varepsilon|y-x|$. Výberom $\tau = |y-x|$ dostaneme $S \bigcap U_i \neq \emptyset$ pre všetky i. Ak $z^i \in S \bigcap U_i$ a $w^i := z^{i-1} + (y_i - x_i)e_i$, potom

$$|w^i - y^i| = |z^{i-1} - y^{i-1}| \le \varepsilon|y-x|,$$

$$p_i < \frac{f(w^i) - f(z^{i-1})}{y_i - x_i} < q_i \quad a \quad p_i < \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) < q_i$$

Odkiaľ

$$|f(w^i) - f(z^{i-1}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i)| \le (q_i - p_i)(y_i - x_i) \le \varepsilon|y-x|.$$

Dohromady dostaneme

$$\Big| f(y) - f(x) - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i) \Big|$$

$$\le \Big| \sum_i \Big(f(w^i) - f(z^{i-1}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i) \Big) \Big| + \sum_i \Big(|f(w^i) - f(y^i)| + |f(z^{i-1}) - f(y^{i-1})| \Big)$$

$$\le \varepsilon(n + 2\beta n)|y-x|.$$

a teda $f'(x)$ existuje. $\square$

Literatúra

[1] BENVENISTE, L. M. , SCHEINKMAN, J. A.: *On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Model of economics*, Econometrica, Volume 47, No. 3. (Máj, 1979), str. 727-732

[2] BRUNOVSKÝ, P.: *Matematická teória optimálneho riadenia*, **ALFA**, Bratislava, (1980)

[3] LUKEŠ, J., MALÝ, J.: *Measure and Integral*, **matfyz**press Vydavatelství Matematicko-Fyzikalní Fakulty Univerzity Karlovy, (1995)

[4] ROCKAFELLER, R. T.: *Convex Analysis*, Princeton University Press, (1970)

[5] STOKEY, N. L. , LUCAS, Jr., R. E. v spolupráci s PRESCOTTOM, E. C.: *Recursive Method in Ecnomic Dynamic*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts a London, England, (1998), str. 55-65

[6] ALBOUY, D.: *Consumer Theory and the Envelope Theorem*, Economics 101A , Section Notes http://emlab.berkeley.edu/users/webfac/card/e101a_s05/consumerenvelope.pdf

[7] HALICKÁ, M.: *Optimálne riadenie I - Učebné texty*, Bratislava, (1999) www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teach/predn.ps

[8] KAZUO MINO: *Note#1 (for Chapter 1 of Macroeconomics II)*, (2006), http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~mino/teaching/1DeterministeicDP.pdf

[9] McLENNAN, A.: *Introduction to Mathematical Economics*, Economics 5113, (1999), http://www.econ.umn.edu/~mclennan/Classes/Ec5113/ec5113-lec13-3.4.99.pdf

[10] SILBERBERG, E.: *The Viner–Wong Envelope Theorem*, The Journal of Economic Education, Vol. 30, No.1, (Zima, 1999), str. 75-79, http://www.indiana.edu/∼econed/pdffiles/winter99/Silberb.pdf

[11] http://www.economyprofessor.com/economictheories/envelope-theorem.php

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Envelope_theorem

[13] HORSLEY, A. , WROBEL, A. J. : *A Reformulation of the Wong-Viner Envelope Theorem for subdifferentiable functions*, (2005) http://www.cdam.lse.ac.uk/Reports/Files/cdam-2005-05.pdf

[14] HORSLEY, A. , WROBEL, A. J. : *Characterizations of long-run producer optima and the short-run approach to long-run market equilibrium: a general theory with applications to peak-load pricing*, (2005) http://sticerd.lse.ac.uk/dps/te/te490.pdf