

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



**Metóda faktorovej dekompozície pri kalibrácii  
viacfaktorových modelov**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

BRATISLAVA 2007

Tomáš Leško

# Metóda faktorovej dekompozície pri kalibrácii viacfaktorových modelov

## DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Tomáš Leško



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

Matematika  
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2007

### **Čestné prehlásenie**

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne, len s pomocou nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a použitej literatúry uvedenej v zozname.

V Bratislave, 30.4.2007

---

## **Podakovanie**

Úprimne ďakujem svojmu diplomovému vedúcemu doc.RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc., za cenné návrhy a pripomienky, odbornú pomoc, ochotu, trpezlivosť a všetok venovaný čas strávený pri riešení problémov.

Rodičom ďakujem za umožnenie štúdia na vysokej škole, a taktiež za podporu počas štúdia na nej, a to nielen im, ale aj ďalším členom rodiny a blízkym.

## Abstrakt

Dnes neoddeliteľnou súčasťou finančných trhov je úroková miera. Trh úrokových mier patrí medzi najväčšie trhy, na ktorých sa obchoduje práve s derivátmi úrokových mier. Preto je prirodzená snaha vedieť odhadovať a predpovedať úrokové miery, na čo sa využívajú rozličné term structure modely krátkodobej úrokovej miery. V práci je najprv stručný prehľad základných pojmov, modelov, a napokon sa sústreďíme na dvojfaktorový model CIR. Predpoklad bánk, že úrokové miery pozostávajú z dvoch či viacerých zložiek (špekulatívnej a nešpekulatívnej) nás podnietil k navrhnutiu nového modelu, ktorý rozkladá a odhaduje zložky krátkodobej úrokovej miery. Práca prináša spôsoby riešenia, výsledky a problémy pri kalibrácii modelu s takýmto prístupom.

**Kľúčové slová:** úroková miera, faktorové modely, výnosová krivka, CIR model, kalibrácia, Kolmogorov–Smirnov test.

## Abstract

Interest rate is currently inseparable from financial markets. Interest rate market belongs to the biggest ones on which interest rate derivatives are traded. Therefore, it is a natural quest to know how to estimate and predict interest rates using various term structure models of short-rate. Firstly, there is a brief summary of basic terms and models. Then, we concentrate on a two-factors CIR model. Assumption of banks that interest rates are formed by two components (speculative and inspeculative) caused us to suggest a new model that decomposes and estimates these components of short-rates. The thesis provides methods of solution, results and difficulties in calibrating models with such approach.

**Keywords:** interest rate, factor models, yield curve, CIR model, calibration, Kolmogorov–Smirnov test.

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Úvod do problematiky a základné pojmy</b>	<b>3</b>
1.1 Úrokové miery . . . . .	3
1.2 Stochastický proces . . . . .	5
<b>2 Modely úrokových mier</b>	<b>8</b>
2.1 Jednofaktorové modely úrokovej miery . . . . .	9
2.2 Dvojfaktorové modely úrokovej miery . . . . .	11
<b>3 Ceny dlhopisov a riešenie modelov term structure</b>	<b>14</b>
3.1 Vývoj ceny dlhopisu v jednofaktorovom modeli . . . . .	14
3.1.1 Explicitné riešenie jednofaktorových modelov . . . . .	16
3.1.2 Kalibrácia parametrov pomocou min-maxovej metódy – prípad CIR modelu . . . . .	17
3.2 Krivky časovej štruktúry úrokových mier . . . . .	19
3.3 Všeobecná rovnica dvojfaktorového modelu . . . . .	22
<b>4 Faktorová dekompozícia úrokovej miery</b>	<b>25</b>
4.1 Rozklad úrokovej miery . . . . .	25
4.1.1 Rozštiepenie úrokovej miery short-rate pomocou reálnych úrokových mier na dlhšie obdobie . . . . .	25
4.2 Kalibrácia parametrov term structure modelov . . . . .	27
4.2.1 Kalibrácia cez priemernú cenu dlhopisu . . . . .	28
4.3 Riešenie konkrétnej úlohy a jej výsledky . . . . .	29
4.3.1 Maximalizácia funkcie vierohodnosti . . . . .	30
4.3.2 Kolmogorov – Smirnov test . . . . .	34
<b>Záver</b>	<b>40</b>
<b>Literatúra</b>	<b>41</b>
<b>Príloha A</b>	<b>44</b>
<b>Príloha B</b>	<b>48</b>

# Úvod

Problematika finančnej matematiky sa za posledných 30 rokov výrazne rozvíjala. Neoddeliteľnou súčasťou finančnej matematiky a finančných trhov je úroková miera. Trh úrokových mier patrí medzi najväčšie trhy, na ktorých sa obchoduje práve s derivátmi úrokových mier. Medzi ne patria dlhopisy, rozličné forwardy či opčné deriváty, ktorých cena je viac či menej závislá práve od hodnôt úrokových mier. Preto je prirodzená snaha vedieť predpovedať a odhadovať úrokové miery a ich rozličné modely. Na základe toho sú dnes úrokové miery a ich modely veľmi častým objektom skúmania finančnej matematiky. Od prvého modelu úrokových mier (Vašíček, 1977) už uplynulo 30 rokov. Modely úrokových mier sa odvtedy obohatili vo svojej štruktúre, sú komplexnejšie. Modelovanie ich vývoja je využívané na oceňovanie derivátov.

V tejto práci sa zaoberáme najprv opodstatnenosťou používania 2- a viacfaktorových modelov. Na konkrétnych dátach ukážeme, že krivka časovej štruktúry úrokových mier nezávisí len od jednej hodnoty úrokovej miery - najčastejšie sa volí okamžitá (spotová, overnight) úroková miera. Odtiaľ dostávame pomenovanie modely krátkodobej úrokovej miery. Ukážeme si tiež, že 2- a viacfaktorové modely nám umožňujú lepšie modelovať vývoj úrokových mier. Neskôr sa už venujeme modelovaniu vývoja úrokových mier pomocou dvojfaktorového modelu, resp. rozloženia úrokovej miery na dve iné úrokové miery. Pritom využívame niektoré teoretické predpoklady, ktoré majú splňať úrokové miery vyplývajúce z použitia konkrétneho modelu krátkodobých úrokových mier.

Práca je rozdelená na štyri kapitoly. V prvej kapitole je prehľad základných pojmov finančnej matematiky, úvod do problematiky. V druhej kapitole sa už zaoberáme modelmi úrokových mier. Opíšeme ich vlastnosti, rozdelenie na jednofaktorové a dvojfaktorové modely, pričom sú spomenuté aj najpoužívanejšie modely. Obsahom tretej kapitoly sú riešenia faktorových modelov, ich odvodenie na základe cien dlhopisov. To je doplnené niekoľkými obrázkami rôznych priebehov výnosových kriviek. V poslednej, štvrtej kapitole sú najprv predstavené niektoré spôsoby kalibrácie parametrov. Potom už opisujeme náš model, jeho odvodenie, a spôsoby a výsledky kalibrácie.

# Kapitola 1

## Úvod do problematiky a základné pojmy

### 1.1 Úrokové miery

**Dlhopis** je cenný papier, v ktorom sa dlžník zaväzuje, že v stanovenej lehote splatí nominálnu hodnotu a v dohodnutých obdobiach bude vyplácať pravidelný úrok (*kupón*). Úrokové miery sa odvádzajú od **bezkupónového dlhopisu**. Dlhopis, ktorého nominálna hodnota je 1, sa nazýva *diskontný dlhopis*. Pomenúvame ho aj *diskontný faktor*. Cena takéhoto dlhopisu je

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}. \quad (1.1)$$

Zo vzťahu (1.1) potom môžeme vyjadriť spojitý úrok

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T), \quad (1.2)$$

pričom  $t$  označuje dnešný dátum a  $T$  čas vypršania dlhopisu. Výraz (1.2) predstavuje **úrokovú mieru** v čase  $t$  so splatnosťou v čase  $T$ . Poznajúc ceny dlhopisov môžeme určiť krivku **časovej štruktúry úrokových mier** (*term structure of interest rates*), ktorá vyjadruje závislosť úrokovej miery od doby vypršania dlhopisu. Pre diskontný dlhopis navyše platí koncová podmienka  $P(T, T) = 1$ .

Začiatok krivky časovej štruktúry úrokovej miery sa nazýva **okamžitá (krátkodobá) úroková miera** (*short rate*). Značíme ju  $r_t = R(t, t)$ . To nastáva vtedy, keď sa blíži čas  $t$  k dobe splatnosti  $T$ . Zo vzťahu (1.2) dostávame pre  $r_t$ :

$$r_t = R(t, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, t + \Delta t) - \ln P(t, t)}{\Delta t},$$

pričom sme využili skutočnosť, že ak  $P(t, t) = 1$ , tak  $\ln P(t, t) = 0$ . Odtiaľ potom dostávame podľa definície derivácie:

$$r_t = R(t, t) = -\frac{\partial}{\partial T} P(t, T) \Big|_{T=t}. \quad (1.3)$$



V tzv. *short-rate modeloch* predstavuje okamžitá úroková miera  $r_t$  úplnú informáciu, na základe ktorej sa určí celý priebeh krivky.

**Forwardové úrokové miery** predstavujú úrokové miery medzi dvomi budúcimi časovými obdobiami, avšak za podmienok dohodnutých dnes. Aj tieto úrokové miery súvisia s diskontnými dlhopismi. Forwardový kontrakt na dlhopis je definovaný nasledovne: v čase  $t$  podpíšeme kontrakt, v ktorom sa zaviazeme, že v dobe  $T_1 > t$  kúpime za cenu  $K$  diskontný dlhopis s maturitou v čase  $T_2 > T_1$  (*maturita* je doba splatnosti (vypršania) dlhopisu). Na základe princípu bezarbitráže vieme odvodiť vzťah pre forwardovú úrokovú mieru, ktorý má tvar

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1}, \quad (1.4)$$

čo je úrok dohodnutý v čase  $t$  na dobu medzi budúcimi časmi  $T_1$  a  $T_2$ . Výpočtom limity (1.4) pre blízke  $T_1$  a  $T_2$  dostávame *okamžitú úrokovú mieru*

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T). \quad (1.5)$$

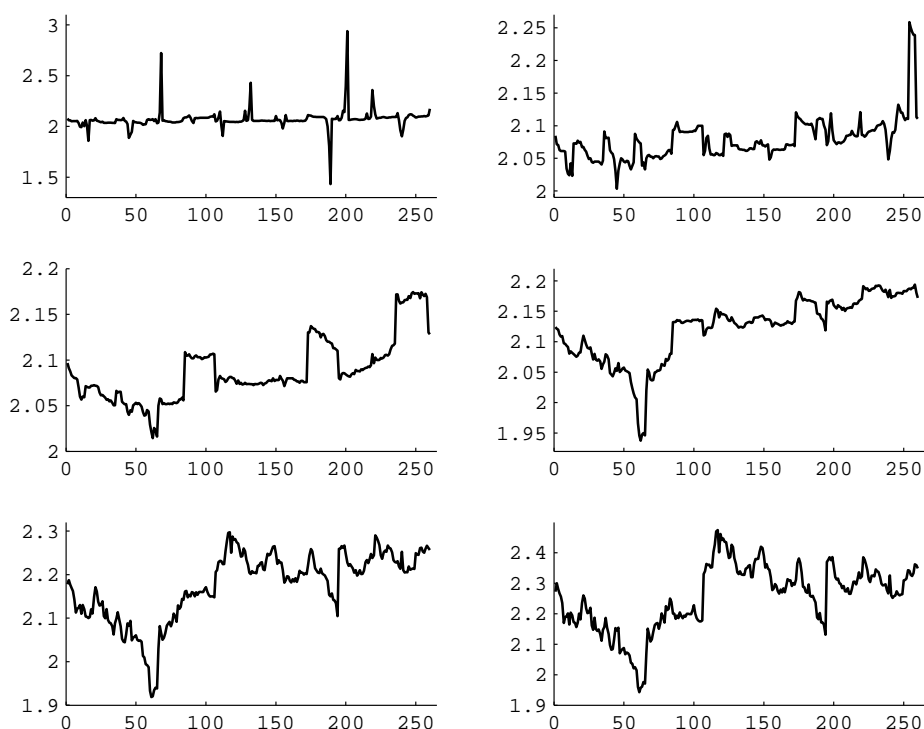
Je to spojitý úrok dohodnutý dnes (čas  $t$ ), splatný v čase  $T$ , na veľmi krátku dobu.

Hodnoty úrokových mier sa uvádzajú v každý obchodovateľný deň. Trochu priblížim domáce úrokové sadzby BRIBOR a taktiež pre kalibráciu mnou použité úrokové sadzby LIBOR, resp. EuroLIBOR.

BRIBOR (*Bratislava Inter Bank Offered Rate*) predstavuje referenčnú úrokovú sadzbu medzibankových depozít. Za túto sadzbu si banky navzájom medzi sebou požičiavajú krátkodobé peňažné zdroje vyjadrené v slovenských korunách. Uvádzajú sa na obdobia 1 deň (nazývame ho *overnight*), 1 a 2 týždne, 1,2,3,6,9 a 12 mesiacov. Stanovuje sa ako aritmetický priemer kotácií jednotlivých referenčných bánk. [20]

Analogicky, LIBOR (*London Inter Bank Offered Rate*) je denná referenčná sadzba, za ktorú si banky požičiavajú peniaze na medzibankom trhu v Londýne. EuroLIBOR predstavuje LIBOR denominovaný v eurách. LIBOR je kótovaný na obdobia 1 deň, 1 a 2 týždne a na 1 až 12 mesiacov. [17]

Pripájam aj vykreslené úrokové sadzby EuroLIBOR-u s vybranými splatnosťami z roku 2006:



Obr. 1.1: Úrokové miery EuroLIBOR-u z roku 2004 na 1 deň, 1 týždeň, 1 mesiac, 4 mesiace, 8 mesiacov a 1 rok.

Pripájam aj niekoľko vykreslených výnosových kriviek pre niektoré dni, ktoré sú na obrázku (1.2).

## 1.2 Stochastický proces

V tejto časti uvediem zopár základných pojmov stochastického kalkulu využívaného vo finančnej matematike. [19]

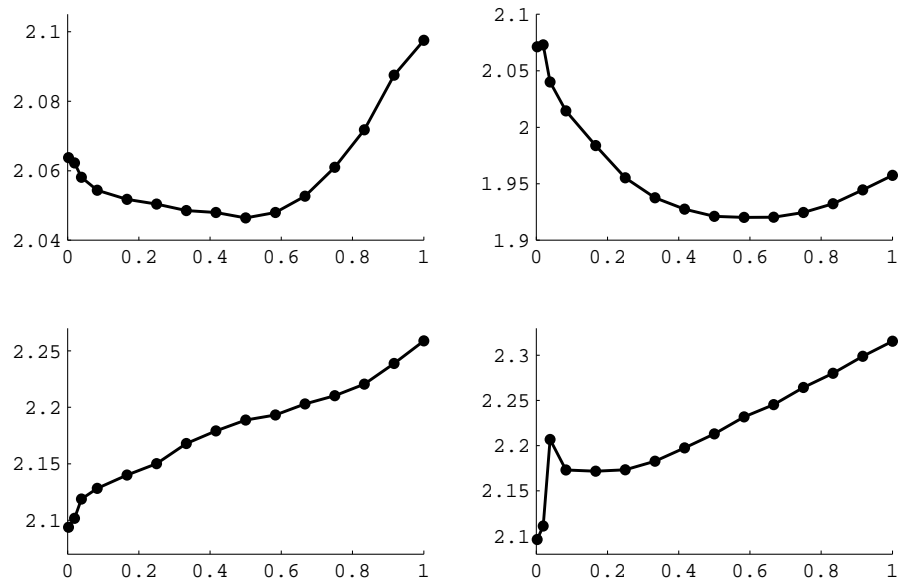
**Definícia 1.2.1 (Stochastický proces)** *Nech je daný pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , kde  $\mathcal{F}$  je  $\sigma$ -algebra merateľných množín na  $\Omega$  a  $P$  je pravdepodobnostná miera. Potom stochastický proces je súbor náhodných premenných  $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$  na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .*

Pre každé  $t$  je

$$\omega \rightarrow X_t(\omega); \omega \in \Omega$$

náhodná premenná.

**Definícia 1.2.2 (Brownov pohyb)** *Brownov proces je stochastický proces s týmito vlastnosťami:*



Obr. 1.2: Krivky časovej štruktúry úrokových mier pre dni 26.2.2004, 29.3.2004, 15.9.2004 a 21.12.2004.

- (i) s pravdepodobnosťou 1 sú trajektórie  $W_t(\omega)$  spojité a platí  $W_0 = 0$
- (ii) náhodná premenná  $W_t$  má normálne rozdelenie  $N(0, t)$
- (iii)  $W_{t+s} - W_s$  má  $N(0, t)$  rozdelenie. Platí, že  $W_t$  má nezávislé prírastky.

Pod pojmom Brownov pohyb sa v niektorej literatúre myslí

$$B_t = \mu t + \sigma W_t,$$

kde  $\mu$  a  $\sigma$  sú konštanty. Vtedy by sa proces z definície (1.2.2) nazýval Wienerov proces.

**Definícia 1.2.3 (Itôov proces)** *Nech  $W_t(\omega)$  je Brownov pohyb na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .*

*Jednorozmerný Itôov proces je stochastický proces tvaru*

$$dX_t(\omega) = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW_t(\omega), \quad (1.6)$$

*ktorý je zapísaný v diferenciálnom tvare. Funkcia  $u$  sa nazýva "drift" a funkcia  $v$  "volatilita".*

Dôležitým príkladom Itôovho procesu je stochastický vývoj ceny akcie.

Základnou vetou stochastického kalkulu je Itôova lema:

**Lema 1.2.1 (Itôova lema)** *Nech  $X_t(\omega)$  je Itôov proces*

$$dX_t(\omega) = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW_t(\omega).$$

Nech  $g(t, x) \in C^2([0, \infty] \times \mathbf{R})$ . Potom

$$Y_t(\omega) = g(t, X_t(\omega))$$

je tiež Itôov proces a platí

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)v^2 dt. \quad (1.7)$$

Napokon ešte vysvetlím pojem *markovovský proces*:

**Definícia 1.2.4 (Markovovský proces)** *Stochastický proces  $x(t)$  sa nazýva markovovský, ak pre  $\forall n$  a  $t_1 < t_2 \dots < t_n$  platí:*

$$P[x(t_n) \leq x_n | x(t_{n-1}), \dots, x(t_1)] = P[x(t_n) \leq x_n | x(t_{n-1})], \quad (1.8)$$

čo je ekvivalentné s

$$P[x(t_n) \leq x_n | x(t) \quad \forall t \leq t_{n-1}] = P[x(t_n) \leq x_n | x(t_{n-1})].$$

Vlastnosť (1.8) sa nazýva markovovská, stochastické procesy s touto vlastnosťou sú potom markovovské. Markovovská vlastnosť sa dá jednoducho interpretovať tak, že terajší stav procesu závisí len od predchádzajúceho stavu, nie všetkých minulých stavov, resp. budúce stavy sú ovplyvnené len súčasným stavom. Teoretickým príkladom markovovského procesu je Wienerov proces, praktickým je vývoj cien akcií či úrokových mier.

# Kapitola 2

## Modely úrokových mier

Najzložitejšou úlohou a zároveň ambíciou finančnej matematiky je predpovedať úrokovú mieru a jej dynamiku. Dnešné finančné trhy zahŕňajú nielen dlhopisy, ale čoraz viac rozličné aktíva citlivé na úrokové miery - ich deriváty (*swapy, capy, floory*). Navyše sú úrokové miery dôležité aj na úrovni podnikov, keďže väčšina investičných rozhodnutí je založená na očakávaní vývoja úrokových mier. Z obrázku (1.1) máme možnosť vidieť, že ich vývoj v čase a tiež priebeh krivky časovej štruktúry (*term structure*) je stochastický. Napriek tomu sa postupne vyvíjali snahy predpovedať tvar krivky časovej štruktúry úrokových mier. Je viacero faktorov, od ktorých závisí výška úrokových mier, čiže aj tvar *term structure*. Spomenieme len tie najpodstatnejšie: je to samotný finančný trh, kde meniace sa ponuka a dopyt po derivátoch úrokových mier menia hodnotu úrokových mier a taktiež sú to aj zásahy centrálnych bánk a maturita derivátov. Boli tak vyvinuté modely, ktoré opisovali pravdepodobnostné správanie sa úrokových mier. Takéto modely sa v literatúre vyskytujú pod názvami *modely časovej štruktúry úrokových mier* (term structure of interest rates models) alebo *modely výnosovej krivky* (yield curve models).

Modely rozlišujeme na 2 druhy: rovnovážne (*equilibrium*) a bezarbitrážne (*no-arbitrage*). V rovnovážnych modeloch je trhová term structure výstupom z príslušného modelu, zatiaľ čo bezarbitrážne modely presne zodpovedajú dennej term structure (je vstupom modelu). Nevýhodou rovnovážneho modelu je, že aproximácia term structure nie je častokrát presná, dokonca môže nastať značná chyba. To, samozrejme, neuspokojuje investorov. Práve to viedlo k vytvoreniu bezarbitrážnych modelov. V nich sú parametre modelu funkciami času. Cenou za to je, že v mnohých modeloch nastáva nemarkovovskosť short rate  $r$ . Modely sa vylepšovali v tomto smere, ale naopak strácali svoju analytickú riešiteľnosť, prípadne umožňovali záporné úrokové miery. K rovnovážnym modelom patria *Vašíčkov*<sup>1</sup> a *CIR*<sup>2</sup> model. Bezarbitrážne modely vyplývajú z tzv. *Heath - Jarrow - Morton* prístupu, a patria medzi ne *Ho - Lee*<sup>3</sup> a *Hull - White*<sup>4</sup> modely [15]. My sa budeme venovať rovnovážnym modelom.

Tvar kriviek časovej štruktúry úrokových mier sa rôzne mení v čase. Bežný

---

<sup>1</sup>O.A.Vasicek: An Equilibrium Characterization of the Term Structure, 1977

<sup>2</sup>J.C.Cox, J.E.Ingersoll, S.A.Ross: A Theory of the Term Structure of Interest Rates, 1985

<sup>3</sup>T.S.Y.Ho, S.-B.Lee: Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, 1986

<sup>4</sup>J.Hull, A.White: Pricing Interest Rate Derivative Securities, 1990

prístup pri modelovaní je začať s nejakým vhodným stochastickým procesom pre vybranú úrokovú mieru v rizikovo-neutrálnom svete a skúmať, ako to vplýva na ceny derivátov. Takto navrhnuté modely v sebe obsahujú náhodnosť cez *Brownov pohyb*. Najčastejšie sa navrhnuté modely snažia zachytiť vývojovú krivku pomocou krátkodobej úrokovej miery (short rate). Vtedy je určujúcim faktorom modelovania. Ako alternatívy namiesto short rate sa používajú aj forwardové alebo dlhodobé úrokové miery, prípadne iné pozorovateľné faktory na finančnom trhu. Hlavné kritérium členenia modelov term structure je počet faktorov.

## 2.1 Jednofaktorové modely úrokovej miery

Najrozšírenejšie a najpoužívanéjšie na trhu úrokových mier sú *modely krátkodobej úrokovej miery (short rate modely)*, ktoré majú poslúžiť na zachytenie kriviek *term structure*. Za jediný faktor sa v týchto modeloch považuje krátkodobá úroková miera  $r$ , o ktorej predpokladáme, že predstavuje spojitý markovovský proces. Dostávame takto všeobecný tvar jednofaktorového modelu, zapísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t. \quad (2.1)$$

Deterministickú zložku predstavuje výraz  $\mu(r_t, t)dt$ , pričom  $\mu(r_t, t)$  sa nazýva drift; stochastickú zložku predstavuje člen  $\sigma(r_t, t)dW_t$ , kde  $\sigma(r_t, t)$  je volatilita a  $dW_t$  je Brownov pohyb resp. Wienerov proces, ktorý je zdrojom náhodnosti.

Pri konštruovaní konkrétneho short rate modelu je potrebné dbať na to, aby stochastický proces modelu spĺňal isté požiadavky [27], ktoré sú kladené na úrokové miery:

- úroková miera by nemala byť záporná alebo príliš vysoká, t.j. disperzia by mala byť v súlade s očakávaniami možných hodnôt,
- podľa historických pozorovaní sa zdajú byť úrokové miery priťahované k nejakej dlhodobej priemernej úrovni, t.j. príliš vysoké úrokové miery majú tendenciu klesať (majú záporný drift), a naopak, príliš nízke úrokové miery stúpajú - táto vlastnosť sa označuje ako **mean-reversion**,
- medzi úrokovými mierami rôznych maturít nie je dokonalá korelácia,
- volatility mier rozličných maturít by mali byť tiež rozličné - kratšie úrokové miery sa zvyčajne vyznačujú vyššou volatilitou,
- volatilita short rate nespĺňa homoskedasticitu.

Zatiaľ sa nepodarilo vytvoriť model, ktorý by spĺňal všetky tieto požiadavky.

Jedným z prvých modelov, ktorý mal opísať vývoj úrokových mier, je **Vašíčkov** model [26]. Všeobecná rovnica (2.1) má konkrétny tvar

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t. \quad (2.2)$$

V rovnici parameter  $\theta$  predstavuje dlhodobú rovnovážnu úrokovú mieru, ku ktorej sa priťahuje proces  $r_t$  rýchlosťou určenou parametrom  $\kappa$  (miera priťahovania,  $\kappa > 0$ ). Rovnica (2.2) teda spĺňa vlastnosť *mean-reversion*, proces ňou zapísaný nazývame aj *mean-reverting* proces, resp. *Ornstein-Uhlenbeck* proces. Nevýhody tohto modelu sú, že umožňuje záporné úrokové miery a volatilita je konštantná.

Tieto nedostatky odstraňuje **CIR** model [8], ktorý je snáď najrozšírenejším 1-faktorovým modelom a využívajú sme ho aj v tejto práci. Popisuje ho rovnica

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t. \quad (2.3)$$

Volatilita, ktorú predstavuje výraz  $\sigma\sqrt{r_t}$ , už nie je konštantná, s rastúcim  $r_t$  sa zvyšuje, čo je v súlade s vlastnosťami na strane (9). So zvyšujúcou sa úrokovou mierou sa zvyšuje volatilita (*level effect*). Rovnako zabezpečuje aj nezápornosť procesu  $r_t$  (pozri [8]).

Okrem týchto modelov existuje ešte niekoľko ďalších rovnovážnych term structure modelov. Môžeme ich zapísať v jednej spoločnej schéme:

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t. \quad (2.4)$$

Tento schéma vyhovujú aj Vašíčekov a CIR model, pričom pre ich deterministickú (rovnakú) časť platí

$$\alpha = \kappa\theta \quad \beta = -\kappa.$$

V tabuľke (2.1) je stručný prehľad ďalších modelov.[6]

Názov	Rovnica
1. Vašíček	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma dW_t$
2. CIR	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$
3. Merton <sup>5</sup>	$dr_t = \alpha dt + \sigma dW_t$
4. Dothan	$dr_t = \sigma r_t dW_t$
5. GBM <sup>6</sup>	$dr_t = \beta r_t dt + \sigma r_t dW_t$
6. CIR <sub>VR</sub> <sup>7</sup>	$dr_t = \sigma r_t^{3/2} dW_t$
7. Brennan-Schwartz	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t dW_t$
8. CEV <sup>8</sup>	$dr_t = \beta r_t dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$

Tabuľka 2.1: Prehľad jednofaktorových modelov

Nulové parametre  $\alpha, \beta$  znamenajú, že daný model nepredpokladá trend úrokovej miery. Okrem týchto modelov existujú aj ďalšie modely, ktoré však už nezodpovedajú schéme (2.4).

Najčastejšie sú to už bezarbitrážne modely, resp. kombinácie bezarbitrážnych a rovnovážnych modelov. Zatiaľ čo rovnovážne modely sa snažia zostrojiť rovnicu zachytávajúcu short-rate proces, ktorý generuje zmysluplnú krivku term structure (tá

<sup>5</sup>model predstavuje Brownov pohyb s driftom

<sup>6</sup>geometrický Brownov pohyb

<sup>7</sup>model vytvorený Coxom, Ingersollom, Rossom (1980) pre cenné papiere

<sup>8</sup>constant elasticity of variance proces, Cox, 1975

je teda výstupom modelu), tak bezarbitrážny model berie krivku term structure za vstup a modeluje short-rate proces na ocenenie nejakých podkladových aktív (opcie, futurity, dlhopisy), pričom však zachováva konzistentnosť s term structure [14].

Príklady niektorých ďalších modelov:

- Hull & White [16]  $dr_t = (\theta_t - \alpha_t r_t)dt + \sigma_t dW_t$
- Ho & Lee [14]  $dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t$
- Black & Derman & Toy [4]  $dr_t = -\beta r_t dt + \sigma_t r_t dW_t$
- Black & Karasinski  $d \ln r_t = (\theta_t - \alpha \ln r_t)dt + \sigma dW_t$

Poznamenávame, že niektoré z týchto vymenovaných modelov sa vyskytujú v literatúre aj v inom tvare. Koeficienty môžu byť konštantami alebo funkciami času - v tom prípade umožňujú lepšie vystihnúť tvar súčasnej krivky term structure.

Okrem týchto short-rate modelov existujú aj iné modely úrokových mier, napríklad modely forwardovej úrokovej miery, prípadne aj modely dlhodobej úrokovej miery. Vývoj forwardových mier zachytávajú modely tzv. **Heath-Jarrow-Morton** (H-J-M) rámca [13]

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t, \quad (2.5)$$

ktorý sa stáva modelom po skonkrétnení volatility  $\sigma(t, T)$  - tento model sa vyskytuje v literatúre aj v inom tvare. Cieľom bolo špecifikovať volatility okamžitých forwardových mier pre všetky budúce časy. Výhoda modelov navrhnutých podľa H-J-M rámca oproti short-rate modelom je v tom, že dokážu zachytiť celú krivku forwardovej miery, aj keď sú často nemarkovovské. Z H-J-M rámca vyplýva tzv. *Brace-Gatarek-Musiela* model [15], ktorý sa označuje aj ako *LIBOR market* model.

## 2.2 Dvojfaktorové modely úrokovej miery

V jednofaktorových modeloch bola teda celá term structure závislá od jediného stochastického procesu, ktorým bola najčastejšie krátkodobá úroková miera. Jednofaktorové modely síce sú konzistentné s rovnovážnym oceňovaním podkladových aktív bez arbitrážnej príležitosti, avšak majú nežiadúce vlastnosti, pretože všetky dlhopisové výnosy sú perfektne korelované, čo nezodpovedá úplne charakteristike term structure úrokovej miery a taktiež jej zmenám tvaru v čase. To je v rozpore s jednou z požadovaných vlastností úrokových mier (strana (9)). Výhodou jednofaktorových modelov bolo predovšetkým relatívne ľahké odvodenie riešenia na ocenenie dlhopisov (to si ukážeme neskôr). Preto snaha vedieť lepšie modelovať vývoj úrokovej miery, ako aj výnosových kriviek, napríklad dlhopisov, bola dôvodom k rozširovaniu modelov pridávaním ďalších faktorov. V článku [7] bola urobená analýza jedno-, dvoj- a trojfaktorových CIR modelov term structure, ako presne dokážu fitovať výnosové krivky dlhopisov. Najlepšie výsledky dával práve trojfaktorový model.



Spočiatku to boli len dvojfaktorové modely, ktoré mali explicitné riešenie v uzavretom tvare, neskôr vznikali zložitejšie modely dvoch aj viacerých faktorov, riešiteľné numericky. Platí však, že čím väčší počet faktorov modelu, tým náročnejší model na výpočet - nielen na získanie explicitného riešenia. Dvojfaktorový model môžeme vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$dr_t = \alpha_r(r_t, y_t, t)dt + \sigma_r(r_t, y_t, t)dW_t^1 \quad (2.6)$$

$$dy_t = \alpha_y(r_t, y_t, t)dt + \sigma_y(r_t, y_t, t)dW_t^2. \quad (2.7)$$

Pri modelovaní procesu úrokovej miery  $r_t$ , zapísaného rovnicou (2.6), sa využíva ešte ďalšia stochastická rovnica (2.7) opisujúca nejaký proces  $y_t$ . Medzi dvojicou stochastických procesov  $W_t^1$  a  $W_t^2$  je (konštantná) korelácia  $\rho$ .

Dvojfaktorové modely sa dajú ešte rozdeliť do dvoch tried: modely, ktoré za druhý faktor berú pozorovateľnú, ekonomickú alebo finančnú veličinu, alebo druhým faktorom je niektorý z parametrov rovnice modelujúcej vývoj úrokovej miery.

V článku [8] autori pridali k CIR modelu ako druhý faktor očakávanú mieru inflácie. V modeli **Brennan-Schwartz** [5] sa využíva vzťah short-rate a tzv. *consol rate*, ktorá predstavuje dlhodobú úrokovú mieru (presne: consol rate je výnos dlhopisu s konštantnými kupónmi a nekonečnou maturitou). Procesy sú dané týmito stochastickými rovnicami

$$\begin{aligned} dr &= (\alpha_1 + \beta_1(l - r))dt + r\sigma_1dW_1 \\ dl/l &= (\alpha_2 + \beta_2r + \gamma_2l)dt + \sigma_2dW_2. \end{aligned}$$

Neskôr boli navrhované aj rozličné modifikácie tohoto modelu, a autori skúmali ich teoretické a analytické vlastnosti. Medzi takéto modifikácie patrí aj model **Schaefer-Schwartz**, ktorý využíva ako jednu stavovú premennú dlhodobú úrokovú mieru (resp. consol rate), a za druhú premennú berie tzv. *spread*  $s$ , ako rozdiel okamžitej úrokovej miery a consol rate. V článku [21] sa autori podrobnejšie venujú modelu

$$\begin{aligned} ds &= m(\mu - s)dt + \gamma dW_1 \\ dl &= \beta_2(s, l, t)dt + \sigma\sqrt{l}dW_2. \end{aligned}$$

Druhú triedu vytvárajú teda modely, v ktorých pridaný faktor je niektorý z parametrov jednofaktorového modelu popisujúceho vývoj úroku. Už teda nie je konštantný, ale riadi sa stochastickým procesom.

Najčastejšie sú práve modely, ktoré za tento druhý faktor berú *volatilitu*  $\sigma$ . Spomenieme aspoň dvoch zástupcov spomedzi modelov so *stochastickou* volatilitou:

- Fong & Vašíček [12]

$$\begin{aligned} dr &= \alpha_1(\bar{r} - r)dt + \sqrt{\sigma}dW_1 \\ d\sigma &= \alpha_2(\bar{\sigma} - \sigma)dt + \xi\sqrt{\sigma}dW_2 \end{aligned}$$

- Anderson & Lund [1]

$$\begin{aligned} dr &= \kappa_1(\bar{r} - r)dt + \sigma r^\gamma dW_1 \\ d(\ln \sigma) &= \kappa_2(\alpha - \ln \sigma)dt + \xi dW_2 \end{aligned}$$

Použitie volatility ako faktora neistoty bolo podnietené štúdiami reálnych dát.

Do tejto triedy patrí aj CIR model, rozšírený o druhý faktor [8], ktorým je dlhodobá rovnovážna úroková miera  $\theta$ , v pôvodnom jednofaktorovom CIR modeli konštantná. Tento model so *stochastickou reversion level* má tvar

$$\begin{aligned}dr &= \kappa_1(\theta - r)dt + \sigma_r\sqrt{r}dW_1 \\d\theta &= \kappa_2(\theta^* - \theta)dt + \sigma_\theta\sqrt{\theta}dW_2.\end{aligned}$$

Návrh použiť parameter *mean reversion*  $\theta$  ako stochastický proces, vychádzal z empirických štúdií o jej časovej závislosti od hospodárskych cyklov. Tento prístup bol použitý v článku [11].

Samozrejme, existujú aj ďalšie dvojfaktorové modely zachytávajúce priebeh short-rate, líšiace sa od už spomenutých modelov. Skúma sa ich riešiteľnosť (analytická alebo numerická), ich vlastnosti alebo len jednotlivých faktorov (najmä volatility). Odlišujú sa aj prístupmi a metodológiou, menia sa parametre aj počet faktorov. Veľmi dôležitou otázkou sa stáva práve počet faktorov modelu. Rovnako aj my v začiatkoch písania tejto práce sme sa na konkrétnych dátach presvedčili, že jeden faktor neposkytuje dostatočnú traktabilitu krivky term structure. V článku [22] sa autori zaoberajú multifaktorovým CIR a taktiež tzv. Gaussovským modelom. Autori vychádzajú z predpokladu, že pozorovaná short-rate je súčtom viacerých faktorov, ktoré sú charakterizované nejakým procesom. Podobných návrhov sa vyskytuje v literatúre pomerne často.

# Kapitola 3

## Ceny dlhopisov a riešenie modelov term structure

Na modelovanie krivky term structure potrebujeme poznať vývoj  $r(t)$  ako procesu opísaného stochastickou rovnicou (2.1). Výpočet hodnôt parametrov tohoto modelu prevedieme v rizikovo-neutrálnom svete na problém výpočtu parciálnej diferenciálnej rovnice, ktorej riešením sú ceny dlhopisov. Takto sa nám podarí určiť celú výnosovú krivku. Tento prístup závislosti cien dlhopisov od úrokových mier (okrem času  $t$  a doby splatnosti  $T$ ) je, samozrejme, zjednodušujúci, pretože na dlhopisy vplyvajú aj iné faktory, ako likvidita, riziko a iné. V tejto kapitole si odvodíme podľa [18] rovnicu na výpočet ceny dlhopisu.

### 3.1 Vývoj ceny dlhopisu v jednofaktorovom modeli

Predpokladajme, že cena dlhopisu s maturitou  $T$  je funkciou času  $t$  a okamžitej úrokovej miery  $r$ , čiže  $P = P(t, T, r)$ .

Nech pre jednofaktorový model vývoja úrokovej miery platí všeobecná rovnica

$$dr = \mu_r(r, t)dt + \sigma_r(r, t)dW.$$

Použitím Itôovej lemy (1.2.1) dostávam stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu  $P$ :

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma_r^2 dt \\ &= \left[ \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right] dt + \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r}dW, \end{aligned} \quad (3.1)$$

čo ešte prepíšem do tvaru

$$dP = \tilde{\mu}_P(r, t)dt + \tilde{\sigma}_P(r, t)dW, \quad (3.2)$$

kde  $\tilde{\mu}_P$  predstavuje drift a  $\tilde{\sigma}_P$  volatilitu. Itôovu lemu zväčša používame pre  $r \in (0, \infty)$  - pre prípad modelov, keď volatilita je definovaná len pre kladné úrokové

miery.

Ďalším krokom odvodenia rovnice pre vývoj ceny dlhopisu je skonštruovanie bezrizikového portfólia  $\Pi$ . Portfólio bude pozostávať z jedného dlhopisu s maturitou v čase  $T_1$  a  $\Delta$  kusov dlhopisov s maturitou  $T_2$ :

$$\Pi = P(T_1) + \Delta P(T_2).$$

Pre časovú zmenu  $\Pi$  využitím (3.2) dostávame:

$$d\Pi = (\tilde{\mu}_P(T_1) + \Delta\tilde{\mu}_P(T_2))dt + (\tilde{\sigma}_P(T_1) + \Delta\tilde{\sigma}_P(T_2))dW. \quad (3.3)$$

Keďže požadujeme bezrizikové portfólio, tak sa musíme zbaviť stochastického člena  $(\tilde{\sigma}_P(T_1) + \Delta\tilde{\sigma}_P(T_2))dW$ . To nastane vtedy, ak zvolíme

$$\Delta = -\frac{\tilde{\sigma}_P(T_1)}{\tilde{\sigma}_P(T_2)}. \quad (3.4)$$

Pri takejto voľbe  $\Delta$  dostávame deterministické portfólio.

Nesmieme zabudnúť na zachovanie princípu bezarbitráže na trhu, a teda musí platiť, že zmena hodnoty portfólia sa rovná výnosu portfólia v prípade jeho spojitého úročenia v banke pri úrokovej miere  $r$ . Zapišeme to vzťahom

$$d\Pi = r\Pi dt,$$

z čoho dostávame aj po dosadení za hodnotu  $\Delta$ :

$$\left( \tilde{\mu}_P(T_1) - \frac{\tilde{\sigma}_P(T_1)}{\tilde{\sigma}_P(T_2)}\tilde{\mu}_P(T_2) \right) dt = r \left( P(T_1) - \frac{\tilde{\sigma}_P(T_1)}{\tilde{\sigma}_P(T_2)}P(T_2) \right) dt. \quad (3.5)$$

Rovnicu (3.5) upravíme do tvaru

$$\frac{\tilde{\mu}_P(T_1) - rP(T_1)}{\tilde{\sigma}_P(T_1)} = \frac{\tilde{\mu}_P(T_2) - rP(T_2)}{\tilde{\sigma}_P(T_2)}.$$

Táto rovnica platí pre ľubovoľné doby splatnosti  $T_1$  a  $T_2$ , a teda nezávisí od maturity dlhopisu  $T$ . Definujeme

$$\lambda(t, r) = \frac{\tilde{\mu}_P(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\tilde{\sigma}_P(r, t, T)}, \quad T \geq t. \quad (3.6)$$

Funkciu  $\lambda$  premenných  $r$  a  $t$  nazývame *trhová cena rizika* (market price of risk). Trhová cena rizika sa dá interpretovať ako nejaký výnos navyše oproti bezrizikovej miere  $r$ , ktorú investor požaduje za riziko investovania (riziko spôsobené stochastickým členom  $dW$ ); zväčša sa definuje ako záporná funkcia - vtedy to znamená "odmenu" za riziko.

Dosadením z (3.1) za  $\tilde{\mu}_P(r, t, T)$  a  $\tilde{\sigma}_P(r, t, T)$  do (3.6) a úprave dostávame partiálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu  $P = P(r, t)$  s maturitou  $T$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r - \lambda r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0. \quad (3.7)$$

Dlhopis v čase splatnosti má hodnotu  $P(r, T) = 1$ , čo nám dáva koncovú podmienku. V práci [23] môžeme nájsť aj numerické riešenie rovnice (3.7) s okrajovými podmienkami, vrátane analýzy okrajových podmienok.

Rovnica (3.7) predstavuje všeobecnú schému. Špecifikovaním funkcií  $\mu_r(r, t)$ ,  $\sigma_r(r, t)$  a  $\lambda_r(r, t)$  dostávame konkrétny model. Jeho riešenie je buď explicitné alebo numerické.

### 3.1.1 Explicitné riešenie jednofaktorových modelov

V tejto časti priblížime explicitné riešenia niektorých konkrétnych predpisov rovnice (3.7), ktoré predstavujú vybraný jednofaktorový model term structure.

Budeme uvažovať stochastickú rovnicu zodpovedajúcu Ornstein-Uhlenbeckovmu procesu:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dW, \quad (3.8)$$

zvolili sme teda

$$\mu_r(r, t) = \kappa(\theta - r) \quad \text{a} \quad \sigma_r(r, t) = \sigma r^\gamma.$$

Potom príslušná rovnica (3.7) ceny dlhopisu má tvar

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa(\theta - r) - \lambda(r, t)\sigma r^\gamma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r^{2\gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad t < T, \quad (3.9)$$

pričom ponechávame ešte nekonkretizovanú funkciu  $\lambda(r, t)$ . Koncová podmienka rovnice je  $P(r, T, T) = 1$ .

Riešenie tejto rovnice je navrhnuté v tvare

$$P(r, t, T) = A(t, T)e^{B(t, T)r}, \quad (3.10)$$

podobne ako v článku [18]. Z koncovej podmienky dostávame

$$A(T, T) = 1 \quad \text{a} \quad B(T, T) = 0.$$

To využijeme neskôr pri nájdení tvarov funkcií  $A(t, T)$  a  $B(t, T)$ .

Pokračujeme dosadením vzťahu (3.10) do (3.9). Po úprave dostávame:

$$\frac{\dot{A}}{A} - \dot{B}r - \kappa\theta B + \kappa r B + \lambda\sigma r^\gamma B + \frac{1}{2}\sigma^2 r^{2\gamma} B^2 - r = 0. \quad (3.11)$$

Kvôli tomu, aby rovnica rozmerovo "sedela", sú prípustné len dve hodnoty parametra  $\gamma$ :

$$\gamma = 0 \quad \text{alebo} \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Pre hodnotu  $\gamma = 0$  dostávame Vašíčkov model. Porovnaním koeficientov pri členoch dostaneme systém dvoch diferenciálnych rovníc:

$$\dot{B} - \kappa B + 1 = 0$$

$$\frac{\dot{A}}{A} - \kappa\theta B + \lambda\sigma B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 = 0$$

Táto sústava má explicitné riešenie len pre prípad, keď sa zvolí funkcia  $\lambda(r, t)$  konštantná, čiže  $\lambda(r, t) = \bar{\lambda}$ . Vtedy dostávame pre funkcie  $A(t, T)$  a  $B(t, T)$  tieto vzťahy (overenie v [18]):

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \exp \left[ (B(t, T) - T + t) \left( \theta - \frac{\bar{\lambda}\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (B(t, T))^2 \right] \\ B(t, T) &= \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \quad t < T \end{aligned} \quad (3.12)$$

Analogicky budeme postupovať aj pre prípad  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Zodpovedá to CIR modelu. Systém diferenciálnych rovníc bude mať tvar:

$$\frac{\dot{A}}{A} - \kappa\theta B = 0$$

$$\dot{B} - (\kappa + \bar{\lambda}\sigma)B - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 + 1 = 0.$$

Výpočet CIR modelu je už náročnejší. Pre získanie explicitného riešenia definujeme  $\lambda(r, t) = \bar{\lambda}\sqrt{r}$ . Potom dostávame ([18]):

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \left[ \frac{2\varphi e^{(\varphi+\psi)(T-t)/2}}{(\varphi + \psi)[e^{\varphi(T-t)} - 1] + 2\varphi} \right]^{2\kappa\theta/\sigma^2} \\ B(t, T) &= \frac{2[e^{\varphi(T-t)} - 1]}{(\varphi + \psi)[e^{\varphi(T-t)} - 1] + 2\varphi}, \quad t < T, \end{aligned} \quad (3.13)$$

kde  $\psi = \kappa + \bar{\lambda}\sigma$  a  $\varphi = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2}$ .

Jeden zo spôsobov odhadovania parametrov na základe reálnych dát predstavieme v nasledujúcej časti.

### 3.1.2 Kalibrácia parametrov pomocou min-maxovej metódy – prípad CIR modelu

Aj pre účely ďalšieho použitia a odvolávania sa opíšeme zaujímavú metódu kalibrácie parametrov, publikovanú v článku [24], ktorého spoluautorom je zároveň školiteľ pri písaní tejto diplomovej práce. Metóda pozostáva z dvoch fáz, minimalizačnej a maximalizačnej, označuje sa aj ako min-maxová metóda.

Autori sa zaoberali CIR modelom, ktorý zodpovedá procesu tvaru (2.3). Už skôr opísaným postupom dostávame túto parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa(\theta - r) - \lambda r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad t < T, \quad r > 0. \quad (3.14)$$

Riešenie tohto modelu predpokladáme v tvare

$$P(T - \tau, T, r) = A(\tau)e^{-B(\tau)r},$$

pričom  $\tau = T - t$  predstavuje čas do doby splatnosti ( $\tau \in [0, T]$ ).

Explicitné riešenie z (3.13) prepíšeme do tvaru:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{2(e^{\eta\tau} - 1)}{(\kappa + \lambda + \eta)(e^{\eta\tau} - 1) + 2\eta} \\ A(\tau) &= \left( \frac{\eta e^{(\kappa+\lambda+\eta)\tau/2}}{e^{\eta\tau} - 1} B(\tau) \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\text{kde} \quad \eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}.$$

Novinkou prezentovanou v spomenutom článku je redukcia parametrov - z pôvodných štyroch ( $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\sigma$  a  $\theta$ ) na rozhodujúce tri vhodnou substitúciou:

$$\beta = e^{-\eta}, \quad \xi = \frac{\kappa + \lambda + \eta}{2\eta}, \quad \rho = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}. \quad (3.16)$$

Pre konkrétnu trojicu  $(\widehat{\beta}, \widehat{\xi}, \widehat{\rho})$  sú potom hodnoty pôvodných parametrov na parametricky zadanej krivke, závislej od  $\lambda$ , určené podľa týchto vzťahov:

$$\kappa_\lambda = -\lambda - (2\widehat{\xi} - 1) \ln \widehat{\beta}, \quad \sigma_\lambda = -\sqrt{2\widehat{\xi}(1 - \widehat{\xi}) \ln \widehat{\beta}}, \quad \theta_\lambda = \widehat{\rho}\sigma_\lambda^2 / (2\kappa_\lambda).$$

Funkcie  $A(\tau)$  a  $B(\tau)$  vyjadrené pomocou nových premenných budú mať tvar:

$$B(\tau) = -\frac{1}{\ln \beta} \frac{1 - \beta^\tau}{\xi(1 - \beta^\tau) + \beta^\tau}, \quad A(\tau) = \left( \frac{\beta^{(1-\xi)\tau}}{\xi(1 - \beta^\tau) + \beta^\tau} \right)^\rho. \quad (3.17)$$

V práci [2] môžeme nájsť tieto úpravy aj pre Vašíčkov model. Pripomenieme, že optimalizácia nie je voľná, na parametre sú kladené isté ohraničenia. Oblasti, na ktorých sú definované, si čitateľ môže pozrieť v spomenutom článku o tejto metóde.

Teraz už k samotnej *min-maxovej* optimalizácii. Najprv získame odhady parametrov  $\beta$ ,  $\xi$ ,  $\rho$ , a tým teda aj parametrickú krivku. Na to si skonštruujeme tzv. nákladovú funkciu, ktorou sa budeme snažiť nájsť minimálny rozdiel medzi skutočnými úrokovými mierami výnosovej krivky a predpovedanými CIR modelom:

$$U(\beta, \xi, \rho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_j^i - \overline{R}_j^i)^2 \tau_j^2, \quad (3.18)$$

pričom  $\{R_j^i\}$  predstavuje výnosovú krivku dĺžky  $m$  v časoch (dňoch)  $1, \dots, n$  dobami maturít  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .  $\overline{R}_j^i$  sú príslušné miery výnosovej krivky zrátané podľa CIR modelu z rovníc

$$A_j e^{-B_j R_0^i} = P = e^{-\overline{R}_j^i \tau_j},$$

kde  $R_0^i$  je okamžitá úroková miera v čase  $i = 1, \dots, n$ ,  $A_j = A(\tau_j)$ ,  $B_j = B(\tau_j)$ . Po úpravách nákladovú funkciu  $U$  minimalizujeme. Táto funkcia 3 premenných je nelineárna, nájsť jej globálne minimum štandardnými optimalizačnými technikami je náročné. Vyžaduje si to robustnejšie algoritmy. V článku [24] bola využitá metóda evolučných stratégií. Jej opis a použitie môžeme nájsť o.i. aj v práci [9].

Nájdением minima funkcie  $U$  získame odhad parametrov  $(\widehat{\beta}, \widehat{\xi}, \widehat{\rho})$ :

$$(\widehat{\beta}, \widehat{\xi}, \widehat{\rho}) = \arg \min_{(\beta, \xi, \rho) \in \Omega} U(\beta, \xi, \rho).$$

Metóda pokračuje maximalizačným krokom - maximalizáciou funkcie vierohodnosti. Z tvaru CIR rovnice (2.3) zostrojíme podľa [3] funkciu maximum likelihood:

$$\ln L(\kappa, \sigma, \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left( \ln v_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{v_t^2} \right),$$

pričom  $v_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa}) r_{t-1}$ ,  $\varepsilon_t = r_t - e^{-\kappa} r_{t-1} - \theta(1 - e^{-\kappa})$ . Táto neobmedzená (v zmysle, že nie sú kladené žiadne ďalšie podmienky na parametre, okrem ich definičných oborov) maximalizácia cez trojicu parametrov  $\kappa, \sigma, \theta$  však nie je pre naše účely vyhovujúca, pretože v sebe nezahŕňa parameter  $\lambda$ . Preto využijeme odhady

$(\widehat{\beta}, \widehat{\xi}, \widehat{\rho})$  na skonštruovanie parametrickej krivky s parametrom  $\lambda$ , cez ktorý budeme maximalizovať likelihood funkciu:

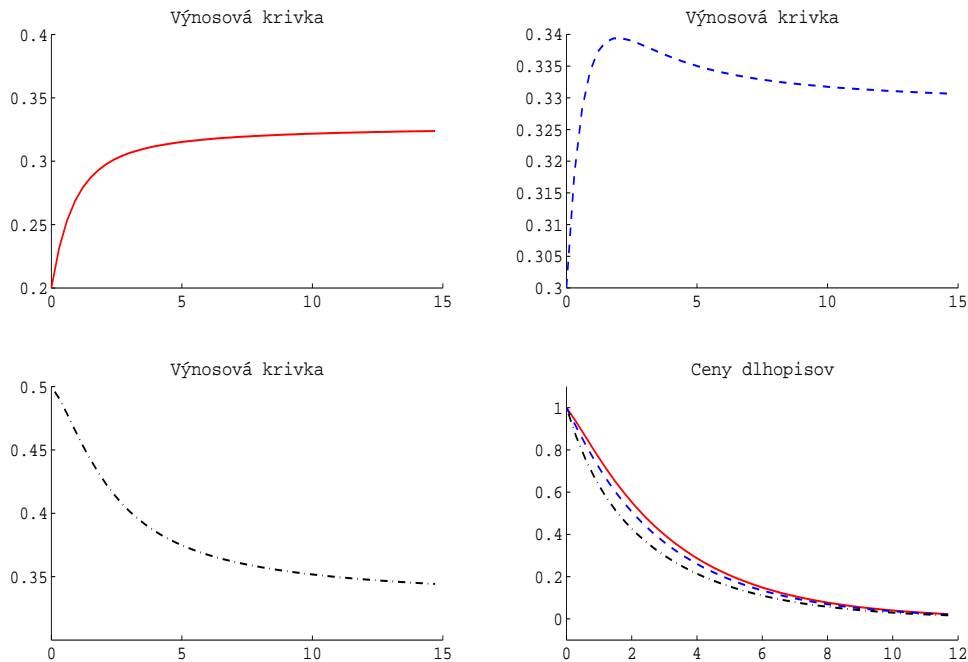
$$\ln L = \ln L(\kappa_{\bar{\lambda}}, \sigma_{\bar{\lambda}}, \theta_{\bar{\lambda}}) = \max_{\lambda \in I} \ln L(\kappa_{\lambda}, \sigma_{\lambda}, \theta_{\lambda}), \quad (3.19)$$

kde  $I$  je oblasť definície parametra  $\lambda$ . Na základe definovaného *maximum likelihood ratio*, resp. *nelineárneho  $R^2$*  v [24] sa potom vyhodnocuje optimalizácia.

## 3.2 Krivky časovej štruktúry úrokových mier

Obsahom tejto časti sú výnosové krivky úrokových mier. Vykresľujeme obrázky časovej závislosti úrokových mier od doby splatnosti  $\tau$ . Nachádzajú sa tu príklady tvarov kriviek, ktoré je možné dosiahnuť pomocou jednofaktorových modelov, pričom tie konfrontujeme s najčastejšími tvarmi výnosových kriviek reálnych úrokových mier.

Na obrázku (3.1) sú ukážky kriviek časovej štruktúry úrokových mier (term structure) pre Vašíčkov model s vybranými hodnotami parametrov  $\kappa$ ,  $\sigma$ ,  $\theta$  a  $\lambda$  a tromi rôznymi hodnotami úrokovej miery short-rate  $r$ . (V prípade tohto modelu nebolo ťažké nájsť také hodnoty parametrov, keď výnosová krivka nadobúdala záporné hodnoty - kritizovaná vlastnosť modelu.) CIR modelu sa ešte budeme venovať.



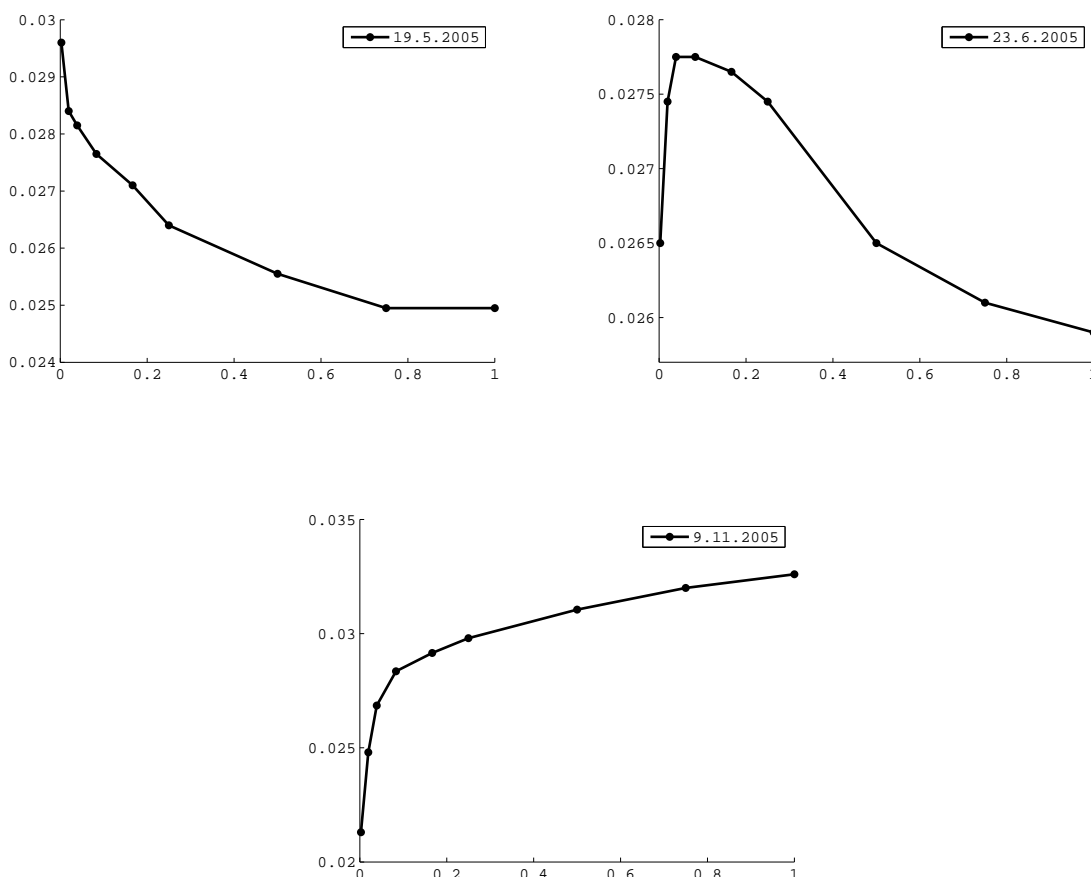
Obr. 3.1: Výnosové krivky a ceny dlhopisov pre Vašíčkov model s parametrami  $\kappa = 1$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $\theta = 0.12$ ,  $\bar{\lambda} = -2/3$ , maturitou  $T=15$  a meniacimi sa hodnotami short-rate  $r=0.2, 0.3$  a  $0.5$ . Na pravom dolnom obrázku sú príslušné ceny dlhopisov.

Jednofaktorové modely CIR a Vašíček nám umožňujú dosiahnuť práve tieto tri tvary výnosových kriviek, ktoré sú aj na obrázku (3.1):



- rastúca
- klesajúca
- s jedným maximom - "humped" krivka

Krivky takéhoto tvaru môžeme pozorovať aj na reálnych dátach. Na obrázku (3.2) sú vykreslené výnosové krivky úrokových mier Bribor z roku 2005 (ako priemery Bid a Ask hodnôt).



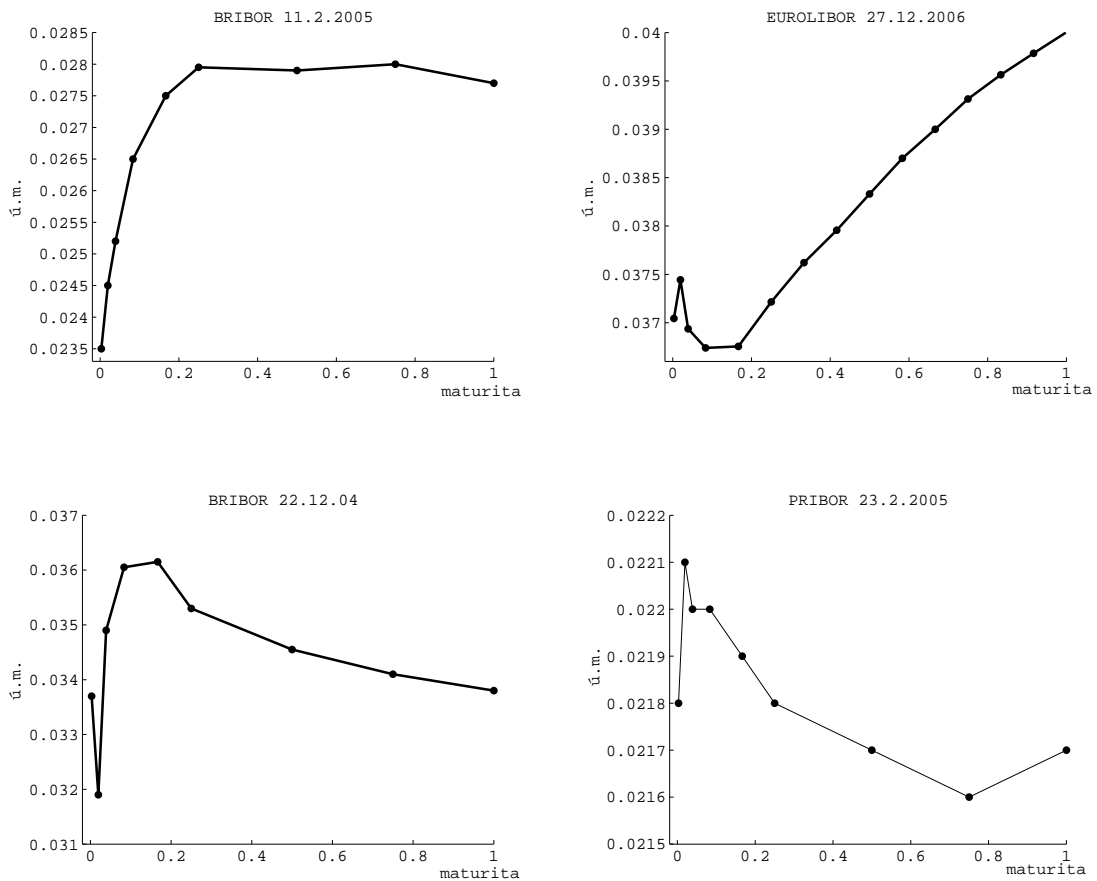
Obr. 3.2: Výnosové krivky úrokových mier Bribor za dni 19.5.2005, 23.6.2005 a 9.11.2005

Lenže reálne úrokové miery nevytvárajú výnosové krivky len s takýmto priebehom, ich časová štruktúra býva zložitejšia. A práve ambícia vedieť lepšie zachytiť rozličný vývoj výnosových kriviek viedla k rozširovaniu modelov o ďalšie faktory. Navyše realita ukazuje, že dostávame rôzne priebehy vývojových kriviek pre rovnakú hodnotu okamžitej úrokovej miery short-rate  $r$ , čo bol ďalší dôvod na podporu názorov, že short-rate ako jediný faktor nepostačuje. Tieto skutočnosti dokumentujú ďalšie obrázky.

Na obrázku (3.3) sú iné bežné tvary reálnych výnosových kriviek úrokových mier.

Obrázok (3.4) (tzv. *scatter-plot*) vykresľuje úrokové miery Bribor z roku 2005.

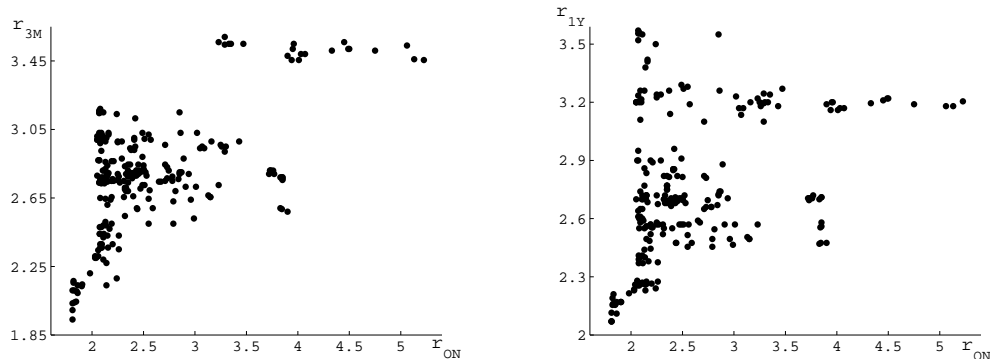
<sup>1</sup>PRIBOR - Prague Inter-Bank Offered Rate



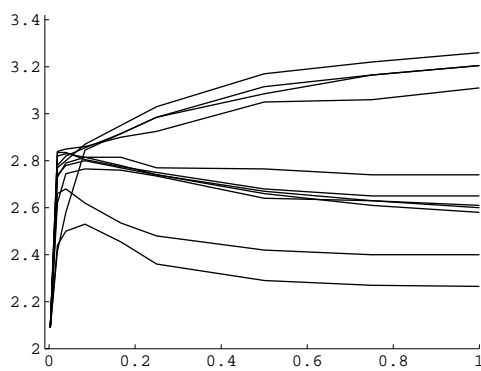
Obr. 3.3: Výnosové krivky dát Bribor 11.2.2005, EuroLIBOR 27.12.2006, Bribor 22.12.2006 a Pribor 23.2.2005.

Každý bod predstavuje priradenie úrokovej miery na dlhšie obdobie k príslušnej (v ten istý deň) jednodňovej úrokovej miere (*over-night*), ktorú stotožňujeme s okamžitou úrokovou (*spotovou*) mierou  $r$ . Vidíme, že jednej úrokovej miere prislúchajú viaceré úrokové miery na dlhšie obdobie. Toto jednofaktorový model nepripúšťa. Spomenutý fakt dokumentuje aj obrázok (3.5), ktorý vykresľuje niekoľko výnosových kriviek vychádzajúcich zo spoločného začiatku, t.j. tej istej spotovej (tu: jednodňovej) úrokovej miery  $r$ . Zachytáva reálny vývoj mier Bribor-u vybraných dní v r.2005.

Cieľom tejto časti bolo na základe porovnania kriviek vývoja úrokových mier potvrdiť správnosť rozširovania modelov o ďalšie faktory. Viacfaktorové modely ponúkajú bohatšiu škálu priebehov kriviek, umožňujú lepšie zachytiť vývoj úrokových mier. To aj nás motivovalo k použitiu dvojfaktorového modelu, ktorým sme sa zaoberali v tejto práci. Všeobecný dvojfaktorový model prezentujeme v nasledovnej časti.



Obr. 3.4: Zobrazenie jednodňových (na osi  $x$ ) a príslušných trojmesačných (vľavo), resp. jednoročných úrokových mier BrIBor 2005.



Obr. 3.5: Rozličné výnosové krivky úrokových mier BrIBor 2005, vychádzajúce z rovnakej hodnoty short-rate  $r$ .

### 3.3 Všeobecná rovnica dvojfaktorového modelu

V tejto časti odvodíme všeobecný tvar rovnice dvojfaktorového modelu. Predpokladajme teraz, že cena dlhopisu  $P$  bude závisieť od dvoch faktorov - okrem okamžitej úrokovej miery aj od ešte nešpecifikovaného ďalšieho faktora  $y$ . Cena dlhopisu s maturitou  $T$  bude teda funkciou času a dvoch faktorov  $r$  a  $y$ :  $P = P(r, y, t)$ . Model týchto dvoch procesov bude mať tvar:

$$\begin{aligned} dr &= \mu_r(r, y, t)dt + \sigma_r(r, y, t)dW_1 \\ dy &= \mu_y(r, y, t)dt + \sigma_y(r, y, t)dW_2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Medzi Wienerovými procesmi  $W_1$  a  $W_2$  je korelácia  $\rho$ .

Použitím viacrozmernej Itôovej lemy odvodíme stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu  $P$  s dobou splatnosti  $T$  [18]:

$$dP = \mu(T)dt + \tilde{\sigma}_r(T)dW_1 + \tilde{\sigma}_y(T)dW_2, \quad (3.21)$$

pričom

$$\begin{aligned}\mu(T) &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \sigma_r \sigma_y \rho \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} + \frac{1}{2} \sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ \tilde{\sigma}_r(T) &= \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} \\ \tilde{\sigma}_y(T) &= \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y}.\end{aligned}$$

Predpokladáme, že  $r \in (0, \infty)$  a definičný obor  $y$  závisí od toho, akú veličinu  $y$  predstavuje.

Pri odvodení parciálnej diferenciálnej rovnice ceny dlhopisu  $P$  postupujeme analogicky ako v prípade jednofaktorového modelu. Zostrojíme portfólio troch dlhopisov s rôznymi maturitami:

$$\Pi = \Delta_1 P(T_1) + \Delta_2 P(T_2) + \Delta_3 P(T_3),$$

pričom  $\Delta_i$  predstavuje ich počet. Pre zmenu portfólia za čas  $dt$  platí

$$d\Pi = \Delta_1 dP(T_1) + \Delta_2 dP(T_2) + \Delta_3 dP(T_3).$$

Po dosadení za  $dP(T_i)$  do tohto vzorca z (3.21) dostávame:

$$\begin{aligned}d\Pi &= (\Delta_1 \mu(T_1) + \Delta_2 \mu(T_2) + \Delta_3 \mu(T_3)) dt + \\ &+ (\Delta_1 \tilde{\sigma}_r(T_1) + \Delta_2 \tilde{\sigma}_r(T_2) + \Delta_3 \tilde{\sigma}_r(T_3)) dW_1 + \\ &+ (\Delta_1 \tilde{\sigma}_y(T_1) + \Delta_2 \tilde{\sigma}_y(T_2) + \Delta_3 \tilde{\sigma}_y(T_3)) dW_2.\end{aligned}$$

Aj tu uvažujeme o bezrizikovom portfóliu. Rizika sa zbavíme vtedy, keď výrazy pri stochastických členoch  $dW_1$  a  $dW_2$  budú nulové. Musí platiť:

$$\begin{aligned}\Delta_1 \tilde{\sigma}_r(T_1) + \Delta_2 \tilde{\sigma}_r(T_2) + \Delta_3 \tilde{\sigma}_r(T_3) &= 0 \\ \Delta_1 \tilde{\sigma}_y(T_1) + \Delta_2 \tilde{\sigma}_y(T_2) + \Delta_3 \tilde{\sigma}_y(T_3) &= 0\end{aligned}\tag{3.22}$$

Vhodnou voľbou členov  $\Delta_i$  sa zbavíme náhodnosti a ostane deterministické portfólio

$$d\Pi = (\Delta_1 \mu(T_1) + \Delta_2 \mu(T_2) + \Delta_3 \mu(T_3)) dt.$$

Princíp bezarbitráže vraví, že výnos tohto portfólia sa musí rovnať v každom čase výnosu okamžitej úrokovej miery  $r$ , čiže musí byť splnená rovnosť

$$\Delta_1 \mu(T_1) + \Delta_2 \mu(T_2) + \Delta_3 \mu(T_3) = r\Pi,$$

čo nám po dosadení za hodnotu portfólia dáva vzťah

$$\Delta_1 \mu(T_1) + \Delta_2 \mu(T_2) + \Delta_3 \mu(T_3) = r(\Delta_1 P(T_1) + \Delta_2 P(T_2) + \Delta_3 P(T_3)).\tag{3.23}$$

Spojením rovníc (3.22) a (3.23) získavame sústavu rovníc na určenie hodnôt  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  a  $\Delta_3$ . Po úprave ju zapíšeme v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_r(T_1) & \tilde{\sigma}_r(T_2) & \tilde{\sigma}_r(T_3) \\ \tilde{\sigma}_y(T_1) & \tilde{\sigma}_y(T_2) & \tilde{\sigma}_y(T_3) \\ \mu(T_1) - rP(T_1) & \mu(T_2) - rP(T_2) & \mu(T_3) - rP(T_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ak je matica singulárna, tak len vtedy má netriviálne riešenie počtu dlhopisov  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ . Singulárna je vtedy, ak je posledný riadok matice lineárnou kombináciou zvyšných dvoch riadkov. To by znamenalo, že existujú funkcie  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  nezávislé od maturity  $T$  (pretože sme zobrali ľubovoľné doby splatnosti  $T_1, T_2$  a  $T_3$ ), ktoré spĺňajú rovnosť

$$\mu(T) - rP(T) = \lambda_1 \tilde{\sigma}_r + \lambda_2 \tilde{\sigma}_y.$$

Po dosadení za  $\mu(T)$ ,  $\tilde{\sigma}_r$  a  $\tilde{\sigma}_y$  do tejto rovnice dostávame všeobecnú parciálnu diferenciálnu rovnicu na výpočet ceny dlhopisu so splatnosťou v čase  $T$  v dvojfaktorovom modeli:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r - \lambda_1 \sigma_r) \frac{\partial P}{\partial r} + (\mu_y - \lambda_2 \sigma_y) \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \sigma_r \sigma_y \rho \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} + \frac{1}{2} \sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - rP = 0. \quad (3.24)$$

Aj v tomto prípade sa funkcie  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  nazývajú trhové ceny rizika. Ich konkrétny tvar, zodpovedajúci nejakému modelu, a dodanie koncových a okrajových podmienok pre faktory  $r$  a  $y$  nám umožňuje túto rovnicu riešiť.

Najčastejšie býva za druhý faktor zvolená volatilita, vystupujúca ako premenná v rovnici prvého faktora okamžitej úrokovej miery  $r$ . Veľmi dobrú analýzu takéhoto dvojfaktorového modelu so stochastickou volatilitou môžeme nájsť napríklad aj v prácach [23], či [25]. Práce poskytujú aj numerické riešenie konkrétneho modelu stochastickej volatility. Venujú sa aj problému tzv. spriemernenia cien dlhopisu vzhľadom na proces riadiaci volatilitu. Takýto koncept sa využíva, keď o volatilitu len predpokladáme proces, ktorý ju riadi, ale nevieme priamo dosadzovať do riešenia jej hodnoty. V skutočnosti sú jej hodnoty neznáme, pretože volatilita nie je priamo pozorovateľná premenná na trhu. Preto takýto prístup má opodstatnenie.

# Kapitola 4

## Faktorová dekompozícia úrokovej miery

V tejto kapitole sa už budeme zaoberať modelom, ktorý sme si zvolili za objekt skúmania, a jeho kalibráciou. Stručne priblížime nami navrhnutý model, taktiež v krátkosti naše dôvody jeho použitia. V prečítanej literatúre - keď zdrojom informácií boli najmä dostupné články či knihy na internete - sme nenašli analogický model, a napokon ani samotnú metódu kalibrácie, ktorá by sa ukázala ako spoľahlivá pri riešení nášho problému. Preto akýkoľvek teoretický podklad priamo k našej problematike bude stručný a vznikal vlastne len za pochodu pri skúšaní rôznych postupov kalibrácie a hľadani optimálneho postupu. Obširnejšie priblížime len teóriu, ktorá už bola publikovaná vo viacerých článkoch.

### 4.1 Rozklad úrokovej miery

Podstatou nášho záujmu bola snaha rozložiť úrokovú mieru na niekoľko zložiek, a to cez súčasne odhadnuté parametre zvoleného modelu. Podnet na to vyšiel z bánk, ktoré sa domnievajú, že úroková miera pozostáva minimálne z dvoch zložiek - **špekulatívnej** a **nešpekulatívnej**. Sú to nepozorovateľné náhodné premenné. Predstavíme tento koncept najprv vo všeobecnosti pre  $m$  zložiek.

#### 4.1.1 Rozštiepenie úrokovej miery short-rate pomocou reálnych úrokových mier na dlhšie obdobie

V tejto časti opíšeme spôsob, akým vytvoríme model, ktorý nám umožní rozštiepiť úrokové miery. To dosiahneme cez kalibráciu parametrov modelu, čo je náš hlavný cieľ. Predpokladajme, že jednodňová (overnight) miera  $r^{on}$ , ktorá sa berie štandardne za aproximáciu short-rate miery, pozostáva z  $m$  zložiek  $r^i$ . Tie predstavujú nepozorovateľné premenné, ktoré bližšie nebudeme špecifikovať. Tento predpoklad bude platiť pre každý obchodovateľný deň (čas  $t$ ):

$$r_t^{on} = \sum_{i=1}^m r_t^i. \quad (4.1)$$

Cena dlhopisu, závislá od týchto  $m$  mier, bude určená vzťahom

$$P(\tau, r^1, \dots, r^m) = A_1(\tau) \dots A_m(\tau) e^{-B_1(\tau)r^1 - \dots - B_m(\tau)r^m}, \quad (4.2)$$

respektíve

$$P(\tau, r_t^1, \dots, r_t^m) = \prod_{i=1}^m A_i(\tau) e^{-B_i(\tau)r_t^i}.$$

Využitím cien dlhopisov môžeme určiť podľa (1.2) spojitý úrok  $R(\tau)$ . Zo spojitého úroku sa dá vykresliť celá výnosová krivka. Znalosti reálnych úrokových mier na dlhšie obdobie využijeme taktiež na získanie úrokov  $r_t^i$ . Analogicky podľa (1.2) platí

$$R_t(\tau) = -\frac{\ln P(\tau, r_t^1, \dots, r_t^m)}{\tau} \quad (4.3)$$

Po dosadení (4.2) do poslednej rovnice a následnej úprave dostávame:

$$B_1(\tau)r_t^1 + \dots + B_m(\tau)r_t^m = R_t(\tau)\tau + \ln[A_1(\tau) \dots A_m(\tau)] \quad (4.4)$$

Na výpočet  $m$  neznámych  $r^1$  až  $r^m$  budeme potrebovať  $m$  rovníc. To znamená, že okrem rovnice (4.1) musíme mať ďalších  $m - 1$  rovníc (4.4). Tie získame, keď využijeme  $m - 1$  úrokových mier pre obdobia  $\tau_1$  až  $\tau_{m-1}$ . Sústavu  $m$  rovníc s  $m$  premennými zapíšeme v maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \dots & B_m^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & \dots & B_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1^{m-1} & B_2^{m-1} & \dots & B_m^{m-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_t^1 \\ r_t^2 \\ \vdots \\ r_t^{m-1} \\ r_t^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_t^1 \tau_1 + \ln(A_1^1 \dots A_m^1) \\ R_t^2 \tau_2 + \ln(A_1^2 \dots A_m^2) \\ \vdots \\ R_t^{m-1} \tau_{m-1} + \ln(A_1^{m-1} \dots A_m^{m-1}) \\ r_t^m \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

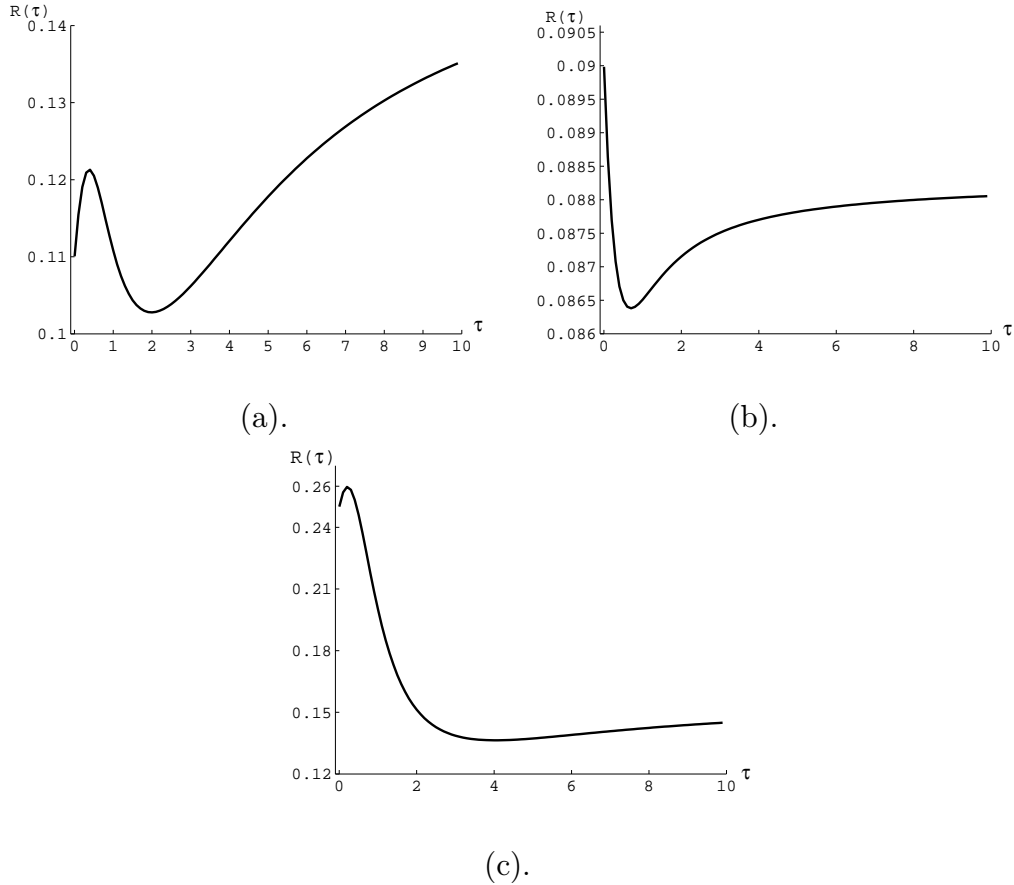
pričom sme definovali

$$A_i^j = A_i(\tau_j) \quad B_i^j = B_i(\tau_j) \quad R_t^j = R_t(\tau_j).$$

Ak je matica regulárna, vieme jednoznačne vyjadriť úrokové miery  $r_t^1, \dots, r_t^m$ . Využitím reálnych úrokových mier budeme vedieť vypočítať úrokové miery  $r_t^i$ , ak budeme poznať hodnoty parametrov  $\kappa_i, \lambda_i, \sigma_i, \theta_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Tie však nepoznáme, a preto získané vyjadrenia  $r_t^i$  využijeme na kalibráciu parametrov. Zaujímavou otázkou je aj rozumný počet zložiek, teda pre aké  $m$  úlohu riešiť. My sme riešili tento problém pre  $m = 2$ , čiže rozštiepenie short-rate miery na dve zložky. Analyzovali sme riešiteľnosť úlohy (4.5), teda aj regularitu matice, pričom sa zaoberáme aj kritériami kladnosti riešenia. Konkrétne spôsoby odhadovania parametrov aj so získanými výsledkami na základe reálnych úrokových mier už ukážeme v časti (4.3).

Jednou z výhod, ktoré prináša viacfaktorový model, je aj lepšia schopnosť kopírovať tvar výnosových kriviek. Ponúkajú viacero možných tvarov. To sa podarilo dosiahnuť aj v nami použitom dvojfaktorovom modeli. Tri nové tvary výnosových kriviek sú vykreslené na obrázku (4.1). Hodnoty parametrov  $\kappa_i, \lambda_i, \sigma_i$  a  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2$ , pre ktoré sme dosiahli tieto tvary kriviek, sú v tabuľke (4.1). Obsahuje aj hodnoty

okamžitých úrokových mier  $r_{on}^i$ , keďže je to short-rate model. Na obrázku teda vidíme, že dvojfaktorový model nám umožňuje okrem už skôr spomenutých tvarov dosiahnuť aj krivky s dvomi extrémami, a taktiež "humped" krivku s minimom, nielen s maximom. Pripomíname tvary výnosových kriviek na obrázku (3.3). Podobný výsledok sa dá dosiahnuť, keď použijeme prístup spriemerňovania cien dlhopisov.



Obr. 4.1: Graf zobrazuje 3 nové tvary výnosových kriviek, dosiahnuté v dvojfaktorovom modeli. Hodnoty parametrov, pre ktoré sme dosiahli tieto tvary kriviek, sú v tabuľke (4.1).

## 4.2 Kalibrácia parametrov term structure modelov

V posledných desaťročiach sa odborníci, zaoberajúci sa modelmi úrokových mier, venovali aj ich riešeniu, kalibrovaniu parametrov pri využívaní reálnych dát v konkrétnych modeloch. V literatúre môžeme nájsť mnoho článkov o tejto problematike, využívajúcich rozličné prístupy odhadovania. Kalibrácia je predmetom záujmu ekonometrov, štatistikov, finančných analytikov a aj numerikov - jednoducho teoretikov aj ľudí z praxe z oblasti financií.

Veľmi rozšírené sú štatistické metódy QML (*Quasi Maximum Likelihood*) a MCMC (*Monte Carlo Markov Chain*). Tieto metódy sú kombinované väčšinou s



(a).	$r_{on}^1 = 0.01$	$\kappa_1 = 2.3$	$\lambda_1 = -2.5$	$\sigma_1 = 0.4$	$\theta_1 = 0.01$
	$r_{on}^2 = 0.10$	$\kappa_2 = 0.6$	$\lambda_2 = -1.0$	$\sigma_2 = 2.3$	$\theta_2 = 0.10$
(b).	$r_{on}^1 = 0.01$	$\kappa_1 = 2.3$	$\lambda_1 = -1.5$	$\sigma_1 = 1.2$	$\theta_1 = 0.011$
	$r_{on}^2 = 0.08$	$\kappa_2 = 5.6$	$\lambda_2 = -0.1$	$\sigma_2 = 1.3$	$\theta_2 = 0.070$
(c).	$r_{on}^1 = 0.01$	$\kappa_1 = 2.3$	$\lambda_1 = -2.5$	$\sigma_1 = 0.4$	$\theta_1 = 0.01$
	$r_{on}^2 = 0.24$	$\kappa_2 = 0.6$	$\lambda_2 = -1.0$	$\sigma_2 = 2.3$	$\theta_2 = 0.10$

Tabuľka 4.1: Hodnoty parametrov dvojfaktorového modelu (4.2), pre ktoré sme dosiahli výnosové krivky na obrázku (4.1).

*Kalmanovým filtrom.* Častokrát nájdeme v článkoch ako prostriedok na odhadnutie parametrov metódu *maximum likelihood* alebo rozličné *GARCH* modely. Výskum v tejto oblasti sa líši nielen samotnými metódami a prístupmi, ale aj tým, na základe akého podkladového aktíva sa úrokové miery odhadujú. Môžu to byť aj menej bežné deriváty úrokov, ako sú napríklad *cap* a *floor*.

#### 4.2.1 Kalibrácia cez spriemernenú cenu dlhopisu

Ako sme už v tejto kapitole spomenuli, zložky  $r_t^i$ , ktoré rozkladajú pozorovateľnú úrokovú mieru  $r_t^{on}$ , považujeme za nepozorovateľné. Inšpirujúc sa prácou [23], kde bola nepozorovateľnou veličinou volatilita, ktorú popisoval CIR model, je aj tu možné zvoliť analogický prístup - vyrátať spriemernenú cenu dlhopisu, a na základe toho kalibrovať parametre modelu. Jednou z možností je využitie aj min-maxovej metódy.

Koncept spriemernenia cien dlhopisu je obsahom práce [10], v ktorej sa na kalibráciu využíva len prvý krok z min-maxovej metódy - minimalizácia sumy štvorcov rozdielov medzi reálnou a teoretickou výnosovou krivkou. Model je urobený pre prípad rozloženia na dve úrokové miery. Tu je veľmi dôležitou znalosťou poznanie hustoty procesu, ktorý je opísaný CIR rovnicou. Tá má tvar

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{pre } r \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(a)} b^a r^{a-1} e^{-br} & \text{pre } r > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Je to limitná hustota (podrobnejšie v [23]) náhodnej premennej z gamma rozdelenia  $\Gamma(a, b)$ , čo v prípade procesu  $r_t$  zodpovedá rozdeleniu s parametrami  $\Gamma(\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}, \frac{2\kappa}{\sigma^2})$ .

### 4.3 Riešenie konkrétnej úlohy a jej výsledky

V tejto časti už prinášame konkrétne riešenie nášho modelu spolu s výsledkami a ťažkosťami, ktoré pri riešení vznikali. Zaoberali sme sa teda problémom 2 zložiek  $r_t^1$  a  $r_t^2$ . Model popisujú nasledovné podmienky a predpoklady:

a). rozštiepenie short-rate miery  $r_t^{on}$  pre každý obchodovateľný deň  $t$ :

$$r_t^{on} = r_t^1 + r_t^2$$

b). obe zložky predstavujú proces opísaný CIR modelom:

$$dr_t^i = \kappa_i(\theta_i - r_t^i)dt + \sigma_i\sqrt{r_t^i}dW_t^i, \quad i = 1, 2$$

c). cena dlhopisu v čase  $t$  s dobou splatnosti  $\tau$  bude závisieť od  $r_t^1$  a  $r_t^2$ :

$$P = P(r_t^1, r_t^2, \tau) = A_1(\tau)A_2(\tau)e^{-B_1(\tau)r_t^1 - B_2(\tau)r_t^2}$$

d). z podmienky c). a vzťahu (4.3) pre spojitý úrok dostávame

$$R_t(\tau) = -\frac{\ln A_1(\tau)A_2(\tau) - B_1(\tau)r_t^1 - B_2(\tau)r_t^2}{\tau}$$

Podmienky a)., d). určujú sústavu rovníc, z ktorej po úprave dostaneme vyjadrenie neznámych  $r_t^1$  a  $r_t^2$ :

$$\begin{aligned} r_t^1 &= \frac{R_t(\tau)\tau + \ln A_1(\tau)A_2(\tau) - B_2(\tau)r_t^{on}}{B_1(\tau) - B_2(\tau)} \\ r_t^2 &= \frac{R_t(\tau)\tau + \ln A_1(\tau)A_2(\tau) - B_1(\tau)r_t^{on}}{B_2(\tau) - B_1(\tau)}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

pričom  $A_i(\tau)$  a  $B_i(\tau)$  sú definované podľa (3.15).

Parametre  $\kappa_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\sigma_i$  a  $\theta_i$ , vystupujúce vo funkciách  $A_i(\tau)$  a  $B_i(\tau)$ , odhadneme na základe reálnych dát. Tie budeme dosadzovať za  $r_t^{on}$  a  $R_t(\tau)$  vo vzťahoch (4.7). Naše pozorovania sme robili na základe úrokových mier EuroLIBOR, Bribor a Pribor. Vyriešenie tejto úlohy spôsobovalo značné problémy, museli sme hľadať vyhovujúcu metódu.

Skôr spomenutú min-maxovú metódu (odsek 3.1.2) tu nebolo vhodné použiť na výpočet, pretože je určená predovšetkým na odhadovanie celej krivky term structure. Zatiaľ čo my sme využívali len dve hodnoty z výnosovej krivky, aby sme tie využili na rozklad jednodňovej úrokovej miery  $r_t^{on}$  počas nejakého časového obdobia. Preto aj parametre budeme odhadovať na základe časového radu úrokových mier.

### 4.3.1 Maximalizácia funkcie vierohodnosti

Ako prvú metódu na výpočet sme zvolili maximalizáciu funkcie vierohodnosti (*maximum likelihood function*). Inšpirovali sme sa práve min-maxovou metódou. Analogicky, ako to bolo v článku [24], bude mať zlogaritmovaná funkcia vierohodnosti tvar:

$$\ln \mathcal{L}(\kappa_{1,2}, \lambda_{1,2}, \sigma_{1,2}, \theta_{1,2}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left( \ln v_{1,t}^2 + \frac{\varepsilon_{1,t}^2}{v_{1,t}^2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left( \ln v_{2,t}^2 + \frac{\varepsilon_{2,t}^2}{v_{2,t}^2} \right), \quad (4.8)$$

pričom

$$\begin{aligned} v_{i,t}^2 &= \frac{\sigma_i^2}{2\kappa_i} (1 - e^{-2\kappa_i}) r_{t-1}^i \\ \varepsilon_{i,t} &= r_t^i - e^{-\kappa_i} r_{t-1}^i - \theta_i (1 - e^{-\kappa_i}), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

#### Analýza modelu

Funkcia vierohodnosti závisí od ôsmich premenných, pretože parametre  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  vystupujú v  $r_t^i$  prostredníctvom funkcií  $A_i(\tau)$  a  $B_i(\tau)$ . Maximalizácia predstavuje v našom prípade ohraničenú optimalizáciu, pretože niektoré hodnoty parametrov nie sú prípustné. Hodnoty  $\kappa_i$  a  $\sigma_i$  sú kladné, rovnako  $\theta_i$ . Parameter  $\theta_i$  predstavujúci dlhodobú úrokovú mieru však zhora ohraničíme hodnotou 0.15 (teda 15%), aby to zodpovedalo skutočnosti, reálnym dátam. Parameter  $\lambda_i$  by mal byť podľa jeho ekonomického významu zväčša záporný, no môže nadobúdať aj kladné hodnoty, preto bude neohraničeným parametrom. Úloha predstavuje pomerne náročný, nelineárny optimalizačný problém, nájsť globálne maximum

$$\widehat{\Psi} = (\widehat{\kappa}_1, \widehat{\kappa}_2, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2) = \arg \max \ln \mathcal{L}$$

je zložitejšie. Zvolili sme prístup vygenerovania niekoľkých štartovacích hodnôt (najčastejšie sto), a v každom štartovacom bode sme riešili maximalizačnú úlohu, získajúc lokálne maximum.

Pri použití metódy maximalizácie funkcie vierohodnosti sme však neboli veľmi úspešní, vznikali rôzne problémy. Prvým bolo, že získané odhady časti parametrov boli na hranici (zakaždým to bolo niekoľko parametrov z osmice). Riešenie, ktoré závisí od ohraničení, a nie je teda voľným extrémom, nemôžeme považovať za správne. Druhým problémom bolo analyzovať lokálne maximum, získané z jednotlivých štartovacích hodnôt.

Spočiatku sa ukazovalo, že z prvých výsledkov nie je možné vysloviť žiadny záver. Po výpočtoch s rôznymi úrokovými mierami sme si uvedomili nezanedbateľný vplyv  $\tau$  na riešenie v spojení s ohraničeniami na parametre a jednou podmienkou: úrokové miery  $r_t^i$  vyjadrené rovnicami v (4.7) musia byť kladné.

Predpokladajme, že  $B_1(\tau) > B_2(\tau)$  (v prípade opačnej nerovnosti zostáva postup analogický). Potom musí byť aj výraz

$$R_t(\tau)\tau + \ln A_1(\tau)A_2(\tau) - B_2(\tau)r_t^{on} \quad (4.9)$$

kladný.  $A_i(\tau)$  je klesajúca funkcia od  $\tau$  pre ľubovoľné parametre  $\kappa_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $\theta_i$  spĺňajúce nami zadefinované ohraničenia, pričom  $A_i(0) = 1$ . Z toho teda vyplýva, že  $\ln A_1(\tau)A_2(\tau) < 0$ . Potom výraz  $R_t(\tau)\tau - B_2(\tau)r_t^{on}$  musí byť dostatočne veľký, aby

jeho hodnota znížená o logaritmus bola kladná (t.j. výraz (4.9) bol kladný). Lenže pre veľké hodnoty  $\tau$  bývajú hodnoty  $A_i(\tau)$  natoľko malé (odrazené od 1), že už samotný výraz  $R_t(\tau) - \ln A_1(\tau)A_2(\tau)$  je záporný. Na druhej strane pre malé hodnoty  $\tau$  aj  $B_i(\tau)$  musí nadobúdať malé hodnoty. Je to preto, že reálne úrokové miery na dlhšie obdobie  $R_t(\tau)$  nie sú niekoľkonásobne väčšie než jednodňové miery  $r_t^{on}$  - čiže aby  $R_t(\tau)\tau$  prevýšilo  $B_1(\tau)r_t^{on}$ . V prípade historických dát Briboru sme zaznamenali, že hodnoty  $R_t(\tau)$  boli na úrovni približne 1.5-násobku  $r_t^{on}$  (pre malé hodnoty), ale inak pomer medzi nimi býva menší. Platí to najmä v prípade úrokových mier Libor, Euribor, resp. Pribor.

Kladné riešenie úlohy (4.5) pre  $m = 2$  dosiahneme teda vtedy, ak súčasne hodnoty  $A_i(\tau)$  budú blízko k jednotke (ich logaritmy k nule) a  $B_2(\tau)$  bude malé (čím menšie než jedna, tým lepšie) - stále pre prípad  $B_1(\tau) > B_2(\tau)$ . To je však skôr protichodné, keďže medzi  $A(\tau)$  a  $B(\tau)$  je vzťah:

$$A(\tau) = \left( \frac{\eta e^{(\kappa+\lambda+\eta)\tau/2}}{e^{\eta\tau} - 1} B(\tau) \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}.$$

Z dosiahnutých výsledkov vyplýva, že problémom sa stávali práve vysoké hodnoty  $\tau$  - nastával problém spomenutý vyššie s malými hodnotami  $A_i(\tau)$ . Pri použití úrokových mier na krátke a stredne dlhé obdobie sa nám podmienku nezápornosti darilo splniť. Napriek tomu, že podmienka nezápornosti  $r_t^1$  a  $r_t^2$  bola splnená, výsledky, ktoré sme dosiahli z maximalizácie funkcie vierohodnosti, neboli uspokojivé.

Pre štartovacie hodnoty  $\Psi_0$  sme získavali rôzne odhady parametrov a príslušné funkčné hodnoty. Maximálnu hodnotu sme považovali za globálne maximum. Jedným, už spomínaným nedostatkom bolo, že odhady niektorých z osmice parametrov sa rovnali ohraňčeniu. Výsledkom maximalizácie teda nebol voľný extrém. Pochybnosti, či funkcia vierohodnosti je tá vhodná metóda a jej maximá sú tými správnymi štatistikami, určujúcimi kvalitu odhadu, vyvolali naše pozorovania a analyzovanie dosiahnutých výsledkov. Z nich vyplýva:

1. pre všetky použité typy úrokových mier aj pre rôzne  $\tau$  bol jeden z radov  $r_t^i$ , dosiahnutý pri maximálnej hodnote funkcie vierohodnosti, takmer triviálny (pre všetky alebo skoro všetky  $t$  takmer nulový, t.j. rádovo  $10^{-7}$  až  $10^{-9}$ ) a druhý rad takmer rovný radu jednodňových úrokových mier  $r_t^{on}$
2. pre konkrétnu úlohu sme dostali k rôznym štartovacím hodnotám parametrov  $\Psi_0$  aj odlišné odhady parametrov  $\hat{\Psi}$  a lokálne maximá ako hodnoty funkcie vierohodnosti. Vždy nastalo, že aj keď jedno získané lokálne maximum  $ML$  bolo niekoľkonásobne väčšie než vybrané iné lokálne maximum pre rozdielny štartovací bod, získané rady  $r_t^i$  boli rovnaké - jeden takmer nulový a druhý takmer totožný s  $r_t^{on}$
3. z výsledkov vyplýva, akoby sa jeden z radov  $r_t^i$  stával dominantný
4. výhradou je aj to, že funkcia vierohodnosti nie je škálovaná; nevieme posúdiť na základe jej maxima kvalitu odhadu

## Výsledky

Naše pozorovania ukážeme na niekoľkých dosiahnutých výsledkoch, doplnených o vykreslené časové rady  $r_1^t$  a  $r_2^t$ , rozštiepujúce  $r_t^{on}$ , so stručným popisom. Na výpočty

<i>EuroLIBOR 2004</i> $\tau = 1$ mesiac						
obrázok	(a).	(b).	(c).	(d).	(e).	(f).
$ML$	2160.36	1793.39	1675.02	1663.27	1763.49	1788.53
$ML_1$	816.17	1007.62	904.91	768.45	971.35	771.36
$ML_2$	1344.19	786.17	771.41	894.82	792.14	1017.17
$\kappa_1 \in \langle 0.01, 50 \rangle$	1.58	0.763	19.445	33.973	36.645	0.01
$\kappa_2 \in \langle 0.01, 50 \rangle$	0.01	50	50	18.514	37.116	0.0548
$\lambda_1 \in \langle 10^{-3}, 10^3 \rangle$	380.32	-13.94	-15.284	521.15	-40.282	375.838
$\lambda_2 \in \langle 10^{-3}, 10^3 \rangle$	-173.40	1.172	22.828	-14.027	75.496	-398.514
$\sigma_1 \in \langle 0.01, 3 \rangle$	0.01	0.01	0.0276	0.2048	0.0238	0.01
$\sigma_2 \in \langle 0.01, 3 \rangle$	0.0314	0.0667	0.0928	0.0283	0.0596	1.192
$\theta_1 \in \langle 0.001, 0.2 \rangle$	0.0206	0.001	0.00683	0.00607	0.0051	0.0016
$\theta_2 \in \langle 0.001, 0.2 \rangle$	0.001	0.0194	0.0137	0.0134	0.0153	0.001

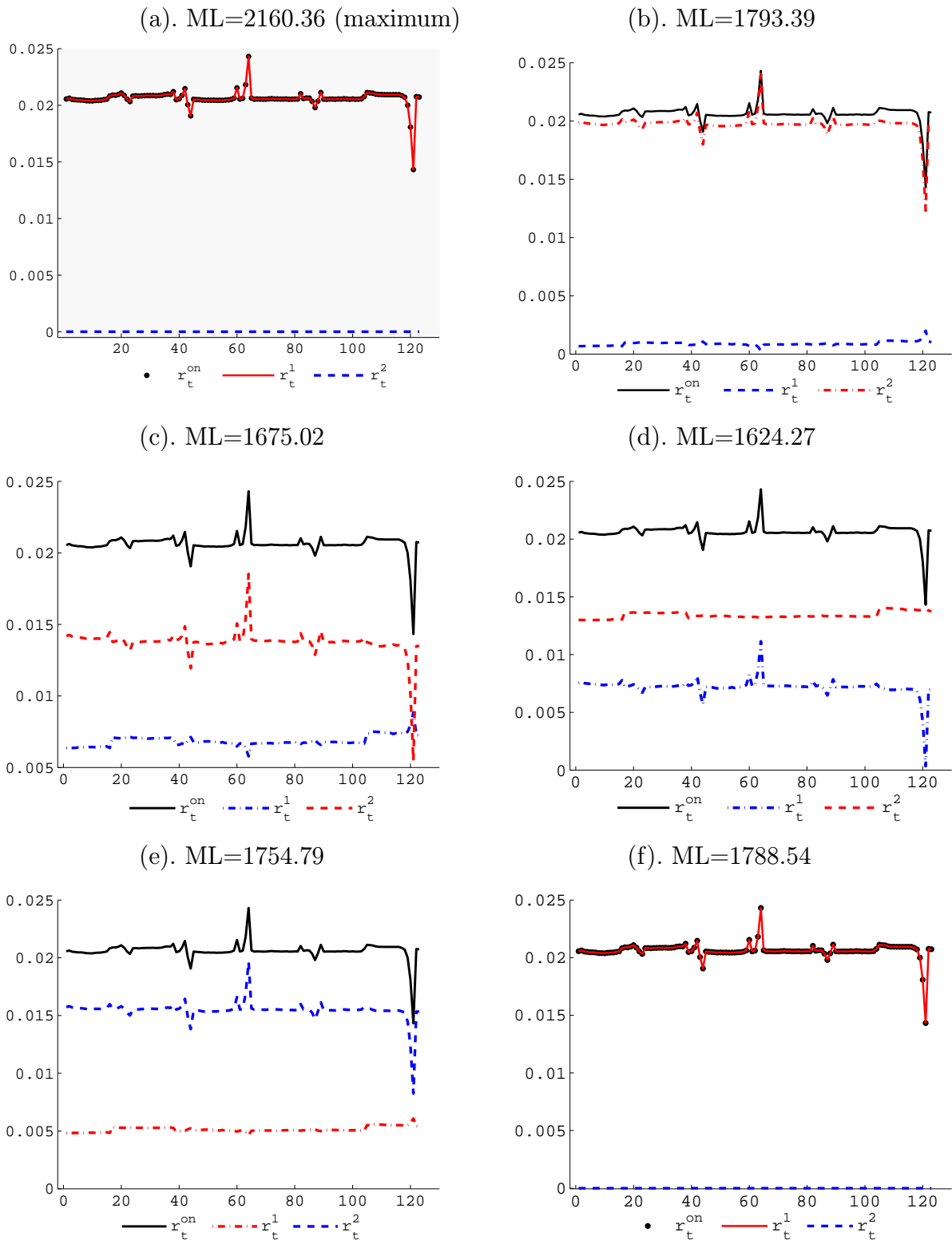
Tabuľka 4.2: Tabuľka s hodnotami parametrov, pre ktoré sú vykreslené úrokové miery na obrázku (4.2).

bol použitý matematický softvér MATLAB.

V tabuľke (4.2) sú odhady parametrov, ktoré sme získali z kalibrácie prostredníctvom maximalizácie funkcie vierohodnosti. Uviedli sme tam aj ohraničenia parametrov, pri ktorých sme maximalizovali funkciu vierohodnosti. Na odhadovanie sme využili úrokové miery EuroLIBOR z obdobia 7.4.-25.9.2004, čo zodpovedá 123 dátam. Prezентujeme tu výsledky získané pre úrokové miery s dobou platnosti  $\tau = 1$  mesiac.

V prvom stĺpci sú výsledky pre globálne maximum, ktoré však nie je voľné. Vidíme, že až 3 odhady parametrov sú na hranici. Jeden z radov  $r_t^i$  je takmer nulový – tento výsledok sa opakoval vo všetkých prípadoch globálnych maxim. V stĺpcoch (b)–(e) sú výsledky pre prípad, keď žiadny z radov  $r_t^i$  nie je nulový (viď obrázok). Upozorňujeme však na obrázok (f), v ktorom jeden z radov je triviálny pri lokálnom maxime  $ML = 1788$ , čo je trochu v kontraste s obrázkom (e), keď pre o niečo nižšiu hodnotu lokálneho maxima  $ML = 1763$  sú rady  $r_t^i$  nenulové.

Z týchto aj mnohých iných výsledkov, keď sme používali ako reálne dáta úrokové miery EuroLIBOR, Bribor aj Pribor, s rôznymi časmi  $\tau$  do splatnosti, je ťažké urobiť akýkoľvek záver. Len na základe toho, že pre maximálne hodnoty funkcie vierohodnosti vychádza vždy jeden z radov  $r_t^i$  takmer nulový, si netrúfame povedať, že rozštiepovanie jednodňových úrokových mier na zložky je neopodstatnené. Nemožno prehlásiť, že najlepší odhad a výsledok dostávame práve v maxime, pretože rovnaký výsledok z pohľadu zložiek  $r_t^i$  vieme dostať aj pre iné hodnoty funkcie vierohodnosti, aj keď pri iných odhadoch parametrov. Príčinu týchto výsledkov však nevieme zdôvodniť.



Obr. 4.2: Rozštiepené rady  $r_t^1$  a  $r_t^2$  pomocou funkcie vierohodnosti pre dáta Euro-LIBOR 2004 a  $\tau = 1$  mesiac.

### 4.3.2 Kolmogorov – Smirnov test

Ako druhú metódu na odhadovanie parametrov a rozštiepenie jednodňových úrokových mier  $r_t^{on}$  sme zvolili jednovýberový Kolmogorov–Smirnov test dobrej zhody. Jeho výhodou je práve to, že hodnoty *KS testu*, teda *KS-štatistika* je škálovaná. Hodnoty sú z intervalu  $(0, 1)$ . Kolmogorov–Smirnov test (*KS test*) sa používa na zisťovanie, či empirické rozdelenie výberu sa líši od predpokladaného, teoretického rozdelenia. KS test na to používa rozdiel medzi empirickou a teoretickou kumulatívnu distribučnou funkciou (skrátene *CDF*).

Empirickú distribučnú funkciu  $F_n(x)$  pre  $n$  dát  $r_t$  definujeme nasledovne:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \chi(r_t \leq x),$$

pričom  $\chi(\cdot)$  je charakteristická funkcia, čiže

$$\chi(r_t \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } r_t \leq x \\ 0 & \text{ak } r_t > x. \end{cases}$$

Funkcia  $F_n(x)$  teda predstavuje relatívnu početnosť.

KS-štatistika je potom definovaná vzťahom

$$\mathcal{KS} = \max |F_n(x) - G(x)|,$$

pričom  $G(x)$  je teoretická CDF. Ako už bolo spomenuté, náhodná premenná, ktorej vývoj popisuje CIR model, má limitnú hustotu  $\Gamma$ -rozdelenia. Keďže sme predpokladali, že vývoj úrokových mier zodpovedá CIR modelu, tak aj v našom prípade budeme brať za  $G(x)$  kumulatívnu distribučnú funkciu  $\Gamma$ -rozdelenia. Tá bude mať v našom prípade tvar

$$G(x|a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1} e^{-bx} dt, \text{ pričom } a = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}, \quad b = \frac{2\kappa}{\sigma^2}.$$

Našu úlohu sme definovali nasledovne:

Nech

$$F_n^i(x) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \chi(r_t^i \leq x), \quad i = 1, 2 \quad (4.10)$$

sú empirické CDF úrokových mier  $r_t^i$ , ktoré sú vyjadrené vzťahmi (4.7). K nim príslušné teoretické CDF sú

$$G_i(x|a_i, b_i) = \frac{b_i^{a_i}}{\Gamma(a_i)} \int_0^x t^{a_i-1} e^{-b_i r} dt, \text{ kde } a_i = \frac{2\kappa_i\theta_i}{\sigma_i^2}, \quad b_i = \frac{2\kappa_i}{\sigma_i^2}. \quad (4.11)$$

Parametre, vedúce k rozštiepeniu úrokových mier, budeme kalibrovať cez KS-štatistiky. Od týchto parametrov nebude závisieť len výberová CDF  $F_n^i(x)$ , ale aj teoretická CDF  $G_i(x)$ , t.j. nebudeme predpisovať jej tvar a priebeh, ale necháme ju vyvíjať sa spoločne s výberovou CDF. Cieľom je, aby sa obe funkcie k sebe približovali.

Riešime teda nasledujúcu minimalizačnú úlohu (opäť použijeme označenie  $\Psi = (\kappa_{1,2}, \lambda_{1,2}, \sigma_{1,2}, \theta_{1,2})$ ):

$$\begin{aligned} \min_{\Psi} \mathcal{KS}(\Psi) &= \min_{\Psi} \{ \mathcal{KS}_1(\Psi) + \mathcal{KS}_2(\Psi) \} = \\ &= \min_{\Psi} \left\{ \max_x |F_n^1(\Psi) - G_1(x, \Psi_1)| + \max_x |F_n^2(\Psi) - G_2(x, \Psi_2)| \right\}, \\ &\text{kde } \Psi_i = (\kappa_i, \sigma_i, \theta_i). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Podotýkame, že  $\mathcal{KS}_i(\Psi)$  je skutočne funkciou všetkých ôsmich parametrov, keďže je kumulatívnu distribučnou funkciou  $r_t^i$ , avšak  $G_i(x, \Psi_i)$  závisí len od **troch** parametrov (nie je funkciou  $\lambda_i$ ) a hodnôt  $x$ , v ktorých funkciu vyčíslujeme.

### Analýza metódy a výsledky

Pre nezápornosť úrokových mier  $R_t^i$  platia tie isté úvahy, ako sme opísali pri použití metódy maximalizácie funkcie vierohodnosti v časti (4.3.1). Nebudeme ich už teda analyzovať. Ako najväčší problém tejto metódy sa ukazuje jej optimalizácia.

Rovnako ako v prípade maximalizácie funkcie vierohodnosti sa s problémami nadobúdalo globálne maximum, tak aj pri použití KS-testu ťažko získavame minimálnu hodnotu funkcie  $\mathcal{KS}(\Psi)$ . Opäť sme teda vygenerovali sto štartovacích bodov, v ktorých sme túto funkciu minimalizovali. Ukázalo sa však, že náročné a zdĺhavé je dosiahnuť vôbec lokálne minimum. Uvedomili sme si to vtedy, keď vyrátané minimum, dosiahnuté pri nejakom štartovacom bode, sme použili opätovne za nový štartovací bod, a podarilo sa ešte znižovať hodnotu funkcie  $\mathcal{KS}(\Psi)$ . Postupovali sme podľa schémy

1. štartovací bod  $\Psi_0 = (\kappa_{1,2}, \lambda_{1,2}, \sigma_{1,2}, \theta_{1,2})$
2. minimalizácia funkcie  $\mathcal{KS}(\Psi)$  (príkaz v MATLABE `fmincon`)
3. výstup  $\hat{\Psi} = \arg \min_{\Psi} \mathcal{KS}(\Psi)$
4.  $\Psi_0 := \hat{\Psi}$
5. krok 2.

Tento výpočtový cyklus skončil vtedy, keď sa už nemenili buď funkčná hodnota  $\mathcal{KS}(\Psi)$ , alebo hodnoty parametrov  $\Psi$ . Takto sa nám častokrát darilo znížiť hodnotu funkcie  $\mathcal{KS}(\Psi)$ . Tu je vhodné spomenúť, že na úlohe takéhoto typu by bolo možné vyskúšať a testovať moderné optimalizačné algoritmy stochastického charakteru, ako sú napríklad algoritmus *simulovaného žihania* alebo *evolučné* (genetické) algoritmy, prípadne ďalšie. Tie by mohli mať lepšie výpočtové schopnosti a umožnili by rýchlejšie a presnejšie rátanie tejto úlohy.

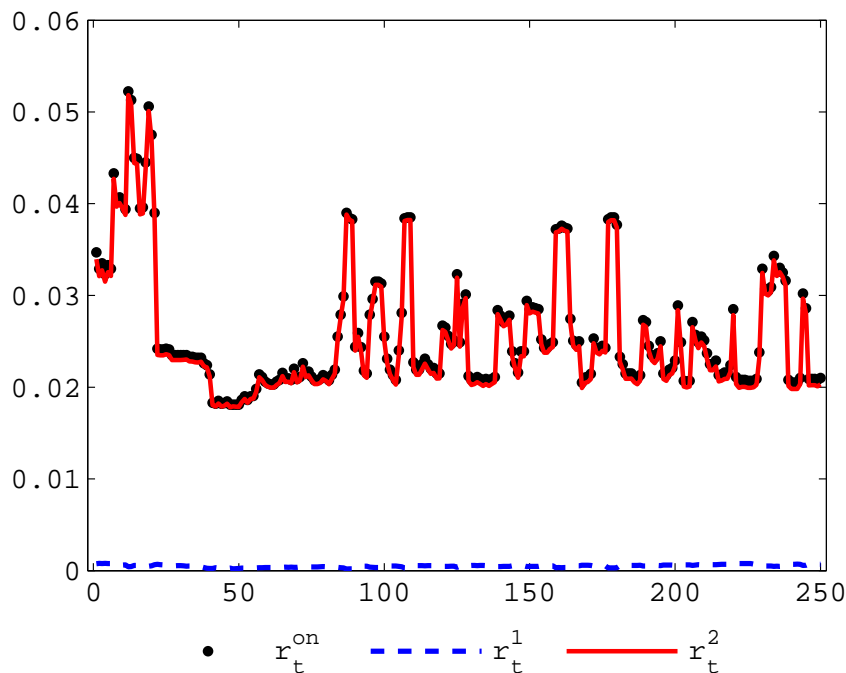
Použitím Kolmogorov–Smirnov testu sme už získavali pre niektoré úlohy lepšie výsledky ako v prípade funkcie vierohodnosti. Výhodou tohto prístupu je schopnosť posúdiť kvalitu odhadu na základe hodnôt KS–štatistiky. Umožňuje nám to tá skutočnosť, že je škálovaná, rozsah sa pohybuje medzi 0 a 1, a čím má menšiu hodnotu KS–štatistika, tým je väčšia zhoda s teoretickým rozdelením.



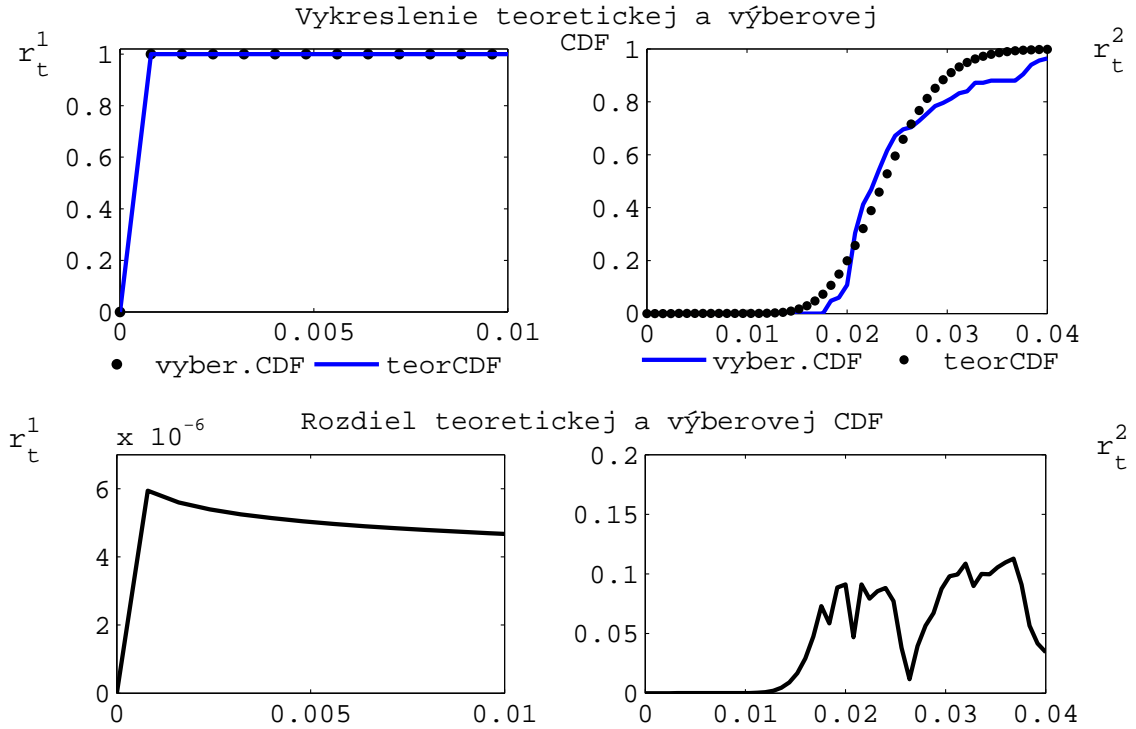
Na naše výpočty sme opäť používali úrokové miery EuroLIBOR, Bribor a Pribor, s rôznymi dobami splatnosti  $\tau$ . Zväčša pre vyššie hodnoty  $\tau$  (viac než 9 mesiacov, a najmä pre 1 rok) sa nedarilo splniť podmienku nezápornosti zložiek  $r_t^i$ . Pre niektoré úrokové miery, najmä Pribor, však nastávalo opäť to, že jeden z radov bol takmer nulový (rádovo  $10^{-3}$  až  $10^{-5}$ ) a druhý bol dominantný, teda takmer zhodný s radom jednodňových úrokových mier  $r_t^{on}$ . Naše ďalšie pozorovania a postrehy sú

- malá citlivosť na parameter  $\kappa_i$ , keď aj jej veľká zmena nespôsobila príliš veľkú výchylku príslušnej KS-štatistiky
- naopak, veľká citlivosť na parametre  $\lambda_i$  a  $\sigma_i$  – aj malé zmeny viedli k značným odchýlkam KS-štatistiky, dokonca sa tým častokrát porušila podmienka nezápornosti úrokových mier  $r_t^i$
- pri minimalizácii podľa skôr opísanej schémy sa spočiatku minimálne, resp. vôbec nemenila hodnota parametrov  $\lambda_i$ , ktoré tak zväčša ostávali veľmi blízke štartovacím hodnotám. Predovšetkým až v posledných opakovaniach schémy sa menili  $\lambda_i$ . Toto mohlo byť spôsobené možno tým, že teoretická CDF nie je od  $\lambda_i$  závislá.

Uvedieme zopár konkrétnych výsledkov. Vykresľujeme v nich časové rady zložiek  $r_t^i$  jednodňovej úrokovovej miery  $r_t^{on}$ . Prípájame k nim grafy porovnávajúce tvary teoretickej a empirickej kumulatívnej distribučnej funkcie, a rozdiel medzi nimi.



Obr. 4.3: Časové rady úrokových mier Bribor 2005 pre  $\tau = 3$  mesiace. Hodnota funkcie  $\mathcal{KS}(\Psi) = 0.0912$ .



Obr. 4.4: Vykreslenie kumulatívnych distribučných funkcií úrokových mier Bribor 2005 pre  $\tau = 3$  mesiace.

Rozloženie úrokovej miery  $r_t^{on}$  na zložky  $r_t^1$  a  $r_t^2$  na obrázkoch (4.3) a (4.4) sme dostali pri týchto nakalibrovaných parametroch  $\hat{\Psi}$ :

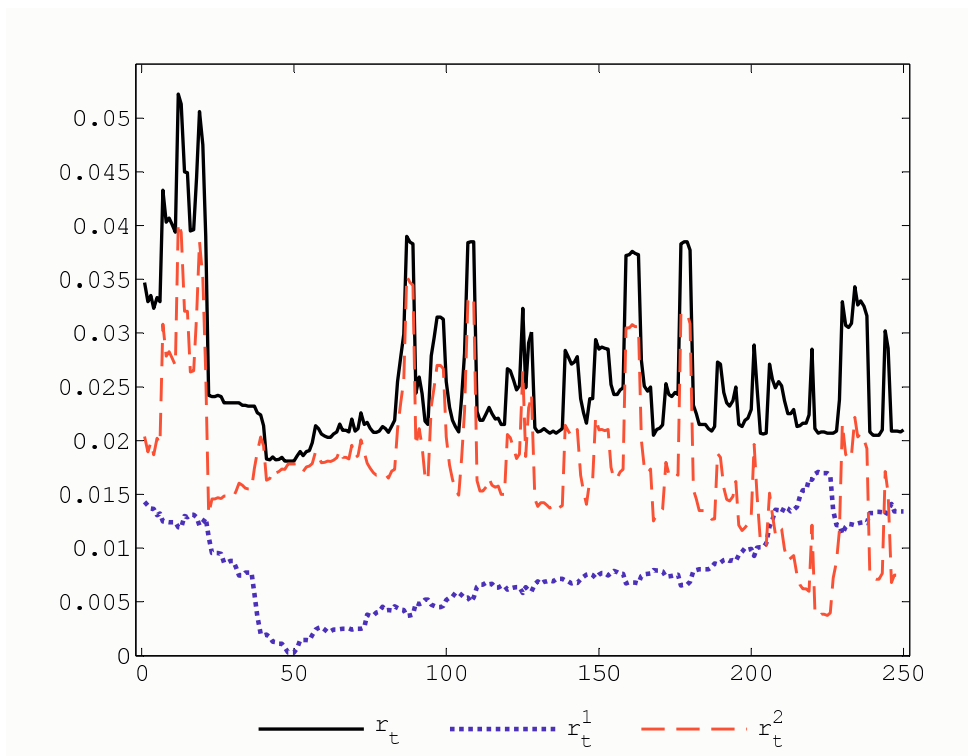
$$\begin{array}{cccc} \kappa_1 = 0.01 & \lambda_1 = -21.072 & \sigma_1 = 1.997 & \theta_1 = 0.0001 \\ \kappa_2 = 7.208 & \lambda_2 = 4.8703 & \sigma_2 = 0.1137 & \theta_2 = 0.0239 \end{array}$$

Za nedostatok týchto výsledkov považujeme opäť to, že parametre  $\kappa_1$  a  $\theta_1$  sa rovnajú priamo ich ohraňovaniu. Preto tento výsledok nepovažujeme za vyhovujúci. Lepší výsledok sa nám podarilo získať z úrokových mier síce taktiež Bribor 2005, avšak pre  $\tau = 9$  mesiacov. Dosiahnuté minimum funkcie  $\mathcal{KS}(\Psi)$  má hodnotu 0.1275, ktoré sa už nepodarilo vylepšiť. Žiadny z odhadnutých parametrov sa nerovná ohraňovaniu. Ich hodnoty sú:

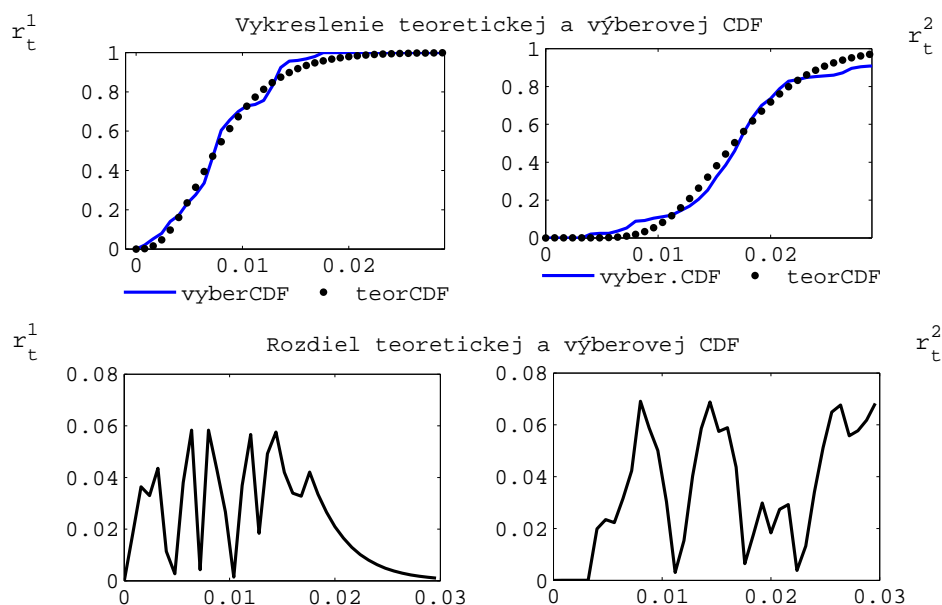
$$\begin{array}{cccc} \kappa_1 = 0.9422 & \lambda_1 = -0.5938 & \sigma_1 = 0.0689 & \theta_1 = 0.00832 \\ \kappa_2 = 23.172 & \lambda_2 = -0.5755 & \sigma_2 = 0.2801 & \theta_2 = 0.0173 \end{array}$$

Rozloženie časového radu  $r_t^{on}$  na jeho zložky  $r_t^1$  a  $r_t^2$  je vykreslené na obrázku (4.5). K tomu pridávame opäť aj porovnanie kumulatívnych distribučných funkcií oboch zložiek.

Za predpokladu, že hodnota funkcie  $\mathcal{KS}(\Psi) = 0.1275$  je globálnym minimom, resp. blízko neho, tak sa nám podarilo dosiahnuť rozloženie jednodňovej úrokovej miery  $r_t^{on}$  na dve úrokové miery  $r_t^1$  a  $r_t^2$ , ktoré sú jej súčtom. Jednou z motivácií, prečo sa zaoberať takýmto rozložením úrokovej miery, bola snaha odhaliť špekulatívnu a nešpekulatívnu zložku. Na posúdenie, či je to tak aj pri tomto výsledku, by



Obr. 4.5: Časové rady úrokových mier Bribor 2005 pre  $\tau = 9$  mesiace. Hodnota funkcie  $\mathcal{KS}(\Psi) = 0.1275$ .



Obr. 4.6: Vykreslenie kumulatívnych distribučných funkcií úrokových mier Bribor 2005 pre  $\tau = 9$  mesiace.

bolo možno vhodné poznať ďalšie informácie o niektorých veličinách ovplyvňujúcich finančné trhy. Pre niektoré ďalšie úrokové miery sa nám podarilo dosiahnuť taktiež rozštiepenie na netriviálne zložky. Ich výsledky sme zahrnuli do **Prílohy A**.

Ako jednu z možností skúmania a možno vylepšenia výsledkov Kolmogorov–Smirnov testu sme navrhli funkciu  $\mathcal{KS}(\Psi)$  v tvare

$$\mathcal{KS}(\Psi) = \alpha \mathcal{KS}_1(\Psi) + (1 - \alpha) \mathcal{KS}_2(\Psi), \quad \alpha \in \langle 0, 1 \rangle,$$

čiže ako lineárnu kombináciu KS–štatistík jednotlivých zložiek  $r_t^i$ . Parameter  $\alpha$  sa stal ďalšou premennou pri optimalizácii. Výsledkom však bolo, že parameter  $\alpha$  nadobúdala hodnoty 0 alebo 1, čo zhoršilo optimalizáciu, pretože to nevedlo súčasne k znižovaniu oboch KS–štatistík, t.j. jedna hodnota KS–štatistiky bola malá, druhá však veľká.

# Záver

Obsahom tejto práce boli modely úrokových mier. Najprv sme spravili krátky, historický prehľad o jedno- a dvojfaktorových modeloch krátkodobej úrokovej miery. Neskôr sme odvodili vzťahy na výpočet cien dlhopisov, ktoré závisia od konkrétneho modelu úrokovej miery. Vykreslili sme krivky časovej štruktúry úrokových mier. Porovnaním ich tvarov pre prípady jedno- a dvojfaktorového modelu s reálnymi tvarmi vývojových kriviek sme zdôraznili a poukázali na výhodu dvojfaktorových modelov, ktorá spočíva v ich lepšej schopnosti zachytiť reálne tvary výnosových kriviek.

Ďalej sme sa už zaoberali navrhnutým modelom. Predstavuje metodologický prístup rozštiepenia časového radu reálnych úrokových mier na zložky. Konkrétne sme sa venovali rozloženiu jednodňovej úrokovej miery na dve zložky, pričom sme na to využívali ako ďalšiu informáciu ešte aj úrokovú mieru s dlhšou splatnosťou  $\tau$ . Urobili sme jednoduchú analýzu vlastností a riešiteľnosti tohoto modelu. Priblížili sme dve metódy kalibrácie parametrov, na základe ktorých odhadu parametrov náchádzame rozštiepenie úrokovej miery. Jednou metódou bol koncept maximalizácie funkcie vierohodnosti, ktorý však neposkytoval dobré výsledky. Druhou metódou je Kolmogorov–Smirnov test dobrej zhody, ktorý bol výpočtovo náročnejší. Na základe dosiahnutých výsledkov sa domnievame, že jeho použitie môže byť vhodnejšie, vedúce k rozštiepeniu úroku na zložky.

Preto jedna z otázok a úloh, ktoré sa núkajú pri skúmaní tohto problému, je aj použitie efektívneho algoritmu optimalizácie na výpočet týchto úloh. Veríme, že tento model môže viesť k zmysluplným a uspokojivým výsledkom, či už pri použití tých istých metód, ako sme využili my, rozšírených možno o nejaké ďalšie vzťahy, účelovú funkciu, resp. premenné, alebo pri použití nejakých ďalších prístupov a konceptov. Zaujímavé môže byť aj porovnávanie v prípade použitia procesov, popisujúcich vývoj úrokových mier, iných než nami použitý proces CIR modelu.

# Literatúra

- [1] Anderson, T. G., Lund, J.: *The Short Rate Diffusion Revisited: A Tour Guided by the Efficient Method of Moments*. Working paper, J. L. Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, 1996
- [2] Antol, M.: *Analýza jedno a dvojfaktorových modelov derivátov úrokových mier*. Diplomová práca, 2006  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/>
- [3] Bergstrom, A.R.: *Continuous Time Stochastic Models and Issues of Aggregation Over Time*. V Z.Griliches, M.D.Intriligator: Handbook of Econometrics, Vol.2, Elsevier Science Amsterdam, 1984
- [4] Black, F., Derman, E., Toy, W.: *A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options*. Financial Analyst Journal, Vol.46(1) (1990), 33-39  
[http://www.ederman.com/new/docs/faj-one\\_factor\\_model.pdf](http://www.ederman.com/new/docs/faj-one_factor_model.pdf)
- [5] Brennan, M.J., Schwartz, E.S.: *An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.17(3) (1992), 301-329  
<http://www.jstor.org>
- [6] Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A., Sanders, A.B.: *The Volatility of Short-Term Interest Rates: An Empirical Comparison of Alternative Models of the Term Structure of Interest Rates*. Journal of Finance, Vol.47(3) (1992), 1209-1227  
<http://www.cob.ohio-state.edu/fin/faculty/karolyi/papers/CKLS.pdf>
- [7] Chen, R.-R., Scott, L.: *Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Tests From a Kalman Filter Model*. 1993  
<http://www.rci.rutgers.edu/~rchen/Kalman2002.pdf>
- [8] Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*. Econometrica, Vol.53 (1985), 385-407
- [9] Csajková, A.: *Kalibrácia modelov vývoja úrokovej miery*. Diplomová práca, 2003  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/>

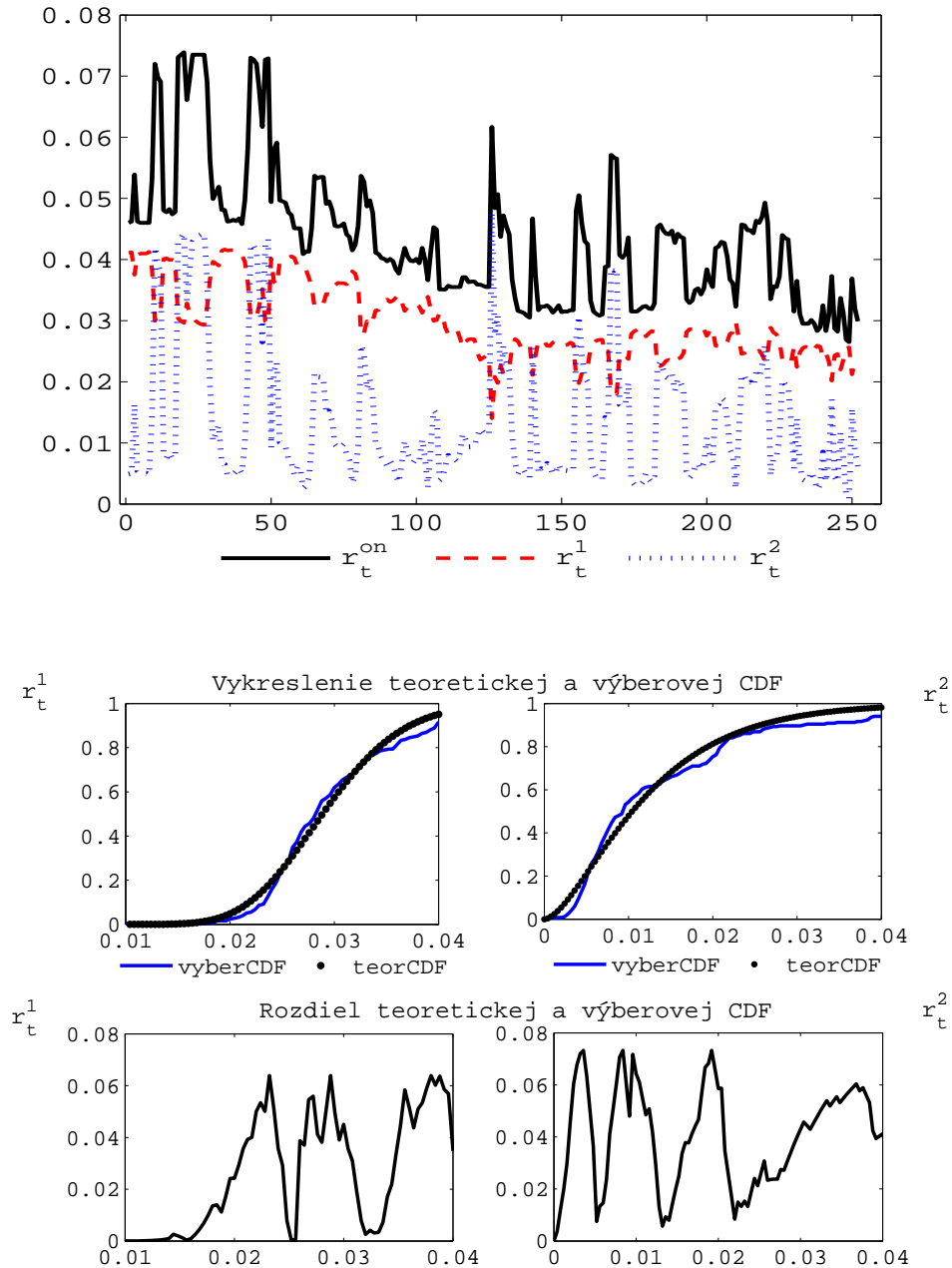
- [10] Čintalová, Z.: *Spriemerňovanie časových štruktúr výnosových kriviek a ich kalibrácia*. Diplomová práca, 2007  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/>
- [11] Deelstra, G.: *Long-Term Returns in Stochastic Interest Rate Models: Applications*. Astin Bulletin, Vol.30(1) (2000), 123-140  
<http://www.casact.org/library/astin/vol30no1/123.pdf>
- [12] Fong, H. G., Vasicek, O. A.: *Fixed-Income Volatility Management*. Journal of Portfolio Management (1991), 41-42
- [13] Heath, D., Jarrow, R., Morton, A.: *Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology*. Econometrica, Vol.60(1) (1992), 77-105  
<http://www.jstor.org>
- [14] Ho, T.S.Y, Lee, S.-B.: *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*. Journal of Finance, Vol.41(5) (1986), 1011-1029  
<http://www.jstor.org>
- [15] Hull, John: *Options, Futures, and Other Derivative Securities*. Prentice Hall, 5th edition, 2002
- [16] Hull, J., White, A.: *Pricing Interest-Rate-Derivative Securities*. Review of Financial Studies, Vol.3(4) (1990), 573-592  
<http://www.jstor.org>
- [17] <http://www.investopedia.com>
- [18] Kwok, Y.K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer-Verlag, 1998
- [19] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky I, II*. Bratia Sabovci, 2005
- [20] <http://www.nbs.sk/finmark/refbank/algorithm.htm>
- [21] Schaefer, S.M., Schwartz E.S: *A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.19(4) (1984), 413-424  
<http://www.jstor.org>
- [22] Schlögl, E., Sommer, D.: *Factor Models and the Shape of the Term Structure*. Working Paper, 1997  
<ftp://ftp.wipol.uni-bonn.de/pub/RePEc/bon/bonsfb/bonsfb395.pdf>
- [23] Stehlíková, B.: *Analýza dvojfaktorového modelu vývoja úrokovej miery so stochastickou volatilitou*. Diplomová práca, 2004  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/>
- [24] Ševčovič, D., Urbánová-Csajková, A.: *On a Two-Phase Minmax Method for Parameter Estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross Interest Rate Model*. Central European Journal of Operational Research (CEJOR), Vol.13 (2005), 169-188  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/papers/cl26.pdf>

- [25] Vajdička, V.: *Analýza modelov úrokovej miery s využitím explicitných riešení*. Diplomová práca, 2005  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/>
- [26] Vasicek, O.A.: *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*. Journal of Financial Economics, Vol.5 (1977), 177-188
- [27] Vavrovičová, Z.: *Equilibrium and No-arbitrage Models of the Term Structure*. Diplomová práca, 1999  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/>



# Príloha A

Bribor 2004,  $\tau = 1$  mesiac



Obr. 4.7: Vykreslenie časových radov úrokových mier a kumulatívnych distribučných funkcií.

$$\mathcal{KS}(\widehat{\Psi}) = 0.1372$$

$$\kappa_1 = 2.3786$$

$$\lambda_1 = -7.8421$$

$$\sigma_1 = 0.077124$$

$$\theta_1 = 0.02928$$

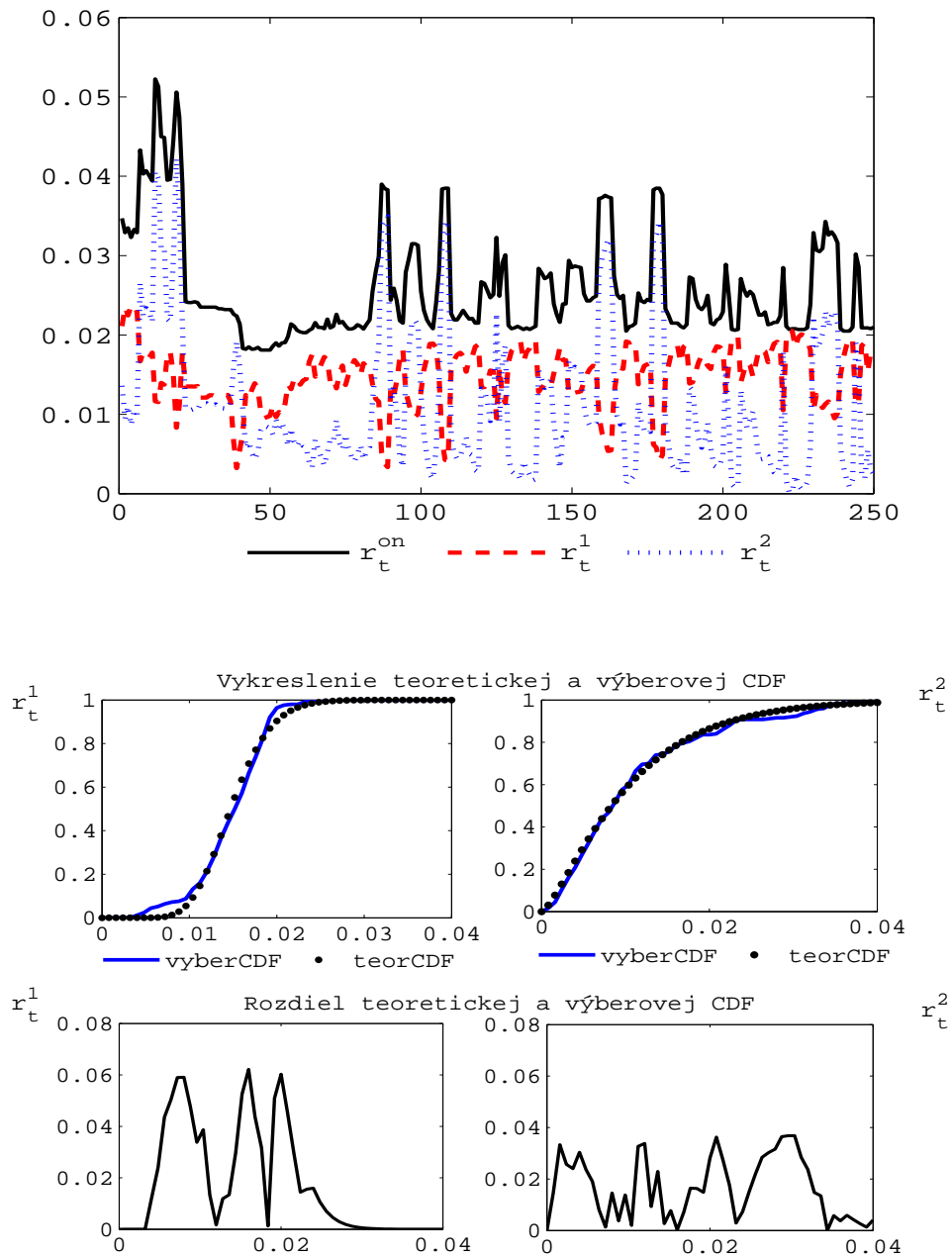
$$\kappa_2 = 0.8975$$

$$\lambda_2 = 27$$

$$\sigma_2 = 0.11434$$

$$\theta_2 = 0.01276$$

Bribor 2005,  $\tau = 2$  týždne

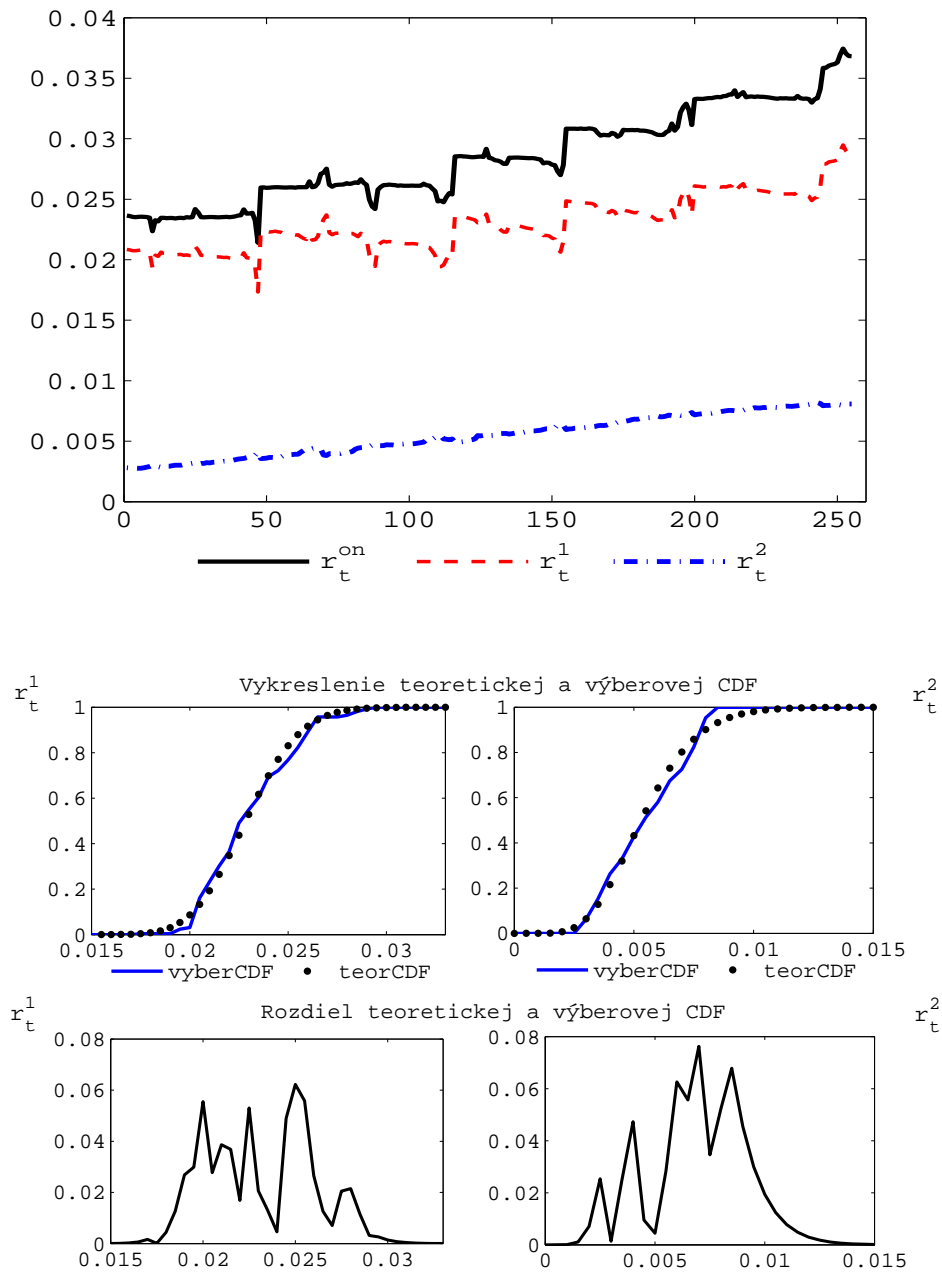


Obr. 4.8: Vykreslenie časových radov úrokových mier a kumulatívnych distribučných funkcií.

$$\mathcal{KS}(\hat{\Psi}) = 0.099$$

$$\begin{array}{llll} \kappa_1 = 0.1004 & \lambda_1 = -10 & \sigma_1 = 0.01352 & \theta_1 = 0.01501 \\ \kappa_2 = 28.199 & \lambda_2 = 4.723 & \sigma_2 = 0.6513 & \theta_2 = 0.01071 \end{array}$$

EuroLIBOR 2006,  $\tau = 4$  mesiace

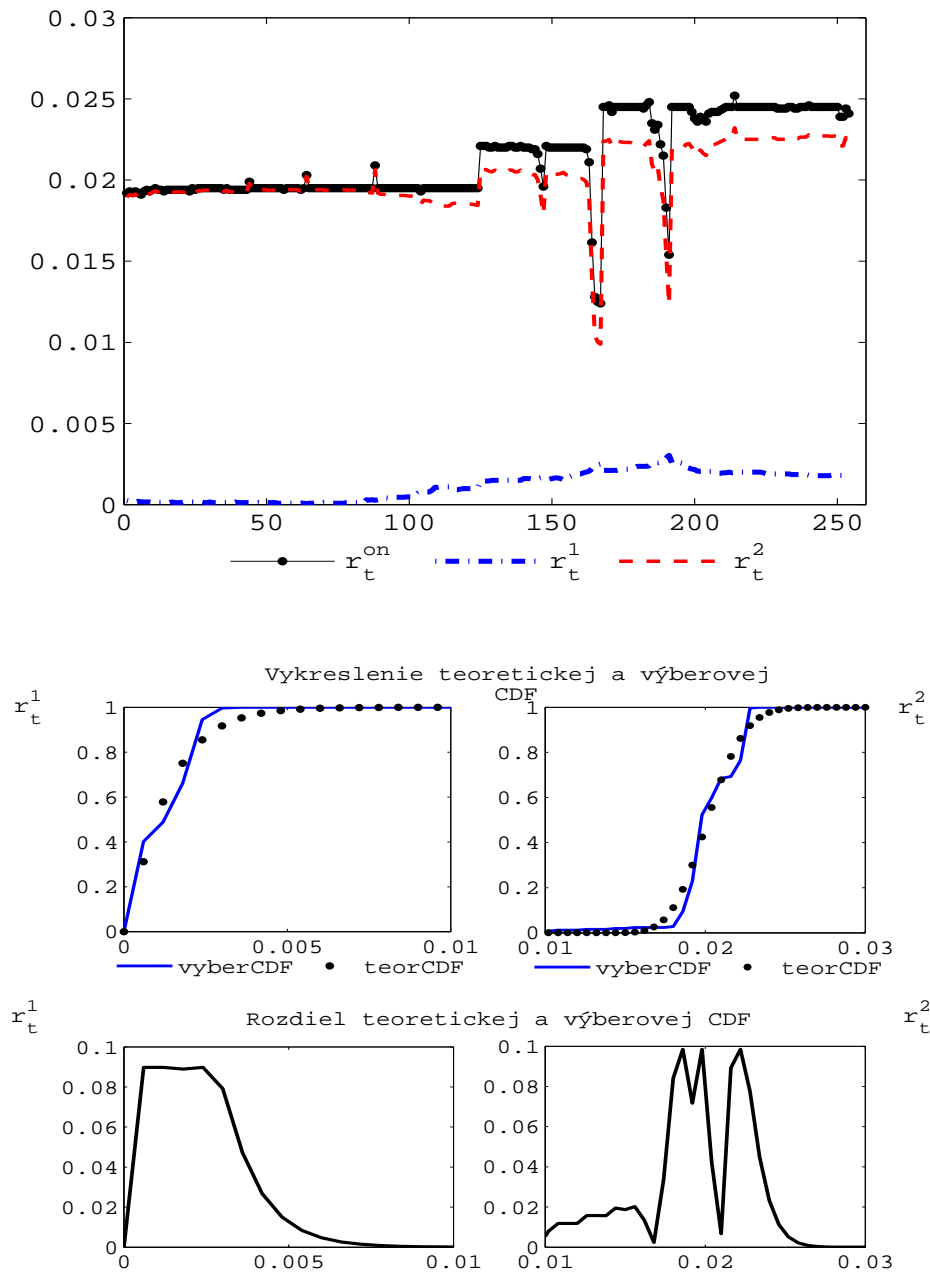


Obr. 4.9: Vykreslenie časových radov úrokových mier a kumulatívnych distribučných funkcií.

$$\mathcal{KS}(\hat{\Psi}) = 0.109$$

$$\begin{array}{cccc} \kappa_1 = 7.622 & \lambda_1 = 7.2515 & \sigma_1 = 0.05645 & \theta_1 = 0.0229 \\ \kappa_2 = 4.355 & \lambda_2 = -8.1207 & \sigma_2 = 0.07389 & \theta_2 = 0.00551 \end{array}$$

Pribor 2004,  $\tau = 3$  mesiace



Obr. 4.10: Vykreslenie časových radov úrokových mier a kumulatívnych distribučných funkcií.

$$\mathcal{KS}(\hat{\Psi}) = 0.1882$$

$$\kappa_1 = 0.4193 \quad \lambda_1 = -7.7187 \quad \sigma_1 = 0.02865 \quad \theta_1 = 0.0013$$

$$\kappa_2 = 46.015 \quad \lambda_2 = 1.34 \quad \sigma_2 = 0.12348 \quad \theta_2 = 0.0202$$

# Príloha B

Program popisujúci kalibráciu parametrov na základe Kolmogorov–Smirnov testu.

```
% skript na výpočet početnosti
function s=sucet(x,r)
    n=length(r);
    pomR=sort(r);
    k=0;
    while pomR(k+1)<=x
        k=k+1;
        if k==n break
        end
    end
    s=k/n;

=====

% skript na výpočet KS-štatistiky
function KSstat=kumulDF(x)
    global r;
    global R;
    global tau;
    global ks1;
    global ks2;

    g1=sqrt((x(1)+x(3))^2+2*x(5)^2);
    B1=2*(exp(g1*tau)-1)/[(x(1)+x(3)+g1)*(exp(g1*tau)-1)+2*g1];
    lnA1=(2*x(1)*x(7)/x(5)^2)*[log(g1)+(x(1)+x(3)+g1)*tau/2+log(B1)-log(exp(g1*tau)-1)];

    g2=sqrt((x(2)+x(4))^2+2*x(6)^2);
    B2=2*(exp(g2*tau)-1)/[(x(2)+x(4)+g2)*(exp(g2*tau)-1)+2*g2];
    lnA2=(2*x(2)*x(8)/x(6)^2)*[log(g2)+(x(2)+x(4)+g2)*tau/2+log(B2)-log(exp(g2*tau)-1)];

    PEN1=0; PEN2=0; ks1=0; ks2=0;

    if B1==B2
        PEN1=5;
    else
        r1=(R.*tau+lnA1+lnA2-B2.*r)./(B1-B2);
        PEN1=length(find(r1<=0));
        r2=(R.*tau+lnA1+lnA2-B1.*r)./(B2-B1);
        PEN2=length(find(r2<=0));

        y=0.:0.0008:0.03;
```

```

m=length(y);
for i=1:m
    cd1(i)=sucet(y(i),r1);    % hodnota CDF na zaklade vzorky
    tcd1(i)=gamcdf(y(i),2*x(1)*x(7)/x(5)^2,x(5)^2/(2*x(1)));
                                % teoreticka hodnota Gamma rozdelenia
    if abs(cd1(i)-tcd1(i))>=ks1
        ks1=abs(cd1(i)-tcd1(i));
    end
    cd2(i)=sucet(y(i),r2);
    tcd2(i)=gamcdf(y(i),2*x(2)*x(8)/x(6)^2,x(6)^2/(2*x(2)));
    if abs(cd2(i)-tcd2(i))>=ks2
        ks2=abs(cd2(i)-tcd2(i));
    end
end
end

ks1
ks2
KSstat=ks1+PEN1+PEN2+ks2

```

```

plot(r,'k.','MarkerSize',14) hold on plot(r1,'r') hold on
plot(r2,'b') legend('r_t^{on}','r_t^1','r_t^2')

```

```

figure subplot(2,2,1)
plot(y,cd1,'k.','MarkerSize',15)
hold on
plot(y,tcd1,'-r','LineWidth',2)
legend('vyber.CDF','teorCDF',4)
title('teoreticka a vyberova kuml.DF pre r_1')
subplot(2,2,2)
plot(y,cd2,'r')
hold on
plot(y,tcd2,'-.g','LineWidth',2)
legend('vyber.CDF','teorCDF',4)
title('teoreticka a vyberova kuml.DF2 pre r_2')
subplot(2,2,3)
plot(y,abs(cd1-tcd1),'r')
title('rozdiel teor. a vyber. CDF pre r_1')
subplot(2,2,4)
plot(y,abs(cd2-tcd2),'r')
title('rozdiel teor. a vyber. CDF2 pre r_2')

```

=====

% optimalizačný skript - minimalizuje funkciu na výpočet KS-štatistiky kumulDF(x)

```

function minimalizuj(x0)    % Kappa1,2; Lambda1,2; Sigma1,2; Theta1,2
global r;
global R;
global tau;
global vystup;
global ks1;
global ks2;

r=xlsread('BRIBOR 04-06.xls','Bribor 05','B3:B252');
R=xlsread('BRIBOR 04-06.xls','Bribor 05','G3:G252');
tau=3/12;

options=optimset('LargeScale','off');

dif=1;
fval=3;
while (dif>0.00001 || fval>2)
    [vystup, fval]=fmincon('kumulDF',x0,[],[],[],[],...
        [0.01,0.01,-30,-30,0.01,0.01,0.0001,0.0001],...
        [100,100,300,300,3,3,0.1,0.1],[],options)
    dif=sum(abs(vystup-x0));
    x0=vystup;
end

```