

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského
v Bratislave



Diplomová práca

Martin Podmanický

Bratislava, 2007

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského
v Bratislave

Ekonomická a finančná matematika



Minoritné hry

Diplomová práca

Diplomant: Martin Podmanický

Vedúci dipl. práce: Doc. RnDr. Július Vanko PhD.

Bratislava, 2007

Čestné prehlásenie

*Prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne na základe získaných teoretických poznatkov a s použitím uvedenej literatúry.
Bratislava, 20. marec 2007*

Bratislava, 20. marec 2007

.....
Martin Podmanický

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu mojej diplomovej práce Doc. RnDr. Júliusovi Vankovi PhD. za poskytnuté materiály, odborné vedenie, cenné rady a trpezlivosť pri spracovaní danej témy. Takisto ďakujem Mgr. Jele Babušíkovej PhD. za technickú pomoc, ako aj svojim rodičom, vďaka ktorým som mohol študovať na vysokej škole.

Obsah

1. Úvod	2
1.1. Teória hier	2
1.2. História teórie hier	3
1.3. Typy hier	3
1.4. Úvod do minoritných hier	6
1.5. Ekonofyzika a MG	7
2. Zhang - Challet model MG	12
2.1. Zostavenie modelu	12
2.2. Volatilita	14
2.3. Informácia	15
2.4. Fáza prechodu	16
2.5. Rozdelenie priestoru stratégií	17
2.6. Ovplynňovanie budúceho vývoja	18
2.7. Maximalizácia návštevnosti	20
2.8. Zjednodušenia modelu, informácia, proces učenia	22
2.9. Dynamika a vlastnosti MG z pohľadu štatistickej fyziky	25
3. Analytické riešenie	27
3.1. Zostavenie modelu (Coolenov model MG)	27
3.2. Generujúci funkcionál	29
3.3. Riešenie Batch MG s rozhodovacím šumom	32
3.4. Základná on-line MG	33
3.5. Analýza MG s reálnou históriou trhu	35
4. Smerom k reálnym trhom	48
4.1 MG ako model trhu	48
4.2 Rozlíšenie agentov podľa bohatstva	49
4.3 Mechanizmus obchodovania	50
4.4 Modely trhu a predikcia	51
4.5 Kontrola rizika	52
4.6 Transakčné náklady	52
5. Záver	55

MINORITY GAMES

1. Úvod

Minoritné Hry sú veľmi mladou vednou disciplínou. Vznikli na základe snahy pochopiť, predpovedať a korigovať kolektívne správanie sa ľudí v určitých reálnych situáciách. Existuje množstvo rôznych prístupov, metód a oblastí uplatnenia modelov MG, pričom vďaka kreativitě vedcov vznikajú stále nové. Ako prvoradú úlohu som si preto stanovil uviesť do tejto tematiky, oboznámiť, prečo a akým spôsobom vznikla táto veda, aké metódy sa používajú a aké sú možnosti aplikácie v praxi, teda určitý prehľad o Minoritných hrách. Pokúsim sa ukázať, ako minoritné hry spájajú možno zdanlivo protirečivé prístupy odhadovania, zjednodušovania, aproximovania, s presnými výpočtami exaktnej matematiky, pričom každý analytický výsledok je hneď konfrontovaný s numerickými simuláciami. Druhým hlavným cieľom je zostrojiť základný program, ktorý by simuloval priebeh minoritných hier.

1.1. Teória hier

Teória hier (*Game Theory*) je vedným odvetvím aplikovanej matematiky, ktoré používa modely na skúmanie interakcií s formalizovanou štruktúrou pohnútok (“hier“) [1]. Skúma a porovnáva predpokladané a skutočné správanie sa jednotlivcov v hrách, rovnako ako aj optimálne stratégie. Študuje strategické situácie, kde sa hráči rozhodujú pre rozličné akcie za účelom maximalizovať svoju výplatu. Zdanlivo odlišné typy interakcií sa môžu prejavovať podobnými štruktúrami pohnútok, takže všetky môžu byť prezentované ako príklady jednej konkrétnej hry. Na rozdiel od teórie rozhodovania študuje teória hier optimálne správanie a rozhodnutia v prostredí, kde sú viacerí rozliční hráči vo vzájomnej interakcii, t.j. náklady a výplaty nie sú fixne dané, ale závisia od konania ostatných jednotlivcov. Účelom je pochopiť a predpovedať správanie sa hráčov, ale tiež nájsť a poskytnúť hráčom možnosť najlepšieho rozhodnutia. Teória hier pôvodne slúžila ekonómii, patria sem dražby, obchodovanie, duopoly, oligopoly, sociálne štruktúry, rozhodovacie systémy. Neskôr sa však uplatnila aj v mnohých ďalších odvetviach vedy, v operačnej analýze, evolučnej biológii, vojenskej stratégii, psychológii, sociológii, filozofii, politológii (voľby). Čoraz dôležitejšiu úlohu hrá v logike a informatike. Analýza teórie hier sa môže vzťahovať na jednoduché zábavné hry alebo na závažnejšie aspekty života spoločnosti. Napr. známa väzňova dilema sa využíva v rôznych oblastiach na modelovanie problémových situácií, kde sa záujmy jednotlivca (zisk) dostávajú do konfliktu so záujmami spoločnosti (napr. v ekológii). Biológovia používajú teóriu hier na pochopenie a predpovedanie výsledkov evolúcie. Napríklad evolučná stabilná stratégia, s ktorou prišli John Maynard Smith a George R. Price v roku 1973 v časopise *Nature*. Takisto evolučná teória hier a behaviorálna ekológia. Analytici bežne používajú v spojení s teóriou hier aj ostatné odvetvia matematiky, predovšetkým pravdepodobnosť, štatistiku a lineárne programovanie.

1.2. História teórie hier

Prvé náznaky teórie hier spadajú do roku 1713. James Waldegrave je podpísaný na listine, v ktorej uvádza riešenie kartovej hry dvoch hráčov na základe stratégie minimaxu. V roku 1838 vyšiel článok A. A. Cournota, v ktorom aplikuje jednoduchú analýzu teórie hier na tému duopoly. Za zakladateľa teórie hier ako samostatnej vedy sa pokladá John von Neumann, ktorý v roku 1928 uverejnil sériu článkov a v roku 1944 spolu s Oskarom Morgensternom *The Theory of Games and Economic Behavior*. Táto práca obsahuje metódu nájdenia optimálneho riešenia v hrách s nulovým súčtom hranými dvoma hráčmi. V tomto období sa venovala pozornosť kooperatívnym hrám. V roku 1950 sa objavila téma väzňova dilema. Približne v tom čase vyvinul John Nash definíciu optimálnej stratégie pre hry viacerých hráčov na nájdenie optimálneho riešenia, známeho Nashovho ekvilibria. Ak všetci hráči hrajú stratégie v Nashovom ekvilibriu, tak nemajú dôvod zvoliť inú stratégiu, lebo ich stratégie sú optimálnou reakciou vzhľadom na stratégie ostatných hráčov. V päťdesiatych rokoch zaznamenala teória hier prudký rozvoj, keď vznikli teórie o jadre a Shapleyho hodnote, fiktívnej a opakovanej hre a vznikol extenzívny tvar hry. Tiež sa objavili prvé aplikácie vo filozofii a politológii. V roku 1965 predstavil Reinhard Selten svetu koncepciu hľadania vzhľadom na podhry dokonalého ekvilibria. V roku 1967 vyvinul John Harsanyi koncepciu kompletnej informácie a Bayesovských hier. Spolu s Nashom a Seltenom dostal Nobelovu cenu za ekonómiu v roku 1994. V sedemdesiatych rokoch vznikli mnohé aplikácie teórie hier v biológii, najmä zásluhou Johna Maynarda Smitha a jeho evolučne stabilnej stratégie. Tiež boli zavedené a analyzované koncepcie korelovaného ekvilibria, zdokonaleného ekvilibria použitím kombinovaných stratégií a všeobecnej znalosti. V roku 2005 udelili Nobelovu cenu za ekonómiu Thomasovi Schellingovi a Robertovi Aumannovi. Schelling pracoval s dynamickými modelmi a evolučnou teóriou hier, kým Aumann výrazne prispel k teórii ekvilibrií.

1.3. Typy hier

Hra je dobre definovaný matematický objekt. Pozostáva z množiny hráčov, zo stratégií daných hráčom a ku každej kombinácii stratégií sú určené výplaty hráčov. Hry sa najčastejšie uvádzajú v tzv. normálnom tvare tabuľky alebo v extenzívnej forme stromu. Normálny tvar sa uprednostňuje pri simultánnych hrách a extenzívny zase pri sekvenčných. V simultánkach sa hráči rozhodujú súčasne, respektíve nepoznajú predchádzajúce akcie ostatných hráčov. V sekvenčných hrách má hráč pri rozhodovaní určitú informáciu o predchádzajúcich akciách ostatných hráčov. Ak má dokonalú informáciu, tak pozná aj všetky ich predchádzajúce akcie. Teória hier rozdeľuje hry do mnohých kategórií podľa toho, aké konkrétne metódy sa používajú na ich riešenie a ako v tej-ktorej kategórii definujeme riešenie.

Obr. 1: Hra v normálnej forme:

	<i>L</i>	<i>P</i>
H	4, 3	-1, -1
D	0, 0	3, 4

matica výplat v hre 2 hráčov s 2 stratégiami, kde hráč 1 volí možnosť hore alebo dole a súčasne sa hráč 2 rozhoduje pre L alebo P.

Obr. 2: Hra v extenzívnej forme:



strom 2 hráčov, kde sa najprv rozhoduje 1. hráč pre možnosti F alebo U, a potom sa druhý hráč rozhoduje pre A alebo R podľa toho, ako sa predtým rozhodol hráč 1.

Symetrické a asymetrické hry

V symetrickej hre výplaty hráča nezávisia na ňom, ale len na tom, aké stratégie zvolia ostatní hráči. Môžeme tu vymeniť hráčov bez toho, aby sme vymenili výplaty príslušné daným stratégiam. Patrí sem napr. väžňova dilema. Medzi asymetrické hry patria najmä tie, kde majú hráči rôzne množiny stratégií, čo však nie je pravidlom. Príklad asymetrickej hry v normálnom tvare môžeme vidieť na obr. 3.

Obr. 3:

	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>E</i>	1, 2	0, 0
<i>F</i>	0, 0	1, 2

Hry s nulovým súčtom a hry s nenulovým súčtom

V hrách s nulovým súčtom je celkový úžitok všetkých hráčov pre každú kombináciu stratégií rovný nule, t.j. víťazný hráč získava na úkor porazených. Príkladom hry s nulovým súčtom je šach, či poker, kde víťaz získava presne toľko, koľko ostatní prehrajú. Medzi hry s nenulovým súčtom patrí napríklad väžňova dilema (Obr. 4). V reálnom svete sa väčšinou stretávame s hrami s nenulovým súčtom (v podnikaní alebo v politike), pretože niektoré výsledky prinášajú celkový čistý úžitok väčší alebo menší než nula. Inak povedané, zisk jedného hráča nemusí pre iného hráča nutne znamenať stratu. Napríklad obchodný kontrakt za bežných okolností predpokladá kladný celkový výsledok, lebo každá zo zúčastnených strán je na tom v konečnom dôsledku lepšie, než v situácii, keď by sa kontraktu nezúčastnila. Vo všeobecnosti je jednoduchšie analyzovať hry s nulovým súčtom. Napokon každú hru možno pretransformovať na hru s nulovým súčtom jednoducho tak, že pridáme dodatočného fiktívneho hráča a prostredníctvom jeho strát budeme kompenzovať výhry reálnych hráčov. Vhodným spôsobom zobrazenia výsledkov hry je matica výnosov.

Obr. 4: Väžňova dilema:

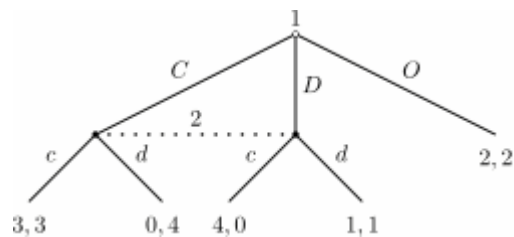
	<i>K</i>	<i>Z</i>
K	2, 2	0, 3
Z	3, 0	1, 1

Hráči majú dilemu: svorne klamať a dostať nižší trest, alebo pod príslubom odmeny zradiť svojho komplica. V rovnovážnom stave sa navzájom zradia, čo je v súčte pre nich ten najhorší možný výstup. Často sa aplikuje na problémy, kde sebecké konanie znamená ísť proti ostatným a v konečnom dôsledku aj voči sebe samému.

Hry s dokonalou a nedokonalou informáciou

V hre s dokonalou informáciou hráči poznajú predchádzajúce ťahy všetkých ostatných hráčov. To je v simultánných hrách nemožné. Väčšina známych hier je s nedokonalou informáciou. Medzi hry s dokonalou informáciou patrí napríklad šach. Hry s dokonalou informáciou sa často mýlia s hrami s úplnou informáciou. Tu taktiež každý hráč pozná všetky stratégie a príslušné výplaty hráčov, avšak nemusí poznať ich predchádzajúce akcie. Alebo nemusí vedieť, akého sú ostatní hráči typu. Hrou s neúplnými informáciami je napríklad poker alebo väzňova dilema. Hry s úplnou informáciou sa v bežnom živote vyskytujú iba zriedka. V teórii sa tieto hry používajú pre zjednodušenie - ako aproximácia skutočných, v realite prebiehajúcich hier.

Obr. 5: Hra s nedokonalou informáciou. Hráč 2 nevie, či si v predchádzajúcom ťahu hráč 1 zvolil C alebo D. Bodkovaná čiara označuje informačnú množinu, v ktorej sa hráč 2 bude nachádzať, ak si hráč 1 nezvolí možnosť O.



Nekonečné hry

Hry sa z praktických dôvodov zvyčajne po určitom počte kôl končia. Avšak matematici sa zaoberajú aj hrami, ktoré trvajú nekonečne veľa iterácií, kde nielen víťaz zostáva neznámy až do konca hry. V týchto hrách sa dôraz nekladie ani tak na to, ako hrať optimálne, najprv totiž treba odpovedať na otázku, či hráči vôbec majú nejakú víťaznú stratégiu. Existujú dokonca hry s dokonalou informáciou, kde sú len možnosti „vyhrať“ alebo „prehrať“, avšak neexistuje víťazná stratégia, a z víťaza v jednom kole sa ľahko môže stať v ďalšej iterácii porazený.

Kooperatívne hry

V kooperatívnych hrách hráči určitým spôsobom spolupracujú. Môžu hrať samostatne, alebo môžu vytvárať tzv. koalície. Koalície fungujú na báze vymáhateľnej dohody medzi hráčmi. Ak hráč vstúpi do koalície, musí v priebehu hry konať s ohľadom na to, aká je jeho dohoda s

ostatnými hráčmi v koalícii, preto si musí pri vstupe do koalície dobre zvážiť, či sa mu to oplatí. Keď dvaja alebo viacerí hráči uzatvárajú dohodu, obyčajne vyjednávajú o veľkosti svojich podielov.

Charakteristické funkčné hry

V kooperatívnych hrách môže hráč vystúpiť z pôvodnej koalície a pridať sa k inej, ak mu ponúknu vyšší podiel. Preto treba určiť, aký veľký podiel z celkového výsledku pripadne na každého hráča. Potom sa na kooperatívnu hru môžeme pozeriť ako na (charakteristickú) funkciu z množiny koalícií do množiny výplat. Táto funkcia udáva, akú celkovú výplatu môžu hráči dosiahnuť sformovaním sa do koalície. Hráč sa pridá ku koalícii iba ak tým získa. Koalícia prijme hráča takisto iba vtedy, ak tým získa. Množina, ktorá obsahuje kombinácie primeraných potenciálnych podielov, sa nazýva jadro. Kombinácia podielov je v jadre, ak neexistuje subkoalícia, ktorej členovia by mohli získať väčší celkový výnos ako majú v koalícii. Ak výplatný pomer nie je primeraný (neleží v jadre), niektorí členovia budú sklamaní a začnú uvažovať o opustení celej skupiny a vytvorení menšej skupinky (subkoalície) s ďalšími nespokojnými hráčmi. Známu koalíciou je napríklad EÚ. Takisto športové družstvá, dokonca manželstvo by sme mohli vyhlásiť za koalíciu.

1.4. Úvod do minoritných hier

Azda najjednoduchší a najznámejší príklad minoritnej hry je švajčiarska detská hra "Zig-Zag-Zoug". Tri deti si volia víťaza tak, že dajú spolu pravé nohy, povedia Zig-Zag-Zoug a odtiahnu alebo neodtiahnu nohu. Víťaz je ten, ktorý urobí opačný ťah ako ostatní dvaja, čiže je v menšine (minority). Za otcov minoritnej hry sa pokladajú Yi-Cheng Zhang a Damien Challet. Vychádzali z problému El Farol bar, čo je jednoduchý model zameraný na kooperáciu hráčov pri nedostatočnej informácii. Každú sobotu večer sa v bare koná akcia. Bar má však určitú kapacitu. Ak sa väčšina ľudí rozhodne ísť do baru, ten bude preplnený, a teda vyhrajú tí, ktorí zostanú doma. Ak väčšina zostane doma, bar nebude preplnený a domasedi prehrávajú. V každom prípade vyhráva menšina. Ľudia sa rozhodujú podľa dostupnej informácie o predchádzajúcich sobotných akciách a tiež podľa svojich osobných očakávaní. Takisto v minoritnej hre máme (nepárny) počet N hráčov, ktorí sa každú iteráciu súčasne a nezávisle rozhodujú pre jednu z dvoch možností A alebo B. Poznajú M (pamäť) posledných víťazných akcií. Postupnosť M víťazných akcií nazývame históriou. Máme 2^M možných histórií. Keď pre každú históriu zafixujeme možnosť A alebo B, dostaneme stratégiu. Stratégia má svoju virtuálnu hodnotu, ktorá vyjadruje, koľko krát daná stratégia predpovedala víťazný ťah správne. Na začiatku hry má každý hráč k dispozícii konečný počet S stratégií. Používa ich induktívne – podľa najvyššieho virtuálneho skóre (v prípade rovnosti skóre náhodne). Hráči nemajú žiadnu informáciu o ostatných hráčoch. Tento model má niekoľko zaujímavých čít. Ak by napríklad všetci hráči analyzovali situáciu rovnako, urobili by rovnaký ťah a všetci by prehrali. Hráči sa preto musia odlišovať (musia mať rôzne stratégie). Hráči nemôžu všetci súčasne vyhrať, presnejšie ani polovica z nich. Navyše výsledok závisí od akcií ostatných hráčov a neexistuje jednotná víťazná stratégia. Medzi hráčmi je preto veľká frustrácia. Teoreticky by mohli kooperovať, v tom im však bráni ich chamtivosť. Preto

automaticky minimalizujú informáciu dostupnú ostatným hráčom. Existuje fáza prechodu medzi symetrickou oblasťou bez dostupnej informácie (bez arbitrážnych príležitostí) a asymetrickou oblasťou, kde je informácia dostupná hráčom. V ergodickej asymetrickej fáze existuje presné riešenie v limite $M \gg 1$, $N \gg 1$. Ak by si agenti uvedomovali svoj vplyv na trh, žiadna fáza prechodu by neexistovala.

Minoritný mechanizmus sa používa na modelovanie situácií, kde agenti súperia o konečné množstvo zdrojov (napríklad na finančnom trhu). Agenti majú dve možnosti – kúpiť alebo predáť aktívum. Cena aktíva sa vyvíja každý časový úsek podľa jednoduchého pravidla dopytu a ponuky – ak je viac kupujúcich ako predávajúcich, cena je vysoká a predávajúci víťazia, naopak, ak je viac predávajúcich ako kupujúcich, cena je nízka a víťazia kupujúci. V každom prípade víťazí menšina – minority. Existuje mnoho pozmenených modelov základnej minoritnej hry.

1.5. Ekonofyzika a MG

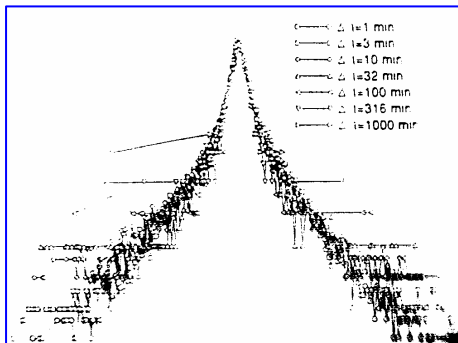
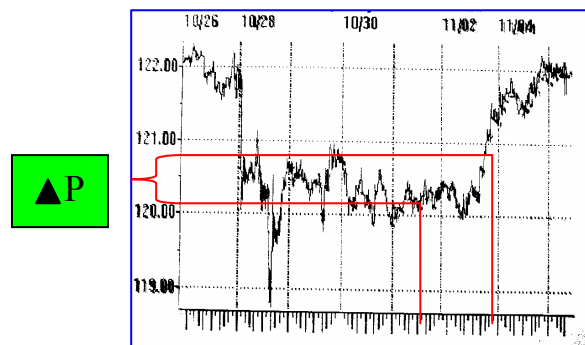
V priebehu posledných desaťročí sa rozvinula veda zvaná ekonofyzika. Predstavuje posledný známy stupeň prepojenia medzi ekonomikou a fyzikou. Vznikla tak, že fyzici začali aplikovať metódy štatistickej fyziky a nelineárnej dynamiky na makroekonomické modelovanie a finančnú analýzu trhu. Ekonofyzika nie je nová veda, ale až donedávna existovali medzi ekonómami a fyzikmi nezhody, keďže oba tábory pristupovali k tomu istému problému inak. Dôsledkom bola asymetria vo výskume a nedostatočná spolupráca. Avšak v poslednom období sa situácia značne zlepšila. Jedným z hlavných dôvodov bol rozvoj databáz a zlepšenie dostupnosti dát o. i. aj z finančných trhov, kde sa informácia mení s vysokou frekvenciou. Tým sa podstatne zjednodušilo testovanie presnosti a predikčnej sily novovzniknutých teórií. Ekonomické modely musia v sebe zahŕňať spôsob, akým ľudia chápu a konajú. Preto nikoho neprekvapí, že metódy osvedčené vo fyzike, sa uplatňujú aj v ekonómii, pričom sa stále otvára veľký priestor pre vývoj ďalších zákonov a modelovanie ekonomických procesov. Dôvody sú jednoduché – lepšie modely prinášajú lepšiu kontrolu rizika, presnejšiu predpoveď fenoménov ako sú krachy na burzách, presnejšie a objektívnejšie ohodnocovanie finančných aktív. Mnohé modely boli inšpirované klasickou fyzikou, najmä štatistickou mechanikou. Komplexné systémy študované fyzikmi majú mnoho spoločného s finančnými trhami. V štatistických modeloch správanie sa systému ako celku závisí na veľkom počte individuálnych udalostí. Podobne v ekonómii máme mnoho interagujúcich agentov, či sú to konzumenti, producenti alebo obchodníci s akciami. Finančné trhy sú otvorené systémy, kde veľký počet agentov interaguje nelineárne a so spätnou väzbou. Preto k nim ekonofyzici pristupujú ako ku komplexným interaktívnym systémom. Tieto systémy navyše vykazujú podobnú distribúciu akú často vidíme vo finančných dátach, s ťažkými chvostami. V modeloch štatistickej fyziky výsledný prejav obvykle nezávisí na detailných mikroskopických interakciách. Ak predpokladáme, že celkový priebeh na trhu nie je podstatne ovplyvnený realizáciami obchodných transakcií, môžeme aplikovať niektoré jednoduché modely štatistickej fyziky.

Minoritné hry sa vyvinuli za veľkého príspevku ekonofyziky v priebehu 90-tých rokov. Prečo sa fyzici zaujímajú o finančné trhy? Prečo ekonofyzika?

Obr. 7: agenti na burze sledujú vývoj cien aktív. Informácia sa zobrazuje na hlavnom poli



Obr. 8: V každom časovom okamihu sa menia ceny akcií, máme veľký počet empirických dát, ktoré sa menia s vysokou časovou frekvenciou, mnoho navzájom interagujúcich stupňov voľnosti



Obr. 9: Netriviálna štatistika, čo sa týka fluktuácií a rozptylu dát

V ekonomickej teórii sa predpokladajú určité základné fakty [2]:

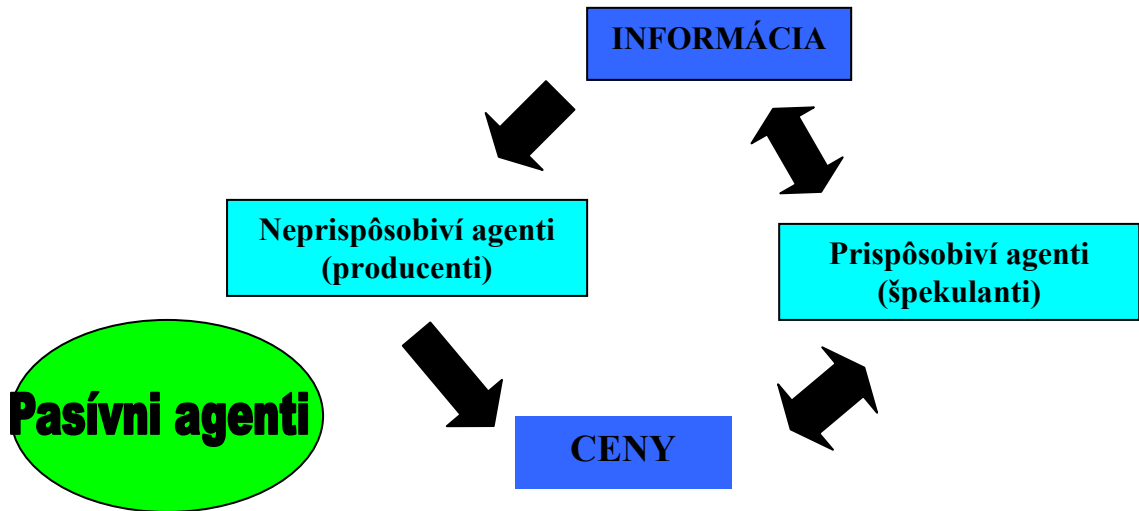
- predpoklad efektívneho trhu, čiže aktuálne ceny finančných aktív by mali obsahovať všetky dostupné informácie potrebné na ďalšie určenie ceny týchto aktív v nasledujúcom časovom okamihu, pričom ďalšia informácia sa neustále a okamžite odráža v cene aktív, vyššia cena znamená lepšie aktívum
- neexistuje tu arbitráž, nie je možné dosiahnuť na finančnom trhu kladný zisk, lebo ak by investovaním 1 Sk bolo možné zarobiť $1+\varepsilon$ Sk, tak investovaním ∞ Sk by bolo možné dosiahnuť nekonečne vysoký zisk
- ak nevieme určiť, či cena akcie stúpne alebo klesne, je rozumné predpokladať, že stúpne s pravdepodobnosťou 1/2

Otázky a problémy, ktoré z toho plynú:

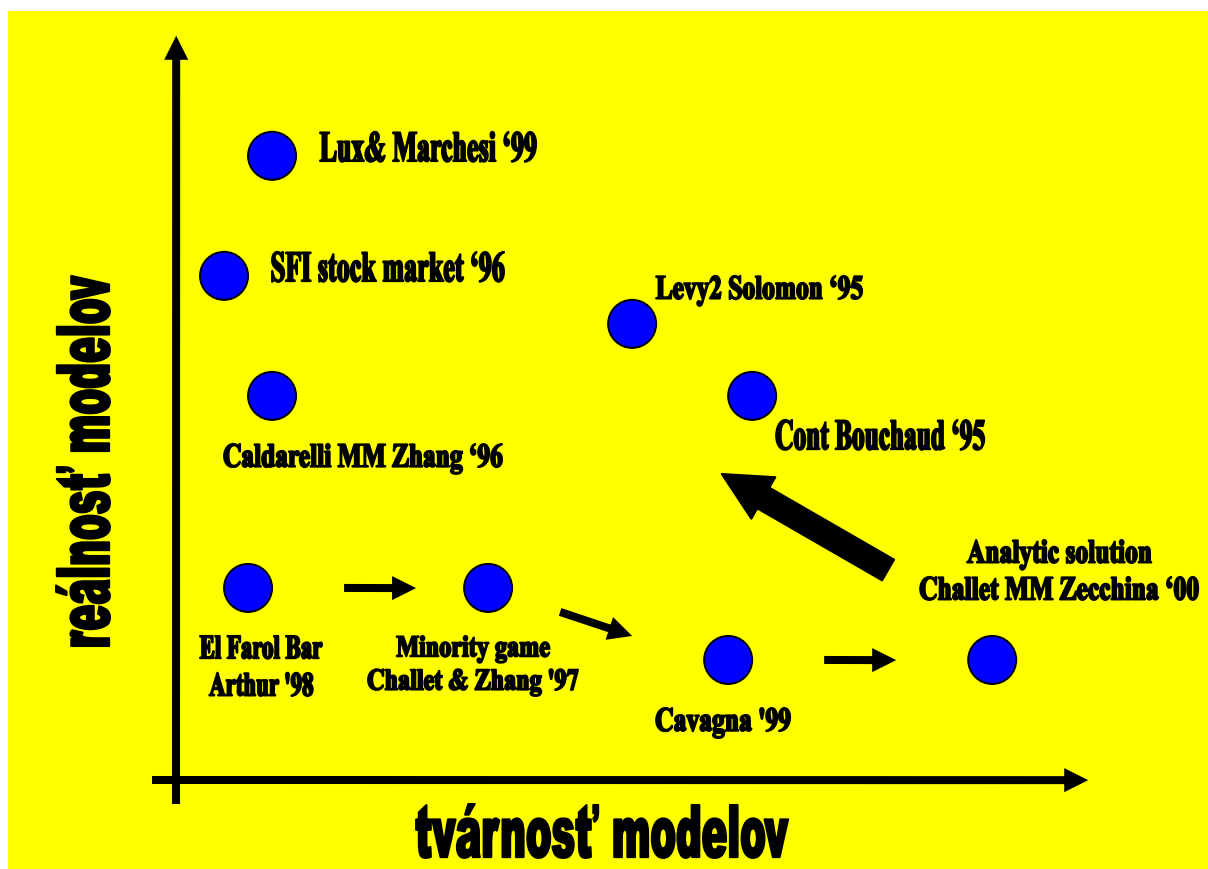
- kto vkladá informácie do cien? Obchodníci investujú a súčasne tým aj vkladajú novú informáciu a menia cenu aktív, avšak trvá určitú dobu, kým sa ich konanie prejaví...
- nedá sa dosiahnuť nekonečný zisk bez toho, aby sme nekonečným spôsobom ovplyvnili trh
- ak sa vývoj na finančných trhoch nedá predpokladať, tak prečo sa tým potom tak veľa ľudí zaoberá? Viac než 90% obchodných transakcií s cudzou menou sa uskutoční na základe špekulácií
- ceny aktív sa nesprávajú podľa predpokladu o náhodnej prechádzke, máme tu netriviálne fluktuácie, tzv. ťažké chvosty a zhlukovanie veľkých vykyvov, pozorujeme, že údaje s veľkým časovým oneskorením sa viac podobajú na náhodnú prechádzku

Je zjavné, že predpoklady nie sú celkom splnené. Napríklad hypotéza o efektívnom trhu bez arbitráže... trh sa dynamicky vyvíja a mení, čo je spôsobené práve odchýlením od tejto hypotézy a snahou predpovedať vývoj na trhu. Ekonofyzika je veda ktorá sa zaoberá štúdiom empirických dát týkajúcich sa finančných trhov, pričom ide o obrovské počty údajov upravených do určitého tvaru podľa potreby (napr. preškálovanie). Na základe analýzy týchto údajov sa ekonofyzici snažia predpovedať nasledujúci vývoj. Pritom využívajú fyzikálne metódy na oceňovanie aktív a manažment rizika. Modelujú finančné trhy ako interaktívne systémy veľkého počtu navzájom interagujúcich častí, systémy s veľkým počtom stupňov voľnosti. Poznáme viacero typov účastníkov trhu.

Obr. 10: Na trhu sú 3 typy agentov podľa toho, akým spôsobom reagujú na prílev informácií a akým spôsobom reagujú i vplývajú na zmenu ceny. Obchodujú v rámci rozličných časových horizontov, majú rozličné vklady a podiely na transakciách, môžu vyčkávať a neobchodovať, nastávajú rôzne situácie...



Obr 11: Vývoj prístupu fyzikov k modelovaniu finančných trhov, Genéza Minoritnej Hry do r. 2000:



Existujú rôzne prístupy a možnosti aplikovať Minoritné hry hlavne v ekonómii ale aj iných oblastiach vedy. Takisto existujú rôzne definície a spôsoby, ako objasniť význam pojmu minoritná hra. Jednou z hlavných ideí je otázka, aké a či vôbec nejaké množstvo individualít je schopné dospieť ku kolektívnemu riešeniu problému vďaka adaptácii individuálnych predstáv o budúcom vývoji situácie, napr situácie na finančnom trhu. Podľa všeobecnej definície je Minoritná hra jednoduchý model pre kolektívne správanie sa agentov v idealizovanej situácii, kde musia súperiť o konečné množstvo suroviny, pričom dôležitú úlohu hrá adaptácia, prispôbovanie sa neustále sa meniacej situácii. Z pohľadu štatistickej mechaniky je minoritná hra komplexný dynamický neusporiadaný systém mnohých navzájom interagujúcich častíc.

2. Zhang - Challet model MG

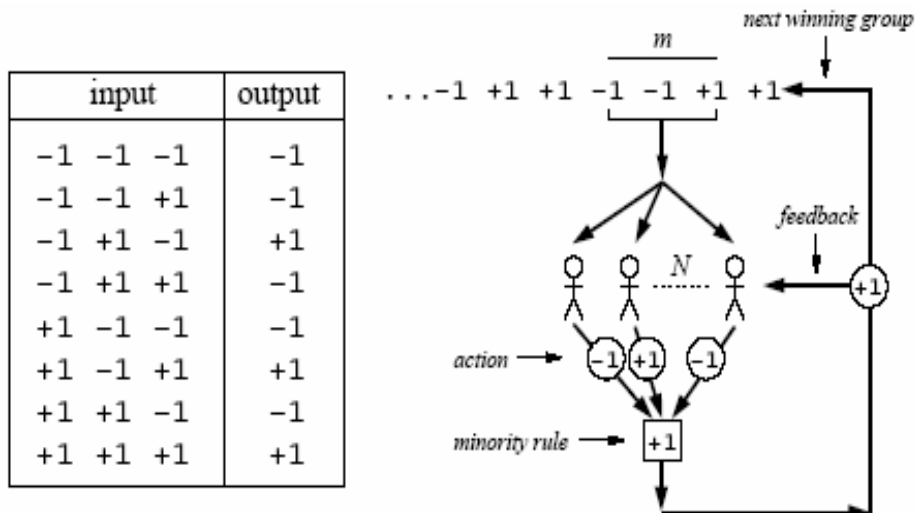
2.1. Zostavenie modelu

Páni Challet a Zhang už v r. 1997 uviedli matematickú definíciu pre El Farol Bar problém a nazvali ju Minoritnou hrou [4]. Ide o jeden z prvých modelov pôvodnej MG. Máme N agentov, ktorí sa každý časový krok samostatne rozhodujú pre akciu $a_i(t)=1$, resp. $a_i(t)=-1$ (ísť, resp. neísť do baru). Po ukončení iterácie sa celková akcia zosumarizuje

$$A(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \quad (1)$$

a vyhráva menšina, teda tí hráči i , pre ktorých výraz $-a_i(t) * g[A(t)] > 0$, kde g je funkcia, napríklad x/N . Agenti volia akciu induktívne na základe informácie o posledných m víťazných skupinách. Každý z nich má k dispozícii nejakú množinu stratégií $s \geq 2$. Stratégia je tabuľka, ktorá mapuje predchádzajúcich m víťazných akcií a k nim dáva návod, akú akciu zvoliť v nasledujúcej iterácii. Každá stratégia má 2^m možných vstupov pre dané m , teda celkové množstvo možných stratégií je 2^{2^m} . Na začiatku hry má každý agent danú podmnožinu stratégií náhodne vybranú spomedzi všetkých možných. Stratégia je daná 2^m dimenzionálnym vektorom \mathbf{r}_i^α , ktorého komponenty sú výstupom stratégie α pre agenta i . Napr. podľa obr.1 je daná stratégia $\mathbf{r}_i^\alpha = (-1, -1, +1, -1, -1, +1, -1, +1)$. Ak posledná víťazná skupina je $-1, +1, +1$, potom predikcia podľa tejto stratégie je daná štvrtým komponentom \mathbf{r}^α .

Obr. 12: Príklad stratégie pre $m = 3$. Vpravo máme znázornenú 1 iteráciu v čase - stratégia mapuje poslednú sekvenciu víťazných akcií ($m = 3$) a agent následne dospieva k rozhodnutiu. Šípky vyjadrujú tok informácie v systéme. Na základe poslednej trojice víťazných akcií urobí N agentov simultánne rozhodnutia. Minoritné pravidlo rozhodne o novej víťaznej akcii (+1). Táto informácia sa šíri medzi agentami ako spätná väzba (rovnica (2)) a nová víťazná akcia sa v nasledujúcej iterácii premietne do sekvencie víťazných akcií



V každom kroku je predikcia daná komponentom $\mu(t) \in \{1, \dots, 2^m\}$, kde $\mu(t)$ je číslo, ktorého binárna reprezentácia korešponduje s poslednou víťaznou skupinou ($-1 \rightarrow 0$ a $+1 \rightarrow 1$). Označme $\mathbf{I}(t)$ jednotkový vektor s jednotkou na mieste $\mu(t)$, teda v našom prípade

$\mathbf{I}(t)=(0,0,0,1,0,0,0,0)$. Teda hra prebieha tak, že sa hráči pozrú na posledných m víťazných akcií ($m = 3$), zvolia akciu a čakajú, či vyhrajú. Nová víťazná akcia sa zapíše do tabuľky, z ktorej vypadne najstaršia víťazná akcia, a hra pokračuje ďalej. Agenti sa ale nedržia celý čas len jednej stratégie (to je špeciálny prípad), ale vyberajú si tú zo svojich stratégií, ktorá má v doterajšom priebehu hry najvyššie virtuálne skóre. Virtuálne skóre stratégie α $p_i^\alpha(t)$ sa v každom kole hry mení

$$p_i^\alpha(t+1) = p_i^\alpha(t) - r_i^\alpha(t) * \mathbf{I}(t) * g[A(t)] \quad (2)$$

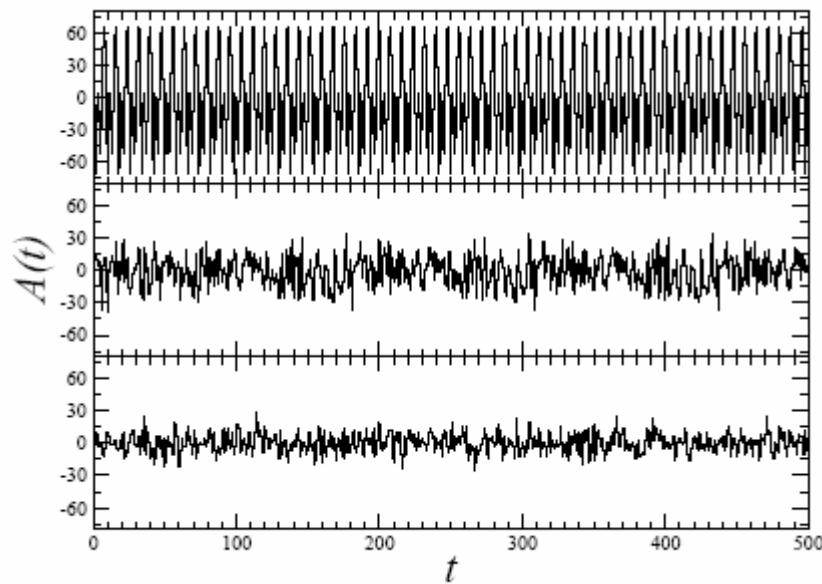
kde $\alpha = 1, \dots, s$ a $i = 1, \dots, N$.

Nech v čase t je stratégia hráča i s najvyšším skóre $\beta_i(t) \in \{1, \dots, s\}$, potom akcia hráča i v čase t bude

$$a_i(t) = \mathbf{r}_i^{\beta_i(t)} * \mathbf{I}(t) \quad (3)$$

Tu vidíme adaptáciu, jednu z hlavných črt MG, keďže $\beta_i(t)$ sa s časom t mení. Pridaním poslednej víťaznej akcie sa zmení aj $\mu(t)$ a $\mathbf{I}(t)$.

Obr. 13: Časová závislosť celkovej návštevnosti $A(t)$, kde $g(x)=x$, $N=301$, $s=2$. Parameter m od vrchu nadol nadobúda hodnoty 3, 7, 15. Pre $m = 3$ je $A(t)$ výrazne periodická



2.2. Volatilita

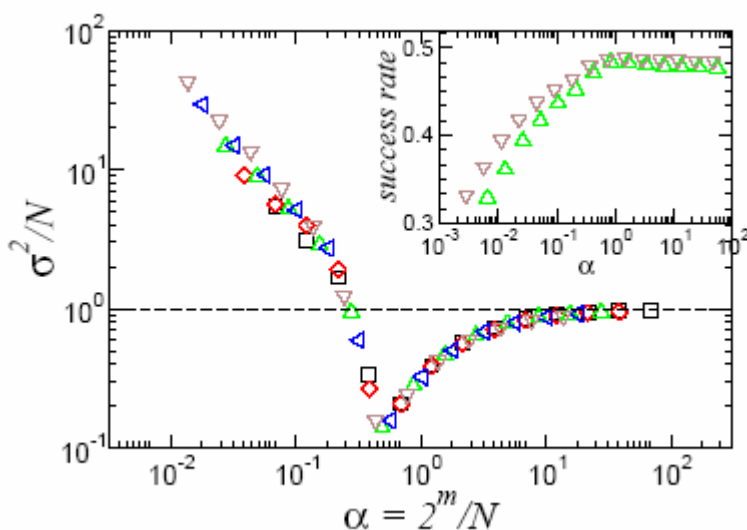
Prvé štúdie MG sa zakladali na simuláciach (obr. 2). Podľa simulácií sa Agregát $A(t)$ nikdy neustáli (pričom $g(x)=\sin(x)$), ale kolíše okolo svojej nulovej strednej hodnoty $\langle A(t) \rangle$, čo je dlhodobý priemer nad realizáciami r_i^a . Zaujímavé sú na tom fluktuácie $A(t)$, ktoré pre malé hodnoty m vykazujú časovo periodický priebeh. Sú dané varianciou

$\sigma^2 = \langle [A(t) - \langle A(t) \rangle]^2 \rangle$, ktorá sa nazýva aj (inverzná) globálna efektivita alebo volatilita. Ukázalo sa, že σ závisí od veľkosti skupiny porazených, čím menšie σ , tým viac je v hre víťazov. Kvalitatívna nezávislosť výsledkov na veľkosti $s \geq 2$ znamená, že zatiaľ stačí uvažovať najjednoduchší prípad $s = 2$;

- σ^2/N je funkcia jediného parametra $\alpha = 2^m/N$ (obr. 3), pre akúkoľvek hodnotu s ($s = 2$).
- pre veľké hodnoty α sa σ^2/N približne rovná 1, čo zodpovedá prípadu, keď sa agenti náhodne a nezávisle rozhodujú medzi oboma akciami s rovnakými pravdepodobnosťami;
- pre nízke hodnoty α je hodnota σ^2 v priemere veľmi veľká, dá sa povedať, že $\sigma^2/N \sim \alpha^{-1}$, čo znamená, že $\sigma \sim N$ a teda počet porazených je $\gg N/2$;
- pre hodnoty $\alpha \sim 1/2$ je volatilita σ menšia ako v prípade náhodného výberu akcie a počet porazených sa pohybuje okolo svojho minima $N/2$;

Fakt, že σ sa pre určitý interval hodnôt α dostáva pod svoju hodnotu v prípade náhodného výberu akcie, naznačuje možnosť koordinácie agentov za účelom predpovedať pohyb na trhu, aby glob. efektivita σ^2 bola minimálna (t.j. pre $\alpha \sim 1/2$). Čiže agenti by mohli z globálneho hľadiska dosiahnuť lepšie riešenie, keby sa podelili o všetky dostupné informácie, keby spolupracovali, to je však v rozpore s ich individuálnou snahou zarobiť čo najviac. V klasickej MG teda k takej koordinácii nedochádza a nedosahuje sa optimálne riešenie – také, kde sa agenti rozdelia na menšinu $((N-1)/2)$ a väčšinu $((N+1)/2)$, čo znamená, že $\sigma^2/N = 1/N$ a priemerná úspešnosť agenta zaradiť sa do menšiny $\sim 1/2$.

Obr. 14: Volatilita ako funkcia parametra $\alpha = 2^m/N$ pre $s=2$ pri rôznych množstvách agentov $N=101, 201, 301, 501, 701$ (■, ◆, ▲, ◀, ▼). V pravom hornom rohu: priemerná úspešnosť agentov v závislosti od α



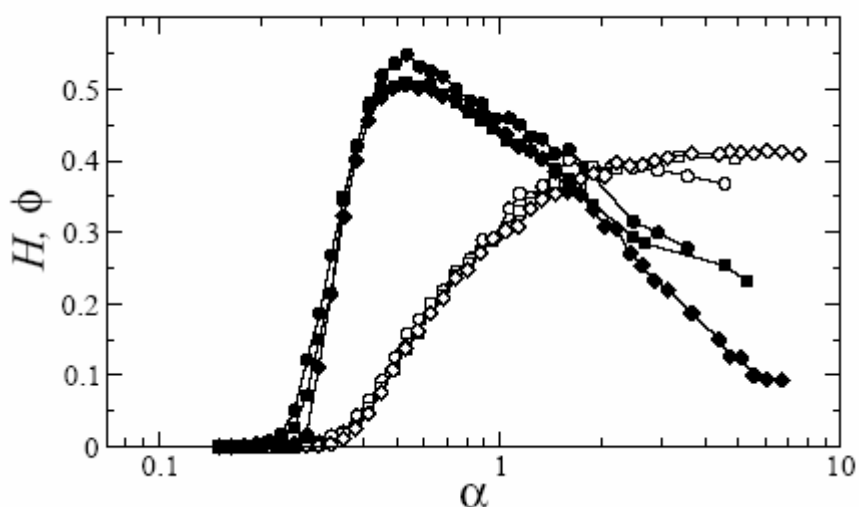
2.3. Informácia

Agenti medzi sebou šíria informácie, čo viedlo k otázke, aká informácia je obsiahnutá v časovom rade $A(t)$. Bolo ukázané, že $W(t+1) = \text{sgn } A(t)$ je nezávislé na výsledkoch v posledných m kolách, pokiaľ sme v oblasti s vysokou volatilitou, a naopak silne závislé, ak sme v oblasti kde $\alpha > \alpha_c \sim 1/2$. Oblať $\alpha > \alpha_c$ je trhovu efektívna, keďže história minoritných skupín neobsahuje žiadnu predikčnú informáciu pre agentov s pamäťou m , kým oblať $\alpha > \alpha_c$ obsahuje informácie dôležité pre zvolenie stratégie pre agentov hrajúcich hru s pamäťou m . V tejto oblasti je trh neefektívny, lebo sú tu arbitrážne príležitosti. Každopádne $A(t)$ nie je náhodným časovým radom. Na vyčíslenie tejto vlastnosti sa meria podmienená pravdepodobnosť $W(t+1)$ pri známej $\mu(t)$ cez vzájomnú entropickú informáciu $W(t)$ a $W(t+1)$, kde $W(t+1) = -\text{sign}A(t)$ je víťazná akcia.. Bol navrhnutý aj priamejší spôsob merania tejto veličiny ako

$$H = 1/2^m \sum_{v=1}^{2^m} \langle W(t+1) | \mu(t) = v \rangle^2 \quad (5)$$

kde priemerná hodnota $W(t+1)$ je podmienená tým, že posledných m víťazných akcií je daných $\mu(t)$. Ak tu nie je významná závislosť medzi $W(t+1)$ a $\mu(t)$, tak, ako sme už videli, priemery $\langle W(t+1) \rangle = \langle A(t) \rangle = 0$ a $H = 0$. Teda H meria informáciu nachádzajúcu sa v časovom rade $A(t)$, aj keď iba cez korelácie medzi nasledujúcou víťaznou akciou a poslednými m víťaznými akciami. Z pohľadu trhu prípad $H \neq 0$ znamená existenciu informácie v $A(t)$ a prítomnosť arbitrážnych príležitostí. Simulácie ukazujú, že $H = 0$ pre $\alpha < \alpha_c \sim 0,3$ a $H \neq 0$ pre $\alpha > \alpha_c$ (obr. 4). V limite $\alpha \rightarrow \infty$ sa $H = 0$ keďže máme systém N agentov, ktorí konajú takmer náhodne a predpokladá sa, že v sekvencii $W(t)$ nie sú korelácie. H má aj druhý význam, meria asymetriu reakcie agentov na danú informáciu. Keď $H \neq 0$, agenti reagujú rozlične na dostupnú informáciu a keď $H = 0$, systém N agentov reaguje rovnako.

Obr. 15: Informácia H (prázdne symboly) a počet tzv. zmrznutých agentov ϕ (plné symboly) ako funkcia parametra $\alpha = 2^m/N$ pre $s=2$, $m=5, 6, 7$ (\circ , \square , \diamond)



2.4. Fáza prechodu

Už fakt, že $H = 0$ pre $\alpha < \alpha_c$ a $H \neq 0$ pre $\alpha > \alpha_c \cong 0,3$ naznačuje možnosť existencie fázy prechodu medzi efektívnou a neefektívnou oblasťou v mieste $\alpha = \alpha_c$. Teda H je parameter systému, ktorý meria symetriu $W(t+1)$ v systéme, symetriu porušenú v bode $\alpha = \alpha_c$. To znamená, že pre fixné m , agenti vstupujúci na trh, šíria prediktabilitu $A(t)$ a tým ju znižujú. Z hľadiska spoločnosti rozdeľuje α_c 2 regióny, v ktorých sa adaptácia úspešne aplikuje na dosiahnutie dobrého globálneho riešenia MG problému. Tab. 2 sumarizuje oblasti rozdelené fázou prechodu v 2 rôznych kontextoch.

Tab. 2:

kontext	$\alpha < \alpha_c$	$\alpha > \alpha_c$
Volatilita/ Globálne plytvanie	neefektívnosť horšie než náhodné	efektívnosť menej než náhodne
Informácia/ Arbitráž v $A(t)$	efektívnosť žiadna arb., $H = 0$	neefektívnosť arbitráž, $H \neq 0$

Fáza prechodu je opísaná jak cez informáciu prístupnú agentom, tak cez minimalizáciu celkového plytvania. Jediným parametrom je H . Ďalšie hodnoty boli označené ako parametre kvôli vysvetleniu nájdenia fázy prechodu pri numerických simuláciách v $\alpha = \alpha_c$. Napríklad hodnota φ – agenti, ktorí po celý čas používajú rovnakú stratégiu $\beta_i(t) = \beta_i$. φ je v oblasti $\alpha < \alpha_c$ nulové (obr. 3), čo znamená, že všetci agenti menia stratégiu minimálne raz. Takisto to platí pre α veľmi veľké, kde sa agenti správajú viac-menej náhodne. Avšak v blízkosti bodu prechodu je φ veľké a väčšina agentov si vyberie jedinou stratégiu "navždy". Z hľadiska φ ide o akýsi oslobodzujúci prechod, keďže pre $\alpha < \alpha_c$ sú virtuálne skóre rôznych stratégií približne rovnaké a agenti preto menia výber optimálnej stratégie veľmi často. Ale pre $\alpha > \alpha_c$ u väčšiny agentov z dlhodobého hľadiska víťazí jedna stratégia s jasne najväčším virtuálnym skóre. Množstvo φ tzv. zmrznutých agentov klesá k 0 pre rastúce $\alpha > \alpha_c$. Povaha parametra H nie je jasná, nie je jasné, akého je rádu, ani či ide o ekvilibriovú fázu prechodu alebo nie.

2.5. Rozdelenie priestoru stratégií

Minoritné pravidlo núti agentov, aby sa snažili odlišovať. Ak by použili rovnakú stratégiu, všetci prehrajú. Takže agenti musia meniť stratégie. Počet stratégií je 2^m . Ale dimenzia priestoru stratégií je 2^m a preto je len 2^m kompletne odlišných stratégií (žiadny z komponentov sa nezhoduje). Počet agentov je N a ak sa agenti majú úplne odlišovať, musí platiť $N < 2^m$. Pre $N > 2^m$ narastá počet agentov s rovnakými stratégiami. Títo agenti používajú rovnaké najlepšie stratégie a stáva sa z nich dav, lebo reagujú na danú informáciu rovnako. Rozličné správanie sa σ^2/N sa dá popísať pomocou davu:

- keď $N < 2^m$, agenti používajú značnú časť všetkých stratégií, čo znamená, že pre veľkú časť agentov je ich najlepšia stratégia $\beta_i(t)$ rovnaká v čase t . Veľkosť tohto davu je $O(N)$ a teda variancia je rádu N , $\sigma^2/N \sim N$;

- keď $N \ll 2^m$, davy majú málo ľudí, keďže takmer všetci majú odlišné $\beta_i(t)$, čo znamená, že konajú nezávisle a $\sigma^2/N \sim 1$;

- pre stredné hodnoty α sa davy formujú s podielom $\beta_i(t)$ a s veľkosťou rádu N . Ale súčasne je tu antidav, čo je skupina ľudí s rovnakou najlepšou stratégiou, ktorá je ale úplne odlišná od najlepšej stratégie davu. Toto je možné len pre stredné hodnoty α , len tu je nenulová pravdepodobnosť, že dve skupiny agentov nezdieľajú žiadne zo svojich stratégií. V tomto prípade sa davy a ich antidavy správajú úplne opačne, v extrémnom prípade jedného davu veľkosti $N/2$ máme $\sigma^2/N \sim 0$. Veľkosť davu a antidavu sa dá aproximovať na základe priebehu volatility alebo môžeme merať vzdialenosť medzi najlepšimi stratégiami všetkých agentov

$$d = \frac{1}{2^m (N-1)^2} \sum_{i \neq j} \left\langle \left\| \begin{array}{cc} \rightarrow \beta_i(t) & \rightarrow \beta_j(t) \\ r_i & -r_j \end{array} \right\|_1 \right\rangle \quad (6)$$

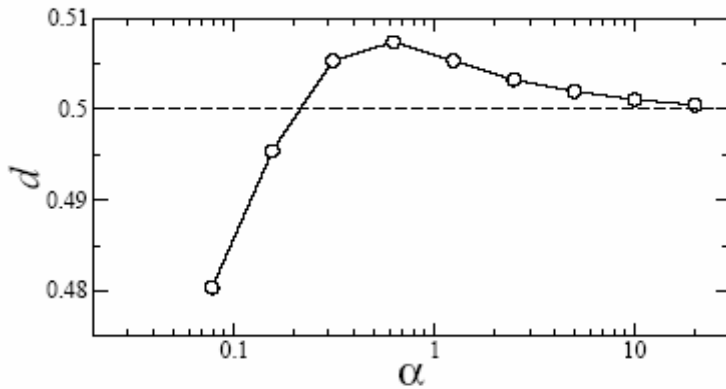
kde $\|\cdot\|_1$ je tzv. Hamming distance (1-norm) v priestore stratégií dimenzie 2^m . Agenti sa snažia navzájom odlišovať a preto maximalizujú vzdialenosti medzi svojimi najlepšimi stratégiami (obr. 5). Pri malých hodnotách α sú agenti nútení zdieľať stratégie skvôli limitovanej pamäti. Pre α veľmi veľké je situácia lepšia, lebo stratégie agentov sa neprekrývajú a vtedy je vzdialenosť medzi nimi náhodná $d \sim 1/2$. Ale pre stredné hodnoty α diferenciácia spôsobuje rozdelenie agentov na dav a antidav veľkosti $(N-1)/2$ a $(N+1)/2$ s kompletne odlišnými najlepšimi stratégiami. Vzdialenosť dvoch kompletne odlišných stratégií je 2^m , preto $d = N/[2(N-1)] > 1/2$ je väčšia ako v náhodnom prípade. Správanie sa agentov je teda výsledkom minoritného pravidla v priestore stratégií. Minoritné pravidlo spôsobuje, že agenti menia svoje najlepšie stratégie, čo je efektívne iba vtedy, keď dimenzia $2^m \gg$ počet stratégií prítomných v hre. Pre stredné hodnoty α minoritné pravidlo spôsobuje zmenu najlepšej stratégie agentov, ktorá vedie ku koordinácii, lebo optimálna cesta k diferenciácii je pripojiť sa k existujúcemu davu alebo antidavu.

2.6. Ovpływňovanie budúceho vývoja

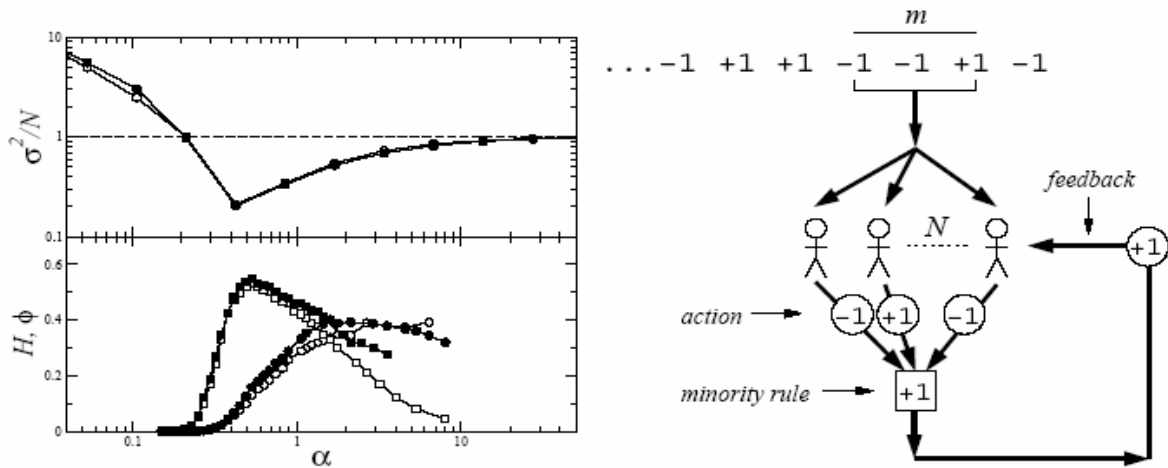
V MG modeli sa agenti prispôsobujú a učia na základe predchádzajúceho vývoja hry dosiahnuť lepší osobný výsledok. Dôležitá je pri tom pamäť agentov, určuje dimenziu priestoru stratégií a priamo súvisí so schopnosťou agentov zaznamenať informáciu a koordinovať. Postupnosť víťazných akcií v sebe zahŕňa informáciu o stratégiách všetkých agentov a väčšia pamäť dáva agentovi viac informácie. Čím väčšie m (a čím dlhšie sa hrá), tým lepšia koordinácia a tým lepší individuálny výsledok. Avšak, pre $\alpha \gg 1$ rast m vedie k nárastu komplexnosti a náhodnosti. Informácia o výsledkoch ďalšieho priebehu hry sa vracia do systému, preto sa štúdie MG zo začiatku zaoberali otázkou využitia tejto informácie agentmi za účelom dosiahnutia lepšej koordinácie. A. Cavagna ukázal na stredných hodnotách svojich simulácií, že ak je informácia $\mu(t)$ zadávaná agentom v každom kroku náhodne a nezávisle od času, tak sa povaha MG nemení, čo sa týka hodnôt ako volatilita, informácia H alebo ϕ (obr. 6). Použitie náhodných namiesto reálnych histórií znamená iba kvantitatívny rozdiel niekoľko percent. Pri modeloch s náhodným vstupom informácie na trh je preto vhodné použiť náhodné histórie, model bude jednoduchší. Idea je v tom, že každý agent reaguje na rovnakú informáciu, či je endogénna alebo exogénna, pravdivá alebo mylná. Z toho vyplýva, že v tomto modeli sa nedá predpovedať budúci vývoj MG na základe minulosti – koordinácii v MG nepomôže využitie informácie obsiahnutej v postupnosti víťazných akcií. Ďalším dôsledkom je to, že môžeme vynechať spätnú väzbu endogénnej informácie v systéme. To však neznamená irelevantnosť pamäťového parametra m . Závisí od neho fáza prechodu aj dimenzia priestoru stratégií $D=2^m$. Cavagna ukázal, že H sa v podstate nemení, keď nahradíme endogénnu informáciu exogénnou. Avšak H súvisí s koreláciami v postupnosti víťazných skupín. Keďže postupnosť víťazných skupín je exogénna a náhodná, predpokladáme $H = 0$ pre všetky hodnoty α . Toto však neplatí, lebo H hrá dvojakú rolu v pôvodnej MG: je odpoveďou systému na danú informáciu a nezávisí na pôvode informácie. Lenže (obr. 6):

- odpoveď systému na endogénnu informáciu sa ukáže v postupnosti víťazných skupín;
- reakcia systému na exogénnu informáciu nie je obsiahnutá v postupnosti víťazných skupín, iba určí nasledujúcu víťaznú skupinu a zaznamená úspešnosť stratégií. V prípade $H \neq 0$ majú agenti možnosť predpovedať reakciu systému na zadanú informáciu. Aj v tomto zmysle je pamäť v MG relevantná. Nahradenie endogénnej informácie exogénnou spôsobí stratu určitých vlastností MG, napr. tú, že návštevnosť baru a veľkosti minoritných skupín sú korelované a vykazujú časovú periodicitu pre $\alpha < \alpha_c$, aj keď typická veľkosť minoritných skupín zostáva rovnaká a vtedy je σ^2/N nezávislé na povahe informácie (obr. 7). Teda každá hra, v ktorej má periodičnosť návštevnosti baru značnú úlohu, dáva pre exogénnu informáciu iné výsledky.

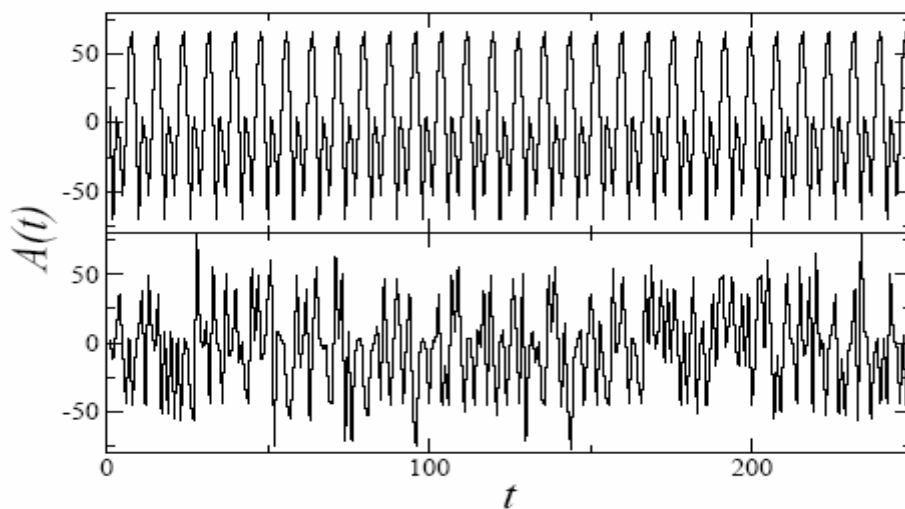
Obr. 16: Vzdialenosť najlepších stratégií agentov ako funkcia parametra $\alpha = 2^m/N$ pre $N=51$, $s=2$



Obr. 17: Vľavo vidíme porovnanie variance σ^2 , informácie H (štvorčky) a veľkosti ϕ (krúžky) pre model s exogénnou informáciou (\square, \circ) vs. model s endogénnou informáciou (\blacksquare, \bullet). Vpravo máme znázornený tok informácie v systéme. Minoritné pravidlo rozhodne o víťaznej akcii. Túto použijú agenti len na spätné ohodnotenie svojich stratégií



Obr. 18: porovnanie návštevnosti baru v symetrickej fáze s endogénnou (horný panel) a exogénnou informáciou (dolný panel) pre $N=301$, $m=2$, $s=2$



2.7. Maximalizácia návštevnosti

Agenti sa prispôbujú, aby dosiahli lepšie individuálne riešenie MG problému a tým je aj celkové plytvanie menšie ako pri náhodnom riešení MG pre $\alpha > \alpha_c$. Aj keď sú agenti sebeckí a chcú byť sami v minoritnej skupine bez ohľadu na akcie ostatných agentov, dynamika hry vedie k maximalizácii globálnej efektivity – k maximalizácii návštevnosti baru. Keby tu bola možná minimalizácia nejakej reprezentatívnej kvantity, dali by sa použiť metódy štatistickej mechaniky. MG sa však nikdy neustáli, kvôli minoritnému pravidlu. Vždy sa nájdu agenti, ktorí budú meniť stratégie a ani $\beta_i(t)$ ani $p_i^a(t)$ nedosiahnu stabilnú hodnotu. Ale keďže akcie agentov $a_i(t)$ závisia od úspešnosti stratégií $p_i^a(t)$ a to spätne závisí na predchádzajúcom vývoji $a_i(t)$, z dlhodobého hľadiska by sa agenti mali správať určitým nenáhodným spôsobom. Hodnota $m_i(t) = \sum_{\tau=0, \dots, t} a_i(\tau)$ by mohla mať vlastnú limitu pre $t \rightarrow \infty$, ak sa agent i správa určitým spôsobom. Napr. ak patrí medzi φ tzv. zmrznutých agentov, ktorí celý čas volia jednu stratégiu, tak potom $m_i(t)$ je priemer prípustných výstupov danej stratégie pre všetky možné realizácie informácie. Toto bolo kľúčové pri prvých pokusoch vyriešiť MG model. Najprv sa upravia dané rovnice modelu. Keďže model nezávisí od $s \geq 2$, položí sa $s=2$. Zavedie sa diferencia skóre dvoch stratégií agenta i $\delta p_i(t) = p_i^1(t) - p_i^2(t)$ a hodnota $\sigma_i(t) = \text{sign}[\delta p_i(t)]$. Potom sa rovnica (2) prepíše nasledovne:

$$\delta p_i(t+1) = \delta p_i(t) - \vec{\xi}_i * \vec{I}(t) g[A(t)] \quad (7)$$

$$A(t) = \sum_{j=1}^N a_j(t) = \sum_{j=1}^N [w_j + \sigma_j(t) \vec{\xi}_j] * \vec{I}(t) \quad (8)$$

kde $\vec{w}_i = (\vec{r}_i^1 + \vec{r}_i^2)/2$ a $\vec{\xi}_i = (\vec{r}_i^1 - \vec{r}_i^2)/2$. Takže máme $\vec{\beta}_i(t) = (\sigma_i(t) + 3)/2$. Zjednoduší sa funkcia $g(x) = \text{sign}(x)$ na $g(x) = x/D$. Môžeme napísať:

$$\delta p_i(t+1) = \delta p_i(t) - 1/D \vec{\xi}_i * \vec{I}(t) \left\{ \sum_{j=1}^N [w_j + \sigma_j(t) \vec{\xi}_j] * \vec{I}(t) \right\} \quad (9)$$

Predpokladá sa, že informácia je náhodná, a preto je z dlhodobého hľadiska každá z možných hodnôt $\vec{I}(t)$ rovnako pravdepodobná. Takže v limite $N \rightarrow \infty$ a $D \rightarrow \infty$ a zavedením $\tau = t/D$ dostávame, že pravá strana rovnice (7) sa nahradí jej strednou hodnotou z dlhodobého hľadiska:

$$\delta p_i(t+1) = \delta p_i(t) - \vec{\xi}_i * \left\{ \sum_{j=1}^N [w_j + m_j(t) \vec{\xi}_j] \right\} \quad m_i(t) = \sum_{t' = t-\tau}^t \sigma_i(t') \quad (10)$$

pričom fluktuácie okolo strednej hodnoty sú zanedbané (Zákon veľkých čísel). Body $p_i(t)$ súvisia s $m_i(t)$. Urobí sa aproximácia $m_i(t) = \tanh[\Gamma \cdot \delta p_i(t)]$, kde Γ je konštanta.

Pre $\Gamma \rightarrow 0$ dostávame nasledujúcu dynamickú rovnicu:

$$\frac{dm_i}{d\Gamma} = -2\Gamma(1-m_i^2) \left[\sum_{j=1}^N \vec{w}_j \cdot \vec{\xi}_i + \sum_j \xi_i \cdot \xi_j m_j \right] \quad (11)$$

čo sa dá prepísať do tvaru:

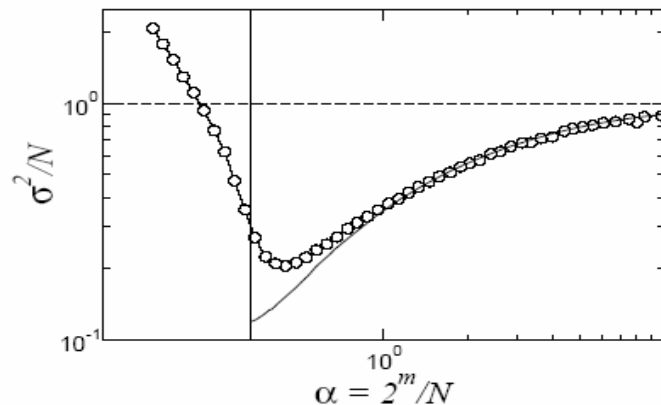
$$\frac{dm_i}{d\Gamma} = -\Gamma(1-m_i^2) (\delta \mathcal{N} / \delta m_i), \text{ kde } \mathcal{N}\{[m_i]\} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N (\vec{\omega}_i + \vec{\xi}_i m_i) \right]^2 \quad (12)$$

\mathcal{N} je kladná funkcia m_i , čo znamená, že je to špeciálna tzv. Lyapunova funkcia dynamického systému danému (11). Podobným spôsobom bol odvodený vzťah:

$$\sigma^2 = \bar{H} + \sum_{i=1}^N \vec{\xi}_i^2 (1-m_i^2) \quad (13)$$

Agenti sa snažia minimalizovať \mathcal{N} namiesto σ^2 . Ľahko sa ukáže, že \bar{H} závisí od parametra H , určite v blízkosti fázy prechodu, keď je H veľmi malé. Vtedy agenti preferujú minimalizovať informáciu (a tým aj počet arbitrážnych príležitostí) pred minimalizáciou celkových strát σ^2 . Vlastnosti základného stavu \bar{H} sa dajú analyzovať štandardnými metódami štatistickej mechaniky neusporiadaných systémov. Priemerné hodnoty z rozdielnych realizácií neusporiadanosti $\vec{\xi}_i$ a \vec{w}_i možno vyjadriť použitím metódy replikácie. Napriek predchádzajúcim drastickým aproximáciám a zjednodušeniam sa dospelo k existencii fázy prechodu v bode $\alpha_c \cong 0.33740$ a k pomerne presným predikciám hodnôt σ^2 pre $\alpha > \alpha_c$ (obr.8). $\bar{H} = 0$ pre $\alpha \leq \alpha_c$ a $\bar{H} \neq 0$ pre $\alpha \geq \alpha_c$. V prípade $\alpha \leq \alpha_c$ sú určité matematické problémy s analytickým riešením daným skúmaním základných vlastností \mathcal{N} a toto riešenie nezodpovedá pozorovaniu. Fakt, že pre $\alpha \geq \alpha_c$ je MG charakterizovaná minimalizáciou \mathcal{N} znamená dve veci. Za prvé, dynamika minimalizuje Lyapunovu funkciu danú predchádzajúcimi rozhodnutiami agentov, nie okamžitými rozhodnutiami. A po druhé, vo funkcii, ktorú sa agenti snažia minimalizovať, je obsiahnutá určitá neusporiadanosť, konkrétne neusporiadanosť $\vec{\xi}_i$ a \vec{w}_i . Podobná je dynamika procesu učenia v modeli neurónových sietí.

Obr. 19: porovnanie volatility pôvodnej MG (\circ) s riešením rovnice (13) dosiahnutým minimalizáciou H



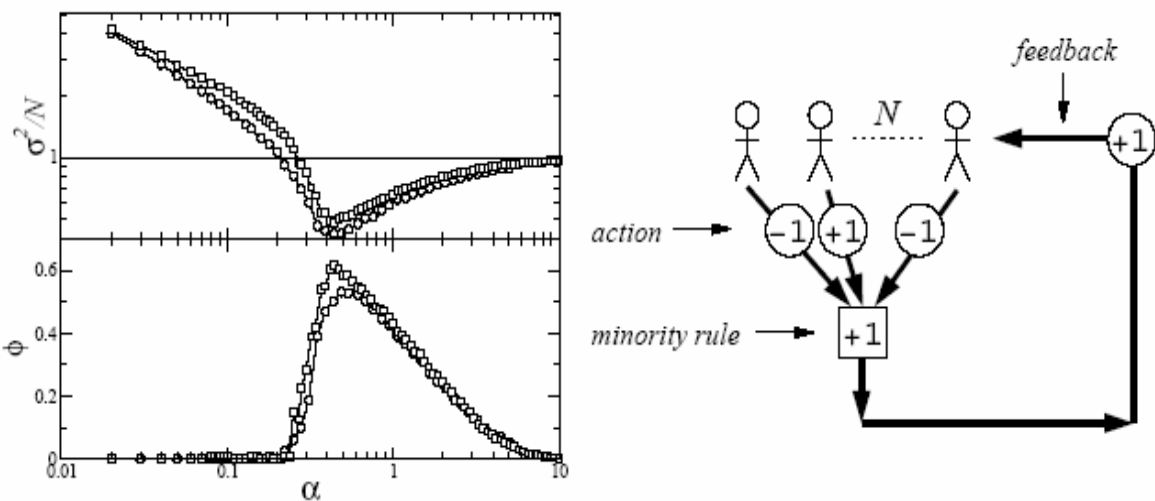
2.8. Zjednodušenia modelu, informácia, proces učenia

Nepodstatnosť informácie obsiahnutej v postupnosti víťazných skupín nastoľuje otázku, ako je možné, že prechod od modelu uzavretého systému s endogénnou informáciou k otvorenému systému s exogénnou informáciou v podstate nezmení správanie sa modelu. Vieme, že odpoveď spočíva v reakcii systému na zadanú informáciu. Spriemerovaním reakcií systému pri všetkých prípustných hodnotách informácie dostaneme strednú hodnotu reakcie systému a vtedy môžeme sledovať, ako sa vyvíjajú skóre všetkých stratégií súbežne. Napr. v kap. 7 sme zjednodušovaním dostali dvojicu rovníc pre $p_i^\alpha(t)$, kde je informácia nahradená svojím dlhodobým priemerom a vlastne sa využije iba raz, na prechod od jednej stratégie k ďalšej. Aby sa dospelo k tomu, ako sa dynamika systému vyvíja v priemere nad všetkými možnými hodnotami α , a nie iba pre $\alpha > \alpha_c$, boli použité rôzne metódy, napr. priemery Kramer-Moyovej expanzie. Táto technika sa používa na aproximácie difúzných stochastických procesov. Rovnica (9) definuje stochastický proces, ktorý možno aproximovať driftom spolu s difúziou v priestore bodov stratégií. V tomto prípade sa náhodný proces $\vec{I}(t)$ objavuje v rovnici (9) dvakrát, preto je v Kramer-Moyovej aproximácii nenulový len drift:

$$\delta p_i(t+1) = \delta p_i(t) - \xi_j^* \left\{ \sum_{j=1}^N [w_j + \sigma_j(t) \xi_j] \right\} \quad (14)$$

Oproti rovnici (9) informácia po spriemerovaní vďaka efektívnemu párovaniu stratégií agentov vypadla. Takže nedovolíme meniť ohodnotenia stratégií každé kolo, ale ohodnotenia stratégií môže zmeniť iba naakumulovaný efekt na základe veľkého množstva rozhodnutí na trhu. Rovnica (14) označuje tzv. batch* verziu klasickej on-line MG. Ide o najjednoduchší typ dynamického systému, ktorý reprodukuje pozorovania MG pre všetky hodnoty α (obr. 9).

Obr. 20: výsledky MG použitím rovníc (14) (\square) a simulácie z pôvodnej MG (\circ). Použité parametre: $N = 100$, $s = 2$. Vpravo máme načrtnutý tok informácie v modeli MG so spriemerovanou informáciou. Spätná väzba umožňuje agentom ohodnotiť svoje stratégie a dáva podnet k efektívnej interakcii v systéme



* Slovo batch - zhluk pochádza z odbornej literatúry o neurónových sieťach

Fluktuácie sú zanedbané, preto tu nájdeme určité kvantitatívne rozdiely ($\sim \sigma^2$), ale žiadne kvalitatívne zmeny, čo sa týka charakteristík MG. V rámci aproximácií je volatilita daná nasledovne:

$$\sigma^2 = \bar{\Omega} + 2 \sum_{i=1}^N \overline{h_i \langle \sigma_i(t) \rangle} - \sum_{i,j=1}^N \overline{J_{i,j} \langle \sigma_i(t) \sigma_j(t) \rangle} \quad (15)$$

kde

$$\Omega = \sum_{j=1}^N \vec{w}_i^* \vec{w}_j / D; \quad h_i = \sum_{j=1}^N \vec{w}_j^* \vec{\xi}_i / D; \quad J_{ij} = -\frac{1}{D} \vec{\xi}_i^* \vec{\xi}_j \quad (16)$$

Rovnica (14) pripomína rovnicu (10), akurát namiesto okamžitej $\sigma_i(t)$ je akumulovaná dočasná informácia $m_i(t)$. Rovnicu (14) môžeme prepísať do tvaru kontinuálnej limity

$$\frac{d(\delta p_i)}{dt} = -\frac{\delta \mathcal{N}[\{\sigma_i\}]}{\delta \sigma_i} \quad (17)$$

kde $\delta \mathcal{N}[\{\sigma_i\}]$ je dané rovnicou (12), kde použijeme $\sigma_i(t)$ namiesto $m_i(t)$. Teraz už \mathcal{N} vo všeobecnosti nie je Lyapunova funkcia (14), lebo gradient sa vzťahuje na σ , nie na p . Ale ako bolo uvedené, \mathcal{N} je Lyapunova funkcia pre $\alpha > \alpha_c$ pre $m_i = \langle \sigma_i(t) \rangle$. Pozrime sa ďalej na hlavné rysy MG, na prvky, ktoré určujú správanie sa MG. Rovnicu (14) možno prepísať do tvaru:

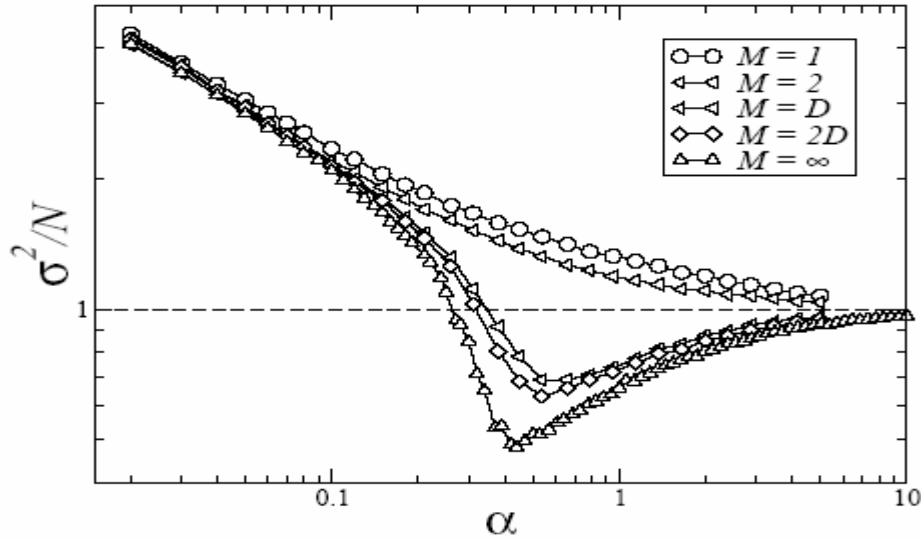
$$\sigma_i(t+1) = \text{sign} \frac{\delta p_i(0)}{t} - \Omega_i + \sum_{j=1}^N J_{ij} x_j(t); \quad x_i(t) = \frac{1}{t} \sum_{\tau=0}^t \sigma(\tau) \quad (18)$$

kde $x_i(t)$ hovorí o časovom priemere akcií agenta i za celkový čas. Existuje tu určitá paralela s neurónovými sieťami. Predpokladajme, že $\delta p_i(0) = 0$. Agenti – neuróny. Na neuróny pôsobí vonkajšia informácia Ω_i a rovnica (16) hovorí o tzv. anti-hebian pravidle. Súvisí s procesom opačným učeniu, používa sa tu namiesto klasického hebian pravidla $J_{ij} = \vec{\xi}_i^* \vec{\xi}_j$, ktoré popisuje proces učenia. Anti-hebian pravidlo sa využíva v procesoch, kde sú nepravdivé informácie odstránené z priestoru prípustných konfigurácií $\sigma_i(t)$ na základe toho, že nezodpovedajú uloženým vzorom, štandardom. V MG je odôvodnené minoritným pravidlom, ktoré núti agentov odlišovať sa a meniť spôsob myslenia. Na MG systém reprezentovaný rovnicou 18 sa môžeme pozerať ako na proces učenia:

$$\sigma_i(t+1) = \text{sign} \left[-\Omega_i + \sum_{j=1}^N J_{ij} x_j(t) \right]; \quad x_i(t) = \frac{1}{M} \sum_{\tau=0}^M \sigma_i(t-\tau) \quad (19)$$

kde $x_i(t)$ vyjadruje, ako sa v priemere správa agent i za posledných M časových krokov. Tento typ modelov neurónových sietí (ANN) s časovým posunom sa používal kvôli uchovávaniu a generovaniu časových postupností určitých myšlienkových pochodov. V MG časovo posunutý dynamický systém nevyplýva z potreby prijímať alebo vytvárať myšlienkové pochody, resp. vzory spôsobu myslenia, ale skôr z induktívneho procesu racionálneho uvažovania, ktorý uchováva informáciu o teoretickej úspešnosti stratégií počas priebehu celej hry. Podľa toho sa agenti učia, ako hrať lepšie.

Obr 21: volatilita dosiahnutá simuláciami rovníc (19) pre rôzne hodnoty M , pričom $N = 10$



Rovnica (19) definuje nový typ ANN s týmito hlavnými črtami:

- D rôznych vzorov je uchovaných podľa anti-hebiana pravidla (16), v súlade s minoritným pravidlom;

- každý neurón reaguje na vonkajšie informačné pole dané Ω_i ;

- dynamický systém je posunutý o posledných M krokov kvôli procesu adaptácie;

Tieto vlastnosti sú podstatné kvôli popisu pozorovaného správania sa MG. Je otázne, či stačí

uchovávať spätnú informáciu o teoretickej úspešnosti stratégií agentov posledných $M < \infty$

krokov (obr. 10), alebo si treba pamätať kompletnú informáciu $M \rightarrow \infty$. Ak je M malé,

systém nikdy nedosiahne riešenie lepšie než v prípade náhodného rozhodovania agentov. Pre

$M = 1, 2$ to vyzerá ako v oblasti s vysokou volatilitou $\alpha \ll \alpha_c$, agenti reagujú len na

informáciu o poslednej víťaznej skupine. Jediná možnosť, ako agenti môžu dosiahnuť riešenie

lepšie než pri náhodnom rozhodovaní, je uchovávať informáciu o stratégiách viac kôl dozadu

$M \gg D$, pričom $\alpha \geq \alpha_c$. Rovnica (18) sa prepíše ako proces učenia. V rovnici (19) sa časová

závislosť chápe ako proces učenia agentov (alebo ako proces vytrénovania skupiny navzájom

interagujúcich vnemových neurónov - perceptorov). Každopádne, proces učenia môžeme

vyjadriť nasledovne:

$$\sigma_i(t+1) = \text{sign} \left[-\Omega_i + \sum \tilde{J}_{ij}(t) \sigma_j \right] \quad (20)$$

$$\tilde{J}_{ij}(t) = \frac{t}{t+1} \tilde{J}_{ij} \sigma_j(t+1) \sigma_j(t) + \frac{1}{t+1} J_{ij} \quad (21)$$

MG ako systém N interagujúcich perceptorov (N agentov) bola uvažovaná s obmeneným pravidlom učenia a za predpokladu homogenosti agentov. Z rovnice (21) vidíme, že MG má vlastný proces učenia, ktorý sa realizuje ako adaptácia agentov počas iterácií hry. Ak by boli splnené základné znaky MG - heterogenosť, minoritné pravidlo a časovo posunuté interakcie, mohli by sme pristupovať k MG novým spôsobom - ako k všeobecnému problému adaptácie v skupine N perceptorov danému (21).

2.9. Dynamika a vlastnosti MG z pohľadu štatistickej fyziky

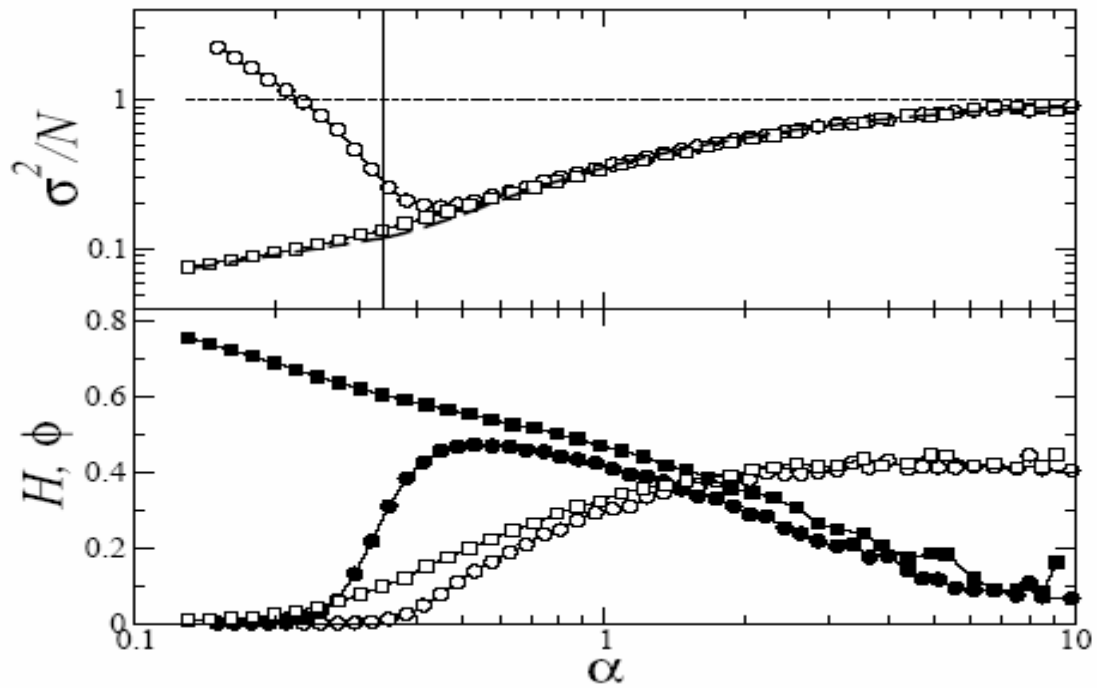
Zdalo sa, že použitie metódy replikácie vedie k nájdeniu riešenia MG. Teda indukzívne racionálne uvažovanie N agentov v MG možno popísať minimalizáciou globálnej reakčnej funkcie \mathcal{N} . To naznačuje analógiu s problémom hľadania ekvilibria v neusporiadaných systémoch. Náš prípad je však iný. Predpokladajme, že agenti veria jednej zo svojich stratégií a začnú hru s tým, že pridelia tejto stratégii nenulové začiatkové skóre. Inými slovami $p_i^\alpha(0) \neq 0$ pre nejaké α v rovnici (2). Simulácie naznačujú podstatné zmeny vo výsledkoch pre oblasť $\alpha \leq \alpha_c$. Oblasť s vysokou volatilitou zmizne a oblasť s nízkou volatilitou sa rozšíri. Navyše, volatilita v stabilnom stave pre $\alpha \leq \alpha_c$ závisí od počiatkovej podmienky $p_i^\alpha(0)$. To, že stabilný stav, ktorý agenti dosiahnu vďaka adaptácii, závisí od počiatkovej podmienky, znamená neergodicitu v tejto oblasti. Takisto k zmene v správaní sa MG v $\alpha = \alpha_c$ nedochádza kvôli ekvilibriovej, ale kvôli neekvilibriovej fáze prechodu. Presný matematický popis tohto javu bol dosiahnutý vďaka generujúcemu funkcionálu metódy De Dominicis. Táto metóda umožňuje preniesť priemernú hodnotu neusporiadanosti v systéme priamo do dynamických rovníc. V ďalšom uvidíme, že to vedie na množinu uzavretých rovníc, korelačnú funkciu $C(t, t')$ a reakčnú funkciu $R(t, t')$. Obe sú funkciami premenných zahrnutých v dynamických rovniciach $[p_i^\alpha(t)$ a $\sigma_i(t)]$ v rôznych časoch. Systém dynamických rovníc pre $C(t, t')$ a $R(t, t')$ je ťažké riešiť všeobecne, ale určitý pokrok sa dá dosiahnuť, ak sa pozrieme na dve konkrétne situácie:

- hľadanie asymptoticky stacionárneho riešenia, keď $C(t, t') = C(t - t')$ a $R(t, t') = R(t - t')$. Ak predpokladáme, že systém nereaguje anomálne, že fluktuácie okolo stacionárneho stavu v konečnom čase vymiznú a susceptibilita je konečná, potom sú výsledky získané v kap. 7 minimalizáciou \mathcal{N} platné. Navyše, stacionárne riešenie predpovedá samo osebe, kedy sa zrúti: susceptibilita riešenia ($X = \sum_{\tau > 0} G(\tau)$) diverguje pri $\alpha = \alpha_c$ a predpoklad stacionarity v riešení je správny len pre $\alpha > \alpha_c$;

- pre $\alpha \leq \alpha_c$ zistiť niekoľko prvých hodnôt korelačnej a reakčnej funkcie. Je známe, že volatilita výrazne závisí od počiatkových podmienok: pre $s = 2$, v závislosti na $\delta p_i(0)$, bola nájdená fáza prechodu z oblasti s vysokou volatilitou $\sigma^2/N \sim \alpha^{-1}$ do oblasti s nízkou volatilitou $\sigma^2/N \sim \alpha^{1/2}$ (obr. 11).

Tieto výsledky zdôrazňujú, že fáza prechodu nie je ekvilibriová a že iba pre $\alpha > \alpha_c$ je dynamický proces adaptácie ergodický, takže pre ľubovoľnú počiatkovú podmienku sa stacionárny stav charakterizovaný minimom \mathcal{N} nakoniec dosiahne. Pre $\alpha \leq \alpha_c$ je systém neergodický, keďže silne závisí od počiatkových podmienok. MG sa celkovo chápe bez vyžadovania rovnovážnosti a bez nejakých teorém o vytratení sa fluktuácií, takže v princípe nie je dôvod domnievať sa, že dynamika MG by mala byť ergodická ako iné modely v štatistickej mechanike. Napriek tomu sa však metóda štatistickej fyziky - analýza generujúcich funkcionálov - ukázala byť vhodnou metódou na štúdium MG, keďže sa zameriava na dynamiku neusporiadaných systémov (tzv. spin – glass modely). V princípe teda nie je nevyhnutné zaoberať sa komplikovanými vlastnosťami MG (rovnovážnymi stavmi s neekvilibriovou fázou prechodu, vzťahmi o miznúcich fluktuáciách, porušenou stabilitou systému) za účelom prerobiť minoritnú hru na typický model štatistickej fyziky, zvlášť keď vezmeme do úvahy, že hlavné vlastnosti MG modelu nepramenia vo fyzike.

Obr. 22: simulácie pôvodného modelu MG (s endogénnou informáciou) pre rozličné začiatočné podmienky, $m=7$, $s=2$, $p_i^1(0)=0$ (\circ) a $p_i^1(0)=100$ (\square). Prerušované čiary v hornom paneli zodpovedajú stacionárnemu riešeniu pre $\alpha > \alpha_c$ a $\sigma^2/N \sim \alpha^{1/2}$ pre $\alpha \leq \alpha_c$. V dolnom paneli symboly \blacksquare a \bullet označujú H , \square a \circ značia ϕ



3. Analytické riešenie

3.1. Zostavenie modelu (Coolenov model MG)

Azda najznámejší fyzik, ktorý sa zaoberá neekvilíbrovou analýzou MG z pohľadu štatistickej fyziky a matematiky, je A. C. C. Coolen. Jeho analýzy vychádzajú z modelu základnej MG [5]:

- $i=1,\dots,N$ agentov robí binárne rozhodnutie (kúpiť vs predat) každú iteráciu t , teda $s_i(t) = \pm 1$
- každý agent sa rozhoduje nezávisle od ostatných
- agenti majú rovnaké informácie I_t v iterácii t (stav na trhu, politická situácia, predpoveď počasia...) z diskkrétnej informačnej množiny $\Omega = \{I_1, \dots, I_p\}$ veľkosti p
- $P=2^m$, kde m je pamäť MG, počet odohratých kôl, počet iterácií
- Profituje menšina – minority na základe dopytu a ponuky, teda agenti i , pre ktorých $s_i(t)[\sum_j s_j(t)] < 0$
- Informácia $\rightarrow N$ rozhodnutí skrze S rozhodovacích stratégií $R_{ia} = (R_{ia}^1, \dots, R_{ia}^p)$ z $\{-1; 1\}$, kde aktívna stratégia a je z množiny $\{1, \dots, S\}$
- Teda keď si agent i zvolí stratégiu a v iterácii t , pričom ak sa všeobecná informácia $I(t) = I_\mu(t)$, tak agent i vyberie príslušnú stratégiu v tabuľke R_{ia} a urobí rozhodnutie: $s_i(t) = R_{ia}^{\mu(t)}$

Keby sme poznali aktívne stratégie všetkých agentov, rozhodnutia agentov na danú situáciu by boli plne deterministické, ale nevieme, a preto zostáva nájsť recept na rozhodovanie sa medzi S stratégiami ako funkciu času pre všetkých agentov.

- agenti si vyberajú stratégiu, ktorá by ich mala zaradiť medzi menšinu, aby $R_{ia}^{\mu(t)} = -\text{sgn} [\sum_j s_j(t)]$
- agenti merajú kumulatívnu úspešnosť p_{ia} svojich stratégií a každú iteráciu t sa rozhodnú pre stratégiu a_t s najväčšou aktuálnou hodnotou $p_{ia}(t)$, pričom $p_{ia}(t+1) = p_{ia}(t) - \varphi/N * R_{ia}^{\mu(t)} \sum_j s_j(t)$, kde $\varphi > 0$, N je škálovacia konštanta
- MG je dynamický systém, ktorý popisujú nasledovné nelineárne rovnice:

$$\begin{aligned} p_{ia}(t+1) &= p_{ia}(t) - \varphi/N * R_{ia}^{\mu(t)} A(t) & A(t) &= \sum_j R_{ja}^{\mu(t)}(t) \\ a_j(t) &= \arg \max_{a=\{1,\dots,S\}} p_{ia}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Pod $\mu(t)$ sa rozumie deterministická funkcia skrz celú históriu vývoja na trhu, cez všetky iterácie MG, až do aktuálnej iterácie $\mu(t) = K[A(t-1), A(t-2), \dots]$ pre nejakú funkciu $K[\dots]$. Tým pádom je proces (1) plne deterministický, závislý na minulom vývoji, a teda non-lokálny v čase.

Volatilita, alebo miera kolísania trhu, je preškálovaná a časovo spriemerovaná:

$$\sigma^2 = \lim 1/(TN) * \sum_{t=1, \dots, T} A^2(t) \quad (2)$$

pre T idúce do nekonečna. Očakávaná hodnota $A(t) = 0$. Simulácie ukázali závislosť σ^2 na α - relatívnej veľkosti množiny Ω , pričom $\alpha = p/N$, pre ľubovoľné S, pre ľubovoľne veľké N (obr.1). To umožňuje poslať N do nekonečna. Ukázala sa nezávislosť σ^2 na množstve stratégií S, preto sa vo väčšine modelov $S=2$. Pre veľké α dosahuje σ^2 hodnotu 1, čo zodpovedá náhodnému rozhodovaniu sa agentov. Ukázala sa existencia fázy prechodu a v prípade $\alpha < \alpha_c \sim 0.3374$ je σ^2 veľmi veľké, čo znamená, že prehrávajúcich je \gggg než $N/2$. Pre $\alpha \sim 1/2$ je σ menšia ako pri náhodnom rozhodovaní agentov a skupina porazených $\sim N/2$, teda je tu možnosť koordinácie agentov za účelom minimalizovať σ^2 a predpovedať situáciu na trhu, čím by sa dosiahla väčšia efektivita. Položíme $S = 2$ a $N \rightarrow \infty$. Tým sa zjednoduší daný dynamický systém (1). Zavedieme nové premenné:

$$q_i = (p_{i1} - p_{i2})/2; \quad \xi_i^{\mu} = (R_{i1}^{\mu} - R_{i2}^{\mu})/2; \quad \Omega_{\mu} = (\sum_j [R_{j1}^{\mu} + R_{j2}^{\mu}])/2 * \sqrt{N}$$

a proces

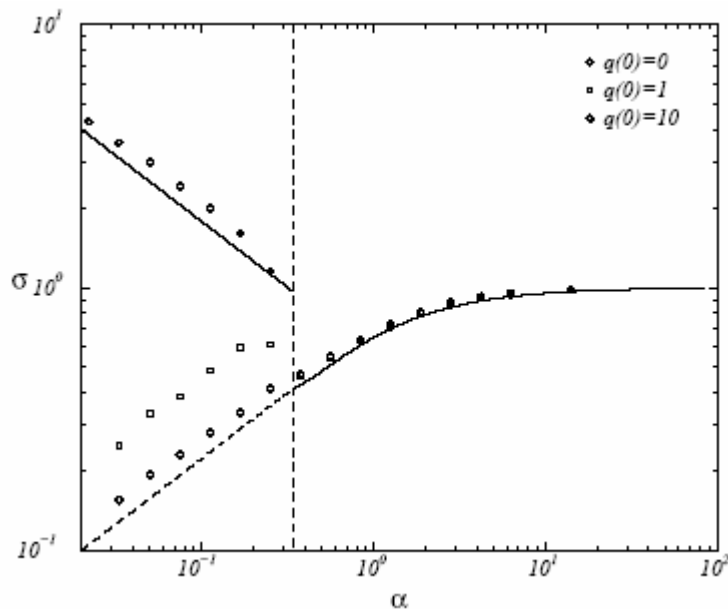
$$p_{ia}(t+1) = p_{ia}(t) - \varphi/N * R_{ia}^{\mu(t)} A(t), \quad A(t) = \sum_j R_{ja}(t)^{\mu(t)}(t) \quad (1)$$

$$a_j(t) = \arg \max_{a \in \{1, \dots, S\}} p_{ia}(t)$$

sa prepíše na tvar

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \varphi/\sqrt{N} * \xi_i^{\mu(t)} * [\Omega_{\mu(t)} + 1/\sqrt{N} * \sum_j \xi_j^{\mu(t)} * \text{sgn}(q_j(t))] \quad (3)$$

Obr. 23: závislosť volatility σ na preškálovanom parametri $\alpha = p/N$ množiny externej informácie. Numerické simulácie pre 3 rôzne počiatkové podmienky, pričom $s = 2$ a $N = 4000$. Volatilita nadobúda hodnotu $\sigma = 1$ pri náhodnom rozhodovaní agentov



Ukázalo sa, že ak premenné $\mu(t)$ nebudeme vypočítavať z minulého vývoja na trhu, ale vyberať z množiny $\{1, \dots, \alpha N\}$ nezávisle a s rovnakými pravdepodobnosťami, volatilita σ zostane zhruba nezmenená. Agenti nepredpovedajú vývoj na trhu, iba reagujú na tú istú informáciu. Vzťah (3) vyjadruje neusporiadaný Markovov proces. Preškálovaním pozorovaných hodnôt sa dosiahne ich nezávislosť na počte agentov N, pre N dostatočne

veľké. Zavedenie šumu v rozhodovaní agentov (decision noise) umožňuje dosiahnuť riešenie lepšie než v prípade náhodného rozhodovania agentov. Ďalším prvkom je existencia tzv. zmrznutých agentov, resp. producentov, pre ktorých $q_i(t) \sim t$ ($t \rightarrow \infty$), $q_i = (p_{i1} - p_{i2})/2$. Nakoniec používajú jedinou aktívnu stratégiu. Pri prvom pokuse riešiť MG autori zjednodušili model takým spôsobom, že zanedbali fluktuácie a sústredili sa len na očakávané hodnoty $m_i(t) = \int dz P(z) \text{sgn}[q_i(t) + z]$. Preškálovali čas $t/N \rightarrow \tau$ a pre limitný prípad $N \rightarrow \infty$ odvodili deterministické rovnice v tvare $dm_i(\tau) / d\tau = f_i[m(\tau)]$, ktoré majú Lyapunovu funkciu. Nasledovala analýza rovnovážneho stavu s použitím ekvilibriovej štatistickej mechaniky a replikatívnej teórie. Vypočítala sa priemerná neusporiadanosť a našla sa fáza prechodu pre $\alpha_c \cong 0,33740$, avšak pre $\alpha < \alpha_c$ sa vyskytli matematické problémy. Rozpútala sa diskusia o význame zjednodušenia a predpokladov, o správnosti daných simulácií. Pre MG bola následne odvodená a numericky riešená Fokker-Planckova rovnica. Ukázalo sa, že fluktuácie nemožno zanedbať, a teda simulácie nevedú k ekvilibriu. Rôzne predpoklady rôznych autorov viedli k Fokker-Planckovým rovniciam s rôznymi difúznymi maticami. Čo sa týka volatility, líšili sa výsledky autorov, ktorí použili aditívny rozhodovací šum od tých, ktorí použili multiplikatívny šum. Názory vedcov boli nejednotné, exaktné riešenie MG stále chýbalo.

3.2. Generujúci funkcionál

Z analytického hľadiska MG predstavuje neusporiadaný stochastický proces bez exaktne definovaného ekvilibria, preto bolo potrebné zamerať sa na dynamiku tohto procesu. Prvá analýza založená na generujúcom funkcionále bola aplikovaná na modifikovanú verziu modelu, na tzv. Batch MG. V rovnici (3) sa dynamika menila podľa každého náhodne zvoleného informačného indexu $\mu(t)$, kým v Batch MG sa dynamika definuje priamo cez priemer nad všetkými prípustnými možnosťami externej informácie $\mu \in \{1, \dots, \alpha N\}$:

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \frac{1}{\alpha N} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \xi_i^\mu \left\{ \Omega_\mu + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \xi_j^\mu \text{sgn}[q_j(t)] \right\} + \Theta_i(t) \quad (4)$$

Aby sa zabezpečilo $O(N^0)$ charakteristické časové škálovanie, položilo sa $\mu = \sqrt{N}$. Tým bola odstránená stochasticita, dostávame neusporiadanú deterministickú mapu. Externá veličina $\Theta_i(t)$ bola pridaná za účelom neskoršieho definovania reakčných funkcií. Analýza De Dominicis je založená na nasledujúcom generujúcom funkcionále, ktorý je vlastne priemernou hodnotou funkcionálov líšiacich sa kvôli neusporiadanosti systému, teda gen. funkcionál s priemernou neusporiadanosťou:

$$\overline{Z[\Psi]} = \left\langle e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{\tau \geq 0} \Psi_i(\tau) q_i(\tau)} \right\rangle \quad (5)$$

Z (5) možno vyjadriť zaujímavé vlastnosti systému ako individuálne priemerné hodnoty q , ich multiplikatívne kovariancie v rôznych časoch a reakčné funkcie. Zadefinujú sa vhodné časovo závislé polia, ktoré sú lineárne závislé na množstve štatisticky nezávislých neusporiadaných premenných $\{R_{ia}^\mu\}$, a formujú dynamiku (analogicky ku lokálnym magnetickým poliam v tzv. spin-glass modeloch). Vzťah (5) sa prepíše ako suma (alebo integrál) nad všetkými krivkami

určenými týmito poliami a ďalej sa upraví. Premenné, ktoré predstavujú neusporiadanosť systému, sa sústredia do podobných polí a po úprave sa vyskytnú lineárne v exponentoch, čo umožní nájsť akýsi priemer neusporiadanosti systému. Nájdeme výraz, ktorý v sebe zahŕňa integrál nad všetkými prípustnými hodnotami korelačných a reakčných funkcií pre jedného agenta:

$$C_{\tau\tau'} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overline{\langle \text{sgn}[q_i(\tau)] \text{sgn}[q_i(\tau')] \rangle} \quad (6)$$

$$G_{\tau\tau'} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \Theta_i(\tau')} \overline{\langle \text{sgn}[q_i(\tau)] \rangle} \quad (7)$$

V limite $N \rightarrow \infty$ sa podarilo vyjadriť uzavreté dynamické rovnice pre potrebné parametrické výrazy. Ide o parametre, ktoré boli pozorované stabilne počas celého priebehu MG, a ktoré popisujú mechanizmus MG. Dostávame dynamický systém pre efektívny stochastický proces z pohľadu jedného agenta:

$$q(\tau+1) = q(\tau) + \Theta(\tau) - \alpha \sum_{\tau' \leq \tau} [\bar{1} + G]_{\tau\tau'}^{-1} \text{sgn}[q(\tau')] + \sqrt{\alpha} \cdot \eta(\tau) \quad (8)$$

kde pre gaussovský šum s nulovou strednou hodnotou $\eta(\tau)$ platí:

$$\langle \eta(\tau) \eta(\tau') \rangle = \left[(\bar{1} + G)^{-1} D (\bar{1} + G^+)^{-1} \right]_{\tau\tau'} \quad D_{\tau\tau'} = 1 + C_{\tau\tau'} \quad (9)$$

Parametre $\{C, G\}$ vyjadríme z rovníc (8, 9) podobne ako v (6), (7):

$$C_{\tau\tau'} = \overline{\langle \text{sgn}[q(\tau)] \text{sgn}[q(\tau')] \rangle} \quad G_{\tau\tau'} = \frac{\partial}{\partial \Theta(\tau')} \overline{\langle \text{sgn}[q(\tau)] \rangle} \quad (10)$$

pre $\forall \tau, \tau' \in N$. Nájsť všeobecné analytické riešenie (10) je extrémne ťažké. V praxi je nutné buď sa obmedziť na niekoľko prvých časových krokov, kým dospejeme ku stacionárnemu riešeniu, alebo riešiť úlohu numericky. Napríklad sa môžeme zamerať na asymptotické stacionárne riešenia v tvare $C_{\tau\tau'} = C(\tau - \tau')$ a $G_{\tau\tau'} = G(\tau - \tau')$. Za predpokladu, že integrálna hodnota reakčnej funkcie nie je nekonečne veľká ($X = \sum_{\tau > 0} G(\tau)$) sa vieme dopracovať k exaktnej uzavretej rovnici pre koreláciu $c = \lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)$:

$$c = 1 - \left(1 - \frac{1+c}{\alpha} \right) \text{erf} \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2(1+c)}} \right] - \sqrt{\frac{2(1+c)}{\pi\alpha}} e^{-\frac{\alpha}{2(1+c)}} \quad (11)$$

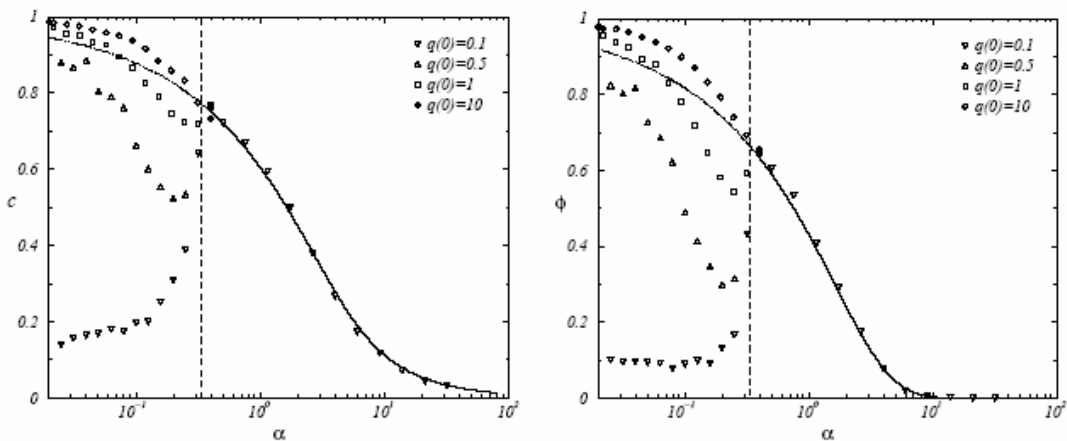
kde c je funkciou parametra α . Podobne sa dajú nájsť aj vyjadrenia pre počet tzv. zmrznutých agentov Φ a pre veličinu X :

$$\Phi = 1 - \text{erf} \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2(1+c)}} \right] \quad (12)$$

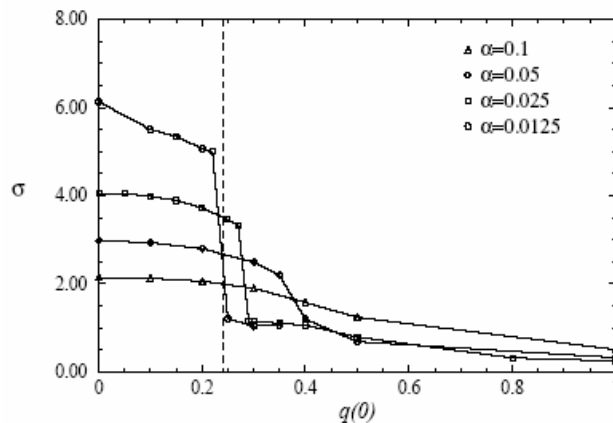
$$X = (1 - \Phi) / (\alpha - 1 + \Phi) \quad (13)$$

Pre $\alpha \rightarrow \infty$ máme $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} c = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Phi = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} X = 0$. Zo (13) vyplýva, že predpoklad $X < \infty$ dôležitý pre vzťahy (11), (12) padá pre $\alpha = 1 - \Phi$. Z toho máme kritickú hodnotu α_c , ktorá signalizuje nárast neergodicity. Zo vzťahu (12) dostávame $\alpha_c \approx 0.33740$. Vzťahy (11) a (12) boli riešené aj numericky ako funkcie parametra α (obr. 2). Oblasť $\alpha > \alpha_c$ vykazuje výbornú zhodu so simuláciami, kým pre $\alpha < \alpha_c$ podľa očakávaní pozorujeme neergodicitu v dôsledku porušenia predpokladu $X < \infty$. Všimnime si, že zo vzťahov (11), (12) nevieme priamo vyjadriť volatilitu, dokonca ani výlučne pre oblasť $\alpha > \alpha_c$. Treba zdôrazniť, že pre $\alpha < \alpha_c$ vzťahy (8), (9), (10) zostávajú naďalej v platnosti. Nájsť ich stacionárne riešenia analyticky je však omnoho ťažšie. V oblasti $\alpha < \alpha_c$ bola o.i. pozorovaná závislosť volatility riešení od škálovania. K riešeniam s nízkou volatilitou $\sigma \sim \sqrt{\alpha}$ ($\alpha \rightarrow 0$) dospievame pri začiatočných podmienkach s veľkou hodnotou $|q_i(0)|$, kým riešeniam s vysokou volatilitou $\sigma \sim \alpha^{-1/2}$ ($\alpha \rightarrow 0$) predchádzajú začiatočné podmienky s nízkou hodnotou $|q_i(0)|$. Za cenu jednoduchých aproximácií dostávame kritickú hodnotu $|q_i(0)|$, $q_c(0) \approx 0.242$. $Q_c(0)$ vyznačuje oblasť existencie riešenia s vysokou volatilitou (obr. 3).

Obr. 24: kovariancia $c = \lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$ (vľavo) a frakcia zmrznutých agentov ϕ (vpravo) v stacionárnom stave. Vidíme štvoro simulácií po 1000 iteráciách s rôznymi homogénnymi počiatkovými podmienkami ($q_i(0) = q(0) \square_i$), $N = 4000$. Plné krivky vpravo od kritického bodu (prerušované vertikály) sú teoretické predikcie dané riešením (16), (17). Vľavo od kritického bodu sú tieto predikcie predĺžené a podľa očakávania nesprávne ($\alpha < \alpha_c$)



Obr. 25: Zobrazenie kritickej hodnoty začiatočnej podmienky $q_c(0)$, ktorá je horným ohraničením oblasti existencie riešenia s vysokou volatilitou $\sigma \sim \alpha^{-1/2}$ ($\alpha \rightarrow 0$). Opäť máme štvoro simulácií po 1000 iteráciách pre štyri rôzne hodnoty α ; $N = 4000$ a homogénne počiatkové podmienky $q_i(0) = q(0) \square_i$. Dáta potvrdzujú predikciu $q_c(0) \approx 0.242$ (prerušovaná vertikála)



3.3. Riešenie Batch MG s rozhodovacím šumom

Vezmeme rovnicu (4), v ktorej nahradíme $\text{sgn}[q_i(\tau)]$ výrazom $\sigma[q_i(t), z_i(t)|T_i]$, pričom $\{z_i(t)\}$ reprezentuje náhodné premenné s rovnakou distribúciou, s nulovou strednou hodnotou a jednotkovou varianciou. Parametre $T_i \geq 0$ vyjadrujú úroveň šumu pre agentov i . Pre funkciu $\sigma[q_i(t), z_i(t)|T_i]$ platí:

- $\sigma[q, z|T] \in \{-1, 1\}$,
- $\sigma[q, z|0] = \text{sgn}[q]$ (pre $T \rightarrow 0$ sa dostávame naspäť k predchádzajúcemu modelu),
- $\int dz P(z) \sigma[q, z|\infty] = 0$ (s $T \rightarrow \infty$ sa rozhodovanie agentov stáva náhodným).

Šum môžeme zvoliť aditívny, napr.

$$\sigma[q, z|T] = \text{sgn}[q + Tz] \quad (14)$$

alebo multiplikatívny:

$$\sigma[q, z|T] = \text{sgn}[q] \text{sgn}[1 + Tz] \quad (15)$$

Od deterministickej rovnice (4) sa dostávame k jej stochastickej verzii:

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \frac{1}{\alpha N} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \xi_i^\mu \left\{ \Omega_\mu + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \xi_j^\mu \text{sgn}[q_j(t), z_j(t)|T_j] \right\} + \Theta_i(t) \quad (16)$$

Analýza je analogická ako v predchádzajúcom modeli (4). V limite $N \rightarrow \infty$ sa opäť dostávame k uzavretým rovniciam pre korelačnú a reakčnú funkciu s priemernou neusporiadanosťou (6, 7), ktoré opisujú efektívny stochastický proces z pohľadu jedného agenta:

$$q_i(\tau+1) = q_i(\tau) + \Theta(\tau) - \alpha \sum_{\tau' \leq \tau} \left[\bar{I} + G \right]_{\tau'}^{-1} \sigma[q(\tau'), z(\tau')|T] + \sqrt{\alpha} \eta(\tau) \quad (17)$$

parametrizovaný šumom s veľkosťou rozsahu T . Hodnoty s priemernou hodnotou neusporiadanosti budeme ďalej značiť $\langle \dots \rangle_T$. Pre kovariancie šumu $\eta(\tau)$ naďalej platí vzťah (9), nezávislé náhodné premenné $\{z(\tau)\}$ majú rovnakú distribúciu ako premenné $\{z_i(t)\}$ v (16).

Rovnice parametrov (10) sa nahradia:

$$C_{\tau\tau'} = \int_0^\infty dT W(T) \langle \text{sgn}[q(\tau)] \text{sgn}[q(\tau')] \rangle_T \quad (18)$$

$$G_{\tau\tau'} = \int_0^\infty dT W(T) \frac{\partial}{\partial \Theta(\tau')} \langle \text{sgn}[q(\tau)] \rangle_T \quad (19)$$

kde distribučná funkcia veľkostí rozsahov šumu zodpovedá vzťahu:

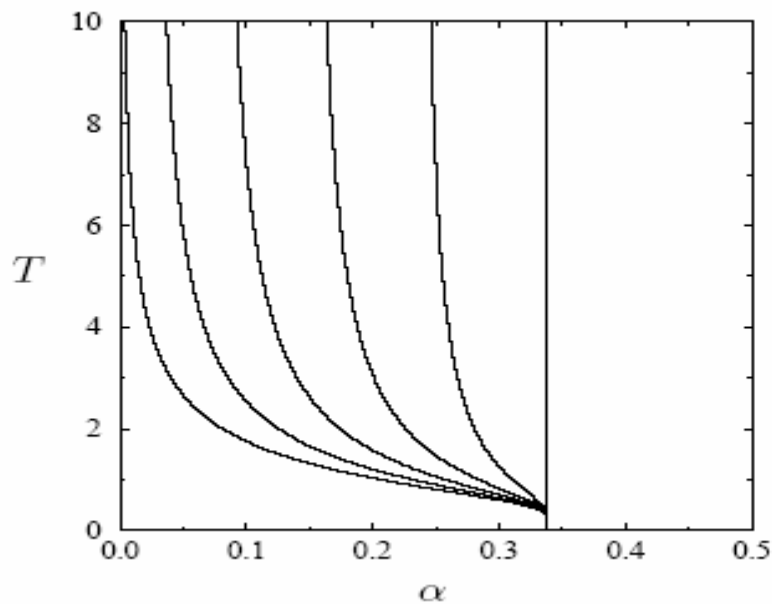
$$W(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta[T - T_i] \quad (20)$$

Ak položíme $W(T) = \delta(T)$, čo zodpovedá deterministickému rozhodovaniu agentov, správne nás to vráti späť ku (8), (9), (10). Predpokladajme existenciu stacionárnych riešení a konečnosť integrálnej hodnoty reakčnej funkcie ($X = \sum_{\tau>0} G(\tau)$). Potom je možné vyjadriť parametre c a Φ ako funkcie α a distribúcie $W(T)$, pre rôzne typy rozhodovacieho šumu. Opäť nachádzame fázu prechodu do neergodickej oblasti pomocou vzťahu $X \equiv \sum_{\tau>0} G(\tau) = \infty$ (obr. 4). V ergodickej oblasti a pri aditívnom rozhodovacom šume ju nachádzame nezávisle na $W(T)$,

takisto parametre c a Φ . Nájdenie riešenia systému rovníc (17, 9, 18, 19) pre prvých pár iterácií odкрýva spôsob, akým pridanie šumu do rozhodovania agentov znižuje volatilitu trhu σ znížením globálnych oscilácií (ďalšie štúdie od Coolena a kol.), hoci intuitívne by sme očakávali opačný jav.

Obr. 26: Deliace krivky pre Batch MG s multiplikatívnym rozhodovacím šumom (15),

$P(z) = (2\pi)^{-1/2} - 1/2 e^{-z^2/2}$, $W(T) = \varepsilon \delta[T' - T] + (1 - \varepsilon) \delta[T']$, kde $\varepsilon \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ (sprava doľava). Každá čiara je daná podmienkou $X = \sum_{\tau > 0} G(\tau) = \infty$ a rozdeľuje non-ergodickeú oblasť (vľavo) od ergodickej (vpravo). Pri aditívnom šume teória predikuje T - nezávislú vertikálu, t.j. krivku danú podmienkou $\varepsilon = 0$, pre ľubovoľné $W(T)$



3.4. Základná on-line MG

Vráťme sa späť k vzťahu (3) v zovšeobecnenom tvare vrátane rozhodovacieho šumu:

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \frac{\eta}{\sqrt{N}} \xi_i^{\mu(t)} \left\{ \Omega_{\mu(t)} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \xi_j^{\mu(t)} \sigma[q_j(t), z_j(t)] \right\} + \Theta_i(t) \quad (21)$$

Vystupujú tu 2 prvky stochasticity - premenné $\mu(t)$ vyberané náhodne a nezávisle z množiny $\{1, \dots, \alpha N\}$ a $\{z_i(t)\}$ vyjadrujúce neusporiadanosť v rozhodovaní agentov. Individuálne zmeny (čo sa týka šumu) v priebehu hry sú dostatočne malé ($O(\sqrt{N})$), aby sme sa pre $N \rightarrow \infty$ pokúsili o prechod k spojitému časovému priebehu MG. Vzniká problém regularity, ktorý by malo vyriešiť zavedenie náhodných durácií pre každú z daných iterácií s nasledujúcim pravdepodobnostným rozdelením:

$$\text{Pravd. [t krokov za čas } \tau] = \frac{1}{t!} \left[\frac{\tau}{\Delta N} \right]^t e^{-\tau/\Delta N}$$

kde parameter ΔN udáva priemernú duráciu jednej iterácie procesu (21) v reálnom čase.

Prepísaním tohto markovovho procesu do reči pravdepodobnosti dostávame

$$p_{t+1}(q) = \int dq' W(q|q') p_t(q') \quad (22)$$

čo nás privádza k novému procesu, ktorý je spojité v čase:

$$\frac{d}{d\tau} p_\tau(q) = \frac{1}{\Delta_N} \left\{ \int dq' W(q|q') p_\tau(q') - p_\tau(q) \right\} \quad (23)$$

Nevýhodou je, že strácame prehľad o tom, kde na časovej osi sa nachádzame. Túto neistotu odstránime, ak zvolíme $\Delta_N \rightarrow 0$ pre $N \rightarrow \infty$ (na základe zistenia, že $\Delta_N = O(N^{-1})$). Namiesto generujúceho integrálu s priemernou neusporiadanosťou (5) dostávame krivkový integrál

$$\overline{Z[\Psi]} = e^{-i \sum_i \int \Psi_i(\tau) q_i(\tau)}$$

Úprava krivkového integrálu je spojená s potenciálnymi problémami ohľadom predpokladov hladkosti korelačnej a reakčnej funkcie. Postup analogický s postupom z kapitoly 10.3. pre $N \rightarrow \infty$ nás však opäť privedie k efektívnemu procesu z pohľadu jedného agenta:

$$\frac{d}{d\tau} q(\tau) = \Theta(\tau) - \alpha \int_0^\tau d\tau' R(\tau, \tau') \langle \sigma[q(\tau'), z] \rangle_z + \sqrt{\alpha} \eta(\tau) \quad (24)$$

kde výraz $R(\tau, \tau')$ figuruje ako časovo spojité ekvivalent predchádzajúceho $[\bar{I} + G]^{-1}$ (17). Vyjadruje, ako je agentovo rozhodovanie ovplyvnené jeho vlastným predchádzajúcim konaním:

$$R(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') + \sum_{t > 0} (-1)^t (G^t)(\tau, \tau') \quad (25)$$

kde gaussovský šum $\eta(t)$ s nulovou strednou hodnotou závisí od parametrov C, G spôsobom, ktorý je časovo spojitou verziou predchádzajúcich vzťahov iba v špeciálnom prípade $\eta = 0$. Pre parametrické výrazy C a G platí:

$$C(\tau, \tau') = \left\langle \langle \sigma[q(\tau), z] \rangle_z \langle \sigma[q(\tau'), z] \rangle_z \right\rangle \quad (26)$$

$$G(\tau, \tau') = \frac{\delta}{\delta \Theta(\tau')} \left\langle \langle \sigma[q(\tau), z] \rangle_z \right\rangle \quad (27)$$

Uzavretý systém makroskopických rovníc (24) až (27) plus vyjadrenie η v závislosti od C, G pre pôvodnú tzv. on-line MG s náhodnou externou informáciou, je v limite $N \rightarrow \infty$ exaktný pre ľubovoľný parameter α , pre akýkoľvek typ rozhodovacieho šumu. Aj keď vo všeobecnosti je veľmi náročné takýto systém rovníc vyriešiť, táto teória znamenala prínos, konkrétne: - ergodický stacionárny stav (v režime $\alpha > \alpha_c(T)$) sa vypočíta pomerne ľahko, a nezávisle od η , čiže je identický s riešením tzv. batch MG a aj s riešením, ktoré sa dosiahne staršou metódou replikácie. V oblasti $\alpha < \alpha_c(T)$, kde staršie metódy zlyhali v stanovení makroskopických zákonov, sú dynamiky batch MG a on-line MG odlišné.

3.5. Analýza MG s reálnou históriou trhu

Ďalšie Coolenove snahy v tejto oblasti ekonofyziky sa zamerali na realistickejšie zobrazovanie diania na finančných trhoch, konkrétne ide o model s reálnou históriou trhu [6]. Agent $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ sa každé kolo $\ell \in \{0, 1, 2, \dots\}$ rozhoduje pre jednu z 2 možností $b_i(\ell) \in \{-1, 1\}$. Definujme celkovú preškálovanú kumulatívnu charakteristiku trhu pre iteráciu ℓ ako

$$A(\ell) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N b_i(\ell) + A_e(\ell) \quad (1)$$

kde externalita $A_e(\ell)$ predstavuje akcie regulátorov trhu a neskôr umožní vyjadriť špecifické reakčné funkcie. Agenti sa rozhodujú v každom kroku ℓ na základe všeobecne známej informácie, o ktorej sú presvedčení, že reprezentuje historické trhové dáta. Tie sú dané vektorom

$$\lambda(\ell, A, Z) = \begin{pmatrix} \text{sgn}[(1-\zeta)A(\ell-1) + \zeta Z(\ell, 1)] \\ \vdots \\ \text{sgn}[(1-\zeta)A(\ell-M) + \zeta Z(\ell, M)] \end{pmatrix} \quad (2)$$

kde čísla $\{Z(\ell, \lambda)\}$ predstavujú fiktívnu alternatívu k skutočným trhovým dátam; $\lambda = 1, \dots, M$ sú náhodné premenné s normálnym rozdelením s nulovou strednou hodnotou, M je počet iteračných krokov histórie trhu, ktoré poskytujú hráčom informáciu. Nech $\alpha = 2^M/N$.

Predpokladajme α konečné pre $N \rightarrow \infty$. Parameter $\zeta \in [0, 1]$ nám umožňuje interpoláciu medzi pravdivou ($\zeta = 0$) a fiktívnou ($\zeta = 1$) históriou trhu. Fiktívna história môže byť:

$$\text{konzistentná :} \quad Z(\ell, \lambda) = Z(\ell - \lambda), \quad \langle Z(\ell) Z(\ell') \rangle = \kappa^2 \delta_{\ell\ell'} \quad (3)$$

$$\text{nekonzistentná :} \quad Z(\ell, \lambda) \text{ nezávislé,} \quad \langle Z(\ell, \lambda) Z(\ell', \lambda') \rangle = \kappa^2 \delta_{\ell\ell'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (4)$$

Keď vezmeme do úvahy jav opakovania sa tých istých situácií, (3) je realistickejšia, lebo agenti na reálnom trhu ľahko zistia, keď sú klamaní. Majú S stratégií $a = 1, \dots, S$. Stratégia a hráča i pozostáva z kompletného vektora $\mathbf{R}^{ia} 2^M$ odporúčaných rozhodnutí $\{R_{\lambda}^{ia}\} \in \{-1, 1\}$ pre všetkých 2^M potenciálnych hodnôt vektora externej informácie λ . Pred začatím hry zadáme všetky vstupy R_{λ}^{ia} nezávisle a náhodne s rovnakými pravdepodobnosťami pre ± 1 . Na základe pozorovaného reťazca $\lambda(\ell, A, Z)$ sa v iterácii ℓ hráči podľa svojich aktívnych stratégií rozhodnú pre akciu $b_i(\ell) = R_{\lambda(\ell, A, Z)}^{ia}$. Aby vedeli určiť svoju aktívnu stratégiu, od začiatku hry počítajú stratégiám ich virtuálne skóre p_{ia} :

$$p_{ia}(\ell+1) = p_{ia}(\ell) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} A(\ell) R_{\lambda(\ell, A, Z)}^{ia} \quad (5)$$

kde $\tilde{\eta}$ reprezentuje mieru učenia.

Ak aktívna stratégia $a_i(\ell)$ hráča i v kroku ℓ je tá s najvyšším $p_{ia}(\ell)$, po označení $\Gamma_\lambda[\ell, A, Z] = \sqrt{\alpha N} \delta_{\lambda, \lambda(\ell, A, Z)}$ máme proces:

$$p_{ia}(\ell+1) = p_{ia}(\ell) - \frac{\tilde{\eta}}{N\sqrt{\alpha}} A(\ell) \cdot \sum_{\lambda} R_{\lambda}^{ia} \Gamma_{\lambda}[\ell, A, Z] \quad (6)$$

$$A(\ell) = A_e(\ell) + \frac{1}{N\sqrt{\alpha}} \sum_i \sum_{\lambda} R_{\lambda}^{ia_i(\ell)} \Gamma_{\lambda}[\ell, A, Z] \quad (7)$$

$$a_i(\ell) = \arg \max_{a \in \{1, \dots, S\}} \{p_{ia}(\ell)\} \quad (8)$$

Vezmeme $S = 2$ a zjednodušíme systém rovníc zavedením nových premenných:

$$q_i(\ell) = \frac{1}{2}(p_{i1}(\ell) - p_{i2}(\ell)) \quad (9)$$

$$w^i = \frac{1}{2}[R^{i1} + R^{i2}], \quad \zeta^i = \frac{1}{2}[R^{i1} - R^{i2}] \quad (10)$$

pričom položíme $\Omega = N^{-1/2} \sum_i w^i$. Rozhodovanie sa agenta i v kroku ℓ vyplýva z rovnice:

$$R^{ia_i(\ell)} = \frac{1}{2}[R^{i1} - R^{i2}] + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}[q_i(\ell)][R^{i1} + R^{i2}] = w^i + \operatorname{sgn}[q_i(\ell)]\zeta^i \quad (11)$$

Rozhodovací šum zapracujeme do systému podobne ako v 10.3. Za účelom neskoršieho definovania reakčných funkcií nahradíme $q_i(\ell) \rightarrow q_i(\ell) + \theta_i(\ell)$; $\theta_i(\ell) \in \mathbb{R}$. Tým sa dostávame k nasledovnému prepisu nášho systému rovníc pomocou premenných $\{q_i[\ell]\}$ pre $S = 2$:

$$q_i(\ell+1) = q_i(\ell) + \theta_i(\ell) - \frac{\tilde{\eta}}{N\sqrt{\alpha}} \sum_{\lambda} \xi_{\lambda}^i \Gamma_{\lambda}[\ell, A, Z] A(\ell) \quad (12)$$

$$A(\ell) = A_e(\ell) + \frac{1}{\sqrt{\alpha N}} \sum_{\lambda} \left\{ \Omega_{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \sigma[q_i(\ell), z_i(\ell)] \xi_{\lambda}^i \right\} \Gamma_{\lambda}[\ell, A, Z] \quad (13)$$

$$\Gamma_{\lambda}[\ell, A, Z] = \sqrt{\alpha N} \delta_{\lambda, \lambda(\ell, A, Z)} \quad (14)$$

$$\lambda(\ell, A, Z) = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}[(1-\zeta)A(\ell-1) + \zeta Z(\ell, 1)] \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}[(1-\zeta)A(\ell-M) + \zeta Z(\ell, M)] \end{pmatrix} \quad (15)$$

Hodnoty $\{A(\ell), Z(\ell)\}$ pre $\ell \leq 0$ a veľkosť $q_i(0)$ vystupujú v úlohe počiatkových podmienok. Z matematického hľadiska je kľúčovým rozdielom medzi MG modelom s fiktívnou históriou trhu a takýmto modelom s reálnou históriou závislosť na minulosti, na minulej informácii obsiahnutej v reťazcoch $\{A(\ell-1), \dots, A(\ell-M)\}$ vyskytujúcich sa v $\lambda(\ell, A, Z) \in \{-1, 1\}^M$, v súvislosti s Gaussovskými náhodnými premennými $\{Z(\ell, \lambda)\}$. Premenné $\{Z(\ell, \lambda)\}$ tu hrajú úlohu náhodných odchýliek od skutočnej histórie trhu, ktorú agenti vnímajú subjektívne. Už neplatí, že všetky prípustné histórie by sa mali vyskytovať s rovnakou frekvenciou, a všetky vstupy $\{Z(\ell, \lambda)\}$ sú rovnako dôležité. Tie s malými hodnotami λ , ktoré najviac ovplyvňujú najčerstvejšiu minulosť v historických reťazcoch, sú teraz dôležitejšie. Problém sa stal

kvalitatívne odlišný. Tzv. batch verzia MG stráca význam, keďže sa opiera o akési spriemerovanie nad všetkými prípustnými históriami v každej iterácii. Už nejde o Markovov proces, vzniká problém s regularizáciou. Pokiaľ šlo o Markovov reťazec, zavedenie náhodných durácií pre individuálne kroky spôsobilo akurát neistotu v tom, kde sa v danom momente hry nachádzame na časovej osi. V systéme s časovo posunutými interakciami by to však príliš skomplikovalo tvar rovníc a celý proces, čo zťažuje regularizáciu.

Východiskom je opäť generujúci funkcionál s priemernou neusporiadanosťou:

$$\overline{Z[\Psi]} = \left\langle e^{i \sum_{\ell > 0}^N \sum_i \Psi_i(\ell) \sigma[q_i(\ell), z_i(\ell)]} \right\rangle \quad (16)$$

Ide o priemer nad stochastickým procesom (12, 13), ktorého náhodnosť je spôsobená rozhodovacím šumom $\{Z(\ell)\}$ a premennými fiktívnej histórie $\{Z(\ell, \lambda)\}$. Následná analýza je v značnej miere podobná ako pri Markovovom procese s fiktívnou históriou, takisto časová škála zostáva rovnaká. Tento model je však opísaný dvoma efektívnymi rovnicami. Jednou z nich je vzťah, ktorý opisuje efektívny MG proces z pohľadu jedného agenta:

$$\frac{d}{dt} q(t) = \tilde{\theta}(t) - \alpha \int_0^t dt' R(t, t') \sigma[q(t')] + \sqrt{\alpha} \eta(t) \quad (17)$$

kde $\eta(t)$ je gaussovský šum s kovarianciami $\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \Sigma(t, t')$. Druhá efektívna rovnica vyjadruje vývoj celkovej ponuky:

$$A(\ell) = A_e(\ell) + \varphi_\ell - \frac{1}{2} \tilde{\eta} \sum_{\ell' < \ell} G(\ell, \ell') \delta_{\lambda(\ell, A, Z), \lambda(\ell', A, Z)} A(\ell') \quad (18)$$

$$\langle \varphi_\ell \varphi_{\ell'} \rangle_{\{q|A, Z\}} = \frac{1}{2} [1 + C(\ell, \ell')] \delta_{\lambda(\ell, A, Z), \lambda(\ell', A, Z)} \quad (19)$$

kde $\{\varphi\}$ reprezentuje gaussovské polia s nulovou strednou hodnotou, a výraz $\delta_{\lambda(\ell, A, Z), \lambda(\ell', A, Z)} = \overline{W}[\ell, \ell'; A, Z]$ ako funkcia trajektórií $\{A\}$ a $\{Z\}$ indikuje, či histórie tak ako ich pozoruje agent v iteráciách ℓ a ℓ' , sú alebo nie sú identické (bez ohľadu na to, či sú pravdivé). Procesy (17) a (19) sú navzájom nezávislé, spájajú ich iba parametrické výrazy vyskytujúce sa v oboch rovniciach, hlavne C a G :

$$C(t, t') = \langle \sigma[q(t)] \sigma[q(t')] \rangle \quad G(t, t') = \frac{\delta}{\delta \tilde{\theta}(t')} \langle \sigma[q(t)] \rangle \quad (20)$$

$$\text{resp. } C(t, t') = \langle \sigma[q(t), z(t)] \sigma[q(t'), z(t')] \rangle \quad G(t, t') = \frac{\delta}{\delta \tilde{\theta}(t')} \langle \sigma[q(t), z(t)] \rangle \quad (20^*)$$

pre modely s reálnou vs. s fiktívnou históriou.

Modely s fiktívnou a reálnou históriou sa líšia vo výrazoch, ktoré sa týkajú posunutej autointerakcie (R) a autokorelácie agentov (Σ):

$$\begin{aligned} R(t, t') &= \lim_{\delta_N \rightarrow 0} \frac{\delta}{\delta A_e(t)} \left\langle \left\langle A(\ell) \delta_{\lambda(\ell, A, Z), \lambda(\ell', A, Z)} \right\rangle \right\rangle_{\{A, Z\}} \Big|_{\ell=t/\delta_N, \ell'=t'/\delta_N} \\ \Sigma(t, t') &= \tilde{\eta} \lim_{\delta_N \rightarrow 0} \frac{1}{\delta_N} \left\langle \left\langle A(\ell) A(\ell') \delta_{\lambda(\ell, A, Z), \lambda(\ell', A, Z)} \right\rangle \right\rangle_{\{A, Z\}} \Big|_{\ell=t/\delta_N, \ell'=t'/\delta_N} \end{aligned} \quad (21)$$

V modeli bez histórie sú R a Σ explicitné funkcie parametrov C a G, kým v modeli s históriou sa vypočítajú z (19). Charakteristickým znakom je, že ak máme v rôznych časových iteráciách rovnakú realizáciu M - krokovej informácie, tak aj hodnota celkovej ponuky je rovnaká. Zameraním sa na opakovanie sa tej istej historickej informácie v časových reťazcoch, konkrétne na M - bitový pamäťový reťazec λ (15), sa podarilo dospieť k aproximácii riešenia (19). Zaviedla sa veličina, ktorá vyjadruje združenú pravdepodobnosť nájdenia identických histórií v procese (19) v daných k iteráciách $\{l_1, \dots, l_k\}$ vzhľadom na pravdepodobnosť p^{-k} :

$$\Delta_k(\ell_1, \dots, \ell_k) = p^{k-1} \sum_{\lambda} \left\langle \left\langle \prod_{i=1}^k \delta_{\lambda, \lambda(\ell_i, A, Z)} \right\rangle \right\rangle_{\{A, Z\}} \quad (22)$$

kde p^{-k} je pravdepodobnosť nájdenia identických histórií v procese (19) za predpokladu náhodne zadávaných fiktívnych histórií v rôznych časoch. Všetky efekty spôsobené tým, že máme model trhu s reálnou históriou, boli analyzované na základe štatistik pravdepodobnosti (22). V rámci hľadania vyjadrenia systému rovníc pre parametre c, φ, X (a teda aj fázy prechodu definovanej limitou $X \rightarrow \infty$), sa použije predpoklad existencie riešení daných parametrov v ergodických stavoch invariantných na časový posun, teda v nasledovných tvaroch:

$$C(t, t') = C(t - t') \quad G(t, t') = G(t - t') \quad R(t, t') = R(t - t') \quad \Sigma(t, t') = \Sigma(t - t')$$

pričom očakávame konečnosť $X = \int_0^{\infty} dt R(t)$. Ďalší postup je zamerať sa na prípady, kde sa

historické informačné reťazce opakujú pomerne rýchlo. Ak L_H je veličina znamenajúca počet iterácií, ktoré prejdú, kým sa zopakuje hist. reťazec, budeme predpokladať, že $L_H \ll N$. Zavedie sa asymptotická frekvencia $\pi_{\lambda}(A, Z)$, s ktorou sa pamäťový reťazec λ opakovane vyskytuje v danej realizácii $\{A, Z\}$ procesu (19):

$$\pi_{\lambda}(A, Z) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \delta_{\lambda, \lambda(\ell, A, Z)} \quad (23)$$

a taktiež sa zdefinuje distribúcia $\zeta(f)$ týchto asymptotických frekvencií:

$$\zeta(f) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{\lambda} \left\langle \left\langle \delta[f - p\pi_{\lambda}(A, Z)] \right\rangle \right\rangle_{\{A, Z\}} \quad (24)$$

Následnou analýzou sa dospelo k systému, ktorého riešením sú hľadané parametre:

$$u = \frac{\sigma[\infty]\sqrt{\alpha X_R}}{S_0\sqrt{2}} \quad X = \frac{1-\varphi}{\alpha X_R} \quad \varphi = 1 - \text{Erf}[u] \quad (25)$$

$$c = \sigma^2[\infty] \left\{ 1 - \text{Erf}[u] + \frac{1}{2u^2} \text{Erf}[u] - \frac{1}{u\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \right\} \quad (26)$$

$$X_R = \int_0^\infty df \zeta(f) \frac{f}{1+Xf} \quad S_0^2 = (1+c) \int_0^\infty df \zeta(f) \frac{f^2}{(1+Xf)^2} \quad (27)$$

Distribúcia (24) vyplýva z nemarkovovského procesu (19), ktorý nevieme vyriešiť priamo. Pozrieme sa teda bližšie na momenty μ_k distribúcie $\zeta(f)$:

$$\mu_k = \int_0^\infty df \zeta(f) f^k$$

$$\zeta(f) = \int \frac{dw}{2\pi} e^{i w f} \sum_{k \geq 0} \frac{\mu_k}{k!} (-i w)^k \quad (28)$$

Kombinácia vzťahov (28), (23), (24) a (15) vedie k rovnici:

$$\mu_k = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{p^{k-1}}{L^k} \langle \langle \dots \rangle \rangle_{\{A, Z\}} \quad (29)$$

$$\text{kde} \quad \langle \langle \dots \rangle \rangle_{\{A, Z\}} = \text{Prob} \left[\begin{array}{c} \{\lambda_1(\ell_1, A, Z) = \lambda_1(\ell_2, A, Z) = \dots = \lambda_1(\ell_k, A, Z)\} \\ \{\lambda_2(\ell_1, A, Z) = \lambda_2(\ell_2, A, Z) = \dots = \lambda_2(\ell_k, A, Z)\} \\ \vdots \\ \{\lambda_M(\ell_1, A, Z) = \lambda_M(\ell_2, A, Z) = \dots = \lambda_M(\ell_k, A, Z)\} \end{array} \right]$$

Označme: $\text{Same}(i) = \{\lambda_i(\ell_1, A, Z) = \lambda_i(\ell_2, A, Z) = \dots = \lambda_i(\ell_k, A, Z)\}$, čo znamená, že i -ty komponent historického reťazca nadobúda rovnakú hodnotu v k časoch $\{\ell_1, \dots, \ell_k\}$. Vzťah (29) môžeme prepísať ako súčin podmienených pravdepodobností:

$$\begin{aligned} \langle \langle \dots \rangle \rangle_{\{A, Z\}} &= \text{Prob} [\text{Same}(1) \wedge \text{Same}(2) \wedge \dots \wedge \text{Same}(M)] \\ &= \text{Prob} [\text{Same}(1) | \text{Same}(2) \wedge \dots \wedge \text{Same}(M)] \\ &\quad \times \text{Prob} [\text{Same}(2) | \text{Same}(3) \wedge \dots \wedge \text{Same}(M)] \\ &\quad \vdots \\ &\quad \times \text{Prob} [\text{Same}(M-1) | \text{Same}(M)] \\ &\quad \times \text{Prob} [\text{Same}(M)] \end{aligned} \quad (30)$$

V limite $L \rightarrow \infty$ sa nahradí $\text{Prob} [\text{Same}(r) \mid \text{Same}(r+1) \wedge \dots \wedge \text{Same}(M)] \rightarrow P_{[k|M-r]}$. Tým sa dostávame od (29) ku:

$$\mu_k = p^{k-1} P_{[k|M-1]} \cdot P_{[k|M-r]} \cdots P_{[k|1]} \cdot P_{[k|0]} \quad (31)$$

A v limite $N \rightarrow \infty$ (ekvivalentne $M \rightarrow \infty$, keďže $2^M = \alpha N$) máme:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \log(\mu_k) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{M-1} \log \left[2^{k-1} P_{[k|r]} \right] \quad (32)$$

Potrebuje vyjadriť $P_{[k|r]}$. Základný vzťah (19) hovorí, že hodnota celkovej ponuky v čase ℓ je korelovaná s ponkou v čase ℓ' ak sú historické reťazce v daných časoch identické, t. j. $\lambda(\ell, A, Z) = \lambda(\ell', A, Z)$. Určitý reťazec sa vyskytuje v procese MG s pravdepodobnosťou rádovo N^{-1} . Pravdepodobnosť opakovaného výskytu historického reťazca v $r = O(M)$ za sebou idúcich iteráciách je mizivo malá rádovo $O(M/N)$, preto priame korelácie v priebehu hry nehrajú rolu. Avšak, ak dva (krátke) úseky trajektórií celkovej ponuky majú rovnakú realizáciu určitých častí svojich historických reťazcov, s pravdepodobnosťou vyššou ako je priemer budú mať rovnako realizovanú historickú informáciu aj v nasledujúcom kroku.

Pre $P_{[k|r]}$ platí, že:

$$P_{[k|r]} = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_k} P[k | \lambda_1, \dots, \lambda_k] P[\lambda_1, \dots, \lambda_k | r] \quad (33)$$

kde $P[k | \lambda_1, \dots, \lambda_k]$ je pravdepodobnosť nájdenia $\lambda(\ell_1, A, Z) = \dots = \lambda(\ell_k, A, Z)$ za predpokladu, že historické reťazce v daných k iteráciách sa rovnajú $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, a $P[\lambda_1, \dots, \lambda_k | r]$ popisuje pravdepodobnosť nájdenia takýchto k pamäťových reťazcov, pričom tieto reťazce sa informačne zhodujú počas posledných r iterácií. Nájdenie špecifickej hodnoty $A(\ell)$ závisí len od reťazca λ zodpovedajúceho iterácii ℓ . Keď už máme λ , $A(\ell)$ je náhodná premenná s normálnym rozdelením so zatiaľ neznámou strednou hodnotou \bar{A}_λ a varianciou σ_λ^2 . Keďže $Z(\ell, i)$ boli definované ako gaussovské premenné rozdelené okolo nulovej strednej hodnoty s disperziou κ^2 , vieme vyjadriť $P[k | \lambda_1, \dots, \lambda_k]$. Suma (33) sa prepíše v zmysle párenia do skupín tak, že reťazce $\{\lambda_i, \lambda_j\}$ budú v rovnakej skupine $\Leftrightarrow \lambda_i \equiv \lambda_j$. Týmto štýlom sa zostrojí množina $\{g_1, g_2, \dots\}$ všetkých kombinácií $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, pričom $g_1 + g_2 + \dots = k$. Dostávame:

$$P_{[k|r]} = \sum_{g_1, g_2, \dots} \delta_{k, g_1 + g_2 + \dots} P[k | g_1, g_2, \dots] P[g_1, g_2, \dots | r] \quad (34)$$

kde $P[k | g_1, g_2, \dots] = 2^{1-k} \Phi(g_1, g_2, \dots)$ vyjadríme na základe $P[k | \lambda_1, \dots, \lambda_k]$, pričom

sa využije:

$$\Phi(g_1, g_2, \dots) = \frac{1}{2} \prod_{j \geq 1} \left\{ \sum_{\lambda} \pi_{\lambda} \left[1 + \operatorname{Erf} \left[\frac{(1-\zeta)\bar{A}_{\lambda}}{\sqrt{2} \sqrt{\zeta^2 \kappa^2 + (1-\zeta)^2 \sigma_{\lambda}^2}} \right] \right]^{g_j} \right\} + \frac{1}{2} \prod_{j \geq 1} \left\{ \sum_{\lambda} \pi_{\lambda} \left[1 - \operatorname{Erf} \left[\frac{(1-\zeta)\bar{A}_{\lambda}}{\sqrt{2} \sqrt{\zeta^2 \kappa^2 + (1-\zeta)^2 \sigma_{\lambda}^2}} \right] \right]^{g_j} \right\} \quad (35)$$

Vzťah (32) sa prepíše v nasledovnom tvare:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \log(\mu_k) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{M-1} \log \left[\sum_{(g_1, g_2, \dots)} \delta_{k, g_1 + g_2 + \dots} \Phi[g_1, g_2, \dots] P[g_1, g_2, \dots | r] \right] \quad (36)$$

Úvahou dôjdeme k rovnosti: $P[g_1, g_2, \dots | r] = Q[g_1, g_2, \dots | M-r]$ čo pre vzťah (36) znamená:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \log(\mu_k) = \sum_{r \geq 1} \log \left[\sum_{(g_1, g_2, \dots)} \delta_{k, g_1 + g_2 + \dots} \Phi[g_1, g_2, \dots] Q[g_1, g_2, \dots | r] \right] \quad (37)$$

Zostáva vypočítať $Q[g_1, g_2, \dots | r]$, teda pravdepodobnosť, že v $\{1, \dots, k\}$ rôznych časoch procesu nájdeme historické reťazce $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, ktoré by boli identické v predpísaných množinách $\{g_1, g_2, \dots\}$ za predpokladu, že vektory $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ obsahujú rovnaké informácie počas všetkých iterácií okrem posledných r . To vedie na kombinatorický problém. Označíme $R = 2^r$. Potom:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \log(\mu_k) &= \sum_{r \geq 1} \log H_r \\ H_r &= \sum_{(g_1, g_2, \dots)} \Phi[g_1, g_2, \dots] Q[g_1, g_2, \dots | r] \\ &= \sum_{g_1=0}^k \sum_{g_2=0}^{k-g_1} \sum_{g_3=0}^{k-g_1-g_2} \dots \sum_{g_R=0}^{k-g_1-\dots-g_{R-1}} \Phi[g_1, g_2, \dots] \delta_{k, \sum_i g_i} \\ &\times R^{-k} \binom{k}{g_1} \binom{k-g_1}{g_2} \binom{k-g_1-g_2}{g_3} \dots \binom{k-g_1-\dots-g_{R-1}}{g_R} \end{aligned} \quad (38)$$

Vrátíme sa k $\Phi(g_1, g_2, \dots)$. Zameriame sa na náhodné odchýlky od \bar{A}_λ . Mocninová expanziavýrazu (35) sústredená na vedúce prvky vedie k nasledujúcemu odvodeniu:

$$\Phi(1,1,1,\dots) = 1$$

$$\Phi(g_1, g_2, \dots) = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega \sum_{j \geq 1} g_j (g_j - 1) - \frac{1}{4}\Omega^2 \sum_j g_j (g_j - 1)(2g_j - 3) + O(\Omega^3)\right) \quad (39)$$

$$\Omega = \sum_{\lambda} \pi_{\lambda} \operatorname{Erf}^2 \left[\frac{(1-\zeta) \cdot \bar{A}_{\lambda}}{\sqrt{2} \sqrt{\zeta^2 \kappa^2 + (1-\zeta)^2 \sigma_{\lambda}^2}} \right] \quad (40)$$

Exponenciál (39) sa rozpíše do príslušných rádov, pričom sa využije zjednodušenie $R = 2^r$, a rovnosť $\sum_j g_j = k$. Dostávame:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{eff}}(g_1, g_2, \dots) &= 1 + \frac{1}{2}\Omega [Rg_1^2 - k] \\ &+ \frac{1}{8}\Omega^2 [Rg_1^4 + R(R-1)g_1^2 g_2^2 - 4Rg_1^3 - 2(k-5)Rg_1^2 + k^2 - 6k] + O(\Omega^3) \end{aligned} \quad (41)$$

Dosadíme (41) do (38):

$$\begin{aligned} H_r &= 1 + \frac{1}{2}\Omega [R G_{2,0}^{k,R} - k] \\ &+ \frac{1}{8}\Omega^2 [R G_{4,0}^{k,R} + R(R-1)G_{2,2}^{k,R} - 4R G_{3,0}^{k,R} - 2(k-5)R G_{2,0}^{k,R} + k^2 - 6k] + O(\Omega^3) \end{aligned} \quad (42)$$

kde

$$\begin{aligned} G_{a,b}^{k,R} &= \sum_{g_1=0}^k \sum_{g_2=0}^{k-g_1} \sum_{g_3=0}^{k-g_1-g_2} \dots \sum_{g_R=0}^{k-g_1-\dots-g_{R-1}} g_1^a g_2^b \delta_{k, \sum_i g_i} \\ &\times R^{-k} \binom{k}{g_1} \binom{k-g_1}{g_2} \binom{k-g_1-g_2}{g_3} \dots \binom{k-g_1-\dots-g_{R-1}}{g_R} \\ &= R^{-k} \sum_{g_1=0}^k \sum_{g_2=0}^{k-g_1} \binom{k}{g_1} \binom{k-g_1}{g_2} (R-2)^{k-g_1-g_2} g_1^a g_2^b \end{aligned} \quad (43)$$

Vypočítajú a do rovnice (42) sa dosadia dané 4 kombinatorické faktory $G_{a,b}^{k,R}$:

$$H_r = 1 + \frac{1}{2}\Omega k [k-1] 2^{-r} + \frac{1}{8}\Omega^2 k (k-1)(k-2)(k-3) 4^{-r} + O(\Omega^3) \quad (44)$$

Dospeli sme k explicitnej formulke pre momenty relatívnych historických frekvencií, a tým aj pre samotnú distribúciu $\zeta(f)$, a to pomocou rozvoja vzhľadom na parameter Ω , ktorý kontroluje rozsah, šírku tejto distribúcie:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \log(\mu_k) = \frac{1}{2} \Omega k [k-1] - \frac{1}{12} \Omega^2 k (k-1)(2k-3) + O(\Omega^3) \quad (45)$$

Podľa očakávania $\mu_0 = \mu_1 = 1$ a $\lim_{M \rightarrow \infty} \log(\mu_2) = \exp\left(\Omega - \frac{1}{6} \Omega^2 + O(\Omega^3)\right)$. Po dosadení do (28) vedie mocninový rozvoj do rádu $O(\log^2(\mu_2))$ na vzorec:

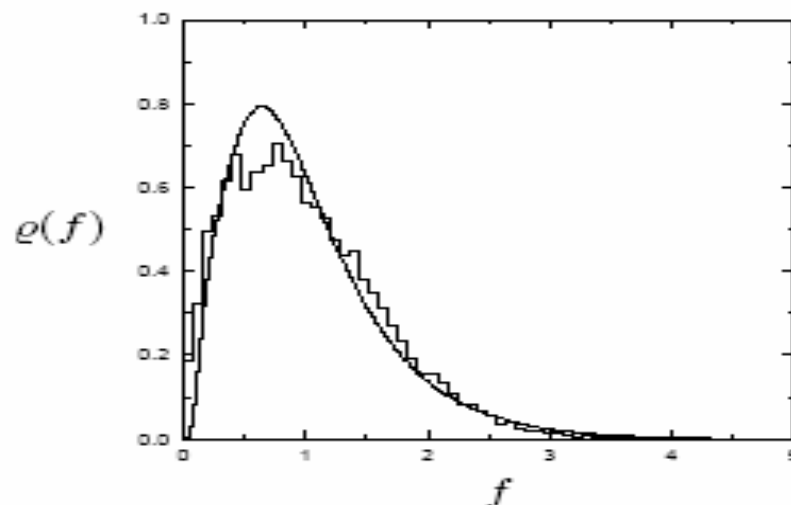
$$\zeta(f) = \frac{e^{-\frac{1}{2} z^2(f)} \left[1 + \frac{1}{6} \sqrt{\log(\mu_2)} (3z(f) - z^3(f)) \right]}{f \sqrt{2\pi [\log(\mu_2) + \log^2(\mu_2)]}} \quad (46)$$

$$z(f) = \frac{\log(f) + \frac{1}{2} [\log(\mu_2) + \frac{2}{3} \log^2(\mu_2)]}{\sqrt{\log(\mu_2) + \log^2(\mu_2)}}$$

Táto formulka bola odvodená, a teda je presnejšia, pre malé hodnoty Ω . Výraz (46) s pomerne vysokou presnosťou predpovedá vývoj aktuálnej distribúcie relatívnych frekvencií pamäťových reťazcov (obr. 1).

Obr. 27: Test predpovedaných distribúcií daných frekvencií (46) založený na rozvoji do 2. rádu, kde

$\mu_k = \exp\left(\frac{1}{2} \Omega k [k-1] - \frac{1}{12} \Omega^2 k (k-1)(2k-3) + O(\Omega^3)\right)$ pre $\alpha = 2.0$, $N = 8193$.



Rozsah distribúcie udáva parameter Ω (40). Hodnoty \overline{A}_λ a $\sigma_\lambda^2 = \overline{A}_\lambda^2 - \overline{A}_\lambda^{-2}$ štatisticky popisujú ponuky súvisiace s určenými historickými reťazcami λ . Vzťah (19) hovorí, že ide o gaussovské premenné, takže vedieť \overline{A}_λ a σ_λ^2 nám stačí. \overline{A}_λ a \overline{A}_λ^2 sa vyjadria ako dlhodobé priemery:

$$\overline{A}_\lambda = \pi_\lambda^{-1} \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \sum_{\ell=1}^L \delta_{\lambda, \lambda}(\ell, A, Z) A(\ell) \quad (47)$$

$$\overline{A}_\lambda^2 = \pi_\lambda^{-1} \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \sum_{\ell=1}^L \delta_{\lambda, \lambda}(\ell, A, Z) A^2(\ell) \quad (48)$$

Predpokladá sa časovú invariantnosť, $L_H \ll N$, a tiež $X = \sum_{\ell > 0} G(\ell) < \infty$. Nech premenné $s_i = \ell_i - \ell_{i+1}$ (pre $i < r$) a $s_r = \ell_r$. Stredné hodnoty sa zjednodušia na tvar:

$$\overline{A}_\lambda = \sum_{r \geq 0} (-X p \pi_\lambda)^r \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi_\lambda L} \sum_{s=0}^L \delta_{\lambda, \lambda}(s, A, Z) \varphi(s) = \frac{\overline{\varphi}(\lambda)}{1 + X p \pi_\lambda} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \overline{A}_\lambda^2 &= \sum_{r, r' \geq 0} (-\delta_N)^{r+r'} \sum_{s_0 \dots s_{r-1}} G(s_0) \dots G(s_{r-1}) \sum_{s_0' \dots s_{r-1}'} G(s_0') \dots G(s_{r-1}') \quad (50) \\ &\times (p \pi_\lambda)^{r+r'} \prod_{i=1}^{r-1} \prod_{j=1}^{r'-1} \left[1 + \frac{1-\pi_\lambda}{p \pi_\lambda} \frac{\tilde{\eta}}{2\delta_N} \delta_{\sum_{\ell < i} s_\ell, \sum_{\ell < j} s_\ell'} \right] \\ &\times \sum_k \delta_{k, \sum_{j < r} s_j - \sum_{j < r'} s_j'} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi_\lambda L} \sum_{s=0}^L \delta_{\lambda, \lambda}(s, A, Z) \delta_{\lambda, \lambda}(s+k, A, Z) \varphi(s) \varphi(s+k) \end{aligned}$$

Mieru učenia $\tilde{\eta}$ nevieme vypočítať, a tak ju pošleme k 0, t. j. $\tilde{\eta} \rightarrow 0$. Predpokladáme, že limita v poslednom riadku (50) nám z čiastkovej priemernej hodnoty urobí celkový priemer nad štatistikami gaussovských premenných φ_ℓ (rovnica (20)):

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi_\lambda^2 L} \sum_{s=0}^L \delta_{\lambda, \lambda}(s, A, Z) \delta_{\lambda, \lambda}(s+k, A, Z) \varphi(s) \varphi(s+k) \rightarrow \frac{1}{2} [1 + C(k)]$$

Korelačná funkcia sa rozdelí na stabilnú (pozorovanú stabilne počas celého procesu) a nestabilnú $C(k) = c + \tilde{C}(k)$. Aproximácia históriou podmienenej volatility \overline{A}_λ^2 :

$$\overline{A}_\lambda^2 = \frac{1+c}{2(1+Xp\pi_\lambda)^2} + \frac{1}{2} \int ds ds' \left(\vec{1} + p\pi_\lambda G \right)^{-1} \tilde{C}(s-s') \left(\vec{1} + p\pi_\lambda G \right)^{-1} \quad (51)$$

kde $\vec{1}(x, y) = \delta(x - y)$. Podobne ako v \overline{A}_λ^2 , aj v $\overline{A}_\lambda^{-2}$ sa spriemerujú výrazy závislé od φ , dosadia do vzorca $\sigma_\lambda^2 = \overline{A}_\lambda^2 - \overline{A}_\lambda^{-2}$ a upravia na tvar:

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{1}{2} \int ds ds' \left(\vec{1} + p\pi_\lambda G \right)^{-1} (s) \tilde{C}(s-s') \left(\vec{1} + p\pi_\lambda G \right)^{-1} (s') \quad (52)$$

Použije sa predpoklad, že nestála korelácia $\tilde{C}(t)$ klesá veľmi rýchlo, takže oproti nulovému členu $\tilde{C}(0) = 1 - c$ sú ostatné členy zanedbateľne malé a v rozvoji (52) vzhľadom na mocniny G zostane iba tento nultý člen:

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{1}{2}(1 - c) \quad (53)$$

Aproximácie (49) a (53) sa vložia do (40):

$$\Omega = \int df d\varphi \zeta(f, \varphi) f \operatorname{Erf}^2 \left[\frac{(1 - \zeta)\varphi}{\sqrt{2}(1 + Xf) \sqrt{\zeta^2 \kappa^2 + \frac{1}{2}(1 - \zeta)^2(1 - c)}} \right] \quad (54)$$

$$\zeta(f, \varphi) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{P_\lambda} \sum \delta[f - p\pi_\lambda] \delta[\varphi - \bar{\varphi}_\lambda] \quad (55)$$

Vieme, že $\bar{\varphi}_\lambda$ je gaussovská premenná so strednou hodnotou a $\langle \bar{\varphi}_\lambda \rangle = 0$ a disperziou $\langle \bar{\varphi}_\lambda^2 \rangle = \frac{1}{2}(1 + c)$. Zanedbanie korelácie historických frekvencií π_λ a premenných $\bar{\varphi}_\lambda$, ktoré v príslušných rádoch nášho výpočtu nehrajú rolu, nás privádza ku:

$$\zeta(f, \varphi) = \zeta(f) \frac{\exp\left(-\varphi^2/(1+c)\right)}{\sqrt{\pi(1+c)}} \quad (56)$$

Teraz môžeme vzťah (54) za použitia rovností $\int D\mathbf{x} \operatorname{Erf}^2(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \frac{4}{\pi} \arctan \left[\sqrt{1 + 4\mathbf{A}^2} \right] - 1$,

$\int df \zeta(f) f = 1$ zjednodušiť na tvar:

$$\Omega = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty df \zeta(f) f \arctan \left[1 + \frac{(1 - \zeta)^2(1 - c)}{(1 + Xf)^2 \left[\zeta^2 \kappa^2 + \frac{1}{2}(1 - \zeta)^2(1 - c) \right]} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (57)$$

Parameter Ω pre model s fiktívnou históriou ($\zeta \rightarrow 1$) podľa očakávaní nadobúda hodnotu 0. V súlade s predchádzimi simuláciami pozorujeme, že keď systém prechádza z ergodického režimu do neergodického (α klesá), nárast susceptibility X redukuje parameter Ω , až kým Ω nezanikne v kritickom bode. Tým pádom máme uzavretú teóriu pre MG s časovou invariantnosťou. Pozostáva z rovníc (25), (26), (27) pre stabilné parametre, (46) pre tvar a (57) pre rozsah distribúcie $\zeta(f)$ relatívnych historických frekvencií. Táto teória korektne určuje i) fázu prechodu a kritický bod $\alpha_c(T)$ procesu MG s históriou (pamäťou) zhodný s $\alpha_c(T)$ pre model s fiktívnou históriou; ii) že v bode fázy prechodu sa distribúcia relatívnych frekvencií redukuje na tvar $\zeta(f) = \delta[f - 1]$ (\rightarrow všetky histórie sa vyskytujú s rovnakou frekvenciou) a

parametre sa stávajú nezávislé na tom, či ide o model s reálnou alebo fiktívnou históriou; iii) tvar distribúcie frekvencie relatívnej histórie. V limitnom prípade $\alpha \rightarrow \infty$ teória správne potvrdzuje hodnoty parametrov $X = \varphi = c = 0$ pre ľubovoľné ζ . Pre model s pamäťou $\zeta = 0$ $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Omega = 1/3$ a $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mu_2 \approx 1,37$. Ak navyše odstránime rozhodovací šum, t. j. položíme $\sigma[\infty] = 1$, dostávame zjednodušený systém rovníc pre parametre c , φ , X , Ω , S_0 . Po eliminácii φ a S_0 môžeme napísať:

$$u = \frac{\text{Erf}[u]}{X\sqrt{2\alpha(1+c)}} \left\{ \int Dz \frac{1 + \frac{1}{6}\sqrt{\Omega}(3z-z^3)}{\left[e^{-z\sqrt{\Omega + \frac{5}{6}\Omega^2} + \frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{1}{2}\Omega^2\right)} + X \right]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (58)$$

$$X = \frac{\text{Erf}[u]}{\alpha} \left\{ \int Dz \frac{1 + \frac{1}{6}\sqrt{\Omega}(3z-z^3)}{e^{-z\sqrt{\Omega + \frac{5}{6}\Omega^2} + \frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{1}{2}\Omega^2\right)} + X} \right\}^{-1} \quad (59)$$

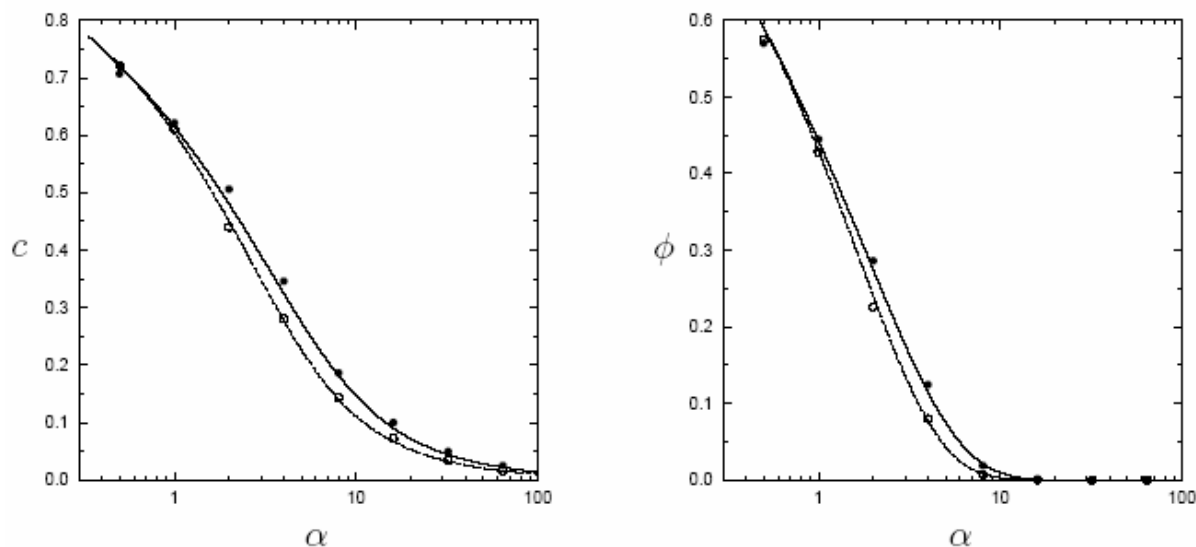
$$\Omega = \int Dz \left[1 + \frac{1}{6}\sqrt{\Omega}(3z-z^3) \right] e^{z\sqrt{\Omega + \frac{5}{6}\Omega^2} - \frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{1}{2}\Omega^2\right)} \quad (60)$$

$$\times \left\{ \frac{4}{\pi} \arctan \left[1 + \frac{2[1+c(u)]}{[1-c(u)] \left[1 + X e^{z\sqrt{\Omega + \frac{5}{6}\Omega^2} - \frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{1}{2}\Omega^2\right)} \right]^2} \right] \right\}^{-1} \left. \right\}^{\frac{1}{2}}$$

kde $c = c(u) = 1 - \text{Erf}[u] + \frac{1}{2u^2} \text{Erf}[u] - \frac{1}{u\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$. Numerické riešenie tohto systému zodpovedá simuláciám, (vzhľadom na aproximácie) hlavne pri nižších hodnotách μ_2 (Obr. 2).

Obr. 28

Vľavo: predikované korelácie c (vrchná čiara) spolu so simulačnými dátami (plné krúžky na vrchnej čiare) v neergodickej režime pre MG s reálnou históriou ($\zeta = 0$), a predikované korelácie c (spodná čiara) spolu so simulačnými dátami (plné krúžky na spodnej čiare) v neergodickej režime pre MG s fiktívnou históriou ($\zeta = 1$); Vpravo: predikované ϕ množstvo tzv. zmrznutých agentov za rovnakých podmienok a s analogickou legendou pre čiary a krúžky.



To bol Coolenov spôsob, ako matematicky odvodiť exaktne dynamické riešenia pre MG s reálnou pamäťou trhu pomocou techník analýzy generujúceho funkcionálu. Ukázalo sa, že aj napriek nemarkovovskému charakteru štandardnej MG s reálnou históriou, je možné (hoci len limitne) popísať proces MG uzavretým systémom rovníc, z ktorých vyplývajú aj základné parametre modelu. Mechanizmus je popísaný 2 efektívnymi rovnicami (v modeli s fiktívnou históriou bola len 1 rovnica) pre efektívneho agenta a pre efektívnu celkovú trhovú ponuku. Boli aproximované riešenia týchto rovníc, zameraním sa na časovo invariantné tvary veličín stabilne pozorovateľných počas procesu (korelácie, frakcia tzv. zmrznutých agentov), ako aj na analýzu distribúcie frekvencií pamäťových reťazcov. Výpočet prebehol formou mocninového rozvoja distribúcie do šírky, pričom prvých niekoľko významných členov bolo vyjadrených explicitne. Simulácie potvrdili predikčnú silu konečnej teórie, čo sa týka významných veličín stabilne pozorovateľných počas celého priebehu MG, čo sa týka tvaru (a aj šírky pre oblasť, kde táto šírka nenadobúda príliš veľké hodnoty) distribúcie frekvencie historických reťazcov.

Metódy analýzy generujúceho funkcionálu položili základ pre analytické riešenie ďalších otázok týkajúcich sa zvyšovania reálnosti modelov, napr. väčší počet stratégií ($s > 2$), umožniť agentom nulovú akciu - neobchodovať, kontrolovať zmenu vo vývoji stratégií agentov počas hry, uvažovať trh s viacerými komoditami, uvažovať náklady a obmedzený kapitál agentov, atď. Konkrétne z matematického hľadiska vznikli otázky relevantnosti pamäte, či ďalšej konštrukcie alebo aproximácie riešenia v neergodickej oblasti $\alpha < \alpha_c$. Predchádzajúce aproximácie výpočtov volatility σ na základe nesprávneho predpokladu stabilného stacionárneho riešenia padli, preto sa vynorila otázka opätovného preskúmania charakteristík MG, ktoré súvisia s korelačnou a reakčnou funkciou MG, a to aj pre modely, kde by boli odchýlky od rovnovážneho stavu zabudované detailne, mikroskopicky, nielen z makroskopického hľadiska limity $N \rightarrow \infty$. Tieto otázky majú význam aj pre iné odvetvia vedy, všade tam, kde sa vyskytujú neekvilibriové systémy (napr. neurónové siete v biológii).

4. Smerom k reálnym trhom

V súčasnosti existuje mnoho rozličných modelov, ktoré sú zamerané na správanie sa rôznych typov agentov účastných na trhu. Majú rôzne predpoklady, zjednodušenia a rôzne zaujímavé vlastnosti. Vo všeobecnosti tieto modely vykazujú niektoré štatistické vlastnosti popisujúce javy, ktoré sú reálne pozorované na finančných trhoch, napr. tučné chvosty distribúcie výnosov alebo zhľuky volatility. Motívom pre štúdium modelov trhu z pohľadu fyzikov je túžba pochopiť, ktoré kľúčové väzby a interakcie sú zodpovedné za javy pozorované na reálnych finančných trhoch. A takisto snaha predpovedať dianie na burzách, a to nielen kvôli vidine osobného zisku, ale s cieľom efektívnejšej kontroly rizika a optimalizácie portfólia. Napriek rozdielom majú všetky modely spoločné idey - spätná väzba, frustrácia, prispôsobivosť, dynamický vývoj. Jedným z najjednoduchších modelov zahŕňajúcich tieto základné charakteristiky je už spomínaný model od Challeta a Zhanga. Nemáme tu ani externý proces generujúci rozhodovací šum (ako napr. v sofistikovanom modeli pána Luxa), ani žiaden element lokálneho šírenia informácie medzi agentmi (ako použili páni Cont a Bouchaud) [7]. MG v roli realistického modelu trhu vychádza z mnohých zjednodušení:

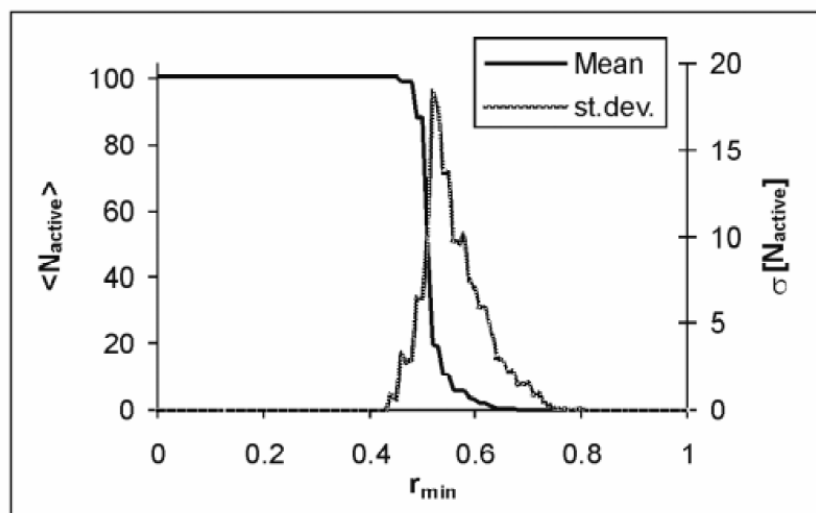
- všetci agenti obchodujú v rovnakom čase
- všetci agenti obchodujú rovnaké množstvá
- celkové množstvo obchodovanej komodity je fixné
- agenti sú diverzifikovaní na konečný počet typov

4.1 MG ako model trhu

Základný model je minimálnym systémom s malým počtom parametrov:

N - počet agentov, m_i - "pamäť" agenta i , s_i - počet stratégií agenta i . Stratégia mapuje 2^{m_i} možných histórií plus predikciu, takže máme $2^{2^{m_i}}$ rôznych prípustných stratégií. Nám však stačí redukovaný priestor 2^{m_i+1} stratégií. Ak počet stratégií v hre je väčší ako 2^{m_i+1} , ide o hustú fázu, naopak stav $N \cdot s \ll 2^{m_i+1}$ reprezentuje riedku fázu. Čím viac aktívnych stratégií, tým viac agentov používa tú istú (najlepšiu) stratégiu. Tvoria veľké skupiny a výrazne ovplyvňujú trh, vytvárajú značné výkyvy v dopyte a ponuke, čo spôsobuje vysokú volatilitu. Akonáhle sa vytvorí takýto dav, dôsledkom je vznik tzv. antidavu, ktorý používa (najhoršiu) opačnú stratégiu ako dav, a volatilita klesá. V riedkej fáze je nepravdepodobný vznik skupín agentov s rovnakou stratégiou. Náhodné a nezávislé rozhodovanie agentov pripomína hádzanie mincou. Toto binárne rozhodovanie v každom kroku však nezodpovedá realite. Preto rozšírime pôvodný model a dovoľíme agentom vyčkávať, kým si nebudú dostatočne istí, že by obchodovaním mohli v ďalšom kole zarobiť. Hráči si evidujú virtuálne skóre $r_{S,i}$ každej svojej stratégie, +1 pri správnej predikcii, -1 pri nesprávnej, bez ohľadu na to, či sa podľa danej stratégie hrá alebo nie (preto virtuálne). Tiež môžu sledovať svoje skóre predikčnej úspešnosti r_i . Agent i by mal mať tiež konečný časový horizont T_i , počas ktorého monitoruje svoje $r_{S,i}$ a r_i . Definujeme prah obchodovateľnosti r_{min} , buď v zmysle $r_{S,i}$ alebo r_i . Kým agent nedosiahne túto hodnotu, neobchoduje. Ďalej aktualizuje skóre $r_{S,i}$, ale r_i sa nemení. Počet aktívne obchodujúcich agentov N_{active} sa bude počas hry meniť v závislosti na $-T \leq r_{min} \leq T$. Čím bude r_{min} vyššie, tým pasívnejší budú agenti počas hry. Mala by tu teda existovať fáza prechodu pre N_{active} , čo potvrdzujú aj simulácie (obr. 1).

Obr. 29: časový priemer N_{active} a št. chyba v závislosti od r_{min} , kde $N = 101$, $m = 2$, $s = 2$, $r_{\text{min}} \sim r_{S,i}$, pričom agent hrá len vtedy, ak $\max[\{r_{S,i}\}] > r_{\text{min}}$.



N_{active} môžeme aproximovať binomickým správaním sa $r_{S,i}$:

$$r_S \sim 2\text{Bin}\left[T, \frac{1}{2}\right] - T \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \langle N_{\text{active}} \rangle &\approx N(1 - P[r_S < r_{\text{min}}])^S \\ \sigma^2[N_{\text{active}}] &\approx N(1 - P[r_S < r_{\text{min}}])^S P[r_S < r_{\text{min}}]^S \end{aligned}$$

Charakter r_S má v skutočnosti ďaleko od náhodnej prechádzky. V hustej fáze má vlastnosť návratu k priemeru, v riedkej fáze má výrazný drift. Aproximácia je vernejšia pre hodnoty $T \gg 2^m$, kde sa väčšina negatívnych javov vytráca. Pre stredné hodnoty r_{min} vytvára MG zaujímavú dynamiku vystihujúcu javy na reálnych trhoch, napríklad striedanie sa momentov extrémnej nelikvidity a pasivity s veľkou aktivitou, až obchodnou horúčkou, výskyt časových úsekov, keď ceny kolíšu v určitom romedzí, a následne stavov, keď sa ceny náhle začnú prudko meniť. Urobíme r_{min} dynamickou - počas deja sa bude meniť podľa osobnej miery úspešnosti agenta r_{min} . Zakomponujeme racionalitu a averziu k riziku:

- $r_{\text{min}} > 0$ (agent nebude hrať stratégiu, ktorá bola vo väčšine prípadov neúspešná)
- $d r_{\text{min}} / d r_i > 0$ (čím viac prehráva, tým menej riskuje)

Dostávame $r_{\text{min},i} = \max[0, -(r_i - \lambda \cdot \sigma[r_i])]$, kde λ je koeficient riziko-averzie a $\sigma[r_i]$ je štandardná odchýlka úspešnosti hráča i . V priebehu hry sa mení úspešnosť hráčov, menia sa ich r_{min} , a výsledkom je postupná diverzifikácia populácie v modeli.

4.2 Rozlíšenie agentov podľa bohatstva

Agenti sa odlišujú bohatstvom, veľkosťou investícií a investičnými stratégiami. Nech každý agent vlastní určité množstvo bezrizikového aktíva $B_i[0]$ a rizikového $S_i[0]$. Transakcia prebehne pri cene $p[t] \pm \delta[t]$, kde $\delta[t]$ vyjadruje rozptyl spôsobený trhovým mechanizmom. Predpokladajme, že v dôsledku averzie k riziku je objem transakcií priamo úmerný

celkovému bohatstvu agentov, ako aj ich presvedčeniu v správnosť stratégií, ktoré mienia použiť. Definujme mieru tohto presvedčenia ako c_i :

$$c_i[t] = \frac{\max[r_{S,i}[t]] - r_{\min}[t]}{T_i}$$

Vidíme, že $-2 < c_i < 1$, ale agent hrá iba ak $c_i > 0$. Operáciu nákupu napíšeme:

$$B_i[t+1] = B_i[t] \left(1 - c_i[t] \frac{p[t+1] + \delta[t+1]}{p[t] + \delta[t]} \right), \quad S_i[t+1] = S_i[t] + \frac{c_i[t] B_i[t]}{p[t] + \delta[t]}$$

Operácia predaja:

$$B_i[t+1] = B_i[t] + c_i[t] S_i[t] (p[t+1] - \delta[t+1]), \quad S_i[t+1] = S_i[t] (1 - c_i[t])$$

Čím bohatší agent, tým väčšie transakcie, tým väčší vplyv na trh. Ak sa hráčovi nedarí a príde o všetko, hra preňho končí. K tomu však dochádza pomerne zriedkavo, aj preto nebolo nutné zahrnúť do modelu príchod nových hráčov počas procesu. Agenti sa líšia nielen bohatstvom, ale aj investičnými stratégiami. Poznáme 2 hlavné typy stratégií - hodnotové a trendové. Hodnotový investor sa sústreďuje na aktuálnu hodnotu, pretože sa v každej iterácii snaží lacno kúpiť a drahšie predáť. Trendový investor kupuje aktíva so stúpajúcim a predáva tie s klesajúcim trendom. Populácia zložená z hodnotových investorov má minoritný charakter, kým populácia trendových investorov má majoritný charakter ľudí, ktorí sledujú, či akcie, ktoré držia, naozaj porastú a splnia ich očakávania. Reálny trh tvorí kombinácia týchto 2 typov investorov.

4.3 Mechanizmus obchodovania

Najjednoduchší trhový mechanizmus je walrasova aukcia. Investori na základe teoretickej ceny prejavujú svoj záujem kúpiť, či predáť rizikové aktívum. Teoretická cena sa ustáli na hodnote, kde sa dopyt = ponuka. V našom modeli sa používa zjednodušená verzia tohto procesu. Predpokladáme rovnosť dopytu a ponuky v každom kroku. Pre cenu musí platiť:

$$p[t+1] = \frac{\sum_{i, \text{Buyers}} c_i[t] B_i[t]}{\sum_{i, \text{Sellers}} c_i[t] S_i[t]}$$

Proces je zjavne nestabilný - ak nie sú žiadni kupci, cena klesá k 0, ak chýbajú predajcovia, cena nekonečne rastie. Táto nestabilita vyplýva z nereálneho predpokladu, že cena je v každej iterácii v ekvilibriu. Keď sa ponuka rizikového aktíva nezhoduje s dopytom, niektoré ponuky zostanú bez odzvy. Vtedy správca burzy zaujme long alebo short pozíciu tak, aby rozdiel v rámci svojich možností čo najviac vyrovnal. Jeden zo spôsobov, ako modelovať takéto situácie, je aplikovať nasledujúce pravidlo cenotvorby:

$$p[t+1] = p[t] \exp\left(\frac{\text{Buys}(t) - \text{Sells}(t)}{\text{Likvidita}}\right)$$

$$\text{Buys [t]} = \sum_{i, \text{Buyers}} S_i[t+1] - S_i[t] \quad \text{Sells [t]} = \sum_{i, \text{Sellers}} S_i[t+1] - S_i[t]$$

kde Likvidita je konštanta stanovená správcou burzy. Takto by sa správca nemal stať obeťou arbitráže, ešte treba zabezpečiť, aby stredná hodnota jeho majetku ($B_M[t]$ a $S_M[t]$) zostala dlhodobo na nule:

$$p[t+1] = p[t] \exp\left(\frac{\text{Buys}(t) - \text{Sells}(t) - S_M[t]}{\text{Likvidita}}\right)$$

To znamená, že ak je správca trhu v long pozícii, bude lákať kupcov znižovaním ceny a naopak. Stále je tu však možnosť, že sa správca trhu stane obeťou arbitráže - ak dostatočne veľké množstvo agentov súčasne zvolí stratégiu kúpiť, počkať a predat', a naopak. Výsledkom je negatívny drift $B_M[t]$. Aby tomu správca trhu predišiel, môže zvýšiť cenový rozptyl ponuky a dopytu alebo znížiť likviditu. Zvolíme prvú možnosť. Upravíme cenový rozptyl priamo

úmerne voči $-\frac{\langle B_M[t] \rangle}{\langle v[t] \rangle}$, kde $v[t]$ je objem transakcií daný vzťahom: $v[t] = \sum_{i=1}^N S_i[t+1] - S_i[t]$.

$\langle B_M[t] \rangle$ a $\langle v[t] \rangle$ sú dlhodobé časové priemery. Keď správca začne strácať peniaze, zvýši cenový rozptyl, a tým sa jeho celkové imanie udrží pri 0. Faktor $1/v[t]$ slúži ako stabilizátor tohto procesu v tom zmysle, že čím väčší je správcov deficit, tým viac agentov ho spláca.

4.4 Modely trhu a predikcia

Najzaujímavejšie javy vznikajú na základe silnej spätnej väzby, ktorá úzko súvisí s efektivitou procesu učenia a prispôsobovania sa agentov. Najprv potrebujeme generovať informáciu z finančných časových radov. Zameriame sa na smer pohybu dát (znamienko), t.j. či ide o pokles alebo nárast hodnoty historickej informácie: $h[t] = H[p_{\text{real}}[t] - p_{\text{real}}[t-1]]$, kde $H[x]$ je Heavisidova funkcia. Ak $p_{\text{real}}[t] = p_{\text{real}}[t-1]$, $h[t]$ náhodne priradíme 0 alebo 1. Ak by sme v modeli nahradili $h[t]$ externým procesom, vytratila by sa spätná väzba. Agenti sa snažia uhádnuť nasledujúcu víťaznú akciu na základe predchádzajúcich bitových informačných množín dĺžky m (každý reťazec pozostávajúci z 1 a 0 má vlastnú reprezentáciu v desiatkovej sústave, napr. 011 = 3). Úspešnosť stratégií sa dá vyvodiť z toho, ako často sa v priebehu hry vyskytujú bitové reťazce dĺžky $m+1$. Keď však zvýšime pamäť m , a tým aj dĺžku skúmaných reťazcov, dostaneme histogram veľkého počtu reťazcov s nízkymi pravdepodobnosťami výskytu. Tým sa informácia obsiahnutá vo výskytovom histograme stráca. Z modelu sa vytráca spätná väzba. Frustrácia agentov sa zvyšuje, keďže im nie je dovolené nahradiť neúspešné stratégie úspešnejšími. V systéme, kde neexistuje optimálna stratégia, to však môže byť napokon výhodou, pretože viac momentálne neúspešných stratégií poskytuje hráčom väčšiu adaptabilitu. Tým skôr, že predikčná sila takýchto náhodných modelov je omnoho menšia ako v modeloch zaoberajúcich sa správaním rozličných typov agentov, kde sa pravdepodobnosť daného výstupu určí jednoduchým Bayesovým princípom na základe predchádzajúceho priebehu. To znamená, že populácia môže byť oveľa úspešnejšia ako celok, než ako suma jednotlivých hráčov. Tento jav bol nazvaný kolektívna inteligencia.

4.5 Kontrola rizika

Väčšina teórií kontroly rizika je založená na tichom predpoklade, že budúci vývoj na trhu bude pokračovaním doterajšieho vývoja. Občas však nastanú situácie, keď sa menia podmienky, a tým sa minulý vývoj stáva nepoužitelný na predikciu budúcnosti. Odhadovať budúce scenáre len na základe historických dát je nedostatočné. Modely zamerané na agentov udávajú ponúkajú predikciu vývoja cien v súvislosti so zákonitosťami správania sa hráčov pri aktuálnych podmienkach na trhu. Inšpirujeme sa myšlienkami pánov Bouchaud a Sornette. Sústreďme sa na zmenu budúceho bohatstva ΔW_T daného vlastníctvom portfólia, napr. short pozícia európskej call opcie o cene C_0 , maturite T a strike X , plus long pozícia $\varphi_t[S_t]$ vyrovnávacieho aktíva s hodnotou S_t v iterácii t :

$$\Delta W_T = C_0 - \max[S_T - X, 0] + \sum_{t=0}^T \varphi_t[S_t] \cdot (S_{t+1} - S_t)$$

Ako mieru rizika použijeme varianciu. Môžeme ju zrátať analyticky pre všeobecný tvar, alebo simuláciami, kde sa každý agent podieľa na generovaní ΔW_T . Minimalizácia variancie priamo súvisí s hedgingom skrze $\varphi_t[S_t]$ a vedie k optimálnej stratégii s minimálnym rizikom:

$$\varphi_t[S_t] = \int_X^{\infty} \frac{(S_T - S_t) \langle \delta S_{S_t, t \rightarrow S_T, T} \rangle}{\langle \delta S_t^2 \rangle} P[S_T | S_t] dS_T$$

kde pravdepodobnosť $P[S_T | S_t]$ zrátame tak, že sčítame agentov, ktorí držia aktíva s cenou približne S_t v čase t a S_T v čase T . Podobne $\langle \delta S_{S_t, t \rightarrow S_T, T} \rangle$ je stredná hodnota nárastu δ počtu trajektórií, ktoré prechádzajú dostatočne blízko S_t a S_T v daných časoch. $\langle \delta S_t^2 \rangle$ je kvadrát strednej hodnoty nárastu počtu všetkých trajektórií v čase t .

4.6. Transakčné náklady

Transakčné náklady boli jedným z dôvodov, prečo Bouchaud a Sornette posadili svoj model do diskrétného času, avšak samotné náklady do modelu nezahrnuli. Z toho dôvodu upravíme predchádzajúci vzťah vyjadrujúci zmenu bohatstva agenta pri obchodnej transakcii:

$$\Delta W_T \rightarrow \Delta W_T + \sum_{t=0}^T k_1 + (k_2 + k_3 S_t) \varphi_t[S_t] - \varphi_{t-1}[S_{t-1}]$$

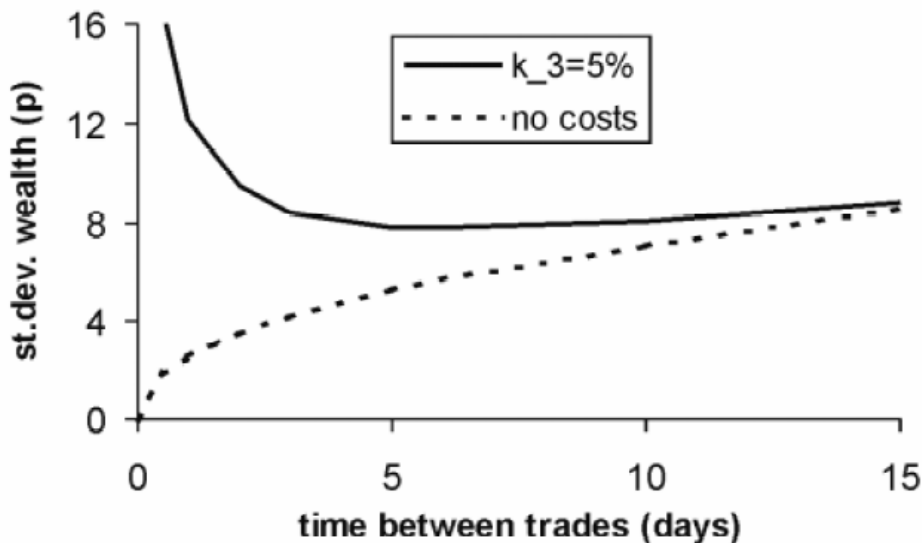
Ako mieru rizika opäť použijeme varianciu.

Aproximácia $|\varphi_t[S_t] - \varphi_{t-1}[S_{t-1}]| \approx \frac{\partial \varphi_t}{\partial S_t} |\delta S_t|$ sa využije na analytickú úpravu rizika v tvare podľa Bouchaud & Sornetta:

$$R \rightarrow R + \sum_{t=1}^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta S_t^2 \rangle (k_2 + k_3 S_t)^2 \times \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial S_t} \right)^2 P[S_t | S_0] dS_t - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta S_t \rangle (k_2 + k_3 S_t) \times \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial S_t} \right) P[S_t | S_0] dS_t \right)^2 \right) + \sum_{t_i \neq t_j}^T \iint_{\mathbb{R}} \left(\langle \delta S_{t_i} \rangle \langle \delta S_{t_j} \rangle \times (k_2 + k_3 S_{t_i}) (k_2 + k_3 S_{t_j}) \times \left(\frac{\partial \varphi_{t_i}}{\partial S_{t_i}} \right) \left(\frac{\partial \varphi_{t_j}}{\partial S_{t_j}} \right) P[S_{t_i} | S_0] \times (P[S_{t_j} | S_{t_i}] - P[S_{t_j} | S_0]) \right) dS_{t_i} dS_{t_j}$$

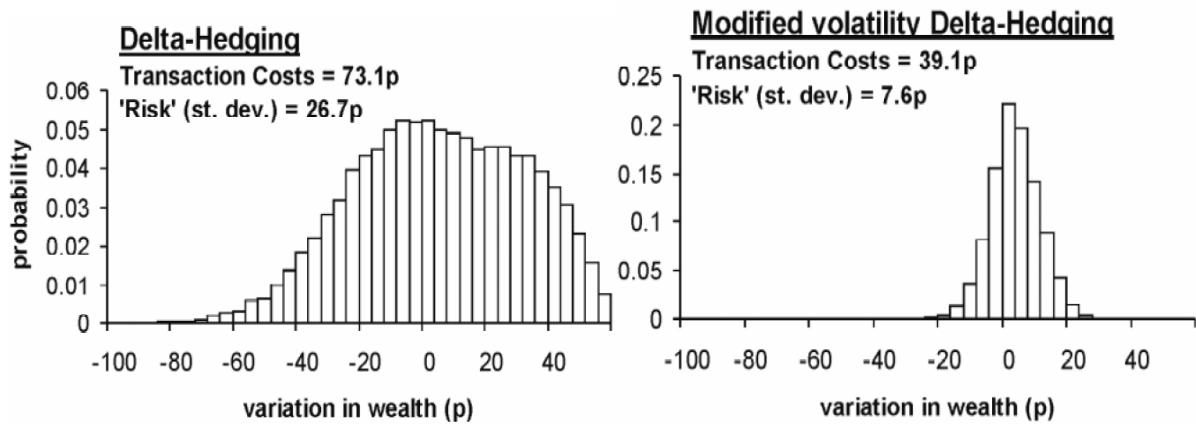
kde prvá časť vyjadruje súčet variancií transakčných nákladov a druhá súčet kovariancií. Kovariančná časť prudko rastie s rastúcim počtom transakcií. Prechod do spojitého času by znamenal divergenciu rizika (obr. 2). Rýchlejšie hedging portfólia zjavne nie je riešením.

Obr. 30: štandardná chyba bohatstva (p) v závislosti od "spojitosti" modelu pri nulových nákladoch (prerušovaná čiara) a pri 5% transakčných nákladoch k_3



Existuje korekcia $\gamma[t]$, funkcia času v tvare úsmevu. Značne znižuje riziko a celkové transakčné náklady portfólií s vysokými transakčnými nákladmi (obr. 3).

Obr. 31: príklad zníženia transakčných nákladov a rizika vzhľadom na varianciu (p) zavedením funkcie $\gamma[t]$ pri hedgingu



Dostali sme sa od základného modelu minoritnej hry k úplnému realistickému modelu trhu, ktorý by mal odrážať javy spojené so správaním sa agentov na skutočnom finančnom trhu, napr. tučné chvosty distribúcie výnosov, zhluky volatility, vysoká autokorelácia obchodovaných objemov aktív.

5. Záver

Vo svojej práci som sa snažil oboznámiť čitateľa s novou vednou disciplínou, s minoritnými hrami. Cez teóriu hier a ekonofyziku, rodičov minoritných hier, som prešiel k samotnej téme. Uviedol som tri základné typy modelov. Základný Zhangov model pôvodnej minoritnej hry, ktorý sa opiera v prvom rade o simulácie, potom analytický model A. C. C. Coolena, ktorý je najzložitejší, a nakoniec o realistický model, ktorý sa pri modifikácii základného modelu MG inšpiroval prácami Bouchauda a Sornetta, a ktorý sa snaží o čo najvernejšie zobrazenie diania na finančných trhoch. Súčasťou mojej diplomovej práce je príloha, v ktorej uvádzam základný simulačný program pôvodnej minoritnej hry spolu s popisom a interpretáciou. Simulačný algoritmus je vytvorený v programe matlab. Tým som v podstatnej miere splnil oba ciele, ktoré som si v tejto práci predsavzal. Ďalšie cesty vidím najmä v modifikovaní už existujúcich modelov a v práci so zodpovedajúcich simulačnými programami. Verím, že moja práca poskytne v tomto smere inšpiráciu a dobrý základ, v snahe vernejšie vykresliť a lepšie pochopiť, predpovedať a korigovať dianie na skutočných finančných trhoch, prípadne v iných, možno dôležitejších oblastiach života (ekológia). Otázka totiž nezná, do akej miery sú binárne modely schopné odrážať realitu, ale ako ich modifikovať a inšpiratívne využiť pri modelovaní a riešení skutočných (problémových) situácií.

Použitá literatúra:

- webové stránky:
- [1] <http://www.wikipedia.com/>
 - [2] <http://www.unifr.ch/econophysics> (Matteo Marsili: Theory of Minority Games)
 - [3] <http://www.arXiv.org/>
 - [4] Esteban Moro - "The Minority Game: an introductory guide", arXiv: cond-mat/0402651 v1 26 Feb 2004
 - [5] A C C Coolen - "Non-equilibrium statistical mechanics of Minority Games", arXiv:cond-mat/0205262 v1 13 May 2002
 - [6] A C C Coolen - "The Generating functional analysis of Minority Games with real market histories", arXiv: cond-mat/0410335 v1 13 Oct 2004
 - [7] D. Challet, A. Chessa, M. Marsili and Y.-C. Zhang - "From Minority Games to real markets", arXiv: cond-mat/0011042 v1 2 Nov 2000
 - [8] Zuzana Richterová – Minoritné hry a modelovanie finančných trhov (diplomová práca)

Príloha

Zdrojový kód programu:

Funkcia mtica:

```
function [vn]=mtica(m)
for j=1:m
    v(j)=-1;
    v(j+m)=1;
end
vp=randperm(2*m);
clear vn;
for i=1:m
    vn(i)=v(vp(i));
end
```

Funkcia volaj:

```
function [matica]=volaj(m)
e=ones(1,m);
e0=e;
matica=e0;
for i=1:m-1
    e=ones(1,m);
    e(m-(i-1):m)=-1;
    e0=e;
    ep=e0;
    [matica]=rotuj(m,e,matica,i,ep);
end

matica=[matica; (-1)*ones(1,m)];
```

Funkcia rotuj:

```
function [matica]=rotuj(poz,e,matica,pocet,ep)
a=e;
e0=e;
i1=pocet;
k=poz;
if(poz >1)
    while(e(poz-1)==-1 & poz-1>1)
        poz=poz-1;
        [matica]=rotuj(poz,e(1:poz),matica,pocet-1,ep);
        [e]=zmen(e0);
        ep=zmenep(e,ep);
        e0=e;
    end

for i=poz:-1:pocet+1
    pom=e(i);
    e(i)=e(i-1);
    e(i-1)=pom;
    a=[a;e];
end
```

```

if (poz > pocet)
    an = [a(1,:) ep(poz+1:length(ep))];
    for i = 2:length(a)
        an = [an; a(i,:) ep(poz+1:length(ep))];
    end
    matica = [matica; an];
else
    if (poz == pocet)
        matica = [matica; ep];
    end
end
end
end

```

Funkcia zmen:

```

function [e]=zmen(e0)
    e=e0;
    e=[e(2:length(e)) e(1)];
    e0=e;

```

Funkcia zmenep:

```

function ep=zmenep(e,ep)
ep=[e(1:length(e)) ep(length(e)+1:length(ep))];

```

Funkcia strategia:

```

function ps=strategia(m,N,s)
a=volaj(2^m);
as=volaj(m);
ps=cell(N,s);
for i=1:N
    vp=randperm(2^(2^m));
    for j=1:s
        ps{i,j}=[as a(vp(j),:)]' zeros(2^m,1)];
    end
end
end

```

Funkcia prehliadka:

```

function najs=prehliadka(m,s,N,a,it)
najs=cell(N,1);
for i=1:N
    poc=0;
    pom=-it;
    for j=1:s
        if (a{i,j}(1,m+2) > pom)
            pom=a{i,j}(1,m+2);
            poc=1;
        else
            if (a{i,j}(1,m+2) == pom)
                poc=poc+1;
            end
        end
    end
end
end

```

```

pompole=cell(N,poc);
ipoc=1;
for j=1:s
    if(a{i,j}(1,m+2)==pom)
        pompole{i,ipoc}=a{i,j};
        ipoc=ipoc+1;
        poml=poml+1;
    end
end
vp=randperm(poc);
najs{i}=pompole{i, vp(1)};
end

```

samotný algoritmus:

```

clear all;
clc
m=3;
N=3;
s=3;
ps=strategia(m,N,s);
mt=mtica(m)
mit=100;
for it=1:mit
    najs=prehliadka(m,s,N,ps,mit);
    sucet(it)=0; % j-ty agent ma akt. strat. najs(j),
                % predch. m-ticu checkuje v
najs(j) a robi rozhodnutie
    j=1;
    while(ps{i,j}(:, :)~=najs{i})
        j=j+1;
        if(j>s)error('nekonecny cyklus')
        end
    end
    for r=1:2^m
        if (ps{i,j}(r,1:m)==mt)
            akcia(i)=ps{i,j}(r,m+1);
            sucet(it)=sucet(it)+akcia(i);
        end
    end
end
if (sucet(it)>0)
    vitazna=-1;
    prehra=1;
else
    if (sucet(it)<0)
        vitazna=1;
        prehra=-1;
    end
end
for i=1:N
    for j=1:s
        for r=1:2^m
            if((ps{i,j}(r,1:m)==mt) & (ps{i,j}(r,m+1)==vitazna))
                ps{i,j}(1,m+2)=ps{i,j}(1,m+2)+1;
            elseif((ps{i,j}(r,1:m)==mt) & (ps{i,j}(r,m+1)==prehra))

```

```
                ps{i,j}(1,m+2)=ps{i,j}(1,m+2)-1;
            end
        end
    end
    end
    mt=[mt(2:m) vitazna]
end
plot(sucet,'r')
sucet
```


Popis jednotlivých častí programu:

Funkcia mtica:

- vygeneruje náhodnú variáciu dĺžky m zloženú z 1 a -1. Najprv vygeneruje vektor dĺžky $2m$, kde sa vyskytuje na prvých m miestach -1 a na ďalších m miestach 1. Potom sa urobí náhodná permutácia a z nej sa zoberie prvých m prvkov. Tým je zaručená prípustnosť každej variácie.

Funkcie volaj, rotuj, zmen a zmenep:

- ich úlohou je vytvoriť maticu všetkých variácií 1 a -1 dĺžky m . Variácie vyrábame takým štýlom, že na začiatku máme jednotkový vektor. Pridáme na posledné miesto vpravo -1 a tú necháme rotovať doľava cez všetky pozície. Potom pridáme ďalšiu -1 namiesto poslednej 1 a necháme odrotovať zasa len tú -1, ktorá je prvá vpravo za jednotkami. Keď odrotuje, posunieme obe -1 o pozíciu dopredu a zasa odrotujeme len prvú z -1. Postupne meníme ďalšie +1 na -1. Pritom si ale musíme pamätať aj jednotkový chvost, ktorý nám začne vznikať pri posúvaní celej skupinky -1 doľava a následnom variovaní. Tiež musíme vedieť pozíciu tej -1, ktorá ide rotovať. Variácie sa ukladajú do riadkov premennej matica.

Funkcia volaj:

- začíname z jednotkového vektora e . Postupne od konca prepisujeme v tomto vektore jednotky na -1. Skôr než zavoláme funkciu rotuj, uložíme si do pomocných premenných vektor, z ktorého vychádzame pri zavolaní funkcie rotuj. Tá vyjadrí všetky permutácie pri danom počte 1 a -1 dĺžky m . Jediný parameter je m . Počet jednotiek v každej ďalšej iterácii klesá na úkor -1. Na konci ešte pridáme do pola matica vektor mínus jednotiek.

Funkcia rotuj:

- vo funkcii volaj, kde používame funkciu rotuj, sa nám v každej iterácii mení vektor e . Lenže tento vektor sa mení aj vo vnútri funkcie rotuj. Funkcia rotuj si musí pamätať vektor e , z ktorého vychádza. Tiež si potrebujeme pamätať pozíciu -1, ktorá bude rotovať, a taktiež aktuálny počet 1 vo vektore e . Prvý cyklus začína podmienkou, že rotujúca -1 nemôže rotovať, ak pred ňou nie sú žiadne jednotky, teda poz musí byť väčšie ako 1. While cyklus kontroluje, aby rotovala len prvá -1, ak by pred ňou už bola -1, posunieme sa na jej pozíciu. Keď nájdeme -1, pred ktorou nie je -1, ale sú tam nejaké 1, počet pozícií jednotiek, ktorými plánujeme rotovať, sa zníži o jedno. Do ep sa ukladá koncová časť vektora e , ktorá nerotuje. Zavoláme funkciu zmen, ktorá pošle prvý prvok vektora e na koniec, čím sa posunie -1 o pozíciu doľava. Funkcia zmenep zmení ep podľa toho, ako sa mení e . Nasledujúci for cyklus nám postupne vymieňa pozíciu -1 s predchádzajúcimi 1. Dostávame variácie. Ukladáme ich do premennej a . Tieto variácie majú však skrátenú dĺžku, lebo variuje vždy len -1 prvá zľava. Preto sa musí k skrátenej variácii do premennej matica prilepiť koncová časť. Táto však môže mať rôzny tvar, z toho dôvodu sa zaviedla premenná an .

Funkcia strategia:

- najprv si zavoláme pole všetkých variácií 1 a -1. Potom si vytvoríme as , teda tú časť stratégie, ktorá je pre všetkých hráčov rovnaká. Potrebujeme bunkové pole, kde každému hráčovi náhodným spôsobom vyberieme s rôznych stratégií.

K rovnakej časti as prilepíme náhodný transponovaný riadok z poľa a všetkých variácií 1 a -1. Ku každej stratégii pripojíme aj nulový vektor. Nula v prvom vektore tohto riadku v ďalšom poslúži ako virtuálne skóre danej stratégie.

Funkcia prehliadka:

- má za účel výber aktívnych stratégií. V prvej časti každý agent zisťuje počet svojich stratégií s maximálnym skóre. Tento počet si zapamätá a takisto veľkosť maximálneho skóre. V druhej časti si agenti vytvoria pomocné pole, do ktorého si ukladajú tie svoje stratégie, ktoré majú maximálne skóre. Nakoniec si agenti vyberú náhodne jednu zo svojich virtuálne najlepších rovnako úspešných stratégií z tohto poľa. Virtuálnu úspešnosť vyjadruje číslo v riadku 1 a stĺpci $m+2$.

Samotný algoritmus:

- popisuje mechanizmus minoritnej hry. Má 3 parametre, pamäť m , počet stratégií s , počet hráčov N . Počet iterácií sa nastavuje v premennej mit . Agenti na základe predchádzajúcich m víťazných akcií uložených v matici prehliadajú svoje stratégie a vyberú si aktívnu. Podľa tej sa následne rozhodnú. V rámci iterácie sledujeme súčet akcií. Tento súčet je vždy na začiatku iterácie nulový a na konci iterácie jeho kladnosť alebo zápornosť rozhodne o minoritnej víťaznej akcii. Agenti prehodnotia svoje rozhodnutia, zistia správnosť alebo nesprávnosť svojich rozhodnutí a toto zistenie premietnu do virtuálnych skóre svojich stratégií. Tento súčet je zatiaľ jedinou sledovanou hodnotou. Jeho výchylka od nulovej strednej hodnoty vyjadruje vzdialenosť od riešenia, ktoré je globálne optimálne, lebo zodpovedá maximálnemu počtu víťazov ($N/2-1$).

Program je skonštruovaný v závislosti od parametrov m – pamäť, N – počet hráčov, s – počet stratégií. Má teda požadovanú variabilitu. Samotný algoritmus využíva 7 funkcií. Táto základná verzia má iba jediný výstup, predpokladá nepárnosť N a počet iterácií nie je vstupom, tieto (z hľadiska ďalšej práce s programom) drobné nedostatky je však možné veľmi jednoducho odstrániť. Samotné simulácie a ďalšia práca s týmto programom by tematicky vystačili na ďalšiu diplomovú prácu, preto nebola cieľom mojej diplomovej práce. Za dôležité pokladám to, že program dobre simuluje vývoj v Zhangovom modeli základnej MG, je funkčný, variabilný, ľahko sa s ním pracuje, je možné ho ľahko upravovať a modifikovať v závislosti od toho, čo chceme modelovať. V programe je dobre urobené pridelovanie stratégií hráčom. Tí si vyberajú stratégie z množiny všetkých stratégií náhodne, pričom nie je možné, aby mal nejaký hráč pridelené 2 alebo viac identických stratégií. Každá prípustná stratégia má pritom rovnakú šancu, že si ju agent na začiatku zvolí. Program možno okamžite použiť napríklad na vytvorenie simulácií podobných s tými na obrázku 13.