FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Hry s asymetrickou informáciou

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2007

Veronika Sláviková

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika

Hry s asymetrickou informáciou

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Veronika Sláviková
Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.
Bratislava 2007

Prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracovala samostatne pod vedením vedúceho diplomovej práce a čerpala som len z uvedenej literatúry.

V Bratislave, 1. júna 2007 Veronika Sláviková

Týmto by som sa chcela poďakovať vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD. za vedenie pri písaní tejto práce. Ďalej by som sa chcela poďakovať Jaroslavovi Kačmárovi a mojej rodine za veľkú podporu počas celých piatich rokoch.

Abstrakt

Táto diplomová práca by mala slúžiť ako učebný materiál. Zaoberá sa teóriou hier, konkrétne nekooperatívnymi hrami s asymetrickou informáciou. Obsahuje teóriu k hrám typu Moral hazard, Adverse selection, Signalling a Screening. K jednotlivým kategóriam sú uvedené riešené príklady a zadania príkladov s výsledkami.

Kľúčové slová: Teória hier, Moral hazard, Adverse selection, Signalling, Screening

Abstract

This work should be used as educational source. It deals with game theory, concretely with noncooperative games with asymetric information. It includes theory about Moral hazard, Adverse selection, Signalling and Screening. For each category there are couple of solved problems and couple of problems with solutions only.

Keywords: Game theory, Moral hazard, Adverse selection, Signalling, Screening

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

Počiatky teórie hier môžeme sledovať až do roku 1713, kedy James Waldegrave prezentoval riešenie (minmaxová zmiešaná stratégia) kartovej hry *le Her* pre dvoch hráčov. V roku 1838 Antoine Augustine Cournot v svojej práci *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, predstavil analýzu správania sa duopolov. V roku 1881 Francis Ysidro Edgeworth predstavil pojem konkurenčného ekvilibria v ekonómii, pozostávajúcej z dvoch osôb a dvoch typov komodít. Emile Borel v práci *Algebre et calcul des probabilites* z roku 1927 sformuloval prvé minimaxové riešenie pre hry o dvoch osobách a troch až piatich stratégiách.

No teória hier, ako samostatná vedná disciplína neexistovala až do roku 1928, kedy John von Neumann publikoval sériu prác, ktoré vyvrcholili prácou *The Theory of Games and Economic Behavior* (Teória hier a ekonomického správania sa) z roku 1944, ktorej spoluautorom bol aj Oskar Morgenstern. Táto práca sa zaslúžila o to, že sa teória hier dostala do povedomia ľudí. Uplatnenie teórie hier je hlavne v aplikovanej matematike a ekonómii, no používa sa aj v biológii, filozofii či sociológii. Známym príkladom z teórie hier je hra väzňova dilema, ktorá je základom nespočetného množstva prác. Najznámejším "herným teoretikom" je pravdepodobne John Nash, ktorý predstavil Nashovo ekvilibrium a o ktorom bol natočený Oscarmi ovenčený film *A Beautiful Mind*.

V tejto diplomovej práci sa budeme zaoberať nekooperatívnymi hrami s asymetrickou informáciou, t.j. účastníci nespolupracujú, ale každý chce maximalizovať svoj zisk sám. Asymetria spočíva v tom, že jeden z hráčov má informáciu, ktorú druhý hráč nemá. Cieľom je popísať teóriu, vysvetliť ju na vzorových príkladoch a nakoniec uviesť príklady na riešenie tak, aby táto práca mohla slúžiť ako plnohodnotný učebný materiál.

Práca je rozdelená do 5 častí. V prvej popíšeme základy teórie hier, pojmy a definície, ktoré budú potrebné pre ďalšie kapitoly. Druhá časť obsahuje úvod do asymetrických hier a rozdelenie do jednotlivých kategórií. V tretej a štvrtej časti sa budeme zaoberať už jednotlivými kategóriami hier s asymetrickou informáciou, ich podrobným popisom, jednotlivými stratégiami a ich prípadnými ekvilibriami. Ku každej kategórií uvedieme podrobne vyriešené vzorové príklady a na konci niekoľko zadaní príkladov na riešenie. V piatej časti budú výsledky príkladov na riešenie (bez uvedeného postupu).

Kapitola 1

Základné pojmy a definície

Pod hrou v teórii hier, všeobecne rozumieme príklad, kde sa vopred daný počet hráčov rozhoduje medzi vopred danými stratégiami (nie nutne rovnakými pre každého hráča) s vopred danými výplatami. Pritom sa predpokladá racionalita hráčov, to znamená, že každý maximalizuje svoju výplatu.

Typickým príkladom je hra väzňova dilema. Príbeh: Polícia zatkne 2 ľudí pre podozrenie z krádeže. Vypočúva každého samostatne. Obidvaja dostanú rovnakú ponuku: Ak sa prizná k tomu, že to spravili obaja, a ten druhý nie, potom on dostane 1 rok za spoluprácu, a ten druhý dostane 10 rokov. Ak sa obidvaja priznajú, dostane každý po 5 rokov, no ak sa neprizná ani jeden z nich, pre nedostatok dôkazov si každý odsedí len 3 roky. Je tu vopred daný počet hráčov (2), vopred dané stratégie (priznať sa, nepriznať sa) s vopred danými výplatami (počet rokov vo väzení). Dilema z názvu spočíva v tom, že ak sa jeden hráč neprizná, môže v závislosti od rozhodnutia druhého hráča dostať buď 1, alebo 10 rokov. Ak sa prizná, môže dostať 3 alebo 5 rokov. Tak sa rozhodne radšej priznať, kedy je aj tá horšia situácia, 5 rokov, stále lepšia ako 10 rokov. Takto budú uvažovať obidvaja a nakoniec sa priznajú, takže dostanú 5 rokov, aj keď sa mohli obidvaja nepriznať a dostať 3 roky. Ekvilibrium hry nie je v tomto prípade to reálne najlepšie dosiahnuteľné.

1.1 Typy a zápisy hier

Hry sa môžu líšiť vo viacerých aspektoch, teda ich môžeme deliť nasledovne:

podľa informovanosti hráčov:

- Hry s úplnou informáciou - všetci hráči majú všetky možné informácie
- Hry s neúplnou informáciou - niektoré informácie sú nedostupné pre všetkých hráčov
- Hry s dokonalou informáciou - každý hráč vie, kde sa v danom okamihu hry nachádza
- Hry s nedokonalou informáciou - hráč nemusí vedieť, kde sa práve nachádza
- Hry s istotou - v hre sa nevyskytuje náhoda
- Hry s neistotou - v hre sa vyskytuje aj náhoda
- Hry so symetrickou informáciou - všetci hráči majú rovnaké informácie
- Hry s asymetrickou informáciou - niektorí hráči majú informačnú výhodu

podľa počtu krokov:

- jednokrokové hry
- opakované hry
  - nekonečne opakované hry
  - hry s konečným počtom krokov

podľa spôsobu rozhodovania:

- simultánne hry - hráči sa rozhodujú naraz
- sekvenčné hry - hráči sa striedajú v ťahoch

Rozlišujeme dve formy zápisu hry - extenzívnu a strategickú.

Definícia: Hrou v extenzívnej forme Γ nazývame šesticu $\{I, (x, \succ), \iota(.), A(.), P, u\}$, kde:

- $I = \{N, 1, 2, \dots\}$ - množina hráčov, N - je hráč náhoda
- $(x, \succ)$ - herný strom, daný množinou vrcholov x a reláciou predchádzania $\succ$, $\succ$ je tranzitívna, antisymetrická a teda čiastočne usporiadaná
- $\iota(.)$ - zobrazenie $x \to I$, ktoré priraďuje každému rozhodovaciemu vrcholu x hráča, ktorý sa v ňom rozhoduje
- A(.) - A(h) je množina všetkých akcií, ktoré má hráč k dispozícií v informačnej množine h
- P - rozdelenie množiny všetkých vrcholov na informačné množiny
- u - funkcia výplat

Potrebujeme ešte pojem stratégia a informačná množina.

Definícia: Stratégiou nazývame úplný predpis akcií, ktoré hráč volí vo všetkých svojich rozhodovacích vrcholoch, bez ohľadu na to, či sa do nich v priebehu hry dostane alebo nie.

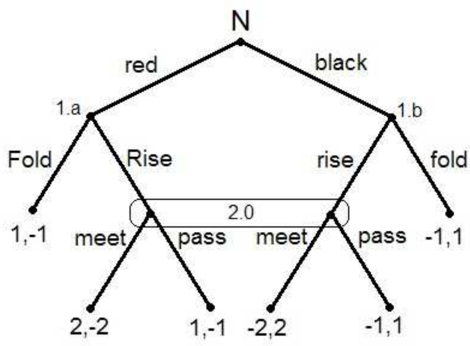
Definícia: Informačnou množinou nazývame množinu vrcholov, o ktorých hráč vie, že sa nachádza v jednom z nich, nevie však v ktorom.

Príklad: Mayersonova hra
Hrajú dvaja hráči a hráč náhoda. 1. hráč si potiahne kartu z balíka. Náhoda určí, či je to čierna (black) alebo červená (red) karta. 1. hráč sa na ňu pozrie a vyberie si, či zloží (fold) alebo nie (rise). Ak nezloží, ale prihodí, 2. hráč si vyberie, či prihodí (meet) alebo neprihodí (pass) a pozrie sa na kartu. Zápis v extenzívnej forme:

$I = \{N, 1, 2\}$
$A_N(N) = \{red, black\}$
$A_1(1.a) = \{Fold, Rise\}$, $A_1(1.b) = \{fold, rise\}$
$A_2(2.0) = \{meet, pass\}$

$S_1 = \{Ff, Fr, Rf, Rr\}$ $S_2 = \{m, p\}$

výplaty a informačné množiny sú zrejmé zo stromu hry (obrázok 1.1).



Obrázok 1.1: Mayersonova hra

Definícia: Hrou v strategickej forme nazývame trojicu $G = \{I, S, u\}$, kde:

- $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ - množina hráčov
- $S = S_1$ x S_2 x ... x S_n - množina profilov stratégií
- $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ - vektor funkcií výplat

Príklad: Súboj pohlaví
Manželský pár sa rozhoduje, ako strávi večer. Manželka chce ísť na koncert, manžel na box. Zápis v strategickej forme:
$I = \{M, F\}$
$S = \{(B, B), (B, K), (K, B), (K, K)\}$
Vektor funkcií výplat sa často nahrádza tabuľkou výplat:

	B	K
B	2, 1	0, 0
K	0, 0	1, 2

Definícia: Statickou Bayesovou hrou v strategickej forme nazývame päticu $(I, A, T,\ u_i : T_i \text{ x } A \rightarrow \Re\ ,\ \mu_i\ )$, kde:

- $I = \{N, 1, 2, \ldots, n\}$ - množina hráčov
- $A = A_1$ x A_2 x $\ldots$ x A_n- profil akcií, A_i je množina akcií hráča i
- $T = T_1$ x T_2 x $\ldots$ x T_n- množina profilov typov hráčov, T_i je množina typov hráča i
- u_i - funkcia výplat hráča i, $u_i(t_i, a)$
- μ_i - systém predpokladov hráča i o pravdepodobnosti typov ostatných hráčov, $\mu_i(t_{-i}|t_i)$

1.2 Stratégie a ekvilibriá

Rozlišujeme dva typy stratégií. Čisté a zmiešané. Hráč má čisté stratégie, ak volí svoju stratégiu s_i, z množiny stratégií S_i, bez akejkoľvek náhodnosti.

Definícia: Stratégiu s_i hráča nazývame ostro dominantnou stratégiou, ak platí, že pre ľubovoľný profil stratégií s_{-i} zahraný protihráčmi prináša stratégia s_i ostro väčšiu výplatu než ľubovoľná iná stratégia s'_i, teda ak:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Definícia: Stratégiu s_i hráča nazývame slabo dominantnou stratégiou, ak platí, že pre ľubovoľný profil stratégií s_{-i} zahraný protihráčmi prináša stratégia s_i väčšiu alebo rovnakú výplatu než ľubovoľná iná stratégia s'_i, teda ak:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Definícia: Stratégia s'_i je ostro (slabo) dominovaná stratégiou s_i. Platí, že ak existuje ostro dominantná stratégia s_i, tak je jediná. Slabo dominantných stratégií môže byť viacero.

Definícia: Profil stratégie s^* nazývame ekvilibriom ostro dominantných stratégií, ak pre každého hráča i je s^*_i jeho ostro dominantná stratégia.

Veta: Ak má hra ekvilibrium ostro dominantných stratégií, tak toto ekvilibrium je Nashovým ekvilibriom hry. Nashové ekvilibrium hry, je také ekvilibrium, kde už žiadny hráč nemôže získať väčšiu výplatu tým, že len on sám zmení stratégiu.

Definícia: Zmiešanou stratégiou σ_i hráča i nazývame rozdelenie pravdepodobností nad množinou čistých stratégii daného hráča S_i.

Definícia: Profil zmiešaných stratégií $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ nazývame Nashovo ekvilibrium v zmiešaných stratégiách, ak pre každého hráča $i \in I$ platí:

$$\sigma_i^* = arg \max_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

Definícia: Profil strategií v statickej Bayesovej hre $(s_1^*(.), s_2^*(.) \ldots s_n^*(.))$ nazývame Bayesovym Nashovym ekvilibriom (BNE) pre každého hráča a pre každý jeho typ, ak

$$\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \mu_i(t_{-i}|t_i)\; u_i(t_i, s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i})) \geq \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \mu_i(t_{-i}|t_i)\; u_i(t_i, a_i, s_{-i}^*(t_{-i}))$$

pre všetky $a_i \in A_i$.

Definícia: Nech s^* je BNE hry s neúplnou informáciou. Hovoríme, že informačná množina je na ekvilibriovej ceste, ak vzhľadom na s^* a rozdelenie typov je dosiahnuteľná kladnou pravdepodobnosťou. Ak je dosiahnuteľná s nulovou pravdepodobnosťou, hovoríme, že je mimo ekvilibriovej cesty.

Definícia: Profil stratégií s nazývame sekvenčne racionálnym vzhľadom na systém predpokladov μ, ak s vyberie v každej informačnej množine racionálnu akciu.

Definícia: Profil stratégií s^* a systém predpokladov μ tvoria slabo dokonalé Bayesovo ekvilibrium, ak spĺňajú:

- Hra má systém predpokladov, teda v každej informačnej množine má hráč, ktorý sa v nej rozhoduje, dobre definovaný predpoklad μ. Systémom predpokladov μ hry v extenzívnej forme nazývame rozdelenie pravdepodobností nad rozhodovacími vrcholmi v každej informačnej množine. Pre každý rozhodovací vrchol x v informačnej množine h(x) platí:

$$\sum_{x \in h(x)} \mu(x) = 1, \mu(x) \in \langle 0, 1 \rangle$$

- Nech s^* je BNE. Požadujeme, aby všetky informačné množiny na ekvilibriovej ceste boli konzistentné s Bayesovym pravidlom.
- V informačných množinách mimo ekvilibriovej cesty, kde nie je možné použiť Bayesove pravidlo, je predpoklad ľubovoľný.
- Vzhľadom na dané predpoklady, stratégie hráčov musia byť sekvenčne racionálne.

Kapitola 2

Hry s asymetrickou informáciou

Hrou s asymetrickou informáciou nazývame takú hru, kde jeden z hráčov má informačnú výhodu oproti druhému, t.j. jeden vie niečo, čo ten druhý nevie. Typickým príkladom sú modely, kde predávajúci má viac informácií o predávanom produkte, napr. predavač ojazdených vozidiel, realitný agent, obchodník s akciami. Na druhej strane poznáme aj prípady, kde môže mať informačnú výhodu kupujúci, napr. úrazová poistka alebo kupovanie umeleckého diela u predajcu, ktorý nemá dielo ocenené znalcom. Podobne medzi hry s asymetrickou informáciou môžeme zaradiť pracovný pohovor.

Teória hier s asymetrickou informáciou je často používaná v oblasti ekonomického výskumu a už viac ako dve desaťročia je nevyhnutným nástrojom nemalej časti výskumníkov. Jej počiatky sa datujú do roku 1970, kedy George Akerlof uverejnil svoju prácu *The Market for Lemons*, v ktorej na trhu s ojazdenými autami predstavil asymetrickú informáciu a jej dôsledky. Druhým prelomom bol rok 1973, kedy Michael Spence uverejnil svoju prácu *Job Market Signalling*, v ktorej popísal správanie sa zamestnancov a zamestnávateľov na trhu práce. V roku 2001 dostali páni Akerlof, Spence a Stiglitz za ich analýzu trhov s asymetrickou informáciou Nobelovu cenu.

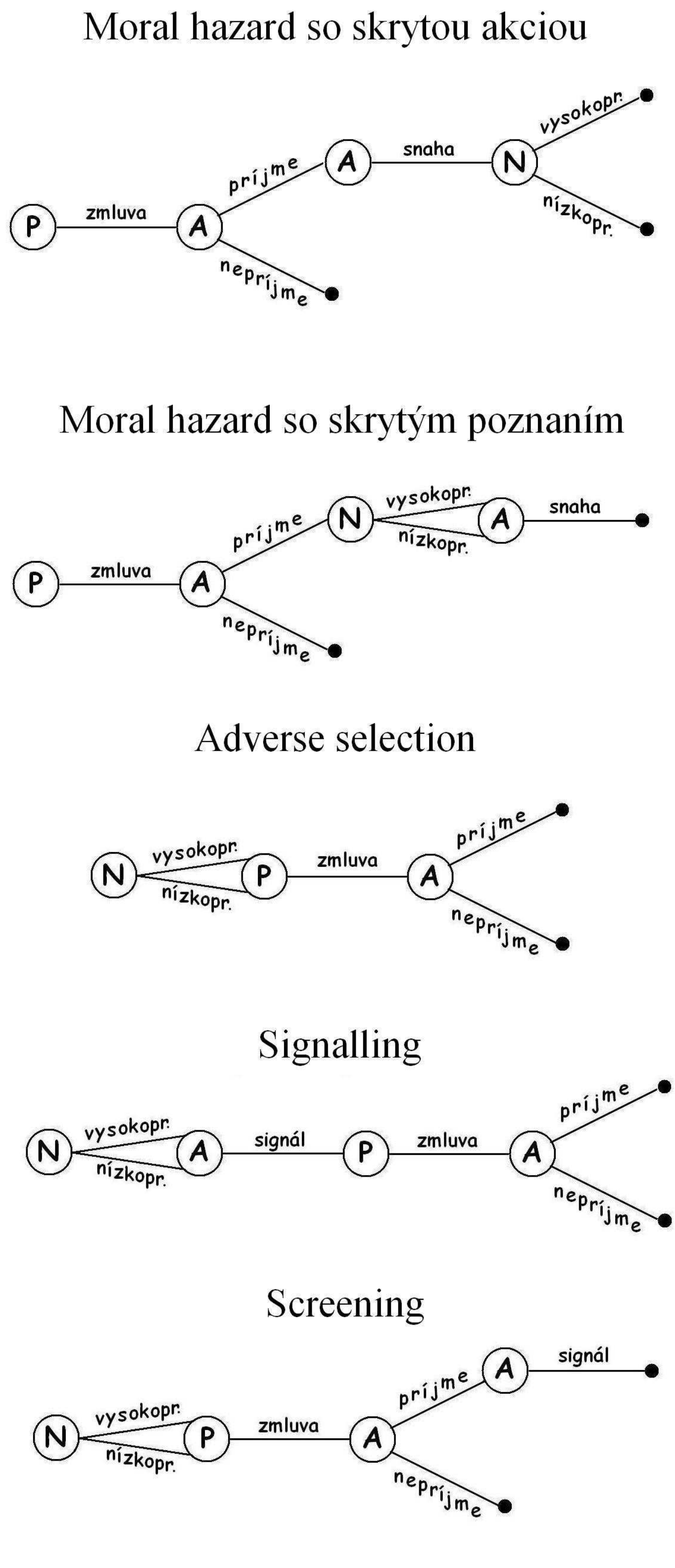
Hry s asymetrickou informáciou môžeme rozdeliť do 2 hlavných kategórií:

- Moral hazard
- Adverse selection

Pojem Moral hazard vyjadruje to, že redistribúcia rizika mení správanie sa ľudí. Napríklad ľudia, ktorí majú poistenie proti krádeži auta, sa môžu správať ľahkovážnejšie a nechať občas auto nezamknuté. Podobne ľudia, ktorí majú úrazovú poistku sa menej boja robiť nebezpečné veci (napr. skalolezenie a pod.), pretože vedia, že prípadný úraz im bude vykompenzovaný. Ďalším príkladom môže byť opakovaná pomoc, finančná alebo iného druhu, niekomu v núdzi. Tá vytvára morálne riziko, že ten, kto tú pomoc potrebuje, si na ňu zvykne a prestane sa snažiť sám z toho problému dostať. V teórii hier môžeme hry typu Moral hazard ďalej rozdeliť na Moral hazard so skrytou akciou a Moral hazard so skrytým poznaním.

Adverse selection vyjadruje to, že vďaka asymetrickej informácii je jedna skupina účastníkov trhu znevýhodnená. Napríklad ak si nefajčiar chce uzavrieť poistku, poisťovňa nevie, či je fajčiar alebo nie a preto mu nastaví vyššiu cenu, takú, akú nastaví fajčiarovi. Ak by túto skutočnosť vedela poisťovňa zistiť, mohla by nastaviť rozdielne ceny poistiek. Ďalším príkladom môže byť trh práce. Zamestnávateľ nevie určiť mieru produktivity uchádzača o zamestnanie a preto mu ponúkne nižší plat, ako keby vedel jeho produktivitu. Tieto situácie sa dajú riešiť signálmi, ktoré jednotliví účastníci trhu môžu zasielať. Napríklad ak niekto ide na vysokú školu, predpokladá sa, že je vysokoproduktívny, aj keby ju ledva prešiel. To, že na ňu išiel je pre zamestnávateľa signálom, že uchádzač je vysokoproduktívny. Zamestnávateľ tiež môže vytvoriť situáciu, kde zamestnanec bude donútený prezradiť o sebe niečo. Od Adverse selection môžeme ďalej odvodiť podkategórie Signalling a Screening.

Každú z týchto hier možeme opísať jednoduchým Principal - Agent modelom, kde agent má informačnú výhodu. V týchto modeloch ide o to, že principal ponúka agentovi zmluvu, ktorú agent príjme alebo odmietne. V Moral hazard modeloch príroda zasahuje do hry až po uzatvorení zmlúv. V prípade hier typu Moral hazard so skrytou akciou, príroda zasahuje až po tom, ako agent niečo podnikne, v hrách typu Moral hazard so skrytým poznaním pred tým. V hrách typu Adverse selection, príroda začína hru a určí typ agenta. Agent môže poslať signál principalovi. Ak to spraví pred ponúknutím zmluvy, tak sa jedná o Signalling, ak signál pošle po uzatvorení zmluvy, jedná sa o Screening. Ak nepošle žiadnu správu, ide o typ Adverse selection. Jednotlivé kategórie nie sú jednoznačne odlíšiteľné, navzájom sa prelínajú. Stromy hier vidno na obrázku 2.1.



Obrázok 2.1: Stromy hier s asymetrickou informáciou

Kapitola 3

Moral hazard

3.1 Moral hazard so skrytou akciou

Pre pochopenie princípu riešenia týchto hier si najprv uvedieme hry so symetrickou informáciou. Najlepšie si to vysvetlíme na dvoch typoch hier. Tie sa líšia v tom, kto má vyjednávaciu výhodu. V prvej hre je veľa firiem (principalov), ktoré súťažia o zamestnanca (agenta), ktorý je len jeden. V druhej hre si úlohy vymenia. Principal je len jeden a on si vyberá spomedzi teoreticky nekonečne veľa kandidátov na prácu.
Pre obidve hry sú spoločné tieto vlastnosti:

- Každý ťah je všeobecne známy
- Výstup firmy (principala) $q(e)$ je rastúci so snahou e, keďže čím pracovitejší zamestnanec, tým vyšší zisk pre firmu
- Principalova funkcia zisku $V(q-w)$ je rastúca s rozdielom výstupu a platu
- Agentova funkcia užitočnosti $U(e,w)$ je klesajúca so snahou e a rastúca s platom w, keďže človek prirodzene chce čo najviac peňazí za čo najmenej práce
- **Hráči:** principal a agent
- **Časový plán hry:**
  1. krok: principal ponúkne agentovi zmluvu
  2. krok: agent ju prijme alebo zamietne

3. krok: ak ju agent prijme, vynaloží snahu e
4. krok: výstup je rovný $q(e)$, kde $q' > 0$

- **Výplaty:**
  Ak agent odmietne zmluvu, jeho zisk sa rovná jeho rezervačnej užitočnosti $\overline{U}$ a zisk principala je nulový. Ak agent zmluvu prijme, jeho zisk je rovný $U(e,w)$ a principal bude mať zisk $V(q-w)$

Hra 1 - Produkčná hra 1

Principal je jeden a agentov je veľa. Keďže teoreticky je nekonečne veľa agentov, tak ak chce byť agent prijatý, musí sa uspokojiť s minimálnym platom, s ktorým však musí dosiahnuť aspoň rezervačnú užitočnosť, teda

$$U(e,\tilde{w}(e)) = \overline{U} \tag{3.1}$$

Principal chce maximalizovať svoj zisk, takže

$$\max_{e} \; V(q(e) - \tilde{w}(e)) \tag{3.2}$$

Nutnou podmienkou je

$$V'(q(e) - \tilde{w}(e)) \left(\frac{\partial q}{\partial e} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial e} \right) = 0 \tag{3.3}$$

Keďže V je vždy rastúca, teda prvá derivácia je vždy kladná, tak

$$\frac{\partial q}{\partial e} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial e} \tag{3.4}$$

Využitím vety o derivácii implicitnej funkcie dostávame

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{w}} \right) \left(\frac{\partial q}{\partial e} \right) = - \left(\frac{\partial U}{\partial e} \right) \tag{3.5}$$

Teraz musí principal vymyslieť takú zmluvu, ktorá by donútila agenta vynaložiť snahu výhodnejšiu pre principala. Má viac možností:

- *donucovacia zmluva*, kde agentovi ponúkne plat w^*, ak vynaloží snahu e^*, alebo nulu, ak vynaloží inú snahu
- *hraničná zmluva*, kde mu ponúkne plat w^*, ak vynaloží snahu väčšiu

rovnú ako e^* a nula ak menšiu

- *lineárna zmluva*, kde ponúknutý plat je v tvare $w(e) = \alpha + \beta * e$.
  α a β sa určia tak, že spĺňajú rovnicu $w(e^*) = \alpha + \beta * e^*$ a táto priamka je dotyčnicou k indiferenčnej krivke $U = \overline{U}$ a dotýkajú sa v bode (e^*, w^*)

Hra 2 - Produkčná hra 2

V tejto verzii hry je veľa principalov a len jeden agent. Znovu principal ponúka agentovi zmluvu, no je si vedomý, že tentoraz je agent ten, kto si môže klásť podmienky. Takže vie, že agentovi musí ako plat ponúknuť celý svoj zisk, inak ten zmluvu neprijme. Maximalizujeme teda agentovu funkciu užitočnosti.

$$\max_e U(e, q(e)) \tag{3.6}$$

Nutnou podmienkou je v tomto prípade

$$\frac{\partial U}{\partial e} + \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial e}\right) = 0 \tag{3.7}$$

Ako sme už spomenuli, plat agenta je výstupom firmy, teda $\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial w}$, z čoho dostávame

$$\left(\frac{\partial U}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial e}\right) = -\left(\frac{\partial U}{\partial e}\right) \tag{3.8}$$

Obidve hry si ukážeme na konkrétnych príkladoch. V obidvoch bude agentova funkcia užitočnosti daná cez rovnicu, no výstup principala bude v jednom prípade daný pomocou funkcie a v druhom pomocou tabuľky.

Riešený príklad 3.1.1
Predokladajme, že agent má funkciu užitočnosti $U = \sqrt{w} - e$, kde e môže nadobúdať hodnoty 0 alebo 1. Jeho rezervačná utilita $\overline{U}$ nech je 5. Pravdepodobnosť jednotlivých výstupov principala pri rôznych úrovniach snahy je vidno v tabuľke

	výstup	
	0	100
snaha		
nízka ($e = 0$)	0.4	0.6
vysoká ($e = 1$)	0.2	0.8

Otázky:

(a) Ak je veľa principalov a málo agentov, ako bude vyzerať zmluva, ktorú principal ponúkne agentovi a aká bude jeho užitočnosť?

(b) Ako by vyzerala zmluva, ak je veľa agentov a málo principalov? Aký bude zisk principala?

(c) Akú snahu by agent zvolil, ak by bol majiteľom a zamestnancom zároveň a aká by bola jeho užitočnosť?

Odpovede:

(a) Zisk principala musí byť 0. Agent dostane všetok výstup, takže si vyráta všetky možné užitočnosti pri rôznych výstupoch. Pri $e = 0$ principal dosiahne výstup $0.4 * 0 + 0.6 * 100 = 60$, takže agentova užitočnosť $U = 7.74$ a pri $(e = 1)$ je výstup $0.2 * 0 + 0.8 * 100 = 80$, takže agentova užitočnosť je $U = 7.94$. Principal vie, že ak agentovi ponúkne inú zmluvu ako tú, pri ktorej má agent maximálnu užitočnosť, tak ju odmietne. Preto ponúkne agentovi nasledujúcu zmluvu: $w = 80$ ak $e = 1$ a $w = 0$ ak $e = 0$, čím donúti agenta sa snažiť, keďže inak by jeho užitočnosť bola menšia ako rezervačná. Agentova užitočnosť bude $U(e = 1) = \sqrt{80} - 1 \cong 7.9$.

(b) Agentova užitočnosť sa musí rovnať jeho rezervačnej užitočnosti, teda $U = 5$. Principal si vyráta svoj zisk pre obidve snahy.
Ak $e = 0$, tak $5 = \sqrt{w} - 0 \Rightarrow w = 25,\ q = 60,\ V = 60 - 25 = 45.$
Ak $e = 1$, tak $w = 36,\ q = 80,\ V = 80 - 36 = 44.$

Teda paradoxne je pre principala lepšie, ak je agent menej snaživý. To je spôsobené hlavne neveľkým rozdielom v efektivite agenta a aj jeho vysokou rezervačnou užitočnosťou. Principal ponúkne agentovi takúto zmluvu: $w = 25$ ak $e = 0$ a $w = 0$ ak $e = 1$.

(c) Keďže agent je majiteľom firmy, tak všetok výstup q ide jemu, takže $w = q$. Z toho $U(e = 0) = 0.4 * \sqrt{0} + 0.6 * \sqrt{100} - 0 = 6$, $U(e = 1) = 0.2 * \sqrt{0} + 0.8 * \sqrt{100} - 1 = 7$. Teda preferoval by vyššiu snahu a jeho užitočnosť by bola 7. Všimnime si, že dosiahne nižšiu užitočnosť, ako keby pracoval pre principala.

Poznámka: Snahu vynaložil len jednu a preto ju odčítavame len raz.

Riešený príklad 3.1.2
Predpokladajme, že agent má funkciu užitočnosti $U = log(\tilde{w} - e^2)$, $e \in R^+$. Jeho rezervačná užitočnosť $\overline{U} = 5$. Výstup principala je daný funkciou $q(e) = 100log(1 + e)$.

Otázky:
(a) Ak je veľa principalov a málo agentov, ako bude vyzerať zmluva, ktorú principal ponúkne agentovi a aká bude jeho užitočnosť?
(b) Ako by vyzerala zmluva, ak je veľa agentov a málo principalov. Aký bude zisk principala?

Odpovede:
(a) V tomto prípade má vyjednávaciu silu agent, teda zisk principala bude nula. Agent maximalizuje svoju funkciu užitočnosti. Z (3.5) dostávame

$$\left(\frac{1}{w - e^2}\right)\left(\frac{100}{1 + e}\right) = -\left(\frac{-2e}{w - e^2}\right) \tag{3.9}$$

z toho dostaneme $e^* = 6.59$. Všimnime si, že snaha nezávisí na plate. Ďalej dostávame $q^* \cong 202.7$, teda aj $w^* \cong 202.7$. Principal ponúkne agentovi nasledujúcu zmluvu: $w = 202.7$, ak vynaloží snahu $e = 6.59$, pri inej snahe dostane agent 0. Agentova užitočnosť bude $U = 5.07$.

(b) Keďže principal má v tomto prípade vyjednávaciu silu, agentova užitočnosť bude $\overline{U} = 5$, z toho si vyjadríme $\tilde{w} = e^2 + exp(5)$. Zisk principala je $V = q(e) - w(e) = 100log(1 + e) - e^2 + exp(5)$, ten chce maximalizovať. Z nutnej podmienky nám vyjde $\frac{100}{(1+e)} - 2e = 0$, z čoho dostávame $e^* \cong 6.59$. Dopočítame $q^* = 202.7$ a $w^* = 191.8$. Zisk principala je $V = 10.9$. Zmluva môže byť napr. "donucovacia":

ak agent vynaloží snahu $e = 6.59$, dostane plat $w = 191.8$
ak agent vynaloží inú snahu dostane nula

V týchto hrách sa asymetrická informácia nevyskytovala. Tá sa v hre vyskytuje, až keď principal nemôže pozorovať aspoň jednu z veličín (snahu, výstup). V tom horšom prípade, keď nemôže pozorovať žiadnu z nich, sa konečne dostávame k morálnemu hazardu. Totiž ak principal nemôže pozorovať ani snahu, ani výstup, tak ak ponúkne agentovi plat vyšší ako nula, agent nevyvinie žiadnu snahu a napriek tomu dostane plat. Toho si je vedomý aj principal, a teda mu ponúkne plat 0. Tento problém sa dá čiastočne vyriešiť napr. viacnásobným opakovaním hry alebo pozorovaním inej premennej, ktorá je korelovaná so snahou.

V prípade, keď môže pozorovať aspoň výstup, tak principal si vie podobne ako v hrách 1 a 2 vypočítať, aká by mala byť agentova snaha, aby on mal maximálny zisk. Pre túto snahu si vyrátať výstup a plat podmieniť výstupom. Napr. principal ponúkne agentovi plat w ak $q = q^*$ a 0 ak $q \neq q^*$. V tomto prípade, sa dá zmluva znovu podmieniť niečim, čo je závislé na snahe.

Hra 3 - Produkčná hra 3

V tejto hre sa vyskytuje náhoda. Principal nemôže pozorovať snahu, no môže pozorovať výstup. Ten je však funkciou nielen snahy, ale aj náhody. Principal ponúkne agentovi zmluvu, ten ju prijme alebo odmietne. Ak ju odmietne, principal má zisk 0 a agent rezervačnú užitočnosť. Ak ju prijme, do hry zasiahne náhoda, ktorá určí stav sveta θ, od ktorého závisí výstup q. Principal maximalizuje strednú hodnotu svojho zisku V

$$\max_{w} \; E(V(q(\tilde{e}, \theta) - w(q(\tilde{e}, \theta)))) \tag{3.10}$$

Keďže vie, že agent môže zmluvu odmietnuť, navrhnutá zmluva musí spĺňať dve podmienky. Prvá, podmienka komplementarity stimulov, núti agenta vybrať si snahu, ktorú zvoli principal a druhá, podmienka účasti, zaručuje, že užitočnosť agenta bude aspoň taká, ako je jeho rezervačná užitočnosť, teda núti agenta prijať zmluvu. Tie dve podmienky vyzerajú takto:
podmienka komplementarity stimulov:

$$\tilde{e} = arg \max_{e} \; E(U(e, w(q(e, \theta)))) \tag{3.11}$$

podmienka účasti:

$$E(U(\tilde{e}, w(q(\tilde{e}, \theta)))) \geq \bar{U} \tag{3.12}$$

Systém zmlúv musí byť nastavený tak, aby nami požadovaný systém zmlúv bol pre agenta lepší ako ľubovoľný iný.

Jedným zo spôsobov, ako môže principal vybrať zmluvu, je tzv. troj-kroková metóda pánov Grossmana a Harta. Prvým krokom je nájsť pre všetky úrovne snahy zmluvy, ktoré donútia agenta vynaložiť požadovanú snahu. Druhým krokom je spomedzi nich nájsť zmluvu, ktorá má pre danú snahu najmenšie náklady. Tretím krokom je vybrať tú zmluvu, ktorá maximalizuje principalov zisk. Krok jedna a dva sa dajú zhrnúť do jednej funkcie:

$$C(\tilde{e}) = \min_{w(.)} \; E(w(q(\tilde{e}, \theta))) \tag{3.13}$$

za podmienok (3.11), (3.12).
Krok tri je vyjadrený rovnicou

$$\max_{\tilde{e}} \; E(V(q(\tilde{e}, \theta) - C(\tilde{e}))) \tag{3.14}$$

Principal má teraz viac možností ako navrhnúť zmluvu. Jednou z možností je tzv. Boiling-in-oil zmluva, v ktorej je agentovi ponúknutý plat v závislosti od výstupu firmy. Ak výstup bude taký, aký požaduje principal, agent dostane postačujúci plat. Ak agent vyvinie snahu, ktorá vedie k inému výstupu, bude mu ponúknutý záporný plat. To znamená, že ak agent nevyvinie požadovanú snahu, tak bude potrestaný a bude musieť zaplatiť principalovi nejakú sumu. Ďalšou možnosťou je, že agent kúpi firmu, takže všetok výstup pôjde jemu a principalovi zaplatí nejakú čiastku. Ukážeme si to na konkrétnom príklade.

Riešený príklad 3.1.3
Zoberieme si tabuľku výstupov z riešeného príkladu 3.1.1. Funkcia užitočnosti agenta nech je $U = w - e$. Rezervačná užitočnosť $\overline{U} = 3$. Zisk principala je $V = q - w$. Principal nemôže pozorovať snahu agenta.

Otázky:
(a) Ak agentov je viac a principal je len jeden, ako bude vyzerať zmluva? Aký bude principalov zisk a agentova užitočnosť?
(b) Ako bude vyzerať zmluva, ak sa zavedie podmienka, že plat nemôže byť záporný $w(q) \geq 0$?

Odpovede:
(a) Principal si vyráta, aká snaha je pre neho výhodnejšia.
Ak $e = 0$, tak $3 = w - 0 \Rightarrow w = 3,\; q = 60,\; V = 60 - 3 = 57$.
Ak $e = 1$, tak $w = 4,\; q = 80,\; V = 80 - 4 = 76$.
Výhodnejšia je pre neho snaha $e = 1$.
Z podmienky účasti pri snahe 1, ktorá vyzerá takto:
$0.2(w(0) - 1) + 0.8(w(100) - 1) \geq 3$ vyplýva, že očakávaný plat musí byť najmenej 4.

Prvou z možností, ako to dosiahnuť je, že principal predá firmu agentovi. To znamená, že všetok výstup pôjde jemu. Naviac dostane 4 za prácu a za to všetko musí principalovi zaplatiť očakávaný výstup, to je 80. Takže ak výstup bude 100, agentov plat bude $100 + 4 - 80 = 24$ a ak bude výstup 0, tak agentov plat bude $0 + 4 - 80 = -76$.
Agentova užitočnosť je $0.2(-76) + 0.8(24) - 1 = 3$.
Principalov zisk je $0.2(0 - (-76)) + 0.8(100 - 24) = 76$.

Druhá možnosť je, že principal navrhne agentovi "Boiling-in-oil" zmluvu. Principal chce čo najväčší výstup, takže agentovi ponúkne plat v závislosti od výstupu. Ak výstup bude 100, tak agent dostane plat rovný jeho rezervačnej užitočnosti $w(100) = 3$. Ak výstup bude ľubovoľne iný, agentov plat bude záporný $w(0) = -1000$. Môže to byť ľubovoľné záporné číslo.

(b) Z podmienky kompatibility stimulov $0.4w(0) + 0.6w(100) \leq 0.2w(0) + 0.8w(100) - 1$ dostávame $w(100) - w(0) \geq 5$. Zmluvy z (a) ju spĺňajú, ale nespĺňajú podmienku, že plat nemôže byť záporný. Takže podmienka kompatibility stimulov bude splnená ako rovnosť. To znamená, že rozdiel medzi platom pri vysokom a platom pri nízkom výstupe bude presne 5.

Principal môže ponúknuť viacero zmlúv, ale chce platiť čo najmenej a chce, aby nízky výstup bol neatraktívny, takže sa rozhodne pre zmluvu $w(0) = 0$ a $w(100) = 5$. Musí však spĺňať, že očakávaná užitočnosť $0.2(0) + 0.8(5) - 1 = 3$ bude väčšia alebo rovná ako agentova užitočnosť 3. To je v poriadku.

3.1.1 Príklady

Príklad 3.1.1.1 - Broadwayská hra

Investori chcú investovať peniaze do divadelnej hry. Ponúknu producentovi hry zmluvu $w(q)$ v závislosti od výstupu q. Producent ju môže prijať alebo odmietnuť. Ak ju odmietne, jeho užitočnosť je $U(100)$, zisk investorov je 0. Ak ju prijme, môže sa rozhodnúť, či peniaze investuje do hry alebo ich sprenevarí. Ak peniaze sprenevarí, jeho výplata je o 50\$ väčšia ako keď ich investuje do hry. Jeho užitočnosť je teda $U(w(q)+50)$ ak peniaze sprenevarí a $U(w(q))$ ak nie. Náhoda potom určí úspešnosť hry. S pravdepodobnosťou 0.5 bude úspešná a s pravdepodobnosťou 0.5 to bude prepadák. Výstup q potom závisí od kombinácie týchto dvoch faktorov a jeho hodnoty sú v tabuľke. Zisk investora je $V_I = q - w(q)$.

	Úspešnosť hry	
	úspech	prepadák
správanie producenta		
sprenevierí	-100	100
nesprenevierí	-100	500

(a) Akú zmluvu majú navrhnúť investori, aby maximalizovali svoj zisk?
(b) Ako sa zmení situácia, keď je na trhu veľa investorov a iba jeden producent?

Príklad 3.1.1.2
Predpokladajme, že agent má funkciu užitočnosti $U = \sqrt{w} - e$, $e \in \{0, 2.4\}$. Jeho rezervačná užitočnosť je $\overline{U} = 7$. Zisk principala je $V(q - w) = q - w$. Tabuľka výstupov je nasledujúca:

	výstup			
	0	49	100	225
snaha				
$e = 0$	0.1	0.1	0.8	0
$e = 2.4$	0	0.5	0	0.5

(a) Ak je veľa principalov a málo agentov, ako bude vyzerať zmluva, ktorú principal ponúkne agentovi a aká bude jeho užitočnosť?
(b) Ako by vyzerala zmluva, ak je veľa agentov a málo principalov. Aký bude zisk principala?
(c) Akú snahu by agent zvolil, ak by bol majiteľom a zamestnancom zároveň a aká by bola jeho užitočnosť?
(d) Ako by vyzerala zmluva, ak je veľa principalov, málo agentov a principal nemôže pozorovať snahu.

Príklad 3.1.1.3
Principalov je veľa, agentov málo, principal môže pozorovať snahu. Predpokladajme, že agent ma funkciu užitočnosti $U = w + \sqrt{w} - \alpha e$, jeho rezervačná užitočnosť je $\overline{U} = 0$. Tabuľka výstupov je nasledujúca:

	výstup	
	0	100
snaha		
$e = 0$	0.9	0.1
$e = 5$	0.5	0.5

(a) Ak $\alpha = 2$, aká bude agentova užitočnosť?
(b) Aká bude agentova užitočnosť ak $\alpha = 10$?
(c) Pre aké α je agentovi jedno ktorú snahu si vyberie?
(d) Ak je agent majiteľom firmy, $\alpha = 2$, akú snahu si zvolí a aká bude jeho užitočnosť?
(e) Pri akej najväčšej α si agent ešte vyberie snahu 5?

3.2 Moral hazard so skrytým poznaním

V týchto hrách je informácia úplná. Náhoda urobí krok po uzatvorení zmluvy, ale ešte pred vynaložením snahy agentom. Tento krok pozoruje agent, principal nie. Informácia je na začiatku symetrická a stáva sa asymetrickou až po uzatvorení zmluvy. Podmienka kompatibility stimulov sa v hrách so skrytým poznaním nazýva samovyberajúca podmienka. Principal sa snaží navrhnúť zmluvu, ktorá donúti agenta prezradiť informácie o sebe (o svojom type) a bude prijateľná pre obidvoch.

Hra 4 - Produkčná hra 4

- **Hráči:** principal a agent
- **Časový plán hry:**
  1. krok: principal ponúkne agentovi zmluvu $w(q, m)$, kde q je výstup a m je správa, ktorú agent pošle
  2. krok: agent zmluvu prijme alebo odmietne
  3. krok: náhoda určí stav sveta s podľa rozdelenia $F(s)$, ktoré priradí s pravdepodobnosťou p dobrý stav a s pravdepodobnosťou $1-p$ zlý stav. Principal ju nemôže pozorovať, agent môže.
  4. krok: ak agent zmluvu prijme, vynaloží snahu e, ktorú principal nevie pozorovať a pošle správu m. m môže byť správa o dobrom stave alebo o zlom stave sveta
  5. krok: výstup je $q = q(e|s)$
- **Výplaty:**
  Ak agent odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa bude rovnať rezervačnej užitočnosti $\overline{U}$. Zisk principala je 0.
  Ak agent zmluvu príjme, jeho užitočnosť je $U(e, w|s)$ a principalov zisk je $V(q-w)$.

Riešený príklad 3.2.1
Uvažujeme hru 4. Príroda určí $p = 0.5$. Výstupy agenta sú $q(e|d.s.) = 3e$ pre dobrý stav sveta a $q(e|z.s.) = e$ pre zlý stav. Agentova užitočnosť je $U(e, w|s) = w - e^2$, rezervačná užitočnosť $\overline{U} = 0$ a principalov zisk $V = q - w$.

Principal sa snaží navrhnúť zmluvu, ktorá má donútiť agenta povedať pravdu o stave sveta. V tejto verzii hry so skrytou informáciou, musí zmluva spĺňať obidve samovyberajúce podmienky a len jednu podmienku účasti.

Ak by agent aj principal mali rovnaké informácie, príklad by sa dal vyriešiť takto. Agent maximalizuje svoju užitočnosť. Ak je stav sveta dobrý, rieši

$$\max_{e_d} \quad 3e_d - e_d^2 \tag{3.15}$$

ak je zlý

$$\max_{e_z} \quad e_z - e_z^2 \tag{3.16}$$

Vyriešením týchto maximalizačných problémov dostávame optimálne hodnoty snahy a z toho hodnoty výstupov, $e_d = 1.5$, $e_z = 0.5$, $q_z = 0.5$, $q_d = 4.5$.

V tomto príklade ale principal nevie pozorovať snahu. Teda musí navrhnúť systém zmlúv pomocou samovyberajúcej podmienky a podmienky účasti. Principal maximalizuje svoj zisk

$$\max_{q_d, q_z, w_d, w_z} \quad [0.5(q_d - w_d) + 0.5(q_z - w_z)] \tag{3.17}$$

Agent si vyberie zmluvu (q_d, w_d), ak správa m = dobrý stav a zmluvu (q_z, w_z), ak m = zlý stav. Obidve tieto zmluvy musia spĺňať samovyberajúcu podmienku a podmienku účasti. V prípade dobrého stavu sveta, kde $e = q/3$, chce principal, aby si agent vybral dobrú zmluvu. Takže samovyberajúca podmienka vyzerá takto:

$$U(q_d, w_d|d.s.) = w_d - \left(\frac{q_d}{3}\right)^2 \geq U(q_z, w_z|d.s.) = w_z - \left(\frac{q_z}{3}\right)^2 \tag{3.18}$$

V prípade zlého stavu sveta, kde $e = q$, vyzerá samovyberajúca podmienka takto:

$$U(q_z, w_z|z.s.) = w_z - q_z^2 \geq U(q_d, w_d|z.s.) = w_d - q_d^2 \tag{3.19}$$

V čase uzatvárania zmluvy agent nevie, aký stav sveta bude. Teda podmienka účasti bude len jedna a bude vyzerať takto:

$$\begin{aligned} &0.5U(q_d, w_d|d.s.) + 0.5U(q_z, w_z|z.s.) = \\ &= 0.5\left(w_d - \left(\tfrac{q_d}{3}\right)^2\right) + 0.5\left(w_z - q_z^2\right) \geq 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Principal chce platiť agentom čo najmenej, takže táto podmienka bude splnená ako rovnosť.

$$0.5\left(w_d - \left(\frac{q_d}{3}\right)^2\right) + 0.5\left(w_z - q_z^2\right) = 0 \tag{3.21}$$

Taktiež samovyberajúca podmienka pri dobrom stave sveta bude splnená ako rovnosť, keďže principal chce, aby si agent vybral v dobrom stave sveta určite dobrú zmluvu, ale zároveň mu chce čo najmenej zaplatiť.

$$w_d - \left(\frac{q_d}{3}\right)^2 = w_z - \left(\frac{q_z}{3}\right)^2 \tag{3.22}$$

Vyjadríme si w_z a w_d z (3.21) a (3.22), $w_z = \frac{5}{9}q_z^2$ a $w_d = \frac{1}{9}q_d^2 + \frac{4}{9}q_z^2$. Dosadením týchto hodnôt do maximalizačnej funkcie principala dostávame

$$\max_{q_d, q_z} \left(0.5\left(q_d - \frac{1}{9}q_d^2 - \frac{4}{9}q_z^2\right) + 0.5\left(q_z - \frac{5}{9}q_z^2\right)\right) \tag{3.23}$$

Z nutných podmienok

$$0.5\left(1 - \frac{2}{9}q_d\right) = 0 \tag{3.24}$$

a

$$0.5\left(-\frac{8}{9}q_z\right) + 0.5\left(1 - \frac{10}{9}q_z\right) = 0, \tag{3.25}$$

dostávame $q_d = 4.5$ a $q_z = 0.5$, pomocou ktorých dopočítame $w_d = 2.36$ a $w_z = 0.14$.

3.2.1 Príklady

Príklad 3.2.1.1

Príroda určila pravdepodobnosť $p = 0.6$, s ktorou priradila dobrý stav sveta. Agent, po prijatí zmluvy a vynaložení snahy, pošle principalovi správu a stave sveta m. Výstupy agenta sú $q(e|d.s.) = 4e$ pre dobrý stav sveta a $q(e|z.s.) = e$ pre zlý stav. Agentova užitočnosť je $U(e, w|s) = w - e^2$, rezervačná užitočnosť $\overline{U} = 0$ a principalov zisk $V = q - w$. Ako budú vyzerať ponúknuté zmluvy?

Príklad 3.2.1.2
Principal ponúka agentovi zmluvu, ktorá závisí od výstupu q a od poslanej správy m. Príroda určí pravdepodobnosť $p = 0.5$, s ktorou priradí dobrý stav sveta. Agent, po prijatí zmluvy a vynaložení snahy, pošle principalovi správu o stave sveta m. Výstupy agenta sú $q(e|d.s.) = 2e$ pre dobrý stav sveta a $q(e|z.s.) = e$ pre zlý stav. Agentova užitočnosť je $U(e, w|s) = w - 2e^2$, rezervačná užitočnosť $\overline{U} = 0$ a principalov zisk $V = q - w$. Ako má principal navrhnúť zmluvy?

Kapitola 4

Adverse selection

4.1 Adverse selection

V hrách typu Adverse selection sú, na rozdiel od hier typu Moral hazard, agenti rozdielni. Agent má ešte pred uzatvorením zmluvy informáciu, ktorú principal nemá. Sú to hry so skrytým poznaním. Samovyberajúca podmienka núti rôznych agentov vybrať si rôzne zmluvy. Ako to môže vyzerať, si ukážeme na príklade.

Hra 5 - Produkčná hra 5

- **Hráči:** principal a agent
- **Časový plán hry:**
  1. krok: náhoda určí agentovu produktivitu a podľa rozdelenia $F(a)$, ktoré s pravdepodobnosťou p priradí nízku a s pravdepodobnosťou $1-p$ vysokú produktivitu. Principal ju nemôže pozorovať, agent môže
  2. krok: principal ponúkne agentovi niekoľko zmlúv
     $W_1 = (w_1(q(a_v, \theta)), w_1(q(a_n, \theta)))$
     $W_2 = (w_2(q(a_v, \theta)), w_2(q(a_n, \theta)))$
     $\vdots$
  3. krok: agent jednu zo zmlúv prijme alebo zamietne všetky
  4. krok: náhoda určí θ, čo je stav sveta, podľa rozdelenia $G(\theta)$. Výstup q je funkciou θ

- **Výplaty:**
  Ak agent odmietne všetky zmluvy, jeho užitočnosť sa rovná rezervačnej užitočnosti, v prípade nízkej produktivity agenta je $\overline{U}_n$ a v prípade vysokej produktivity $\overline{U}_v$. Principalov zisk je nula.
  Ak si agent vyberie jednu zo zmlúv, jeho užitočnosť bude $U(w)$ a principalov zisk $V(q-w)$.

Riešený príklad 4.1.1
Uvažujeme hru 5. Náhoda s pravdepodobnosťou $p = 0.5$ priradí agentovi nízku produktivitu $a = 0$ a s pravdepodobnosťou $1 - p = 0.5$ mu priradí vysokú produktivitu $a = 10$. Výstup agenta $q = min(a + \theta, 10)$, kde θ môže byť 0 alebo 10. Jeho užitočnosť $U = w$, rezervačná užitočnosť pre nízkoproduktívneho agenta je $\overline{U}_n = 3$ a pre vysokoproduktívneho $\overline{U}_v = 4$. Principalov zisk je $V = q - w$. Výstup pri nízkoproduktívnom agentovi je teda buď 0 alebo 10, pri vysokoproduktívnom je stále 10.

Očakávaný výstup pri nízkoproduktívnom agentovi je $0.5(0)+0.5(10) = 5$, takže principal si ho môže dovoliť najať za plat $3 \leq w(q) \leq 5$. Pri vysokoproduktívnom je očakávaný výstup $0.5(10) + 0.5(10) = 10$, takže principal môže ponúknuť plat $4 \leq w(q) \leq 10$.

Principal sa snaží navrhnúť zmluvu tak, aby si agent jednoznačne vybral akciu. Snaží sa pre agentov rôznych typov navrhnúť rôzne atraktívne zmluvy. Opäť chce maximalizovať svoj zisk za podmienky účasti a samovyberajúcej podmienky. V separovanom ekvilibriu bude teraz viacero samovyberajúcich podmienok pre rôzne typy agentov. Vhodná zmluva záleží na agentovej skrytej informácii. Môže sa stať, že samovyberajúca podmienka nebude vôbec potrebná. Principal sa môže rozhodnúť, že nebude rozlišovať rôzne typy agentov. Vtedy mu stačí podmienka účasti, aby sa uistil, že sa u neho zamestnajú.
V našej hre podmienka účasti vyzerá takto:

$$\begin{array}{l} U_n(W_1) \geq \overline{U}_n \; ; \; 0.5w_1(0) + 0.5w_1(10) \geq 3 \\ U_v(W_2) \geq \overline{U}_v \; ; \; 0.5w_2(10) + 0.5w_2(10) \geq 4 \end{array} \tag{4.1}$$

V hrách typu Adverse selection je typické, že podmienka účasti je záväzná pre horší typ agenta a pre lepší typ agenta nie je. Principal sa snaží navrhnúť taký systém zmlúv, ktorý mu pomôže určiť, o aký typ agenta sa jedná. Napríklad z dvoch navrhnutých zmlúv, musí maximálne jedna spĺňať obe podmienky pre horšieho agenta. Aspoň jedna zo zmlúv musí byť atraktívna pre lepšieho agenta. Chceme, aby to bola tá, ktorá nie je atraktívna pre horšieho agenta.

Podľa toho, ktorú zmluvu si agent vyberie, principal určí o aký typ agenta sa jedná. Ak by obidve navrhnuté zmluvy boli atraktívne pre lepšieho agenta, principal by nevedel určiť o aký typ agenta sa jedná. Navrhnuté zmluvy musia spĺňať obidve podmienky (samovyberajúcu aj podmienku účasti).
Samovyberajúca podmienka:

$$\begin{array}{l} U_n(W_1) \geq U_n(W_2) \ ; \ 0.5w_1(0) + 0.5w_1(10) \geq 0.5w_2(0) + 0.5w_2(10) \\ U_v(W_2) \geq U_v(W_1) \ ; \ 0.5w_2(10) + 0.5w_2(10) \geq 0.5w_1(10) + 0.5w_1(10) \end{array} \tag{4.2}$$

Samovyberajúca podmienka je záväzná pre lepší typ agenta a pre horší typ agenta nie je. Toto je tiež typické pri hrách typu Adverse selection.
Principal navrhne dve zmluvy:

$$\begin{array}{l} W_1 = (w_1(q=0) = 3, w_1(q=10) = 3) \\ W_2 = (w_2(g=0) = 0, w_2(q=10) = 4) \end{array} \tag{4.3}$$

Prvá zmluva ponúka rovnaký plat pri rôznych výstupoch. Nízkoproduktívny hráč si vyberie W_1, lebo W_2 mu prinesie nižšiu očakávanú výplatu a vysoko produktívny hráč si vyberie W_2. Je to slabé ekvilibrium, keďže obidvaja sú indiferentní voči tomu, či prijmu zmluvu alebo nie.

Ak by principal navrhol systém zmlúv $(2,4), (0,4)$, horší agent by si znovu musel vybrať prvú zmluvu, lepší by mal na výber. Ale keďže lepší agent by si mohol vybrať horšiu, tak tento systém zmlúv by principalovi nepovedal nič o typoch agentov.

Systém zmlúv $(3,3), (0,5)$ by bol tiež v poriadku, no keďže principal maximalizuje svoj zisk a vie, že agent bude robiť aj za menej, tak nemá dôvod navrhnúť tento systém.

Ukážeme si teraz príklad, vďaka ktorému vznikol Adverse selection. Jedná sa o príklad od Akerlofa, Trh s ojazdenými autami, ktorý popísal vo svojej knihe *The Market for Lemons.*

Hra 6 - Trh s ojazdenými autami

- **Hráči:** kupujúci a predávajúci
- **Časový plán hry:**
  1. krok: príroda určí typ kvality auta θ pre predávajúceho, podľa rozdelenia $F(\theta)$. Predávajúci pozná θ. Kupujúci pozná rozdelenie F, no nepozná θ
  2. krok: kupujúci navrhne cenu P, za ktorú je ochotný auto kúpiť
  3. krok: predávajúci ju buď prijme alebo nie
- **Výplaty:**
  Ak sa na cene nedohodnú, ich výplaty sú nulové. Ak sa dohodnú, zisk kupujúceho je $U = Z_k(\theta) - P$ a zisk predávajúceho je $V = P - Z_p(\theta)$. Kde Z_p a Z_k sú funkcie ocenenia auta pre predávajúceho a kupujúceho.

Riešený príklad 4.1.2
Obidvaja majú rovnakú funkciu ocenenia auta $Z_k(\theta) = Z_p(\theta) = \theta$. Výplaty sú teda $U = \theta - P$ a $V = P - \theta$. Kvalita áut na trhu je rovnomerne rozložená medzi 2000 a 6000. Priemerná kvalita a teda aj cena auta je 4000. Žiaden predávajúci s autom kvalitnejším ako 4000 však na trhu nebude pôsobiť. Ponúkané budú teda len autá s kvalitou 4000 a nižšou. Ich priemerná cena bude 3000. To z trhu vytlačí majiteľov áut s kvalitou vyššou ako 3000. Priemerná cena ponúkaných áut klesne na 2500, ... Takto to skončí, až keď na trhu budú len autá s kvalitou 2000, ktorých ale bude veľmi málo a trh s autami skolabuje.

Výsledok tejto situácie je extrémny, no keďže kupujúci aj predávajúci si cenia auto rovnako, v konečnom dôsledku je jedno, kto auto vlastní, spokojní sú obidvaja. To sa zmení v ďalšom príklade, kde si kupujúci budú auto ceniť viac.

Riešený príklad 4.1.3
Oproti príkladu 4.1.2 sa zmení funkcia ocenenia auta u kupujúceho $Z_k(\theta) = 1.2\theta$. Jeho výplata bude $U = 1.2\theta - P$. Priemerná cena áut na trhu je 4000, ale predávať sa budú autá aj za 1.2*4000=4800. Z trhu budú vytlačení majitelia áut s kvalitou vyššou ako 4800. Priemerná cena áut na trhu klesne na 3400, ale predávať sa budú autá za 1.2*3400,... Tak to bude pokračovať, až dôjdeme k tomu, že priemerná cena áut na trhu bude 2500, ktoré budú

mať pre kupujúcich hodnotu 3000. Predávať sa teda budú všetky autá s priemernou kvalitou 2500 a za cenu 3000 a nižšiu. Táto situácia však nie je efektívna, keďže v situácii so symetrickou informáciou by sa predali všetky autá.

Tieto a podobné hry typu Adverse selection sa dajú riešiť pomocou Signallingu alebo Screeningu. V predchádzajúcich príkladoch by to mohla byť napr. predvádzacia jazda, na ktorej by si kupujúci mohol urobiť odhad kvality auta. Signallingu a Screeningu sa budeme venovať v ďalších kapitolách.

Teraz si ukážeme hru, kde agent má na začiatku hry informáciu o stave sveta, ktorú principal nemôže pozorovať a taktiež v priebehu hry podnikne akciu nepozorovateľnú pre principala. Takže sa tu budú vyskytovať prvky z hier typu Adverse selection aj z hier typu Moral hazard.

Hra 7 - Kombinácia Adverse selection a Moral hazard

- **Hráči:** principal a agent
- **Časový plán hry:**
  1.krok: náhoda určí stav sveta s podľa rozdelenia $F(s)$, ktoré priradí s pravdepodobnosťou p dobrý stav a s pravdepodobnosťou $1-p$ zlý stav. Principal ju nemôže pozorovať, agent môže.
  2.krok: principal ponúkne agentovi zmluvu $w(q)$
  3.krok: agent zmluvu prijme alebo odmietne
  4.krok: agent vynaloží snahu e
  5.krok: výstup je $q = q(e, s)$
- **Výplaty:**
  Ak agent odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa bude rovnať rezervačnej užitočnosti $\overline{U}$. Zisk principala je 0.
  Ak agent zmluvu príjme, jeho užitočnosť je $U(e, w, s)$ a principalov zisk je $V(q - w)$.

Riešený príklad 4.1.4
Uvažujeme hru 7. Príroda určí $p = 0.5$. Výstupy agenta sú $q(e, d.s.) = 3e$ pre dobrý stav sveta a $q(e, z.s.) = e$ pre zlý stav. Agentova užitočnosť je $U(e, w, s) = w - e^2$, rezervačná užitočnosť $\overline{U} = 0$ a principalov zisk $V = q - w$.

Hra sa rieši podobne ako Hra 4. Rozdiel bude pri podmienke účasti, kde už podmienky budú dve.

Ak by agent aj principal mali rovnaké informácie, agentov plat by bol vo výške jeho výstupu. Príklad by sa dal vyriešiť takto: Agent maximalizuje svoju užitočnosť. Ak je stav sveta dobrý, rieši

$$\max_{e_d} \; 3e_d - e_d^2 \tag{4.4}$$

ak je zlý

$$\max e_z \; e_z - e_z^2 \tag{4.5}$$

Vyriešením týchto maximalizačných problémov dostávame optimálne hodnoty snahy a z toho hodnoty výstupov, $e_d = 1.5$, $e_z = 0.5$, $q_z = 0.5$, $q_d = 4.5$.

Principal a agent v tomto príklade nemajú rovnaké informácie. Principal maximalizuje svoj zisk.

$$\max_{q_d,q_z,w_d,w_z} \quad [0.5(q_d - w_d) + 0.5(q_z - w_z)] \tag{4.6}$$

Agent si vyberá medzi dvoma donucovacími zmluvami (q_d, w_d) a (q_z, w_z), ktoré musia spĺňať samovyberajúce podmienky a podmienky účasti.
Samovyberajúca podmienka:
V prípade dobrého stavu sveta chce principal, aby si agent vybral dobrú zmluvu (q_d, w_d). Agentova snaha je $e = q/3$. Takže

$$U(q_d, w_d|d.s.) = w_d - \left(\frac{q_d}{3}\right)^2 \geq U(q_z, w_z|d.s.) = w_z - \left(\frac{q_z}{3}\right)^2 \tag{4.7}$$

V prípade zlého stavu sveta principal chce, aby si agent vybal zlú zmluvu (q_z, w_z). Agentova snaha v tomto prípade je $e = q$. Takže

$$U(q_z, w_z|z.s.) = w_z - q_z^2 \geq U(q_d, w_d|z.s.) = w_d - q_d^2 \tag{4.8}$$

Na to, aby si agent určite vybral možnosť pracovať pre principala v dobrom aj v zlom stave sveta, slúžia podmienky účasti. *Podmienka účasti:*
Pre dobrý stav sveta

$$U(q_d, w_d|d.s.) = w_d - \left(\frac{q_d}{3}\right)^2 \geq 0 \tag{4.9}$$

a pre zlý stav sveta

$$U(q_z, w_z|z.s.) = w_z - q_z^2 \geq 0 \tag{4.10}$$

V obidvoch stavoch sveta chce principal zaplatiť agentovi čo najmenej, ale musí to byť aspoň rezervačná užitočnosť. V prípade dobrého stavu, je ochotný agentovi zaplatiť aj trochu viac, takže podmienka účasti pre dobrý stav ostáva ako nerovnosť a podmienku účasti pre zlý stav môžeme dať na rovnosť.

$$w_z = q_z^2 \tag{4.11}$$

V dobrom stave sveta chce principal, aby si agent vybral určite dobrú zmluvu (q_z, w_z), takže samovyberajúca podmienka bude potlačená na rovnosť. Z (4.6) a (4.7) máme

$$\begin{aligned} w_d &= \left(\frac{q_d}{3}\right)^2 + w_z - \left(\frac{q_z}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{q_d}{3}\right)^2 + q_z^2 - \left(\frac{q_z}{3}\right)^2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Dosadením do principalovej maximalizačnej funkcie

$$\max_{q_d, q_z} \quad [0.5\left(q_d - \left(\frac{q_z}{3}\right)^2 - q_z^2 + \left(\frac{q_z}{3}\right)^2\right) + 0.5(q_z - q_z^2)] \tag{4.13}$$

Z nutných podmienok

$$0.5\left(1 - \frac{2q_d}{9}\right) = 0 \tag{4.14}$$

a

$$0.5\left(-2q_z + \frac{2q_z}{9}\right) + 0.5(1 - 2q_z) = 0 \tag{4.15}$$

nám vyjde $q_d = 4.5$, z toho $w_d = 2.32$ a $q_z = 0.26$, z toho $w_z = 0.07$.

Keď si to porovnáme s hodnotami, ktoré nám vyšli pri symetrickej informácii, tak vidíme, že výstup v dobrom stave sveta je rovnaký a v zlom stave sveta klesol. Je to spôsobené potrebou odlákať agenta od zlej zmluvy v dobrom stave sveta.

Ak si tieto hodnoty porovnáme s hodnotami, ktoré nám vyšli v predchádzajúcej hre z Moral hazard so skrytým poznaním (Hra 4), tak vidíme, že platy v obidvoch stavoch sveta sú v tomto prípade nižšie. To je zase spôsobené tým, že principal v predchádzajúcom príklade mal v zlom stave sveta možnosť priblížiť sa bližšie k hodnote platu z hry so symetrickou informáciou.

4.1.1 Príklady

Príklad 4.1.1.1
Náhoda určí produktivitu. S pravdepodobnosťou $p = 0.5$ priradí agentovi nízku produktivitu $a = 0$ a s pravdepodobnosťou $1 - p = 0.5$ mu priradí vysokú produktivitu $a = 5$. Výstup agenta $q = a + \theta$, kde θ môže byť 0 alebo 10. Jeho užitočnosť $U = w$, rezervačná užitočnosť pre nízkoproduktívneho agenta je $\overline{U}_n = 2$ a pre vysokoproduktívneho $\overline{U}_v = 6$. Principalov zisk je $V = q - w$.
(a) Aký je očakávaný výstup vysokoproduktívneho agenta?
(b) Ako budú vyzerať ponúknuté zmluvy?

Príklad 4.1.1.2
Náhoda určí produktivitu. S $p = 0.5$ priradí nízku produktivitu $a = 0$ a s $p = 0.5$ priradí vysokú produktivitu $a = 3.5$. Výstup agenta $q = 2a + \theta$, kde θ môže byť 0 alebo 7. Jeho užitočnosť $U = w$, rezervačná užitočnosť pre nízkoproduktívneho agenta je $\overline{U}_n = 3$ a pre vysokoproduktívneho $\overline{U}_v = 5$. Principalov zisk je $V = q - w$.
(a) Aký je očakávaný výstup nízkoproduktívneho agenta?
(b) Ako budú vyzerať ponúknuté zmluvy?

Príklad 4.1.1.3
Majme trh s použitými mobilmy. Kvalita mobilov θ je rovnomerne rozložená medzi 1000 a 5000. Predajca má funkciu ocenenia mobilu $Z_p(\theta) = \theta$ a kupujúci $Z_k(\theta) = 1.5\theta$. Výplaty sú $U = 1.5\theta - P$ a $V = P - \theta$. Aká bude priemerná cena mobilu na trhu? Za akú cenu sa budú predávať?

Príklad 4.1.1.4
Na začiatku hry príroda určí pravdepodobnosť $p = 0.5$, s ktorou bude stav sveta dobrý. Agentovi je ponúknutá zmluva. Po prijatí zmluvy agent vynaloží snahu e. Výstup agenta v dobrom stave sveta je $q(e, d.s.) = 2e$ a v zlom stave sveta $q(e, z.s.) = e$. Agentova užitočnosť je $U(e, w, s) = w - e^2$, rezervačná užitočnosť $\overline{U} = 0$ a principalov zisk $V = q - w$.
(a) Akú zmluvu ponúkne principal?
(b) Aké by boli snahy a výstupy, ak by mali agent aj principal rovnaké informácie?

4.2 Signalling

Signalling sa používa na odhalenie asymetrickej informácie v hrách typu Adverse selection. Agent pošle signál ešte pred navrhnutím zmluvy principalom, principal tak môže na základe poslaného signálu dedukovať typ hráča a zmluvu navrhnúť v závislosti od poslaného signálu.

Najlepším príkladom na signalling je pracovný trh, kde zamestnávateľ ponúka zamestnanie. Budeme sa teda zaoberať hrami, kde hráči sú zamestnávateľ a pracovník. Pracovník môže byť vysokoproduktívny alebo nízkoproduktívny. Zamestnávateľ nevie pozorovať produktivitu hráča, ale pozná jej rozdelenie $F(x)$. Pracovník si zvolí signál, ktorý v tejto hre bude predstavovať úroveň vzdelania. Predpokladáme, že vzdelanie nezvyšuje produktivitu. Tento signál zamestnávateľ pozoruje a na jeho základe navrhne zmluvu.

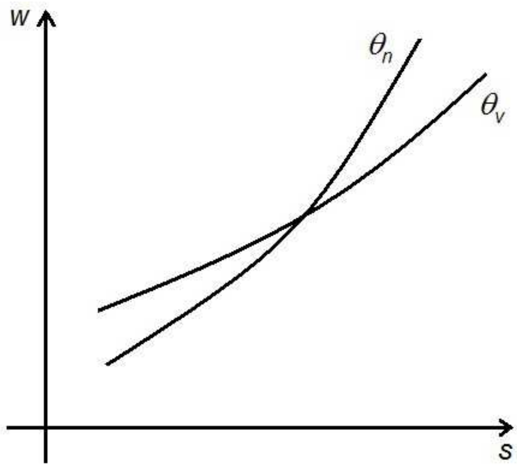
Na trhu je viac zamestnávateľov a jeden pracovník, čo spôsobí, že zisk zamestnávateľa bude nula. Užitočnosť pracovníka je jeho plat, mínus náklady na vzdelanie. Náklady na vzdelanie závisia od úrovne vzdelania a produktivity.

Stratégia pracovníka je vybrať si vhodnú úroveň vzdelania a zamestnávateľa. Stratégia zamestnávateľa je navrhnúť zmluvu, ktorá závisí od úrovne vzdelania. Predpokladáme, že vzdelanie je menej nákladné pre vysokoproduktívneho pracovníka.

Funkcia nákladov na vzdelanie je rastúca so vzdelaním a klesajúca s produktivitou, keďže sa predpokladá, že vysokoproduktívny pracovník sa ľahšie učí. Indiferenčné krivky sú rastúce a konvexné, napr. ako na obrázku 4.1.

Hra 8

- **Hráči:** zamestnávateľ a pracovník
- **Časový plán hry:**
  1. krok: náhoda určí produktivitu hráča θ. S pravdepodobnosťou λ priradí hráčovi produktivitu θ_v a s pravdepodobnosťou $1-\lambda$ priradí θ_n. Produktivitu môže pozorovať pracovník, zamestnávateľ nie.
  2. krok: pracovník si vyberie úroveň vzdelania $s \in \langle 0, \infty)$
  3. krok: zamestnávatelia ponúknu zmluvu $w(s)$
  4. krok: agent jednu zmluvu prijme alebo odmietne všetky
  5. krok: výstup je θ



Obrázok 4.1: Indiferenčné krivky

- **Výplaty:**
  Ak agent odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa bude rovnať rezervačnej užitočnosti $\overline{U}$. Zisk principala je 0.
  Ak agent zmluvu prijme, jeho užitočnosť je $U(w, s, \theta) = w - c(s, \theta)$, kde $c(s, \theta)$ je funkcia nákladov na vzdelanie. Principalov zisk $V(\theta - w) = \theta - w$.

Ak by produktivita pracovníkov bola pozorovateľná aj pre zamestnávateľa a neexistovalo by vzdelanie, zmluvy by boli navrhnuté jednoducho. Každý by dostal plat podľa toho, koľko by vyrobil. Čiže $w(\theta_v) = \theta_v$ a $w(\theta_n) = \theta_n$.

Ak by produktivita nebola pozorovateľná a neexistovalo by vzdelanie, zamestnávateľ by nemal možnosť zistiť ako produktívny je ten ktorý pracovník, takže zmluva by bola rovnaká pre obidvoch pracovníkov $w(\theta) = \overline{\theta}$, kde $\overline{\theta} = \lambda\theta_v + (1 - \lambda)\theta_n$.

V našom prípade nie je produktivita pozorovateľná pre zamestnávateľa, ale úroveň vzdelania, ktoré slúži ako signál, tu je. Takže zamestnávateľ môže na základe signálu dedukovať, o ktorého pracovníka sa jedná. Predpokladaná produktivita je $\overline{\theta} = \mu(s)\theta_v + (1 - \mu(s)\theta_n)$, kde $\mu(s^*) = P(\theta = \theta_v | s^*)$ je systém predpokladov. Zamestnávateľ predpokladá, že existuje také s^*, že všetci, ktorí si také alebo väčšie s vyberú, budú vysokoproduktívni. Predpokladaná produktivita $\overline{\theta}$ bude ležať medzi θ_n a θ_v.
Do úvahy pripadajú dve ekvilibriá, spoločné a separované.

Ak systém predpokladov $\mu(s^*) = 1$, tak sa bude jednať o separované ekvilibrium. Ak $\mu(s^*) = \lambda$, tak zamestnávateľ nebude vedieť rozoznať vysoko a nízkoproduktívnych, takže im ponúkne rovnaký plat a bude sa jednať o spoločné ekvilibrium.

Pri separovanom ekvilibriu si pracovníci vyberú rôzne úrovne vzdelania $s^*(\theta_v) \neq s^*(\theta_n)$ a pri spoločnom ekvilibriu rovnakú úroveň $s^*(\theta_v) = s^*(\theta_n)$. Zamestnávateľ sa snaží nájsť hraničnú úroveň, pri ktorej si už pracovníci radšej vyberajú separované ekvilibrium ako spoločné.

Separované ekvilibrium

Vysokoproduktívny pracovník dostane, pri jeho optimálnej úrovni vzdelania, plat vo výške jeho produktivity θ_v. Podobne nízkoproduktívny hráč dostane, pri jeho optimálnej úrovni produktivity, plat vo výške θ_n.

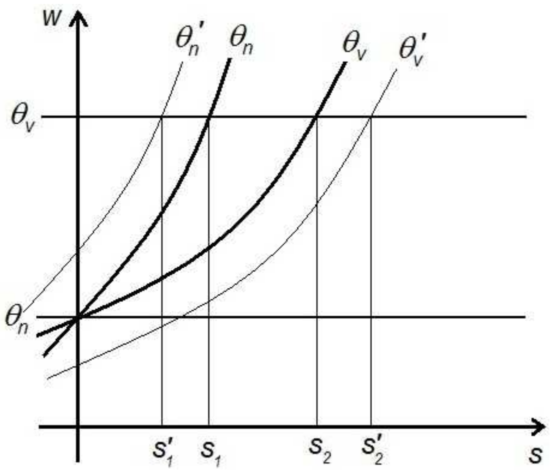
Predpokladajme systém predpokladov $\mu(s^*) = 1$, takže ak si pracovník zvolí snahu s^*, bude to znamenať, že je vysokoproduktívny. A naopak, ak si nevyberie s^*, bude nízkoproduktívny.

Pre nízkoproduktívneho pracovníka je v ekvilibriu optimálna najnižšia možná úroveň vzdelania $s(\theta_n) = 0$, lebo má vysoké náklady na vzdelanie a zvolením si ľubovoľnej vyššej úrovne, by sa mu znížila užitočnosť.

Teraz potrebujeme určiť optimálnu úroveň pre vysokoproduktívneho pracovníka. Použijeme grafické znázornenie. Na obrázku(4.2) máme nakreslené indiferenčné krivky vysoko aj nízkoproduktívneho pracovníka a produkčné priamky rovnobežné s osou x. Na osi x je zobrazená úroveň vzdelania a na osi y je plat. Na indiferenčnej krivke má pracovník rovnakú užitočnosť. Produkčná priamka je priamka, na ktorej dostane pracovník rovnaký plat.

Optimálna úroveň vysokoproduktívneho pracovníka s^* je niekde medzi s_1 a s_2. Nemôže byť menšia ako s_1, lebo nízkoproduktívny pracovník by mal možnosť deviácie, mohol by si zvoliť tú nižšiu úroveň a tým si zvýšiť svoju užitočnosť. Tiež nemôže byť väčšia ako s_2, lebo to by zase mal možnosť deviácie vysokoproduktívny pracovník, zvolením si $s^*(\theta_n) = 0$, keďže v nej by mal väčšiu užitočnosť ako pre ľubovoľnú úroveň väčšiu ako s_2.

Hra má nekonečne veľa separovaných ekvilibrií. Ekvilibrium s_1 je z pohľadu vysokoproduktívneho pracovníka najvýhodnejšie, má tam najvyššiu užitočnosť a s_2 je najhoršie. Tieto dve hraničné úrovne vzdelania si vyrátame pomocou funkcií užitočnosti. Využijeme to, že ak dva body ležia na indiferenčnej krivke, tak užitočnosť je v nich rovnaká. Na indiferenčnej krivke nízkoproduktívneho pracovníka ležia body $[0, \theta_n]$ a $[s_1, \theta_v]$. Úroveň vzdelania



Obrázok 4.2: Optimálna úroveň vzdelania vysokoproduktívneho pracovníka

s_1 si vyrátame z

$$U_n(\theta_n, 0) = U_n(\theta_v, s_1) \tag{4.16}$$

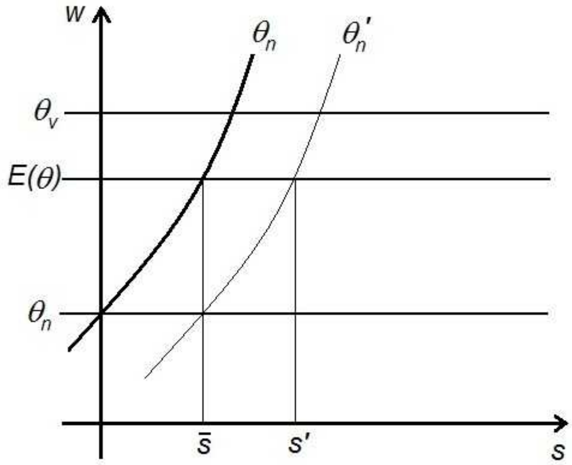
Podobne na indiferenčnej krivke vysokoproduktívneho pracovníka ležia body $[0, \theta_n]$ a $[s_2, \theta_v]$, takže s_2 si vyrátame z

$$U_v(\theta_n, 0) = U_v(\theta_v, s_2) \tag{4.17}$$

Toto ekvilibrium je slabo dokonalé Bayesovo ekvilibrium.

Spoločné ekvilibrium

Obidvaja pracovníci si vyberú rovnakú úroveň vzdelania a dostanú rovnaký plat. Nech systém predpokladov $\mu(s) = \lambda$. Vypočítame si predpokladaný plat $w(s) = \lambda\theta_v + (1-\lambda)\theta_n$. Označíme si ho $E(\theta)$. Potrebujeme si určiť optimálnu úroveň vzdelania. Opäť použijeme podobné grafické znázornenie (obrázok 4.3). Optimálna úroveň pre obidvoch pracovníkov bude medzi 0 a $\overline{s}$. Nemôže byť vyššia ako $\overline{s}$, lebo nízkoproduktívny pracovník by mal možnosť deviácie. Ekvilibrium pri nule je najvýhodnejšie a pri $\overline{s}$ najhoršie. Túto spoločnú optimálnu úroveň vzdelania si tiež vyrátame, podobne ako v predchádzajúcom prípade, pomocou funkcií užitočnosti.



Obrázok 4.3: Optimálna úroveň vzdelania

$\overline{s}$ si vyrátame z

$$U_n(\theta_n, 0) = U_n(E(\theta), \overline{s}) \tag{4.18}$$

Od systému predpokladov závisí, ktorý z pracovníkov preferuje ktoré ekvilibrium z pohľadu užitočnosti. Nízkoproduktívny pracovník vždy preferuje spoločné ekvilibrium. U vysokoproduktívneho pracovníka to záleží na λ. Ak sa λ vyberie taká, že $E(\lambda)$ výjde dostatočne nízke (obrázok 4.4), tak vysokoproduktívny pracovník preferuje separované ekvilibrium. Ak sa zvolí tak, že $E(\lambda)$ výjde dostatočne vysoké (obrázok 4.5), tak preferuje spoločné ekvilibrium.

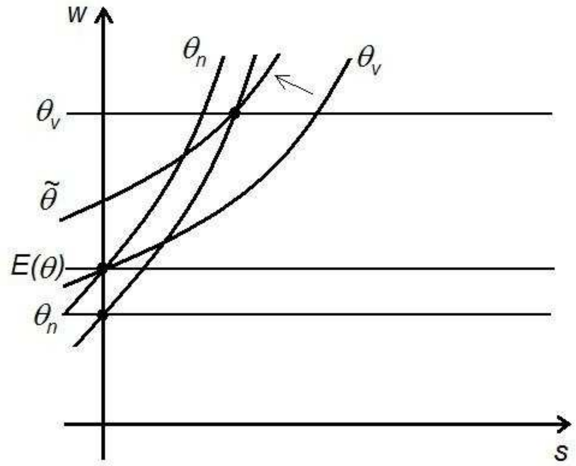
Riešený príklad 4.2.1

Predpokladajme, že pravdepodobnosť $\lambda = 0.5$, $\theta_v = 5.5$, $\theta_n = 2$. Ak pracovník odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa rovná rezervačnej užitočnosti $\overline{U} = 0$. Zisk odmietnutého zamestnávateľa je tiež 0. Ak pracovník zmluvu prijme, jeho užitočnosť $U = w - \frac{8s}{\theta}$ a zisk zamestnávateľa je $V = \theta - w$.

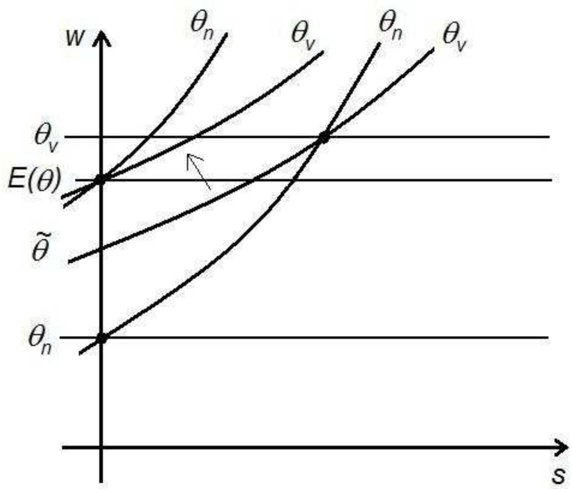
Otázky:

(a) Aká je optimálna úroveň vzdelania pre vysokoproduktívneho pracovníka v separovanom ekvilibriu? Ako bude vyzerať zmluva?

(b) Aká je optimálna úroveň vzdelania pre vysokoproduktívneho pracovníka v spoločnom ekvilibriu? Ako bude vyzerať zmluva?



Obrázok 4.4: Preferované separované ekvilibrium



Obrázok 4.5: Preferované spoločné ekvilibrium

(c) Pri akej λ budú obidva typy pracovníkov preferovať spoločné ekvilibrium?

Odpovede:
(a) Pri systéme predpokladov $\mu(s^*) = 1$, budeme mať separované ekvilibrium. Každému z pracovníkov bude ponúknutý plat vo výške ich produktivity. Zamestnávateľ môže zmluvu určiť len na základe vzdelania, keďže nepozoruje produktivitu pacovníkov. Čo znamená, že budeme hľadať takú úroveň vzdelania s^*, ktorú si zvolí vysokoproduktívny pracovník.

Nízkoproduktívny pracovník si zvolí $s^*(\theta_n) = 0$. Úroveň vysokoproduktívneho pracovníka bude niekde medzi s_1 a s_2, ktoré si môžeme vypočítať pomocou indiferenčných kriviek, ako je popísané vyššie. Výpočet pomocou indiferenčných kriviek je vlastne inak preformulovaná samovyberajúca podmienka pre vysoko a pre nízkoproduktívneho pracovníka. Ukážeme si výpočet cez samovyberajúce podmienky. Pre nízkoproduktívneho pracovníka musí platiť

$$U_n(\theta_n, 0) \geq U_n(\theta_v, s_1) \tag{4.19}$$

čo po dosadení známych hodnôt

$$w(\theta_n) - \frac{8 * 0}{\theta_n} = 2 - 0 \geq w(\theta_v) - \frac{8s_1}{\theta_n} = 5.5 - \frac{8s_1}{2} \tag{4.20}$$

z toho nám vyjde $s_1 \geq \frac{7}{8}$.
Pre vysokoproduktívneho pracovníka musí platiť

$$U_v(\theta_n, 0) \leq U_v(\theta_v, s_2) \tag{4.21}$$

čo po dosadení známych hodnôt

$$w(\theta_n) - \frac{8 * 0}{\theta_v} = 2 - 0 \leq w(\theta_v) - \frac{8s_2}{\theta_v} = 5.5 - \frac{8s_2}{5.5} \tag{4.22}$$

z toho $s_2 \leq \frac{77}{32}$.
Optimálna úroveň vzdelania pre vysokoproduktívneho pracovníka je medzi $\frac{7}{8}$ a $\frac{77}{32}$. Zamestnávateľ navrhne zmluvu: $w(s^*) = 5.5$ a $w(s \neq s^*) = 2$, kde $s^* \in \left\langle \frac{7}{8}, \frac{77}{32} \right\rangle$.

(b) Ak systém predpokladov bude $\mu(s^*) = \lambda = 0.5$, tak budeme mať spoločné ekvilibrium. Obidvaja pracovníci dostanú rovnaký plat $E(\theta)$, ak si zvolia optimálnu úroveň vzdelania. Najskôr si vyrátame plat: $E(\theta) = \lambda\theta_v + (1 -$

$\lambda)\theta_n = 0.5 * 5.5 + (1 - 0.5) * 2 = 3.75$. Teraz potrebujeme zistiť optimálne vzdelanie $\overline{s}$. Opäť si to môžeme vyrátať pomocou indiferenčnej krivky alebo pomocou samovyberajúcej podmienky pre nízkoproduktívneho pracovníka. Samovyberajúca podmienka pre nízkoproduktívneho pracovníka:

$$U_n(\theta_n, 0) \le U_n(E(\theta), \overline{s}) \tag{4.23}$$

po dosadení známych hodnôt

$$w(\theta_n) - \frac{8*0}{\theta_n} = 2 - 0 \le E(\theta) - \frac{8\overline{s}}{\theta_n} = 3.75 - \frac{8\overline{s}}{2} \tag{4.24}$$

z čoho nám vyjde $\overline{s} \le \frac{7}{16}$. Zamestnávateľ ponúkne zmluvu: $w(s^*) = 3.75$ a $w(s \ne s^*) = 2$, kde $s^* \le \overline{s}$.

(c) Nízkoproduktívny pracovník vždy preferuje spoločné ekvilibrium. Pre vysokoproduktívneho pracovníka je spoločné ekvilibrium lepšie, ak $E(\theta)$ je väčšia ako $\tilde{\theta}$. Zobrazené na obrázku 4.5.

Najprv si vypočítame $\tilde{\theta}$ pomocou indiferenčnej krivky vysokoproduktívneho pracovníka.

$$U_v(\tilde{\theta}, 0) = U_v(\theta_v, s_1) \tag{4.25}$$

po dosadení známych hodnôt

$$\tilde{\theta} - \frac{8*0}{\theta_v} = \tilde{\theta} - 0 = w(\theta_v) - \frac{8s_1}{\theta_v} = 5.5 - \frac{8*\frac{7}{8}}{5.5} \tag{4.26}$$

nám vyjde $\tilde{\theta} = \frac{93}{22}$. Takže ak $E(\theta)$ bude väčšie ako $\frac{93}{22}$, tak vysokoproduktívny pracovník uprednostní spoločné ekvilibrium. Ešte potrebujeme vyrátať pri akom λ to platí. $E(\theta) = \lambda\theta_v + (1-\lambda)\theta_n \ge \tilde{\theta}$ z čoho nám vyjde, že $\lambda \ge \frac{7}{11}$. Ak $\lambda \ge \frac{7}{11}$, tak obidva typy pracovníkov preferujú spoločné ekvilibrium.

4.2.1 Príklady

Príklad 4.2.1.1

Predpokladajme, že na pracovnom trhu je rovnaký počet vysoko aj nízkoproduktívnych pracovníkov. Jednotlivé produktivity sú $\theta_v = 250$, $\theta_n = 50$. Ak pracovník odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa rovná rezervačnej užitočnosti $\overline{U} = 0$. Zisk odmietnutého zamestnávateľa je tiež 0. Ak pracovník zmluvu prijme, jeho užitočnosť $U = w - \frac{s^2}{\theta}$ a zisk zamestnávateľa je $V = \theta - w$.

Otázky:
(a) Aká je optimálna úroveň vzdelania s^* pre vysokoproduktívneho pracovníka v separovanom ekvilibriu? Aká úroveň je pre neho výhodnejšia z pohľadu užitočnosti? Ako bude vyzerať zmluva?
(b) Aká je optimálna úroveň vzdelania pre vysokoproduktívneho pracovníka v spoločnom ekvilibriu, ak $\lambda = 0.7$? Ako bude vyzerať zmluva?
(c) Aké ekvilibriu preferuje ten ktorý hráč pri $\lambda = 0.7$? Pri akej λ budú obidva typy pracovníkov preferovať spoločné ekvilibrium?

Príklad 4.2.1.2
Na pracovnom trhu sú vysoko aj nízkoproduktívny pracovníci. Jednotlivé produktivity sú $\theta_v = 3$, $\theta_n = 1$. Ak pracovník odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa rovná rezervačnej užitočnosti $\overline{U} = 0$. Zisk odmietnutého zamestnávateľa je tiež 0. Ak pracovník zmluvu prijme, jeho užitočnosť $U = w - \frac{s^2}{2\theta}$ a zisk zamestnávateľa je $V = \theta - w$.
(a) Aká je optimálna úroveň vzdelania s^* pre vysokoproduktívneho pracovníka v separovanom ekvilibriu? Ako bude vyzerať zmluva?
(b) Aká je optimálna úroveň vzdelania pre pracovníkov v spoločnom ekvilibriu, ak $\lambda = 0.8$? Ako bude vyzerať zmluva?
(c) Pri akej λ preferujú obidva typy spoločné ekvilibrium?

Príklad 4.2.1.3
Predpokladajme, že na pracovnom trhu je rovnaký počet vysoko aj nízkoproduktívnych pracovníkov. Jednotlivé produktivity sú $\theta_v = 5$, $\theta_n = 1$. Ak pracovník odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa rovná rezervačnej užitočnosti $\overline{U} = 0$. Zisk odmietnutého zamestnávateľa je tiež 0. Ak pracovník zmluvu prijme, jeho užitočnosť $U = w - \frac{8s}{\theta}$ a zisk zamestnávateľa je $V = \theta - w$.
(a) Aká je optimálna úroveň vzdelania s^* a plat $w(s^*)$ v spoločnom ekvilibriu? Ako bude vyzerať zmluva?
(b) Aká je optimálna úroveň vzdelania s^* a plat $w(s^*)$ pre vysokoproduktívneho pracovníka v separovanom ekvilibriu? Ako bude vyzerať zmluva?
(c) Pri akej λ preferujú obidva typy spoločné ekvilibrium?

4.3 Screening

Screening sa tiež používa na odhalenie skrytej informácie v hrách typu Adverse selection. Rozdiel oproti Signallingu je v časovom pláne hry. V týchto hrách je signál poslaný až po navrhnutí zmluvy. Signál bude predstavovať veľkosť úlohy.

Na vysvetlenie opäť použijeme pracovný trh, kde hráči sú zamestnávateľ a pracovník, ktorí môžu byť vysoko alebo nízkoproduktívni. Zamestnávateľ nevie pozorovať produktivitu hráča. Opäť predpokladáme, že veľkosť úlohy nezvyšuje produktivitu. Na trhu je viac zamestnávateľov a jeden pracovník, čo spôsobí, že zisk zamestnávateľa bude nula. Užitočnosť pracovníka je jeho plat mínus náklady na úlohu. Náklady na úlohu závisia od veľkosti úlohy a produktivity.

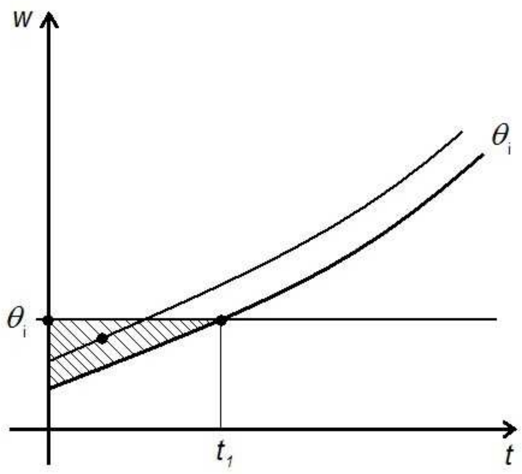
Stratégia pracovníka je vybrať si vhodnú veľkosť úlohy a zamestnávateľa. Stratégia zamestnávateľa je navrhnúť zmluvu, ktorá závisí od veľkosti úlohy. Úloha je menej nákladná pre vysokoproduktívneho pracovníka. Funkcia nákladov na úlohu je rastúca s veľkosťou úlohy a klesajúca s produktivitou. Indiferenčné krivky sú rastúce konvexné. Ako vidno na obrázku 4.1.

Hra 9

- **Hráči:** zamestnávateľ a pracovník
- **Časový plán hry:**
  1. krok: náhoda určí produktivitu hráča θ patrí. S pravdepodobnosťou λ priradí hráčovi produktivitu θ_v a s pravdepodobnosťou 1-λ priradí θ_n. Produktivitu môže pozorovať pracovník, zamestnávateľ nie.
  3. krok: zamestnávatelia ponúknu zmluvu $w(t)$
  2. krok: pracovník si vyberie veľkosť úlohy $t \in \langle 0, \infty)$
  4. krok: agent jednu zmluvu prijme alebo odmietne všetky
  5. krok: výstup je θ
- **Výplaty:**
  Ak agent odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa bude rovnať rezervačnej užitočnosti $\overline{U}$. Zisk principala je 0.
  Ak agent zmluvu prijme, jeho užitočnosť je $U(w, t|\theta) = w - c(t, \theta)$, kde

$c(t, \theta)$ je funkcia nákladov na úlohu a principalov zisk je $V(\theta - w) = \theta - w$.

Ak by produktivita bola pozorovateľná, zamestnávateľ by ponúkol pracovníkom plat vo výške ich produktivity. Ak by tak nespravil a ponúkol by nižší plat, našiel by sa iný zamestnávateľ s lepšou ponukou a tak by to pokračovalo, až kým by plat dosiahol výšku produktivity. Zisk zamestnávateľa je preto nula. Optimálna veľkosť úlohy by bola tiež nula. Ak by bola vyššia, tak zamestnávateľ má možnosť ponúknuť inú zmluvu, pri ktorej jeho zisk bude nenulový a pracovník bude mať väčšiu užitočnosť. Zobrazené na obrázku 4.6.

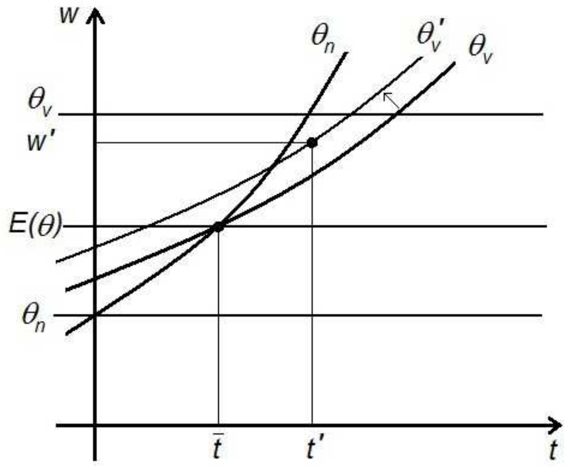


Obrázok 4.6: Pozorovateľná produktivita

V prípade, že produktivita nie je pozorovateľná, bude zisk zamestnávateľa tiež nulový, lebo iný zamestnávateľ vie ponúknuť zmluvu, v ktorej bude o niečo vyšší plat a pracovníci si ju vyberú.

Systém predpokladov v tomto type hier nemá opodstatnenie, keďže pracovník si vyberá veľkosť úlohy až po navrhnutí zmluvy.

Oproti Signallingu sa tu bude vyskytovať iba separované ekvilibrium. Spoločné ekvilibrium v hrách typu Screening neexistuje. Ak by spoločné ekvilibrium $(E(\theta), \bar{t})$ existovalo, iná firma by mala možnosť navrnúť zmluvu (w', t') s vyšším platom a veľkosťou úlohy, pri ktorej by vysokoproduktívni pracovníci mali vyššiu užitočnosť. Všetci vysokoproduktívni pracovníci by prešli k tomu novému zamestnávateľovi a nízkoproduktívni by ostali u starého. To by zvýšilo zisk novej firmy a znížilo zisk starej na záporný. Zobrazené na obrázku 4.7.



Obrázok 4.7: Neexistencia spoločného ekvilibria

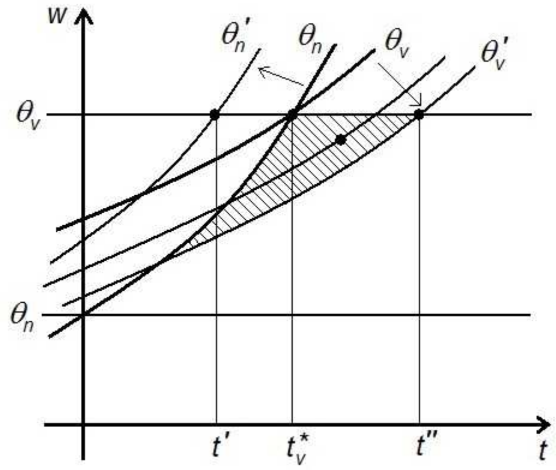
Separované ekvilibrium

Optimálny plat pre nízkoproduktívneho aj vysokoproduktívneho pracovníka je vo výške ich produktivity. Ak by bol plat nižší, iný zamestnávateľ by ponúkol vyšší plat, a keďže zisk zamestnávateľa je v ekvilibriu nula, tak výška platu musí byť presne vo výške produktivity pracovníkov. Takže $w(t_n^*)) = \theta_n$ a $w(t_v^*) = \theta_v$.

Optimálna výška úlohy pre nízkoproduktívneho pracovníka je nula, tak ako pri pozorovateľnej produktivite. Potrebujeme si určiť optimálnu výšku úlohy pre vysokoproduktívneho pracovníka. Môžeme použiť grafické zobrazenie. Na grafe na obrázku 4.8 sú zobrazené produkčné priamky a indiferenčné krivky pracovníkov. Optimálna veľkosť úlohy pre vysokoproduktívneho pracovníka je t_v^*. Ak by si zvolil väčšiu úlohu t'', zamestnávateľ by mal možnosť navrhnúť zmluvu z vyšrafovanej časti, kde by mal väčší zisk. Taktiež si nemôže vybrať menšiu úlohu t', lebo nízkoproduktívni pracovníci by sa tvárili ako vysokoproduktívni. Na výpočet použijeme indiferenčnú krivku nízkoproduktívneho pracovníka. Na nej ležia body $[0, \theta_n]$ a $[t_v^*, \theta_v]$. V obidvoch má

rovnakú užitočnosť.
Optimálnu veľkosť úlohy t_v^* si vyrátame z

$$U_n(\theta_n, 0) = U_n(\theta_v, t_v^*) \tag{4.27}$$



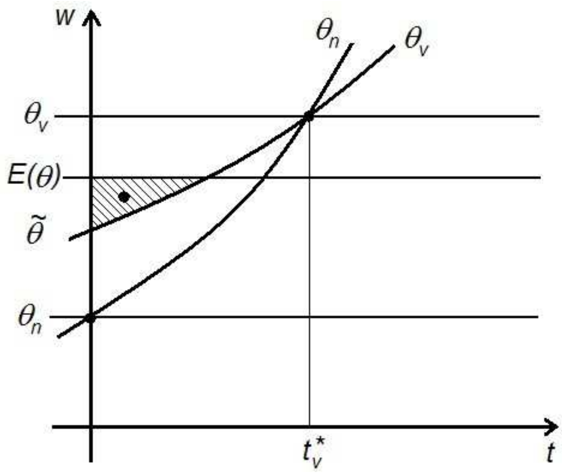
Obrázok 4.8: Optimálna veľkosť úlohy vysokoproduktívneho pracovníka

Toto ekvilibrium nemusí v čistých stratégiach existovať. Poznáme dve situácie, kedy neexistuje.

1. situácia:
Zobrazená na obrázku 4.9. Ak $E(\theta) = \lambda\theta_v + (1-\lambda)\theta_n$ je väčšia ako $\tilde{\theta}$, vtedy existujú zmluvy vo vyšrafovanej časti, ktoré sú výhodnejšie pre zamestnávateľa. Všetci pracovníci prejdú k zamestnávateľovi, ktorý takúto zmluvu navrhne. Vyprodukujú $E(\theta)$ a zamestnávateľ bude mať kladný zisk.

$\tilde{\theta}$ si vyrátame pomocou indiferenčnej krivky vysokoproduktívneho pracovníka.

$$U_v(\tilde{\theta}, 0) = U_v(\theta_v, t_v^*) \tag{4.28}$$



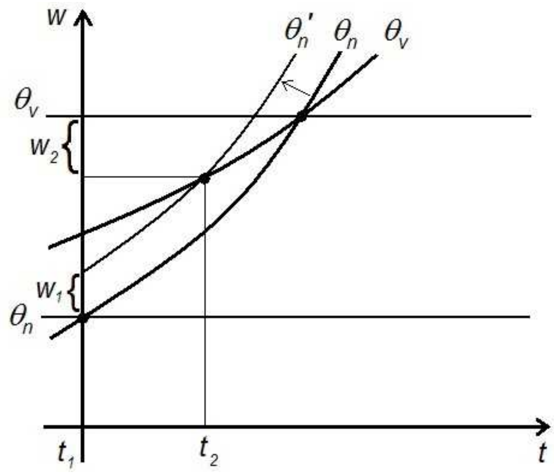
Obrázok 4.9: Neexistencia separovaného ekvilibria, 1. situácia

2. situácia:
Ekvilibrium nebude existovať aj v prípade, keď zamestnávateľ môže ponúknuť zmluvu (t_1, w_1) a (t_2, w_2), pri ktorej zisk na vysokoproduktívnom pracovníkovi bude väčší, ako strata na nízkoproduktívnom pracovníkovi. Bod (t_2, w_2) je z pohľadu užitočnosti pre vysokoproduktívnych rovnako výhodný. Zobrazené na obrázku 4.10.

Hodnotu t_2 si vyrátame pomocou indiferenčných kriviek. Body (t_1, w_1) a (t_2, w_2) ležia na indiferenčnej krivke nízkoproduktívneho pracovníka a body (t_2, w_2) a (t_v^*, θ_v) na indiferenčnej krivke vysokoproduktívneho pracovníka. (t_1, w_1) a (t_2, w_2) si vyrátame zo sústavy rovníc:

$$\begin{aligned} U_n(w_1, t_1) &= U_n(w_2, t_2) \\ U_v(w_2, t_2) &= U_v(\theta_v, t_v^*) \end{aligned} \tag{4.29}$$

Riešený príklad 4.3.1
Predpokladajme, že $\theta_v = 5.5$, $\theta_n = 2$. Ak pracovník odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa rovná rezervačnej užitočnosti $\overline{U} = 0$. Zisk odmietnutého zamestnávateľa je tiež 0. Ak pracovník zmluvu prijme, jeho užitočnosť $U = w - \frac{8t}{\theta}$ a zisk zamestnávateľa je $V = \theta - w$.



Obrázok 4.10: Neexistencia separovaného ekvilibria, 2. situácia

Otázky:

(a) Aká je optimálna veľkosť úlohy pre vysokoproduktívneho pracovníka v separovanom ekvilibriu?

(b) Pri akej λ nebude existovať separované ekvilibrium v čistých stratégiách?

(c) Aká zmluva porušuje existenciu separovaného ekvilibria v čistých stratégiách?

Odpovede:

(a) Použijeme rovnicu (4.27). Teda $\theta_n - \frac{8*0}{\theta_n} = \theta_v - \frac{8t_v^*}{\theta_n}$, čo po dosadení známych hodnôt $2 - 0 = 5.5 - \frac{8t_v^*}{2}$, z čoho nám vyjde $t_v^* = \frac{7}{8}$.

(b) Separované ekvilibrium v čistých stratégiách nebude existovať, ak $E(\theta) \geq \tilde{\theta}$. Vyrátame si $\tilde{\theta}$ z rovnice (4.28). Takže $\tilde{\theta} - 0 = \theta_v - \frac{8t_v^*}{\theta_v}$, čo po dosadení známych hodnôt $\tilde{\theta} = 5.5 - \frac{8*\frac{7}{8}}{5.5}$, z čoho $\tilde{\theta} = \frac{93}{22}$. Teraz môžeme vyrátať, pre aké λ je $E(\theta)$ väčšie rovné ako $\tilde{\theta}$. $\lambda\theta_v + (1-\lambda)\theta_n \geq \tilde{\theta}$, z čoho nám vyjde, že $\lambda \geq \frac{7}{11}$. Pre takéto λ nebude existovať separované ekvilibrium v čistých stratégiách.

(c) Druhá možnosť, kedy nebude ekvilibrium v čistých stratégiách existovať, je situácia, keď iný zamestnávateľ môže ponúknuť výhodnejšiu zmluvu. $t_1 = 0$ a $w_1 = \theta_n + k$. Potrebujeme si vyrátať (t_2, w_2).
Riešime sústavu rovníc (4.29):

$$\begin{aligned} 2 + k - \tfrac{0}{2} &= w_2 - \tfrac{8t_2}{2} \\ w_2 - \tfrac{8t_2}{5.5} &= 5.5 - \tfrac{8*\frac{7}{8}}{5.5} \end{aligned}$$

Vyjadrením t_2 z prvej rovnice a dosadením do druhej, dostávame $3.5w_2 + 4 + 2k = \frac{93}{4}$. Z čoho $w_2 = 5.5 - \frac{4}{7}k$. Zisk zamestnávateľa, ktorý ponúkne túto zmluvu bude $V' = \lambda(\theta_v - w_2) + (1-\lambda)(\theta_n - w_1)$. Dosadením všetkých známych hodnôt dostávame $V' = \frac{11}{7}k\lambda - k$. Tento zisk je kladný pre $\lambda \geq \frac{7}{11}$. Teda ak λ bude spĺňať túto podmienku, tak existuje zmluva (napr. $(0, 2.5)$,$(\frac{19}{28}, \frac{73}{14})$), ktorá porušuje existenciu separovaného ekvilibria v čistých stratégiách.

4.3.1 Príklady

Príklad 4.3.1.1
Predpokladajme, že $\theta_v = 250$, $\theta_n = 50$. Ak pracovník odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa rovná rezervačnej užitočnosti $\overline{U} = 0$. Zisk odmietnutého zamestnávateľa je tiež 0. Ak pracovník zmluvu prijme, jeho užitočnosť $U = w - \frac{t^2}{\theta}$ a zisk zamestnávateľa je $V = \theta - w$.

Otázky:

(a) Aká je optimálna veľkosť úlohy pre vysokoproduktívneho pracovníka v separovanom ekvilibriu?
(b) Pri akej λ nebude existovať separované ekvilibrium v čistých stratégiách?
(c) Aká zmluva porušuje existenciu separovaného ekvilibria v čistých stratégiách?

Príklad 4.3.1.2
Predpokladajme, že $\theta_v = 3$, $\theta_n = 1$. Ak pracovník odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa rovná rezervačnej užitočnosti $\overline{U} = 0$. Zisk odmietnutého zamestnávateľa je tiež 0. Ak pracovník zmluvu prijme, jeho užitočnosť $U = w - \frac{2t^2}{\theta}$ a zisk zamestnávateľa je $V = \theta - w$.

Otázky:

(a) Aká je optimálna veľkosť úlohy pre vysokoproduktívneho pracovníka v separovanom ekvilibriu? Ako bude vyzerať zmluva?

(b) Pri akej λ nebude existovať separované ekvilibrium v čistých stratégiách?

(c) Aká zmluva porušuje existenciu separovaného ekvilibria v čistých stratégiách?

Príklad 4.3.1.3

Predpokladajme, že $\theta_v = 5$, $\theta_n = 1$. Ak pracovník odmietne zmluvu, jeho užitočnosť sa rovná rezervačnej užitočnosti $\overline{U} = 0$. Zisk odmietnutého zamestnávateľa je tiež 0. Ak pracovník zmluvu prijme, jeho užitočnosť $U = w - \frac{8t}{\theta}$ a zisk zamestnávateľa je $V = \theta - w$.

Otázky:

(a) Aká je optimálna veľkosť úlohy pre vysokoproduktívneho pracovníka v separovanom ekvilibriu? Ako bude vyzerať zmluva?

(b) Pri akej λ nebude existovať separované ekvilibrium v čistých stratégiách?

(c) Aká zmluva porušuje existenciu separovaného ekvilibria v čistých stratégiách?

Kapitola 5

Riešenia príkladov

Príklad 3.1.1.1
(a) Keďže pre investora je výhodnejšie, ak producent peniaze nesprenever í, ponúkne producentovi boiling-in-oil zmluvu:
w(500)=100
w(-100)=100
w(100)=$-\infty$

(b) Keďže vyjednávaciu výhodu má agent, investor ponúkne nasledovnú zmluvu:
w(500)=200
w(-100)=200
w(100)=0

Príklad 3.1.1.2
(a) $w(0) = 0, w(2.4) = 137, U = 9.3$
(b) $w(0) = 0, w(2.4) = 88.4, V = 48.6$
(c) $e = 0, U = 8.7$
(d) $w(0) = -\infty, w(49) = 137, w(100) = -\infty, w(225) = 137, U = 9.3$

Príklad 3.1.1.3
(a) $U = 47.07$
(b) $U = 13.16$
(c) $\alpha \cong 8.7$
(d) $e = 5, U = 45$
(e) $\alpha = 8.8$

Príklad 3.2.1.1
Zmluva vyzerá takto:
ak m= dobrý stav a $q = 8$, tak ponúknutý plat je 4.09
ak m= zlý stav a $q = 0.5$, tak ponúknutý plat je 0.11

Príklad 3.2.1.2
Zmluva vyzerá takto:
ak m= dobrý stav a $q = 1$, tak ponúknutý plat je 0.547
ak m= zlý stav a $q = 0.25$, tak ponúknutý plat je 0.078

Príklad 4.1.1.1
(a) Očakávaný výstup vysokoproduktívneho agenta je 10.
(b) Zmluvy:
$W_1 = (w_1(0) = 2, w_1(5) = 0, w_1(10) = 2, w_1(15) = 0)$
$W_2 = (w_2(0) = 0, w_2(5) = 6, w_2(10) = 0, w_2(15) = 6)$

Príklad 4.1.1.2
(a) Očakávaný výstup nízkoproduktívneho agenta je 3.5.
(b) Zmluvy:
$W_1 = (w_1(0) = 3, w_1(7) = 3, w_1(14) = 0)$
$W_2 = (w_2(0) = 0, w_2(7) = 5, w_2(14) = 5)$

Príklad 4.1.1.3
Priemerná cena mobilov bude 2000. Predávať sa budú za 3000.

Príklad 4.1.1.4
(a) Zmluva bude vyzerať takto:
ak výstup bude $g = 2$, tak plat $w = \frac{61}{49}$
ak výstup bude $g = \frac{4}{7}$, tak plat $w = \frac{16}{49}$

(b) Snaha v dobrom stave sveta je $e = 1$ a výstup je $q = 2$. V zlom stave sveta je snaha $e = 0.5$ a výstup je $q = 0.5$.

Príklad 4.2.1.1
(a) Optimálna úroveň vysokoproduktívneho pracovníka v separovanom ekvilibriu $s^* \in \langle 100, 223, 6 \rangle$. Výhodnejšia z pohľadu užitočnosti je pre neho úroveň $s_1 = 100$.
Zmluva vyzerá takto:
ak $s^* \in \langle 100, 223, 6 \rangle$, tak plat $w = \theta_v = 250$
ak $s^* \notin \langle 100, 223, 6 \rangle$, tak plat $w = \theta_n = 50$
kde systém predpokladov $\mu(s^*) = 1$.

(b) Optimálna úroveň vysokoproduktívneho pracovníka v spoločnom ekvilibriu $s^* \leq 83.6$.
Zmluva vyzerá takto:
ak $s^* \leq 83.6$, tak plat $w = E(\theta) = 190$
ak $s^* > 83.6$, tak plat $w = \theta_n = 50$

(c) Vysokoproduktívny pracovník pri $\lambda = 0.7$ preferuje separované ekvilibrium a nízkoproduktívny preferuje spoločné ekvilibrium. Obidvaja preferujú spoločné ekvilibrium pri $\lambda \geq 0.8$.

Príklad 4.2.1.2
(a) Optimálna úroveň vysokoproduktívneho pracovníka v separovanom ekvilibriu $s^* \in \langle 2, 3.46 \rangle$.
Zmluva vyzerá takto:
ak $s^* \in \langle 2, 3.46 \rangle$, tak plat $w = \theta_v = 3$
ak $s^* \notin \langle 2, 3.46 \rangle$, tak plat $w = \theta_n = 1$
kde systém predpokladov $\mu(s^*) = 1$.

(b) Optimálna úroveň vysokoproduktívneho pracovníka v spoločnom ekvilibriu $s^* \leq 1.79$.
Zmluva vyzerá takto:
ak $s^* \leq 1.79$, tak plat $w = E(\theta) = 2.6$
ak $s^* > 1.79$, tak plat $w = \theta_n = 1$

(c) Obidvaja preferujú spoločné ekvilibrium pri $\lambda \geq 0.66$.

Príklad 4.2.1.3
(a) Optimálna úroveň pracovníkov v spoločnom ekvilibriu $s^* \leq 0.25$.
Zmluva vyzerá takto:
ak $s^* \leq 0.25$, tak plat $w = E(\theta) = 3$
ak $s^* > 0.25$, tak plat $w = \theta_n = 1$

(b) Optimálna úroveň vysokoproduktívneho pracovníka v separovanom ekvilibriu je $s^* \in \langle 0.5, 2.5 \rangle$.
Zmluva vyzerá takto:
ak $s^* \in \langle 0.5, 2.5 \rangle$, tak plat $w = \theta_v = 5$
ak $s^* \notin \langle 0.5, 2.5 \rangle$, tak plat $w = \theta_n = 1$
kde systém predpokladov $\mu(s^*) = 1$.

(c) Obidvaja preferujú spoločné ekvilibrium pri $\lambda \geq 0.8$.

Príklad 4.3.1.1
(a) Optimálna veľkosť úlohy $t_v^* = 100$.
(b) Ekvilibrium nebude existovať, ak $\lambda \geq 0.8$.
(c) Zmluva (w_2, t_2), kde $w_2 = 250 - 0.25k$ a $t_2 = \sqrt{10000 - 62,5k}$.

Príklad 4.3.1.2
(a) Optimálna veľkosť úlohy $t_v^* = 1$.
Zmluva vyzerá takto:
ak $t_v^* < 1$, tak $w = 1$
ak $t_v^* \geq 1$, tak $w = 3$

(b) Ekvilibrium nebude existovať, ak $\lambda \geq \frac{2}{3}$.
(c) Zmluva (w_2, t_2), kde $w_2 = 3 - \frac{k}{2}$ a $t_2 = \sqrt{4 - 3k}$.

Príklad 4.3.1.3
(a) Optimálna veľkosť úlohy $t_v^* = \frac{1}{2}$.
Zmluva vyzerá takto:
ak $t_v^* < \frac{1}{2}$, tak $w = 1$
ak $t_v^* \geq \frac{1}{2}$, tak $w = 5$

(b) Ekvilibrium nebude existovať, ak $\lambda \geq \frac{4}{5}$.
(c) Zmluva (w_2, t_2), kde $w_2 = 5 - \frac{k}{5}$ a $t_2 = \frac{1}{2} - \frac{k}{8}$.

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo vytvoriť učebný materiál. Na začiatku práce sme zhrnuli základné pojmy a definície z teórie hier. V ďalších kapitolách sme sa už konkrétne zaoberali jednotlivými hrami s asymetrickou informáciou. Hry sme rozdelili na viac kategórií, v ktorých sme sa jednotlivým typom bližšie venovali. Ku každej kategórii sme vysvetlili teóriu a následne to podrobne vysvetlili na riešených príkladoch. Pri opise hier nám poslúžil principal-agent model, ktorý sa dá aplikovať na viaceré typy hier. Každá kategória sa končí zadaniami príkladov na riešenie, ktorých výsledky sú uvedené na konci práce. Čitateľ si tak môže pri riešení týchto príkladov overiť, či teóriu pochopil správne.

Literatúra

Akerlof, G. (1970): "The Market for Lemons: Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism", *Quarterly Journal of Economics*

Spence, M. (1973): "Job Market Signalling", *The Quarterly Journal of Economics*

Rasmusen, E. (2001): "Games and Information: An Introduction to Game Theory"

Grossman, S. J. & Hart, O. D. (1983): "An Analysis of the Principal-Agent Problem ", *Econometrica*

Fudenberg, D & Tirole, J (1991): "Game Theory"

Pekár, J. (2003): "Prednášky k predmetu Úvod do teórie hier" *FMFI UK*

Pekár, J. (2004): "Prednášky k predmetu Teória hier " *FMFI UK*

Brunovský, P. (2006): "Poznámky k predmetu Mikroekonómia" *FMFI UK*

Šikudová, E. (2006): "Prednášky k predmetu Ekonomika informácií" *FMFI UK*

Slantchev (2004): "Game Theory: Prefereces and Expected Utility Theory", *Department of Political Science, University of California*

Mas-Colell, A., M. D. Whinston and J. R. Green (1995): "Microeconomic Theory", *Oxford University Press*