



FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO  
V BRATISLAVE

# DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2007

Natalia Zahorec

# **Generovanie scenárov úrokových mier pomocou Ho&Lee modelu**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

Natalia Zahorec

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY**

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce  
Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

BRATISLAVA 2007

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne len za pomoci konzultácií a literatúry uvedenej v zozname.

Bratislava, Apríl 2007

Natalia Zahorec

Touto cestou by som sa chcela poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za odborné vedenie, cenné rady a čas, ktorý mi venoval pri písaní tejto diplomovej práce.

## **Abstrakt**

Cieľom diplomovej práce je vytvorenie a otestovanie generátora budúcich úrokových mier. Budúce úrokové miery sú generované pomocou Ho&Lee modelu, ktorý popisuje stochastický vývoj forwardových kriviek v čase. Tento model je špeciálnym prípadom Heath-Jarrow-Morton rámca, kde driftová zložka je funkcia času a maturity, volatilita je konštantná a má jeden zdroj náhodnosti, ktorý je modelovaný Brownovým pohybom. V prvej časti je rozobraná kalibračná metóda, ktorá je založená na historických dátach úrokových mier. V druhej časti analyzujeme nakalibrované parametre a testujeme kvalitu modelu.

Kľúčové slová: Ho&Lee model, kalibrácia parametrov

## Obsah

<b>Úvod</b>	<b>7</b>
<b>1. Ho&amp;Lee model</b>	<b>8</b>
<b>2. Testovanie kvality modelu</b>	<b>12</b>
2.1 Analýza odhadnutých parametrov .....	12
2.2 Testovanie normality .....	15
2.3 Generovanie očakávanej úrokovej miery a testovanie kvality predikcie modelu .....	17
2.3.1 Testovanie predikcie trendu budúcej úrokovej miery .....	18
2.3.2 Testovanie predikcie hodnoty budúcej úrokovej miery .....	19
Záver .....	28
2.4 Zafixovanie parametrov verzus aktualizácia parametrov .....	28
2.4.1 Stabilita modelu .....	29
2.4.2 Aktuálne verzus staré parametre .....	30
Záver .....	38
<b>Záver</b>	<b>39</b>
<b>Literatúra</b>	<b>40</b>

# Úvod

Úroková miera je jedným zo základných faktorov determinujúcich ceny na finančných trhoch. S narastajúcimi objemami obchodov sa začali objavovať aj rôzne nestability na trhoch. Finanční sprostredkovatelia, ako napríklad banky a poisťovne, sú v prvom rade vystavení nebezpečenstvu z fluktuácií úrokovej miery, pretože ich aktíva a pasíva sú do značnej miery korelované s jej pohybmi. Preto mali finanční výskumníci záujem modelovať dynamiku úrokovej miery. Najčastejšie používanými modelmi sú *modely časovej štruktúry úrokovej miery*. Medzi ne patrí aj model Ho&Lee, ktorý je predmetom nášho záujmu. Cieľom práce je nakalibrovať parametre, ktoré vstupujú do modelu a otestovať kvalitu modelu.

Diplomová práca pozostáva z dvoch kapitol. V prvej z nich je predstavený Ho&Lee model a spôsob, akým budú kalibrované parametre vstupujúce do modelu. V druhej časti sa najskôr venujeme analýze odhadnutých parametrov. Skúmame aj otázku, či sú splnené predpoklady, na ktorých je model založený. Ďalej testujeme, či je model s nakalibrovanými parametrami použiteľný na odhadovanie budúcej úrokovej miery, nakoľko je schopný predpovedať, ktorým smerom sa bude vyvíjať úroková miera a aké hodnoty bude nadobúdať. Kvalitu predikcie Ho&Lee modelu porovnávame s iným, *jednoduchým* modelom a graficky dokumentujeme výsledky. Nakoniec analyzujeme, čo prináša zafixovanie parametrov na určité obdobie. Testujeme stabilitu modelu, porovnávame výsledky získané pomocou modelu so zafixovanými parametrami s výsledkami, ktoré generuje model s aktuálnymi parametrami a skúmame, ako zafixovanie parametrov ovplyvní kvalitu predikcie modelu.

# 1. Model Ho&Lee

V práci sme na modelovanie budúceho vývoja úrokovej miery použili model Ho&Lee. Je to jednofaktorový model a patrí do triedy bezarbitrážnych modelov. Súčasnú výnosovú krivku berie ako danú a modeluje jej budúci vývoj tak, aby nevznikali arbitrážne príležitosti. Jednofaktorové modely sú charakteristické tým, že všetky dlhopisy na trhu sú ovplyvnené jediným zdrojom neistoty, to znamená, že sú dokonale korelované. Model Ho&Lee je špeciálnym prípadom Heath-Jarrow-Morton rámca, kde driftová zložka je funkciou času a maturity a volatilita je konštantná. Do modelu vstupujú dva parametre: volatilita a trhová cena rizika. Dajú sa odhadnúť z historických trhových údajov. Zdroj náhodnosti je modelovaný Brownovým pohybom. Za nedostatok Ho&Lee modelu sa považuje fakt, že namodelované úrokové miery môžu nadobúdať aj záporné hodnoty a volatilita nezávisí od maturity. Napriek tomu jeho výhodou je ľahká implementovateľnosť a to, že presne vystihuje tvar súčasnej výnosovej krivky.

V tejto kapitole je rozobratá kalibračná metóda Ho&Lee modelu. Odvodené sú explicitné vzorce pre parametre, ktoré vstupujú do modelu a ktoré sme potom použili na generovanie budúcej úrokovej miery.

V prípade Ho&Lee modelu forwardová úroková miera sleduje nasledovný proces:

$$d_t f(t, T) = \sigma d\tilde{W}_t + \sigma^2(T-t)dt \quad (1)$$

v rizikovo neutrálnom svete. V reálnom svete rovnica (1) má tvar:

$$d_t f(t, T) = \sigma dW_t + (\sigma\gamma + \sigma^2(T-t))dt \quad (2)$$

kde  $d\tilde{W}_t = dW_t + \gamma dt$ .  $d\tilde{W}_t$  a  $dW_t$  sa vzťahujú na Brownov pohyb v rizikovo neutrálnom svete, resp. reálnom svete. Konštanta  $\sigma$  označuje volatilitu budúcej úrokovej miery a konštanta  $\gamma$  predstavuje trhovú cenu rizika.

Nech  $P(t, T)$  označuje diskontný faktor (diskontný dlhopis) v čase  $t$  a s dobou splatnosti (maturitou)  $T$ , tak platí vzťah:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u)du\right). \quad (3)$$



Pomocou rovníc (2) a (3) odvodíme vzťah, z ktorého budeme vychádzať pri kalibrácii parametrov. Kalibrácia parametrov bude pozostávať z určení konštant  $\sigma$  a  $\gamma$ . Najskôr zintegrujeme rovnicu (2) a dostaneme vyjadrenie pre forwardovú úrokovú mieru  $f(t, T)$ :

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma W_t + t\sigma\gamma + \sigma^2 Tt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2. \quad (4)$$

Potom dosadíme rovnicu (4) do vzťahu (3) a nasledovne upravíme:

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \exp\left(-\int_t^T f(0, u)du + \int_t^T \sigma W_t du + \int_t^T t\sigma\gamma du + \int_t^T \sigma^2 t u du - \int_t^T \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 du\right) \\ &= \exp\left(-\int_t^T f(0, u)du + \sigma W_t(T-t) + t\sigma\gamma(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t(T^2 - t^2) - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2(T-t)\right) \\ &= \exp\left(-\int_t^T f(0, u)du\right) \cdot \exp\left(-\sigma(T-t)(W_t + t\gamma) - \frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t)\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^T f(0, u)du - \int_0^t f(0, u)du\right) \cdot \exp\left(-\sigma(T-t)(W_t + t\gamma) - \frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t)\right). \quad (5) \end{aligned}$$

S využitím (3) dostávame:

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp\left(-\sigma(T-t)(W_t + t\gamma) - \frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t)\right). \quad (6)$$

Označme

$$N(t, T) = \log\left(\frac{P(0, T)}{P(t, T)P(0, t)}\right) = \sigma(T-t)(W_t + t\gamma) + \frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t). \quad (7)$$

Veličina  $N(t, T)$  je normálne rozdelená so strednou hodnotou  $t\sigma\gamma(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t)$  a disperziou  $\sigma^2(T-t)^2 t$ . Pri určovaní parametrov  $\sigma$  a  $\gamma$  vychádzame zo vzorca (7). Označme:

$$Z_i = \frac{N_i(t_i, T)}{(T-t_i)\sqrt{t_i}} - \sigma\gamma\sqrt{t_i} - \frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{t_i}T \quad (8)$$

kde  $N_i(t_i, T)$  je veličina daná vzťahom (7) v čase  $i$  a  $t_i$  je časové obdobie od  $i-1$  po  $i$ . Vlastne  $t_i$  sa rovná: (počet dní od času  $i-1$  po  $i$ ) / 365. Potom po víkendech alebo

sviatku (t.j. dni keď sa neobchoduje)  $t_i$  sa môže rovnať 2/365, 3/365, resp. 4/365. Vo vzťahu (8) sa veličina  $N_i(t_i, T)$  očistí od tohto vplyvu a potom veličina  $Z_i$  je normálne rozdelená so strednou hodnotou 0 a disperziou  $\sigma^2$ . Využitím tohto faktu dostaneme odhady pre parametre  $\sigma$  a  $\gamma$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=i-n+1}^i Z_j = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=i-n+1}^i Z_j^2 = \sigma^2 \quad (10)$$

kde  $n$  (lookback periods) označuje dĺžku časového radu historických údajov, ktoré použijeme na kalibráciu parametrov. Premenná  $n$  môže byť chápaná ako tretí parameter.

Dosadíme vzťah (8) do rovnice (9) a upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=i-n+1}^i \left( \frac{N_j(t_j, T)}{(T-t_j)\sqrt{t_j}} - \sigma\gamma\sqrt{t_j} - \frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{t_j}T \right) &= 0 \\ \sum_{j=i-n+1}^i \frac{N_j(t_j, T)}{(T-t_j)\sqrt{t_j}} - \sigma\gamma \sum_{j=i-n+1}^i \sqrt{t_j} - \frac{1}{2}\sigma^2 T \sum_{j=i-n+1}^i \sqrt{t_j} &= 0 \end{aligned}$$

Z toho vieme určiť parameter  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{\sum_{j=i-n+1}^i \frac{N_j(t_j, T)}{(T-t_j)\sqrt{t_j}}}{\sigma \sum_{j=i-n+1}^i \sqrt{t_j}} - \frac{1}{2}\sigma T \quad (11)$$

Využitím vzťahov (10), (8) a (11) dostaneme odhad pre parameter  $\sigma^2$ :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=i-n+1}^i \left( \frac{N_j(t_j, T)}{(T-t_j)\sqrt{t_j}} - \sigma\gamma\sqrt{t_j} - \frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{t_j}T \right)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=i-n+1}^i \left( \frac{N_j(t_j, T)}{(T-t_j)\sqrt{t_j}} - \sigma\sqrt{t_j} \left( \frac{\sum_{k=i-n+1}^i \frac{N_k(t_k, T)}{(T-t_k)\sqrt{t_k}}}{\sigma \sum_{k=i-n+1}^i \sqrt{t_k}} - \frac{1}{2}\sigma T \right) - \frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{t_j}T \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1} \sum_{j=i-n+1}^i \left( \frac{N_j(t_j, T)}{(T-t_j)\sqrt{t_j}} - \sqrt{t_j} \frac{\sum_{k=i-n+1}^i \frac{N_k(t_k, T)}{(T-t_k)\sqrt{t_k}}}{\sum_{k=i-n+1}^i \sqrt{t_k}} + \frac{1}{2} \sigma^2 \sqrt{t_j} T - \frac{1}{2} \sigma^2 \sqrt{t_j} T \right)^2 \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{j=i-n+1}^i \left( \frac{N_j(t_j, T)}{(T-t_j)\sqrt{t_j}} - \frac{\sqrt{t_j} \sum_{k=i-n+1}^i \frac{N_k(t_k, T)}{(T-t_k)\sqrt{t_k}}}{\sum_{k=i-n+1}^i \sqrt{t_k}} \right)^2. \tag{12}
\end{aligned}$$

Na kalibráciu parametrov použijeme historické údaje USD Libor. Okamžitá úroková miera je výnos do splatnosti diskontného dlhopisu s maturitou v nasledovnom časovom okamihu. Táto úroková miera nie je pozorovateľnou veličinou, preto ako jej aproximáciu použijeme USD Libor s maturitou 1 mesiac. Zvolíme  $T = 0.5$  (6 mesiacov), veličinu  $N(t, T)$  dostaneme zo vzťahu (7) a s využitím rovnosti:

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + (T-t)L_\delta(t)}$$

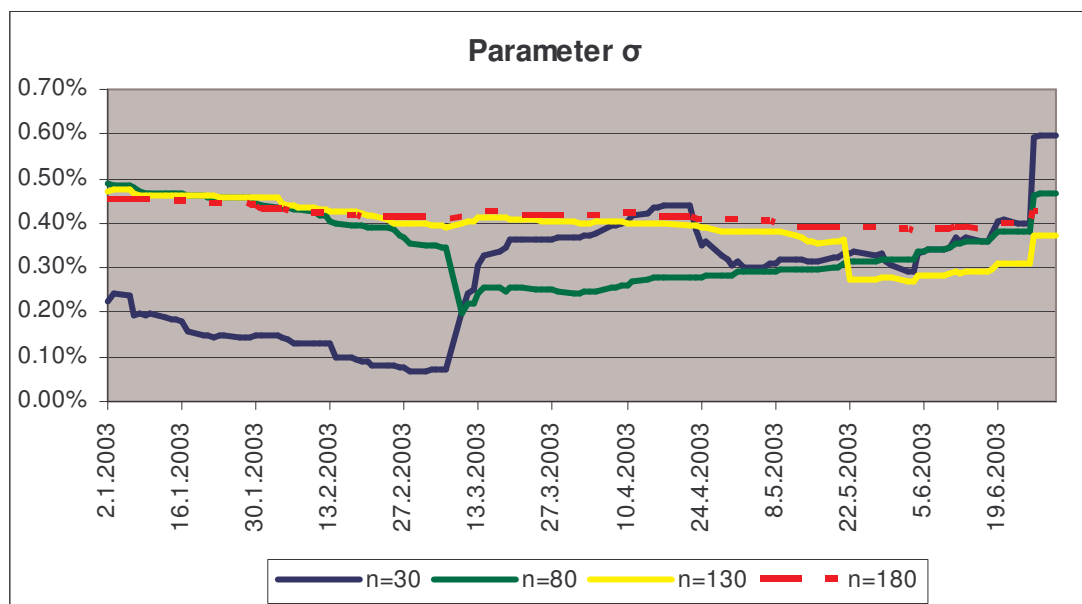
kde  $L_\delta(t)$  je hodnota Liboru v čase  $t$  na obdobie  $\delta$  a  $\delta = T - t$ . Potom sa podľa (11) a (12) spočítajú parametre  $\sigma$  a  $\gamma$ , ktoré budeme analyzovať v nasledujúcej kapitole a použijeme ich na generovanie budúcej úrokovej miery.

## 2. Testovanie kvality modelu

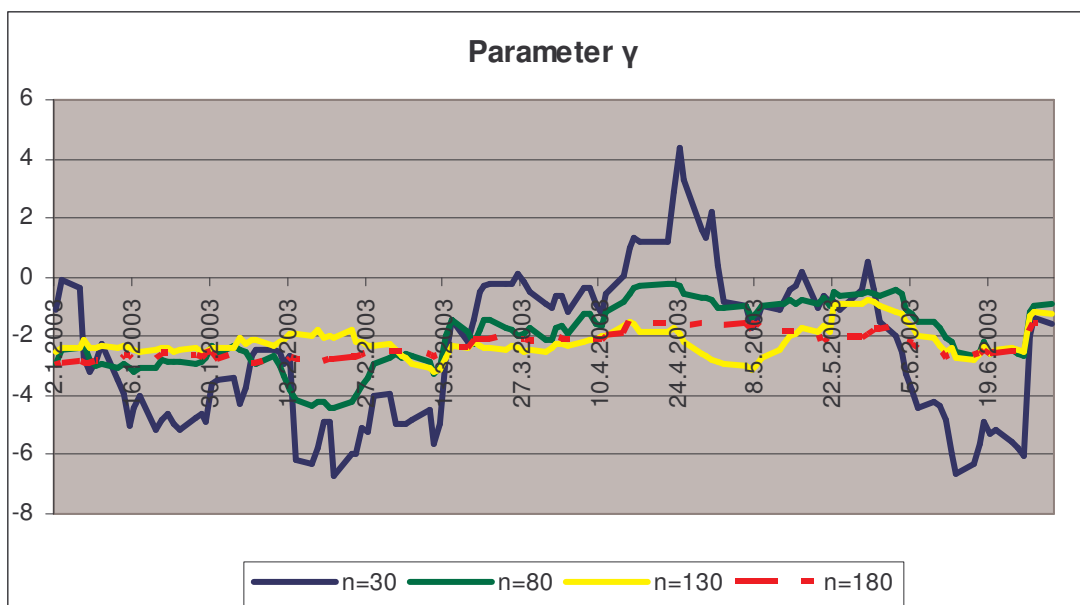
### 2.1 Analýza odhadnutých parametrov

Parametre  $\sigma$  a  $\gamma$  sú nakalibrované podľa vyššie odvodených vzorcov (11) a (12) a použitím historických dát. Dáta zahŕňajú USD Libor v časovom horizonte 3.1.1989-15.6.2004, iba pracovné dni. Okrem týchto dvoch parametrov,  $\sigma$  a  $\gamma$ , ktoré sa nachádzajú priamo v modeli (2), existuje aj tretí parameter  $n$  a ten vystupuje pri kalibrácii. Parameter  $n$  určuje, aký dlhý časový rad historických údajov je použitý na kalibráciu  $\sigma$  a  $\gamma$ . Kalibráciu parametrov sme urobili pre rôzne  $n$  a potom sme skúmali citlivosť parametrov.

Z analýzy odhadnutých parametrov môžeme usúdiť, že volatilita parametrov  $\sigma$  a  $\gamma$  sa mení v závislosti od  $n$ . Parameter  $\gamma$  je citlivejší na zmenu hodnoty  $n$  ako  $\sigma$ . So zvyšovaním  $n$  sa znižuje volatilita pre oba parametre, čo vyplýva z konštrukcie parametrov. Potvrdilo sa to i v praxi. Na grafe 1 a 2 je uvedený vývoj parametrov  $\sigma$  a  $\gamma$  za obdobie 2.1.2003-30.6.2003 pre rôzne  $n$ .



Graf 1: Vývoj parametra  $\sigma$  v čase od 2.1.2003 do 30.6.2003 pre rôzne  $n$



**Graf 2:** Vývoj parametra  $\gamma$  v čase od 2.1.2003 do 30.6.2003 pre rôzne  $n$

Okrem toho, že sa s rastúcim  $n$  znižuje volatilita parametrov, znižuje sa aj interval, v ktorom sa pohybuje ich hodnota. Parameter  $\sigma$  určuje volatilitu budúcej úrokovej miery. Jeho štatistické charakteristiky pre rôzne  $n$  sú uvedené v tabuľke 1 za obdobie 2.1.2003-30.6.2003. Tam môžeme vidieť, ako sa postupne so zväčšovaním  $n$  znižuje štandardná odchýlka pre  $\sigma$  a znižuje sa rozsah hodnôt, ktoré  $\sigma$  nadobúda.

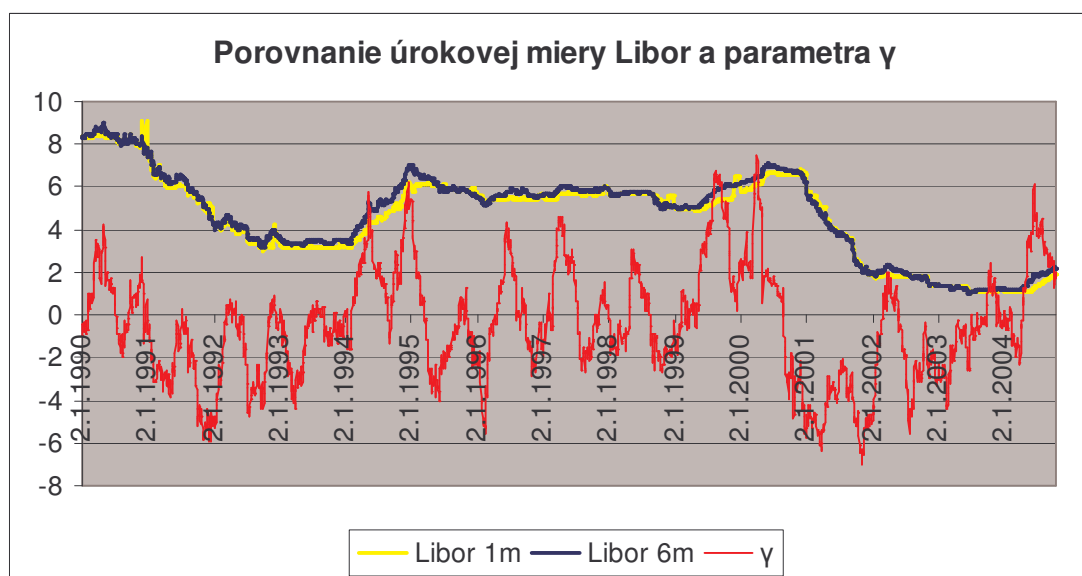
$\sigma$ $n$	Stredná hodnota	Štandardná odchýlka	Minimum	Maximum
20	0.2775%	0.1475%	0.0442%	0.6996%
40	0.2881%	0.1171%	0.0810%	0.5338%
60	0.3228%	0.1049%	0.1148%	0.5080%
80	0.3480%	0.0795%	0.1995%	0.4877%
100	0.3620%	0.0715%	0.2567%	0.4846%
120	0.3802%	0.0656%	0.2625%	0.4790%
140	0.3980%	0.0470%	0.2830%	0.4661%
160	0.4114%	0.0226%	0.3741%	0.4645%
180	0.4145%	0.0198%	0.3808%	0.4549%
200	0.4174%	0.0197%	0.3857%	0.4833%

**Tabuľka 1:** Štatistické vlastnosti parametra  $\sigma$  za obdobie 2.1.2003.-30.6.2003

$\gamma$ n	Stredná hodnota	Štandardná odchýlka	Minimum	Maximum
20	-2.7136	2.9556	-8.7250	4.9499
40	-2.2440	2.1702	-7.7487	2.2091
60	-2.0929	1.5997	-5.0411	0.3591
80	-2.0335	1.0852	-4.4411	-0.2477
100	-2.0747	0.8461	-3.9500	-0.6865
120	-2.1588	0.5534	-3.4187	-0.8084
140	-2.2343	0.3669	-3.0571	-1.3365
160	-2.3287	0.4863	-3.5386	-1.5382
180	-2.3104	0.4425	-3.0211	-1.4280
200	-2.3842	0.4944	-3.3429	-1.3551

**Tabuľka 2:** Štatistické vlastnosti parametra  $\gamma$  za obdobie 2.1.2003.-30.6.2003

Parameter  $\gamma$ , ktorý označuje trhovú cenu rizika, je obsiahnutý v trende budúceho vývoja úrokovej miery. Štatistické vlastnosti pre  $\gamma$  za obdobie 2.1.2003-30.6.2003 sú uvedené v tabuľke 2. Parameter  $\gamma$  môže byť aj záporný a to v takom prípade, keď trh očakáva výrazný pokles úrokovej miery. Ako príklad uvidíme graf, na ktorom je znázornený vývoj odhadnutého parametra  $\gamma$  pre  $n = 80$  a vývoj Liboru za obdobie 1990 až 2004. Z grafu 3 môžeme vidieť, ako  $\gamma$  sleduje trend úrokovej miery a je schopná opísať reagovanie na trhu. Napr. v roku 2001 došlo k výraznému poklesu úrokovej miery a parameter  $\gamma$  tento pokles zachytil.



**Graf 3:** Porovnanie úrokovej miery Libor a parametra  $\gamma$  pre  $n = 80$

Ďalej budeme testovať vierohodnosť parametrov a kvalitu modelu. Budeme hľadať, pre ktoré  $n$  je model najlepší v tom zmysle, že vykazuje najväčšiu schopnosť predpovedať úrokovú mieru.

## 2.2 Testovanie normality

Vychádzame zo vzťahu (6), ktorý bol odvodený v predchádzajúcej kapitole. Chceme otestovať či sa  $P(t, T)$  v skutočnosti správa podľa daného modelu a či sú v praxi splnené predpoklady plynúce z teórie. Postupovať budeme nasledovne. Najskôr si vyjadríme  $Z_i$  ako v (8).  $Z_i$  vypočítame pomocou parametrov, ktoré sme nakalibrovali. Podľa teórie,  $Z_i$  má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou zodpovedajúcou  $\sigma^2$ . Pre všetky nakalibrované parametre a pre všetky uvažované  $n$  (lookback periods) budeme testovať či,  $Z_i / \sigma$  má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou 1. Testovanie bolo vykonané za obdobie od 2.1.1990 do 15.10.2004.

Parametre sú konštruované tak, aby vychádzali z podmienok (9) a (10), ktoré potom automaticky zaručujú, že  $Z_i / \sigma$  bude mať rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou 1. Zostáva nám otestovať normalitu a na to potrebujeme vypočítať a analyzovať charakteristiky šikmosti a špicatosti.

Šikmosť a špicatosť sú vo všeobecnosti definované nasledovne:

$$\text{Šikmosť} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(r_i - \mu)^3}{s^3}$$

$$\text{Špicatosť} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(r_i - \mu)^4}{s^4}$$

kde  $\mu$  je výberová stredná hodnota pozorovanej premennej  $r$  a  $s$  je jej výberová štandardná odchýlka. V našom prípade pozorovaná premenná je  $Z_i / \sigma$  a charakteristiky nám hovoria o tom, ako veľmi sa rozdelenie  $Z_i / \sigma$  líši od normálneho. Pre normálne rozdelenie  $N(0,1)$  sa hodnota šikmosti rovná 0 a hodnota špicatosti sa rovná 3. V prípade, že sa šikmosť nerovná presne 0, ale spadne do intervalu  $(-2 \cdot \text{štandardná chyba}; 2 \cdot \text{štandardná chyba})$ , považujeme ju za

nesignifikantnú [1]. Odhad štandardnej chyby pre šikmosť sa vypočíta ako  $\sqrt{\frac{6}{N}}$ , kde  $N$  je počet údajov, ktoré analyzujeme. Podobne sa dá uvažovať aj pri špicatosti. Interval, na ktorom zamietame signifikantnosť špicatosti je  $(3 - 2\sqrt{\frac{24}{N}}; 3 + 2\sqrt{\frac{24}{N}})$ , kde  $\sqrt{\frac{24}{N}}$  je odhad štandardnej chyby.

Po otestovaní sme dospeli k výsledkom, ktoré sú uvedené v nasledovnej tabuľke:

n	Šikmosť	Špicatosť
10	-0.123	3.479
20	-0.135	4.714
30	-0.120	5.578
40	-0.123	6.216
50	-0.142	6.829
60	-0.175	7.388
70	-0.205	7.958
80	-0.233	8.497
90	-0.252	9.014
100	-0.268	9.586
120	-0.259	10.637
140	-0.254	11.810
160	-0.252	13.051
180	-0.244	14.125
200	-0.241	15.183

**Tabuľka 3:** Šikmosť a špicatosť veličiny  $Z_i / \sigma$

Pri analýze šikmosti sme prišli k záveru, že údaje majú rozdelenie zošikmené doľava oproti normálnemu rozdeleniu. Šikmosť však nie je signifikantná. Špicatosť nám vyšla pre každé  $n$  väčšia ako 3 a v žiadnom prípade sme nezamietli signifikantnosť. Pre  $n$  sa rovná 10, skúmaná premenná  $Z_i / \sigma$  má najbližšie k normálnemu rozdeleniu. So zväčšovaním  $n$  sa zväčšuje aj šikmosť. To znamená, že rozdelenie  $Z_i / \sigma$  má „ťažšie chvosty“ ako normálne rozdelenie. Pravdepodobnosť výskytu outlierov je väčšia ako u normálneho rozdelenia. Môže to byť spôsobené faktom, že aj napriek tomu, že sme zamietli signifikantnosť šikmosti, nejaká šikmosť sa tam vyskytuje. Špicatosť môžeme analyzovať vtedy, keď máme symetrické rozdelenie. Akonáhle je rozdelenie zošikmené, špicatosť tam, jednoznačne, bude prítomná. Ďalším dôvodom môže byť prítomnosť outlierov v pôvodných dátach. Vychádzame z predpokladu, že



$N(t, T)$  je normálne rozdelené, a v skutočnosti nemusí byť. Problém spojený s normalitou dát sa často vyskytuje vo finančníctve. Napr. o výnosoch akcií sa predpokladá, že sú normálne rozdelené. V praxi však často nespĺňajú tento predpoklad, ale aj napriek tomu sa s nimi dá úspešne pracovať.

### 2.3 Generovanie očakávanej úrokovej miery a testovanie kvality predikcie modelu

Ho&Lee model je konštruovaný takým spôsobom, že súčasná výnosová krivka je vstupom do modelu. Model ju presne vystihuje, preto nemá význam generovať ju. Budeme generovať očakávanú hodnotu úrokovej miery v budúcnosti a budeme testovať, do akej miery ju vieme pomocou daného modelu odhadnúť.

Najskôr odvodíme vzťah, pomocou ktorého sa generuje očakávaná hodnota úrokovej miery. Potom otestujeme schopnosť modelu trafiť trend budúcej úrokovej miery a budeme analyzovať ako veľmi sa odhadnutá úroková miera odchyľuje od skutočnej.

Vzťah Liboru  $L_\delta(t)$  a diskontného dlhopisu  $P(t, T)$  je daný nasledovne:

$$L_\delta(t) = \frac{1}{T-t} \left( \frac{1}{P(t, T)} - 1 \right) \quad (13)$$

kde  $L_\delta(t)$  je hodnota Liboru v čase  $t$  na obdobie  $\delta$  a  $\delta = T - t$ , ďalej  $P(t, T)$  je diskontný dlhopis v čase  $t$  a maturitou  $T$ . Dosadením vzťahu (6), ktorý bol odvodený v prvej kapitole, do (13) dostaneme nasledovné vyjadrenie:

$$L_\delta(t) = \frac{1}{T-t} \left( \frac{P(0, t)}{P(0, T)} \exp(\sigma(T-t)W_t + t\sigma\gamma(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t)) - 1 \right). \quad (14)$$

Aby sme mohli generovať očakávanú hodnotu Liboru v čase  $t$  na obdobie  $\delta$  musíme spočítať strednú hodnotu  $L_\delta(t)$ :

$$\begin{aligned} \bar{L}_\delta(t) &= E_p(L_\delta(t)) \\ &= E_p \left[ \frac{1}{T-t} \left( \frac{P(0, t)}{P(0, T)} \exp(\sigma(T-t)W_t + t\sigma\gamma(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t)) - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T-t} \left( \frac{P(0,t)}{P(0,T)} \exp(t\sigma\gamma(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t)) E_p[\exp(\sigma(T-t)W_t)] - 1 \right). \quad (15)$$

Vypočítame najskôr  $E_p[\exp(\sigma(T-t)W_t)]$ . Vieme, že pre Brownov pohyb platí nasledovné:

$$W_t \sim N(0,t).$$

Z toho potom

$$\sigma(T-t)W_t \sim N(0, \sigma^2(T-t)^2 t).$$

Využitím tohto faktu a známeho tvrdenia z teórie pravdepodobnosti máme:

$$E_p[\exp(\sigma(T-t)W_t)] = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)^2 t\right). \quad (16)$$

Dosadením (16) do (15) dostávame:

$$E_p(L_\delta(t)) = \frac{1}{T-t} \left( \frac{P(0,t)}{P(0,T)} \exp\left(t\sigma\gamma(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)^2 t\right) - 1 \right). \quad (17)$$

Pomocou vzorca (17) sa v čase 0 bude generovať očakávaná hodnota Liboru v čase  $t$  na obdobie  $\delta$ , pričom za  $\sigma$  a  $\gamma$  zoberieme nakalibrované parametre, zodpovedajúce času generovania. Hodnotu  $P(0,t)$  a  $P(0,T)$  získame použitím vzťahu (13) a údajov pre Libor s maturitou  $t$  resp.  $T$ .

### 2.3.1 Testovanie predikcie trendu očakávanej úrokovej miery

Pri analýze parametrov sme dospeli k záveru, že nakalibrovaný parameter  $\gamma$ , ktorý ovplyvňuje trend budúcej úrokovej miery, je v konečnom dôsledku schopný zachytiť zmenu úrokovej miery. Teraz chceme otestovať, či odhadnuté parametre sú použiteľné na generovanie očakávanej úrokovej miery v budúcnosti. Budeme testovať, či je model schopný trafiť trend budúcej úrokovej miery a nakoľko je schopný predpovedať, či úroková miera vzrastie alebo poklesne. Pomocou modelu budeme odhadovať, aká bude očakávaná úroková miera Libor3m (Libor s maturitou 3 mesiace) o tri mesiace. Zistíme, či namodelovaná úroková miera vzrástla alebo poklesla, vzhľadom na úrokovú mieru v čase generovania. Následne to porovnáme s tým, ako sa skutočná úroková miera zmenila po troch mesiacoch, od času generovania. Na výpočet očakávanej hodnoty úrokovej miery použijeme vzorec (17),

v ktorom čas generovania je 0, obdobie na koľko dopredu odhadujeme úrokovú mieru je  $t = \frac{1}{4}$ , ďalej  $T = \frac{1}{2}$  a za parametre  $\sigma$  a  $\gamma$  zvolíme už nakalibrované parametre, meniace sa v závislosti od  $n$  a zodpovedajúce času generovania.

Požadovaný výsledok je, aby úspešnosť trafenia trendu bola nad 50 percent. Ak by bola nižšia ako 50 %, model by nevyhovoval požiadavkám. V prípade, že úspešnosť je 50 percentná, nedáva nám žiadne riešenie. Pri úspešnosti vyššej ako 50 % je model akceptovateľný.

Po vygenerovaní očakávanej úrokovej miery a vyhodnotení úspešnosti trafenia trendu, sme dospeli k výsledkom, ktoré sú uvedené v tabuľke 4. Hodnota úspešnosti trafenia trendu sa pohybuje v priemere okolo 63 %, čo môžeme považovať za uspokojivý výsledok. Pre  $n = 190$  model vykazuje najväčšiu schopnosť predpovedať, ktorým smerom sa bude vyvíjať úroková miera. Ďalšie dôležité zistenie je, že pre každé pozorované  $n$  sa hodnota úspešnosti trafenia trendu pohybuje okolo 60 – 65 %. Tento fakt nám dokazuje stabilitu modelu vzhľadom na  $n$ .

n	Úspešnosť trafenia trendu	n	Úspešnosť trafenia trendu
10	62.16%	110	63.15%
20	62.25%	120	64.00%
30	63.34%	130	65.35%
40	63.70%	140	65.54%
50	61.92%	150	65.07%
60	60.98%	160	65.21%
70	60.38%	170	64.99%
80	59.58%	180	65.82%
90	59.09%	190	66.47%
100	60.82%	200	65.82%

**Tabuľka 4:** Úspešnosť trafenia trendu pre Libor3m

### 2.3.2 Testovanie predikcie hodnoty očakávanej úrokovej miery

Okrem skutočnosti, či je model schopný trafiť trend budúcej úrokovej miery, zaujíma nás, ako dobre vieme pomocou modelu odhadnúť jej hodnotu. Skúmali sme, ako veľmi sa vygenerovaná očakávaná úroková miera odchyľuje od skutočnej. Do analýzy sme zaradili aj *jednoduchý* model na generovanie úrokových mier. Porovnávali sme schopnosť predikcie Ho&Lee modelu s jednoduchým. Jednoduchý model je porovnávací model, ktorého výsledky sme analyzovali, aby sme vedeli posúdiť, či úrokové miery generované Ho&Lee modelom sú akceptovateľné.

Očakávanú úrokovú mieru sme najskôr generovali pomocou Ho&Lee, potom pomocou jednoduchého modelu. Získané odchýlky, ktoré predstavujú rozdiel vygenerovanej a skutočnej úrokovej miery, sme navzájom porovnávali. Ďalej sme analyzovali veľkosť odchýlok, ich rozloženie, ako sa mení ich štruktúra v závislosti od parametra  $n$  a vyhodnotili sme, pre ktoré  $n$  model Ho&Lee vykazuje najväčšiu schopnosť predpovedať úrokovú mieru.

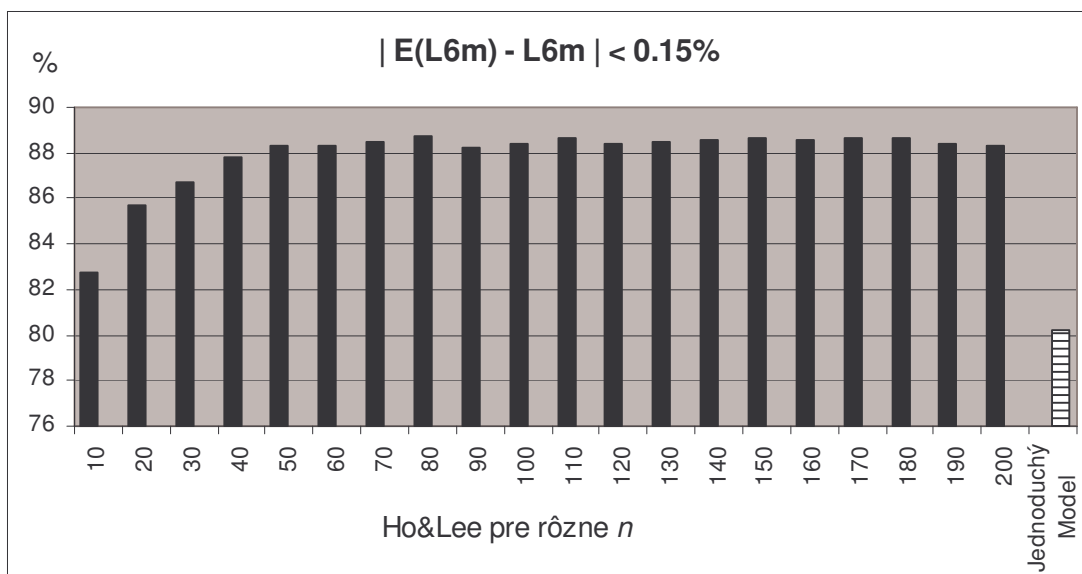
Najskôr vysvetlíme, ako je konštruovaný jednoduchý model. Nech v čase  $s$  odhadujeme, aká bude očakávaná úroková miera v čase  $t$ . Podľa jednoduchého modelu sa úroková miera od času  $s$  do času  $t$  zmení rovnako ako sa zmenila za rovnaké obdobie do času  $s$ . Matematický zápis:

$$E[L(t)] = L(s) + [L(s) - L(s - (t - s))]. \quad (18)$$

Očakávané úrokové miery, ktoré sme generovali sú: Libor s maturitou 3 a 6 mesiacov, označené ako Libor3m a Libor6m. Pomocou Ho&Lee modelu sa Libor3m resp. Libor6m generoval podľa (17) pre  $t = \frac{1}{4}$ , resp.  $t = \frac{1}{52}$ . Pri jednoduchom modeli sme na generovanie očakávaných úrokových mier použili vzorec (18). Ďalej sú analyzované a graficky znázornené výsledky. Najskôr pre Libor6m a potom pre Libor3m. Analýza bola urobená za časový horizont 2.1.1990-15.6.2004.

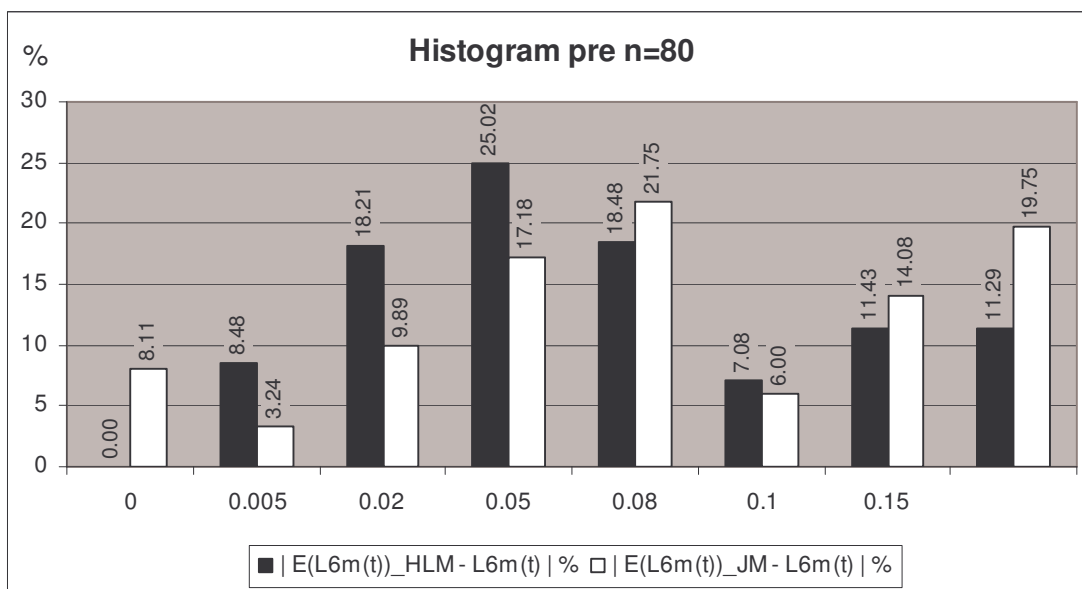
**1) Libor6m:** Najskôr budeme analyzovať veľkosť odchýlok, vzhľadom na meniaci sa parameter  $n$ . Potom sa pozrieme, pre ktoré  $n$  model Ho&Lee najlepšie vystihuje realitu. Na grafe 4 sú znázornené pravdepodobnosti, s akými model generuje odchýlky od reality v absolútnej hodnote menšej ako 0.15 %. Porovnaný je Ho&Lee s jednoduchým modelom.

Z grafu môžeme vyhodnotiť, že približne 80 až 90 percent z celkových analyzovaných odchýlok je menších ako 0.15 % pre Ho&Lee model a to pre každé pozorované  $n$ . Pre  $n = 10$  model vykazuje najmenšiu schopnosť predpovedať úrokovú mieru. Pre každé  $n \geq 50$  sa výsledky výrazne nemenia pri zmene parametra  $n$  a pohybujú sa nad 88 %. Podľa tohto ukazovateľa môžeme vyhodnotiť, že model Ho&Lee je najlepší pre  $n = 80$  a  $n = 150$ . Pri porovnaní s jednoduchým modelom, model Ho&Lee presnejšie odhaduje budúcu úrokovú mieru a pre každé  $n$  je lepší ako jednoduchý model.

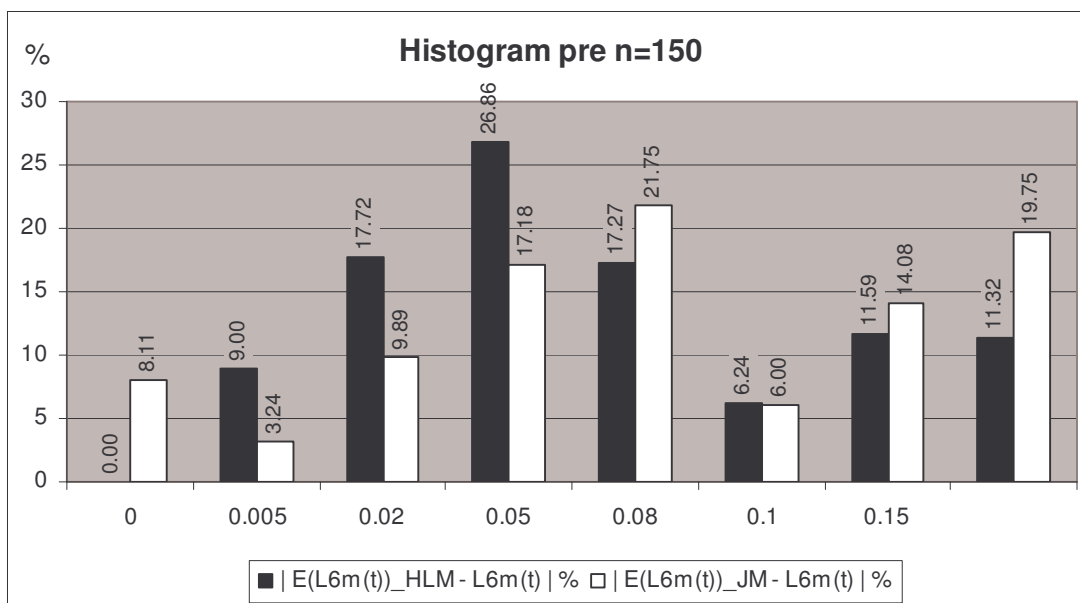


**Graf 4:** Porovnanie pravdepodobností, s akými modely generujú odchýlky v absolútnej hodnote menšej ako 0.15 %

Pre hlbšiu analýzu sa pozrieme na rozloženie odchýlok v absolútnej hodnote. Na grafe 5 a 6 sú porovnané odchýlky od reálnej úrokovej miery pre jednoduchý model a model Ho&Lee pre  $n = 80$  a  $n = 150$ .



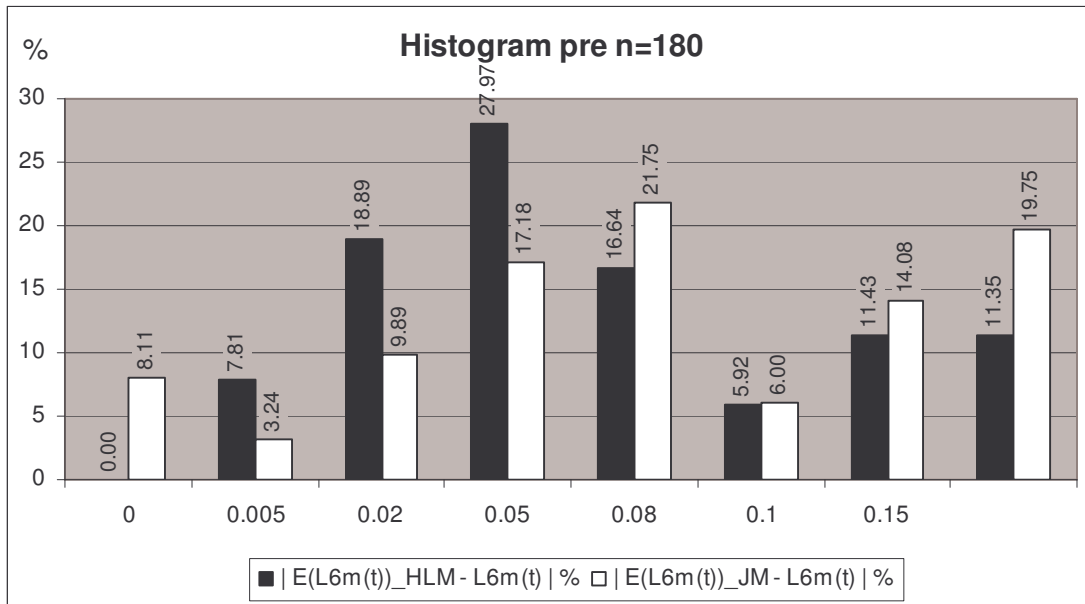
**Graf 5:** Porovnanie rozloženia odchýlok v absolútnej hodnote, pričom  $E(L6m(t))_{HLM}$  a  $E(L6m(t))_{JM}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee, resp. jednoduchého modelu



**Graf 6:** Porovnanie rozloženia odchýlok v absolútnej hodnote, pričom  $E(L6m(t))_{HLM}$  a  $E(L6m(t))_{JM}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee, resp. jednoduchého modelu

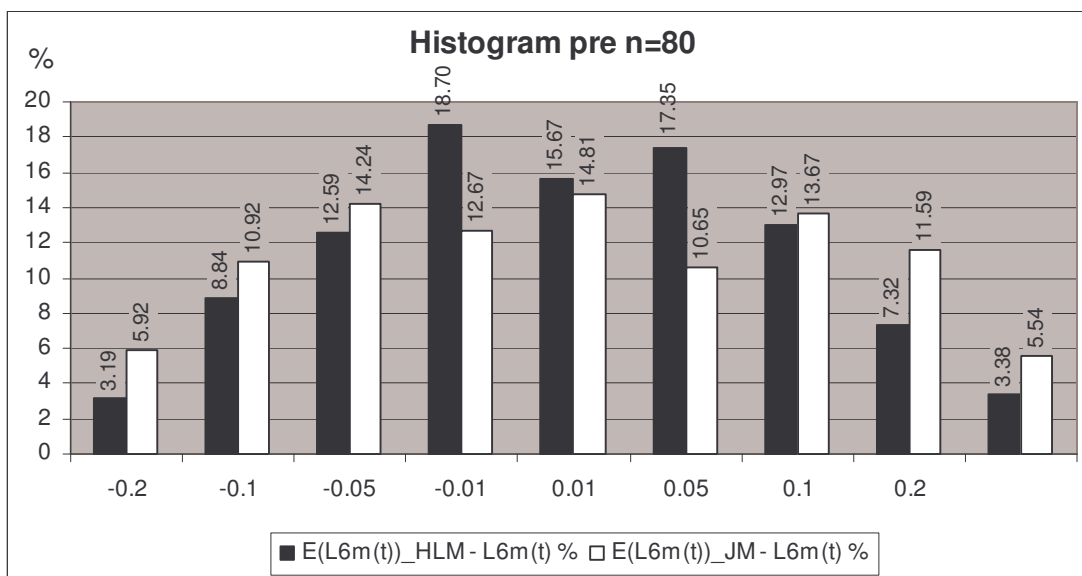
Pri analýze nulovej odchýlky sa jednoduchý model javí ako lepší. Deje sa tak iba v prípade, keď sa úroková miera nemení v priebehu dvoch týždňov. Akonáhle dôjde k zvýšeniu, resp. zníženiu úrokovej miery, jednoduchý model zlyháva, pretože nedokáže zachytiť zmenu ako model Ho&Lee. Okrem toho, keď úrokovú mieru odhadujeme pomocou Ho&Lee modelu, tak sa odchýlky veľkosti do 0.005 %, 0.02 %, 0.05 % vyskytujú s približne dvakrát väčšou pravdepodobnosťou ako keď na odhadovanie použijeme jednoduchý model. Pri analýze agregovaných odchýlok do 0.05 %, môžeme vyhodnotiť, že pre väčšie  $n$  model Ho&Lee generuje tieto odchýlky s vyššou pravdepodobnosťou. Preto za najlepší model môže byť považovaný model pre  $n = 180$  (Graf 7). Celkovo, pravdepodobnosť, s akou sa generujú odchýlky menšie ako 0.05 % sa pri zmene parametra  $n$  výrazne nemení. Pre  $n \geq 50$  sa v priemere pravdepodobnosť pohybuje okolo 52.68 % a pre  $n = 180$  je 54.67 %. Na druhej strane, pri porovnaní najmenšej a najväčšej odchýlky model pre  $n = 80$  a  $n = 150$  je lepší ako pre  $n = 180$ . Rozloženie odchýlok je podobné pre každé  $n$  a je ťažké určiť, pre ktoré  $n$  je model jednoznačne najlepší. Celkovo môžeme zhodnotiť, že pre každé  $n$  model Ho&Lee presnejšie predikuje úrokovú mieru ako jednoduchý model. Pre jednoduchý model je pravdepodobnosť, s akou sa generujú odchýlky menšie ako 0.05 % len 38.42 %. Na druhej strane, odchýlky väčšie ako 0.15 % jednoduchý model generuje s vyššou pravdepodobnosťou ako Ho&Lee. Napr. pre

$n = 150$  sa pravdepodobnosť rovná 11.32 %, kým pre jednoduchý model je to až 19.75 %.

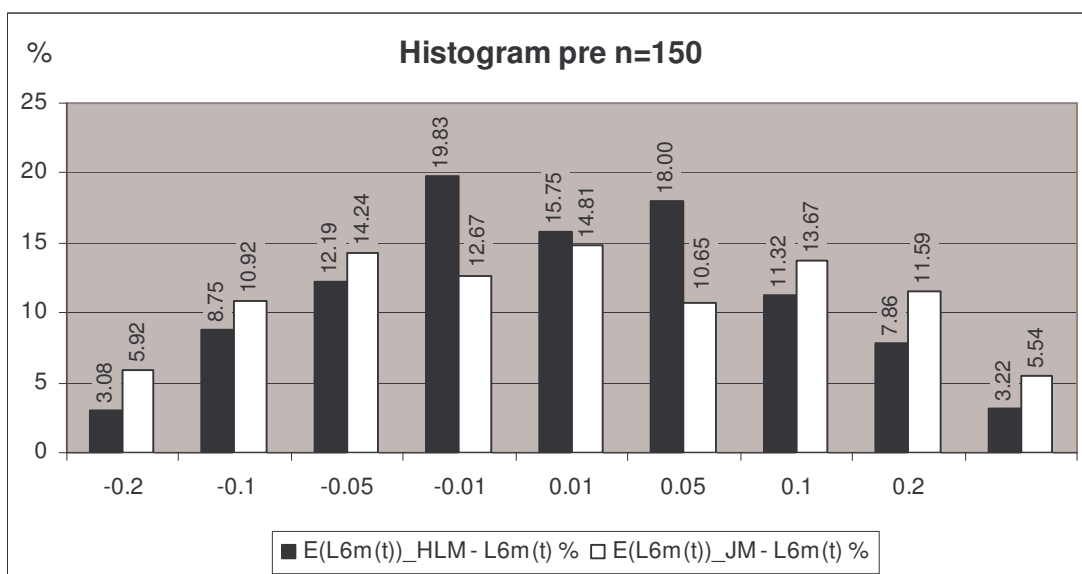


**Graf 7:** Porovnanie rozloženia odchýlok v absolútnej hodnote, pričom  $E(L6m(t))_{HLM}$  a  $E(L6m(t))_{JM}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee, resp. jednoduchého modelu

Odchýlky bez absolútnej hodnoty nám poskytujú informáciu o ich štruktúre a o tom, či ich rozloženie je symetrické vzhľadom na 0. Na grafe 8 a 9 sú tieto odchýlky znázornené pre Ho&Lee model, pre  $n = 80$  resp.  $n = 150$  a pre jednoduchý model. Model Ho&Lee viac podhodnocuje reálnu úrokovú mieru ako ju nadhodnocuje. Podobne sa správa aj jednoduchý model s tým, že reálnu úrokovú mieru podhodnocuje o niečo viac ako Ho&Lee.



**Graf 8:** Porovnanie rozloženia odchýlok, pričom  $E(L6m(t))_{HLM}$  a  $E(L6m(t))_{JM}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee, resp. jednoduchého modelu

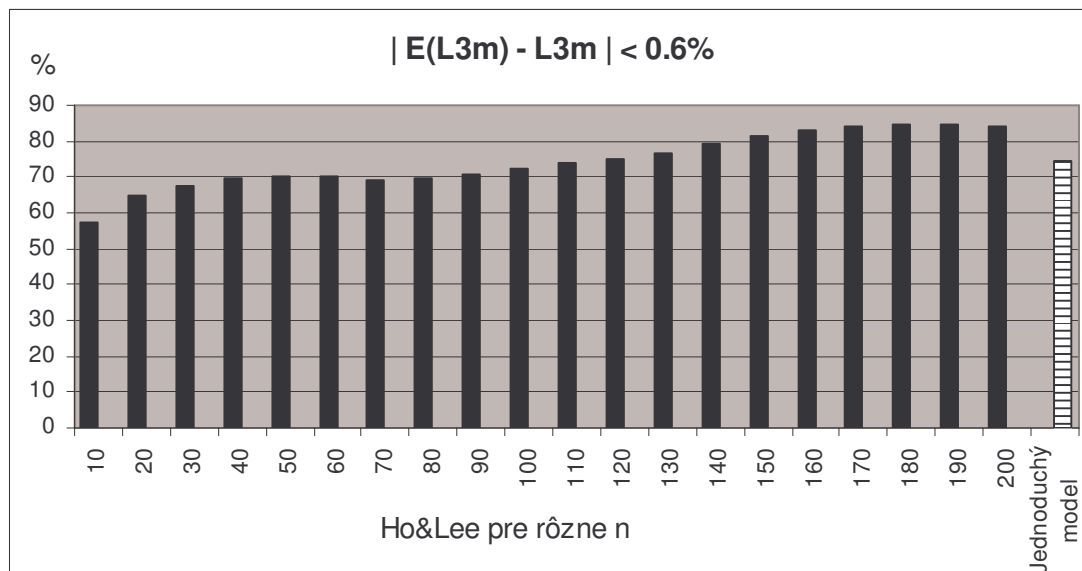


**Graf 9:** Porovnanie rozloženia odchýlok, pričom  $E(L6m(t))_{HLM}$  a  $E(L6m(t))_{JM}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee, resp. jednoduchého modelu

**2) Libor3m:** Na grafe 10 sú znázornené pravdepodobnosti, s akými model generuje odchýlky v absolútnej hodnote menšie ako 0.6 %. Porovnaný je Ho&Lee s jednoduchým modelom. Pravdepodobnosť výskytu odchýlok menších ako 0.6 % v prípade Ho&Lee modelu sa mení v závislosti od  $n$ . Pre  $n \leq 80$  je menšia ako 70 %, so zväčšovaním  $n$  sa zlepšuje kvalita modelu tak, že potom pre pozorované  $n \geq 150$  sa pravdepodobnosť pohybuje nad 80 %. Pre jednoduchý model sa rovná iba 74.64 %.

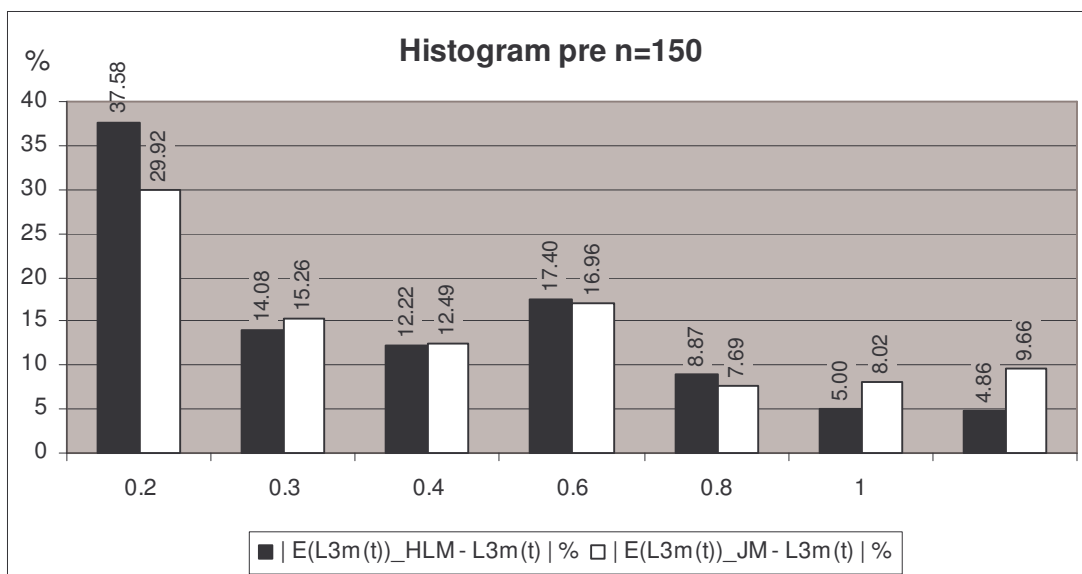


Ho&Lee model pre  $n = 190$  vykazuje najväčšiu schopnosť predpovedať úrokovú mieru a pre každé pozorované  $n \geq 120$  lepšie vystihuje realitu pri porovnaní s jednoduchým modelom.

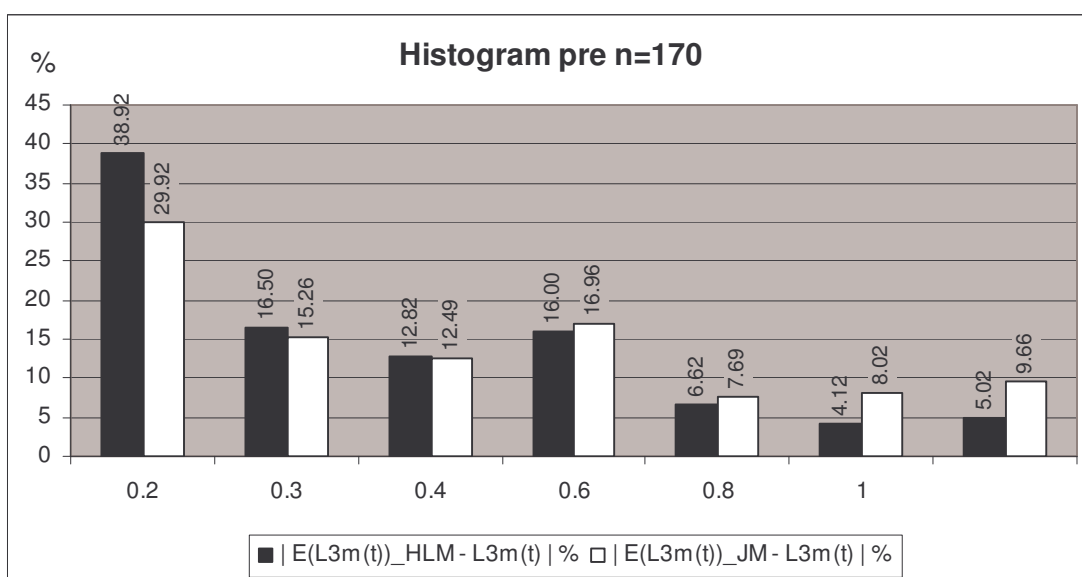


**Graf 10:** Porovnanie pravdepodobností, s akými modely generujú odchýlky v absolútnej hodnote menšej ako 0.6 %

Ďalej roanalyzujeme štruktúru absolútnych odchýlok vygenerovanej úrokovej miery od skutočnej a porovnáme výsledky pre jednoduchý model a model Ho&Lee pre  $n \geq 120$ . Pravdepodobnosť, s akou sa generujú odchýlky do 0.2 % je väčšia pre Ho&Lee ako pre jednoduchý model. V priemere vzhľadom na  $n$  pre Ho&Lee model sa rovná 38.41 % a pre jednoduchý iba 29.92 %. Ďalej sa štruktúra odchýlok mení v závislosti od  $n$ . Celkovo však môžeme zhodnotiť, že pri odchýlkach do 0.3 %, 0.4 %, 0.6 % je predikčná schopnosť modelov podobná. Avšak odchýlky väčšie ako 0.8% generuje jednoduchý model s takmer dvakrát väčšou pravdepodobnosťou ako Ho&Lee. Na grafe 11 je znázornené rozloženie absolútnych odchýlok pre jednoduchý model a model Ho&Lee pre  $n = 150$ . Podobnú štruktúru majú aj odchýlky pre  $120 \leq n \leq 150$ . Na nasledujúcom grafe č. 12 je znázornená štruktúra odchýlok pre model  $n = 170$ , ktorý patrí spomedzi skúmaných modelov k tým lepším.

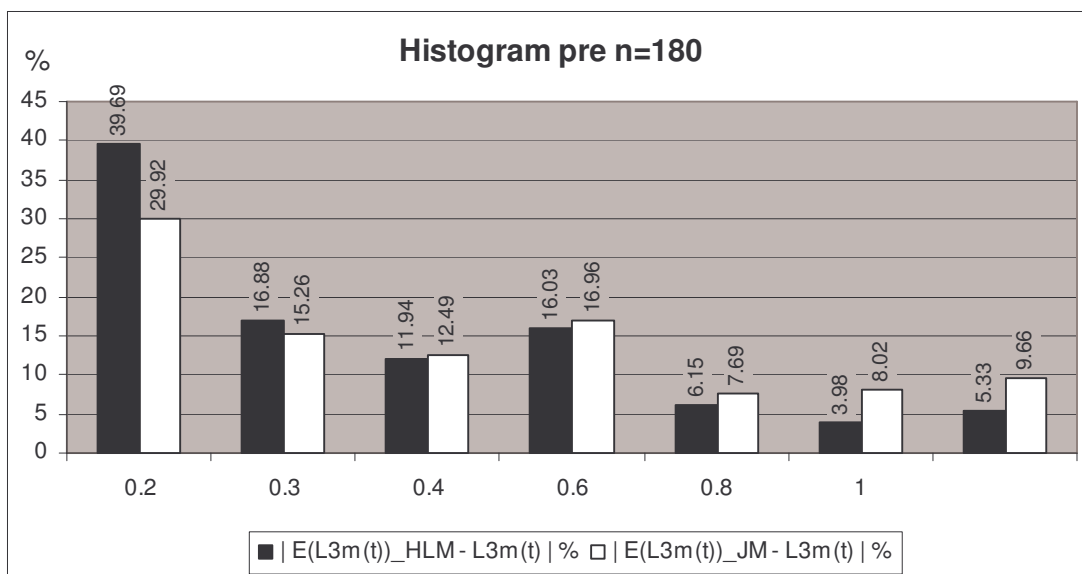


**Graf 11:** Porovnanie rozloženia odchýlok v absolútnej hodnote, pričom  $E(L3m(t))_{HLM}$  a  $E(L3m(t))_{JM}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee, resp. jednoduchého modelu



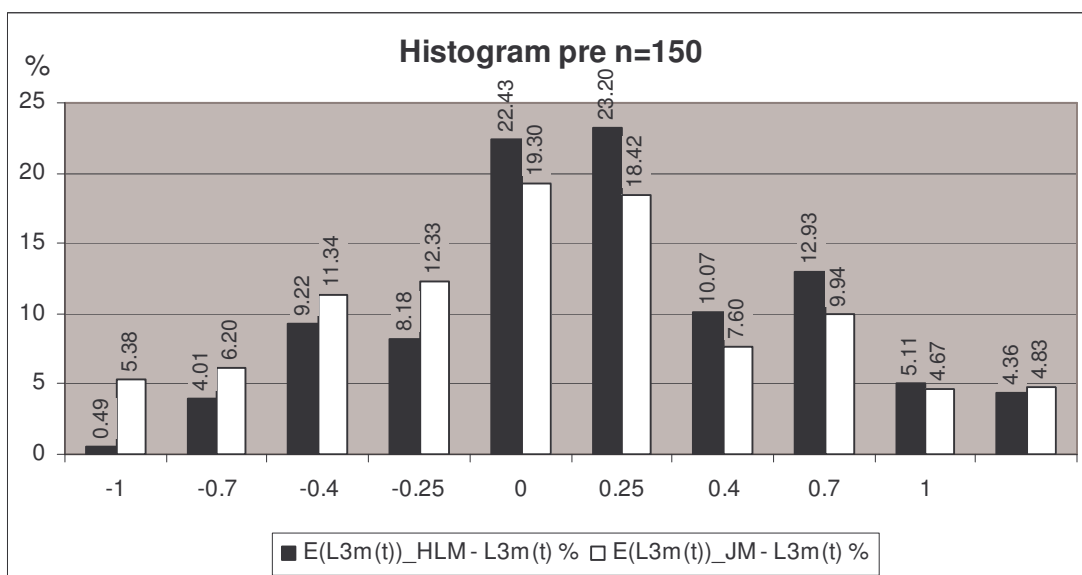
**Graf 12:** Porovnanie rozloženia odchýlok v absolútnej hodnote, pričom  $E(L3m(t))_{HLM}$  a  $E(L3m(t))_{JM}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee, resp. jednoduchého modelu

Nakoniec, štruktúra odchýlok je podobná pre každé pozorované  $n \geq 180$  a na grafe 13 je znázornená pre  $n = 180$ . Podľa analýzy najmenších odchýlok, práve tento model (pre  $n = 180$ ) najlepšie vystihuje realitu. Dokonca je presnejší ako model pre  $n = 190$ , ktorý bol pri analýze agregovaných odchýlok vyhodnotený za najlepší.

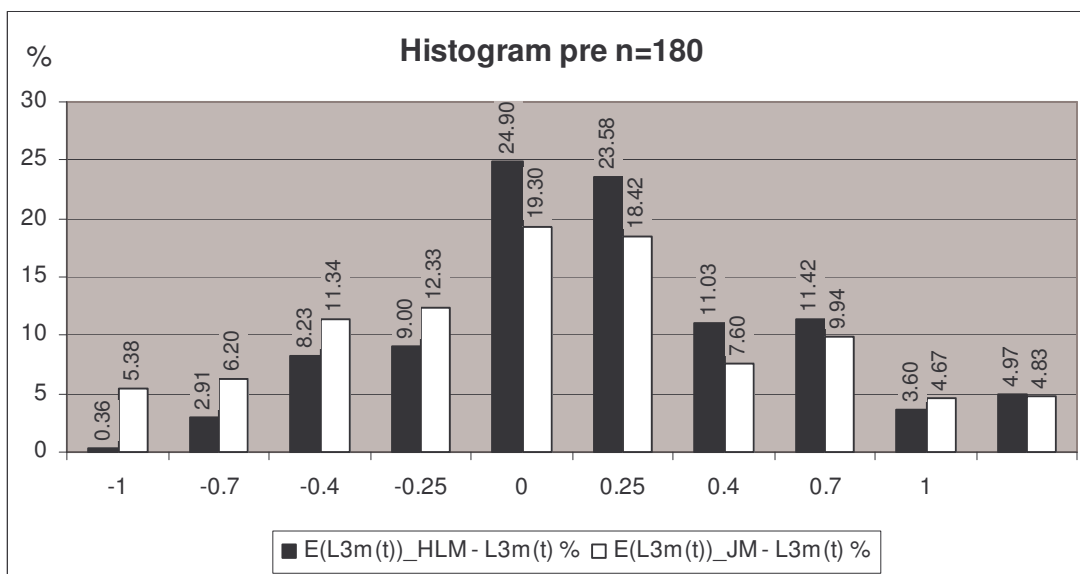


**Graf 13:** Porovnanie rozloženia odchýlok v absolútnej hodnote, pričom  $E(L3m(t))_{HLM}$  a  $E(L3m(t))_{JM}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee, resp. jednoduchého modelu

Z grafov 14 a 15 môžeme vidieť, aké je rozloženie odchýlok bez absolútnej hodnoty. Kým model Ho&Lee nadhodnocuje reálnu úrokovú mieru, jednoduchý model ju podhodnocuje.



**Graf 14:** Porovnanie rozloženia odchýlok, pričom  $E(L3m(t))_{HLM}$  a  $E(L3m(t))_{JM}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee, resp. jednoduchého modelu



**Graf 15:** Porovnanie rozloženia odchýlok, pričom  $E(L3m(t))_{HLM}$  a  $E(L3m(t))_{JM}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee, resp. jednoduchého modelu

## Záver

Po otestovaní kvality predikcie modelu sme dospeli k nasledovnému záveru. Model Ho&Lee s pravdepodobnosťou približne 63 % vie predpovedať, či úroková miera vzrastie alebo poklesne. Kalibráciou parametra  $n$  môžeme ovplyvniť kvalitu modelu a tým zlepšiť jeho úspešnosť v predikcii trendu až do 66.45 %. Podobne pri odhadovaní hodnoty budúcej úrokovej miery, vieme nájsť také  $n$ , pre ktoré model najlepšie vystihuje realitu. Keď očakávanú úrokovú mieru odhadujeme na dlhšie obdobie dopredu, po prvé na kalibráciu parametrov potrebujeme brať do úvahy historické údaje za dlhší časový horizont, po druhé model generuje väčšie odchýlky od reality. Nakoniec sme Ho&Lee model porovnali s *jednoduchým* modelom. Zistili sme, že Ho&Lee model vykazuje väčšiu schopnosť predpovedať vývoj budúcej úrokovej miery.

## 2.4 Zafixovanie parametrov verzus aktualizácia parametrov

V práci sme použili denné historické údaje na kalibrovanie parametrov a vždy k ďalšiemu pracovnému dňu sme kalibrovali nové parametre. Naskytuje sa otázka, či by bolo vhodné zafixovať parametre na určité obdobie.

Táto podkapitola skúma, čo prináša zafixovanie parametrov, porovnáva výsledky získané použitím aktuálnych a starých parametrov a analyzuje, akej chyby sa môžeme dopustiť, keď parametre nebudeme pravidelne aktualizovať. Pod pojmom staré parametre máme na mysli parametre  $\sigma$  a  $\gamma$ , ktoré boli vygenerované v minulosti použitím historických údajov do toho času. Používajú sa na odhadovanie očakávanej úrokovej miery v súčasnosti bez toho, aby sa nejako upravili o informáciu, ktorú sme získali od doby ich generovania dodnes. Aktuálne parametre sú parametre  $\sigma$  a  $\gamma$  nakalibrované v súčasnosti, t.j. v čase, keď robíme odhad očakávanej hodnoty úrokovej miery, využitím informácie o histórii, ktorú máme dnes k dispozícii.

Najskôr otestujeme stabilitu modelu, pričom budeme skúmať, či je model stabilný, aj v prípade, keď sa namiesto aktuálnych parametrov bude očakávaná úroková miera generovať s parametrami starými jeden deň. Potom sa parametre zafixujú na dlhšie časové obdobie a budú sa analyzovať získané výsledky.

### 2.4.1 Stabilita modelu

Pri testovaní stability modelu sme sa inšpirovali prácou [6] a vzorec, ktorý použili na zmeranie kvality predikcie sme prebrali a upravili tak, aby bol vhodný na otestovanie nášho modelu. Potrebne je zadefinovať funkciu  $U(\sigma, \gamma)$ , ktorá bude vyjadrovať priemernú kvadratickú odchýlku vygenerovanej očakávanej hodnoty úrokovej miery od jej skutočnej hodnoty. Funkcia  $U(\sigma, \gamma)$  bude vyzeráť nasledovne:

$$U(\sigma, \gamma) = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m (\bar{L}_\delta(t) - L_\delta(t))^2 \quad (18)$$

kde  $\bar{L}_\delta(t)$  je vygenerovaná očakávaná hodnota Liboru v čase  $t$  na obdobie  $\delta$ , ktorá sa vypočíta pomocou (17).  $L_\delta(t)$  je skutočná hodnota Liboru v tom istom čase  $t$  a na to isté obdobie  $\delta$ . Tieto odchýlky sa vypočítajú pre  $t = 1$  až po  $t = m$  a následne sa spriemerujú. Testovanie je urobené na spomínaných historických dátach za časový horizont od 2.1.1990 do 15.10.2004. Koeficient  $QP$  je potom definovaný nasledovne:

$$QP = \sqrt{\frac{U(\sigma_{ak}, \gamma_{ak})}{U(\sigma_{st}, \gamma_{st})}} \quad (19)$$

kde  $U$  sa vypočíta pomocou (18) s tým, že sa pri  $U(\sigma_{ak}, \gamma_{ak})$  v čase generovania  $\bar{L}_\delta(t)$  použijú aktuálne parametre a pri  $U(\sigma_{st}, \gamma_{st})$  sa použijú parametre o jedno

obdobie staršie. Koeficient  $QP$  môže nadobúdať hodnotu menšiu ako 1, čo znamená, že očakávaná úroková miera odhadnutá pomocou aktuálnych parametrov lepšie vystihuje realitu. Keby  $QP$  bolo väčšie ako 1, znamenalo by to, že parametre odhadnuté v minulom období sú lepšie ako zaktualizované parametre.

$QP$  bolo vypočítané pre očakávanú hodnotu Libor s maturitou 6 mesiacov, ktorý bol odhadnutý pomocou vzorca (17) pre  $t = \frac{1}{52}$  a ako staré parametre sa použili parametre staršie o jeden deň. Hodnota  $QP$  pre každé  $n$  je menšia ako 1, ale veľmi blízka 1. To znamená, že očakávaná úroková miera odhadnutá pomocou aktuálnych parametrov lepšie vystihuje realitu ako tá, ktorá je odhadnutá pomocou starých parametrov. Rozdiely nie sú však výrazné, čiže zo dňa na deň sa parametre menia len o málo a môžeme ich považovať za stabilné. Potvrdil sa fakt, ktorý vyplýva zo spôsobu, akým sú konštruované parametre, kde historický časový rad, ktorý je použitý na kalibráciu parametrov k dnešnému dňu sa veľmi neodlišuje od časového radu použitého na kalibráciu parametrov na včera. Preto je zaujímavé skúmať, čo sa stane, keď parametre zafixujeme na dlhšie časové obdobie (viac ako na jeden deň). A teda budeme analyzovať, akej chyby sa môžeme dopustiť, keď parametre nebudeme pravidelne aktualizovať.

## 2.4.2 Aktuálne verzus staré parametre

Staré parametre sú volené tak, aby zachytili najväčšiu chybu, ktorej sa môžeme dopustiť, keď sa budeme chcieť vyhnúť aktualizácii parametrov. Presnejšie, nech  $s$  je čas, kedy sa odhaduje očakávaná úroková miera a  $2n$  je veľkosť obdobia, ktoré je uvažované pri fixovaní parametrov, pričom  $n$  je dĺžka časového radu historických údajov použitých na kalibráciu parametrov. Potom sa hľadá hodnota starého parametra  $\hat{\gamma}$  tak, aby platilo:

$$\hat{\gamma} = \arg \max_{i=s-1, \dots, s-2n} |\gamma_s - \gamma_i|$$

Pomocou takto zvoleného starého parametra  $\hat{\gamma}$  a k nemu zodpovedajúceho parametra  $\sigma$  v čase  $s$  bola pomocou vzorca (17) namodelovaná očakávaná úroková miera v čase  $t$  na obdobie  $\delta$ ,  $\bar{L}_\delta(t)$ , a následne porovnaná so skutočnou hodnotou úrokovej miery  $L_\delta(t)$ . Nakoniec sme urobili analýzu, kde sme porovnávali, ktorá z dvoch vygenerovaných očakávaných úrokových mier, pričom jedna bola odhadnutá použitím

starých parametrov a druhá použitím aktuálnych parametrov, má bližšie k realite. V rámci analýzy sme najskôr vypočítali ukazovateľ  $QP$ , potom sme analyzovali odchýlky vygenerovanej úrokovej miery od skutočnej a nakoniec sme vypočítali úspešnosť trafenia trendu pre zafixované parametre. Testovanie sme urobili pre očakávanú hodnotu Libor s maturitou 3 a 6 mesiacov. Libor3m resp. Libor6m bol generovaný podľa vzorca (17) pre  $t = \frac{1}{4}$ , resp. pre  $t = \frac{1}{52}$ .

**Ukazovateľ  $QP$ :** Ukazovateľ  $QP$  bol vyhodnotený v prospech aktuálnych parametrov. Získané výsledky sú uvedené v tabuľkách 5 a 6. Hodnota  $QP$  pre Libor3m generovaný týždeň dopredu je pre každé  $n$  menšia ako 1 a nachádza sa v intervale  $(0.847; 0.907)$ , čo svedčí o tom, že pomocou aktuálnych parametrov vieme lepšie odhadnúť očakávanú úrokovú mieru ako keby sme na odhadovanie použili staré parametre.  $QP$  vykazuje nižšie hodnoty v prípade, keď zväčšujeme obdobie, nakoľko dopredu generujeme úrokovú mieru. Pre Libor3m generovaný 3 mesiace dopredu sa  $QP$  nachádza v intervale  $(0.547; 0.817)$ . Z toho vyplýva, že keď neaktualizujeme parametre, čím je čas generovania dopredu dlhší, tým sa dopúšťame väčšej chyby.

n	QP	n	QP
10	0.907	110	0.899
20	0.877	120	0.896
30	0.904	130	0.897
40	0.854	140	0.904
50	0.860	150	0.861
60	0.902	160	0.875
70	0.896	170	0.864
80	0.895	180	0.847
90	0.897	190	0.858
100	0.899	200	0.862

**Tabuľka 5:** Hodnota ukazovateľa  $QP$  pre  $E(\text{Libor3m})$  a  $t = \frac{1}{52}$

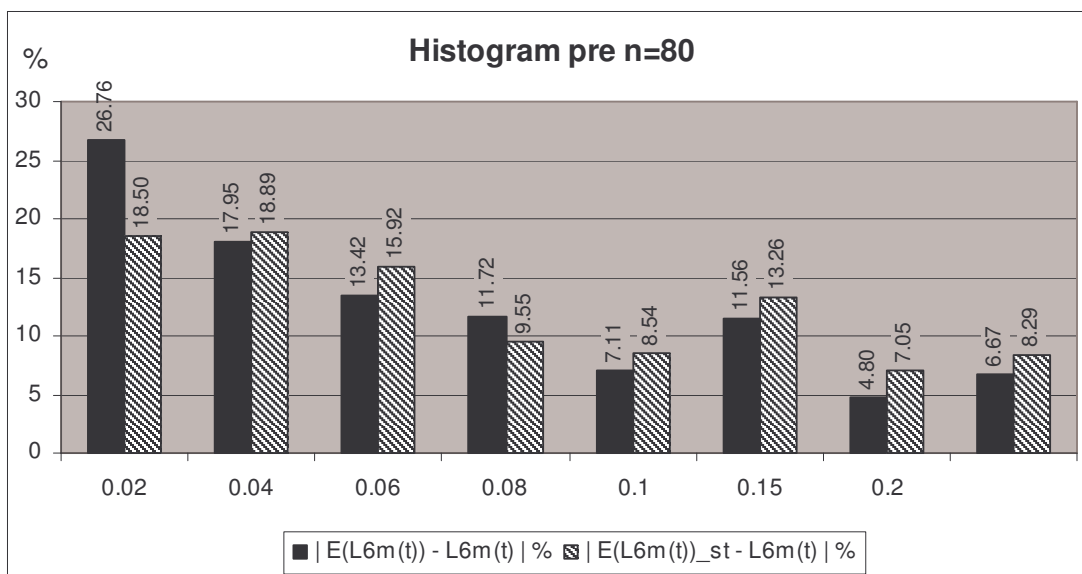
n	QP	n	QP
10	0.734	110	0.683
20	0.698	120	0.649
30	0.692	130	0.647
40	0.685	140	0.674
50	0.729	150	0.577
60	0.816	160	0.557
70	0.817	170	0.547
80	0.727	180	0.559
90	0.678	190	0.585
100	0.635	200	0.637

**Tabuľka 6:** Hodnota ukazovateľa  $QP$  pre  $E(\text{Libor3m})$  a  $t = \frac{1}{4}$

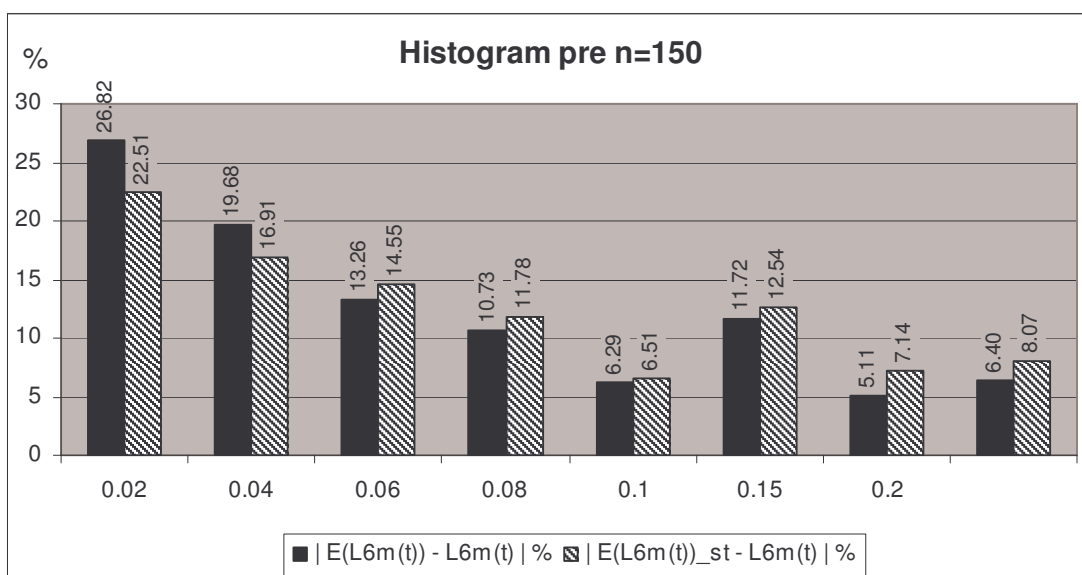
**Analýza odchýlok:** Odchýlky predstavujú rozdiel vygenerovanej a skutočnej úrokovej miery a vyjadrené sú v percentách. Porovnali sme odchýlky generované aktuálnymi parametrami a odchýlky generované starými parametrami najskôr pre Libor6m a potom pre Libor3m.

**1) Libor6m:** Rozloženie odchýlok generovaných starými parametrami a odchýlok generovaných aktuálnymi parametrami je podobné pre každé  $n$ , preto vyhodnotíme, ako je to v priemere. Na ilustráciu znázorníme grafy pre také  $n$ , pre ktoré sme v predchádzajúcej kapitole zistili, že model je najlepší. Celkovo by sa dalo zhodnotiť, že 90 percentný kvantil sa pohybuje okolo 0.2 %. Z grafu 16 sa dá vyčítať, že pravdepodobnosť, s akou sa generujú odchýlky menšie ako 0.2 % je 93.32 %, v prípade, že sa na odhadovanie očakávanej úrokovej miery použijú aktuálne parametre, kým pri použití starých parametrov sa pravdepodobnosť rovná 91.71 %. To znamená, že model so starými parametrami generuje s vyššou pravdepodobnosťou odchýlky väčšie ako 0.2 % v porovnaní s modelom využívajúcim aktuálne parametre. Na druhej strane, pri použití aktuálnych parametrov na odhadovanie očakávanej úrokovej miery sa budú s vyššou pravdepodobnosťou generovať menšie odchýlky od reality ako pri použití starých parametrov. Napr. pravdepodobnosť výskytu odchýlok menších ako 0.06 % pri použití aktuálnych parametrov, je v priemere 58.11% a pri starých iba 51.78 %. Pre  $n = 80$ , znázornené na grafe 16, sa pravdepodobnosť pohybuje okolo 58.13 % pre aktuálne parametre, 53.31 % pre staré parametre a pre  $n = 150$ , na grafe 17 je to 59.76 % oproti 53.97 %. Pri analýze najmenších odchýlok prichádzame k záveru, že jednoznačne, vyhráva model s aktuálnymi parametrami. V priemere 25.96 % odchýlok je menších ako 0.02 % pre model s aktuálnymi parametrami, kým pre model so starými parametrami je to v priemere iba 19.55 %. Podobne je to pre každé  $n$ , kde tá hodnota je väčšia pre model s aktuálnymi parametrami v porovnaní s modelom so starými parametrami.





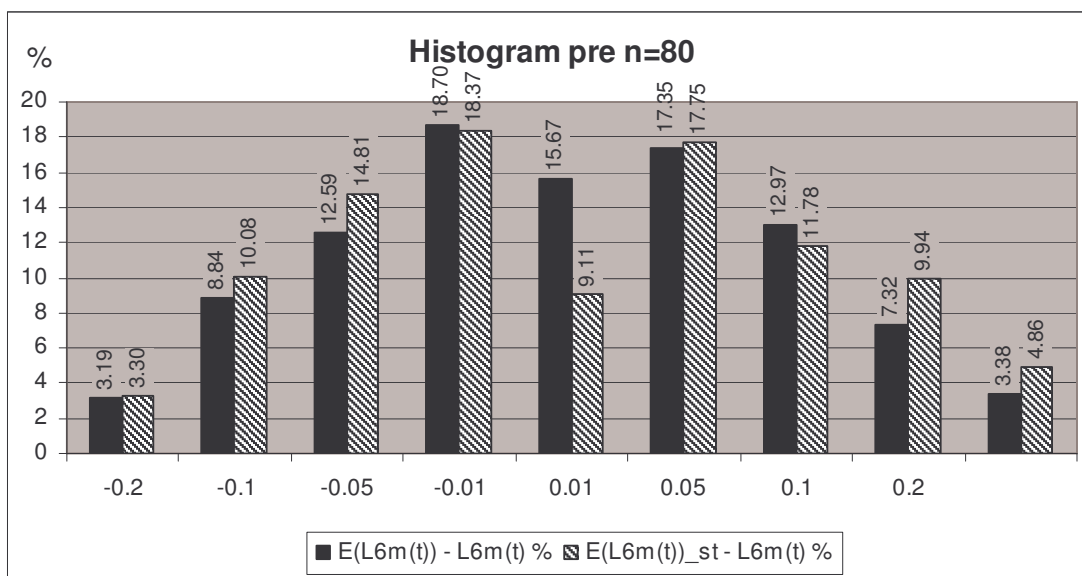
**Graf 16:** Porovnanie rozloženia odchýlok v absolútnej hodnote, pričom  $E(L6m(t))$  a  $E(L6m(t))_{st}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee modelu použitím aktuálnych, resp. starých parametrov



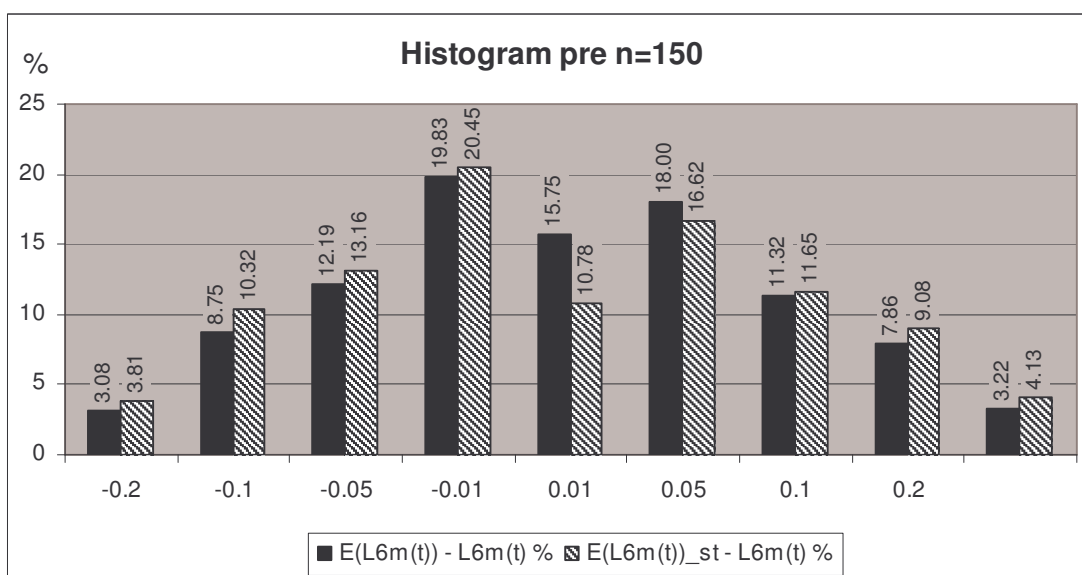
**Graf 17:** Porovnanie rozloženia odchýlok v absolútnej hodnote, pričom  $E(L6m(t))$  a  $E(L6m(t))_{st}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee modelu použitím aktuálnych, resp. starých parametrov

Ešte nám zostáva rozanalyzovať odchýlky bez absolútnej hodnoty, odkiaľ sa dá zistiť štruktúra odchýlok. Odchýlky generované starými parametrami nie sú symetrické vzhľadom na 0, ale model so starými parametrami o niečo viac podhodnocuje reálnu úrokovú mieru ako ju nadhodnocuje. Rovnakú štruktúru majú aj odchýlky generované aktuálnymi parametrami. Rozdiel je v tom, že pri modeli so

starými parametrami sa vyskytujú väčšie odchýlky s vyššou pravdepodobnosťou ako pri modeli s aktuálnymi parametrami. Tým pádom model s aktuálnymi parametrami lepšie vystihuje reálnu úrokovú mieru. Na grafoch 18 a 19 sú porovnané odchýlky generované aktuálnymi a starými parametrami pre  $n = 80$  a  $n = 150$ . Pre ostatné  $n$  je štruktúra podobná, z čoho vyplýva rovnaký záver.



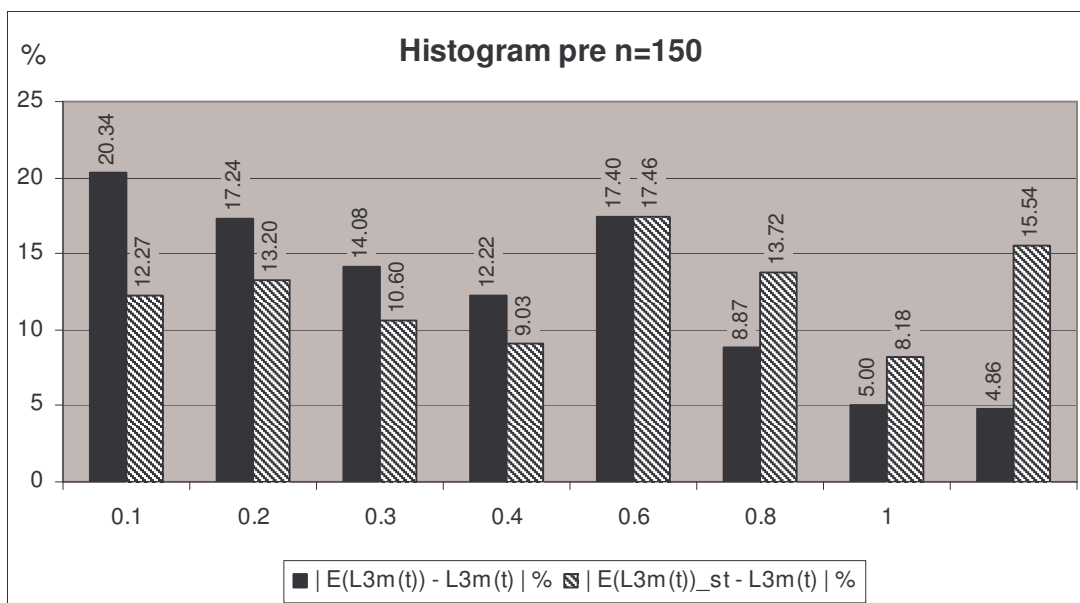
**Graf 18:** Porovnanie rozloženia odchýlok, pričom  $E(L6m(t))$  a  $E(L6m(t))_{st}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee modelu použitím aktuálnych, resp. starých parametrov



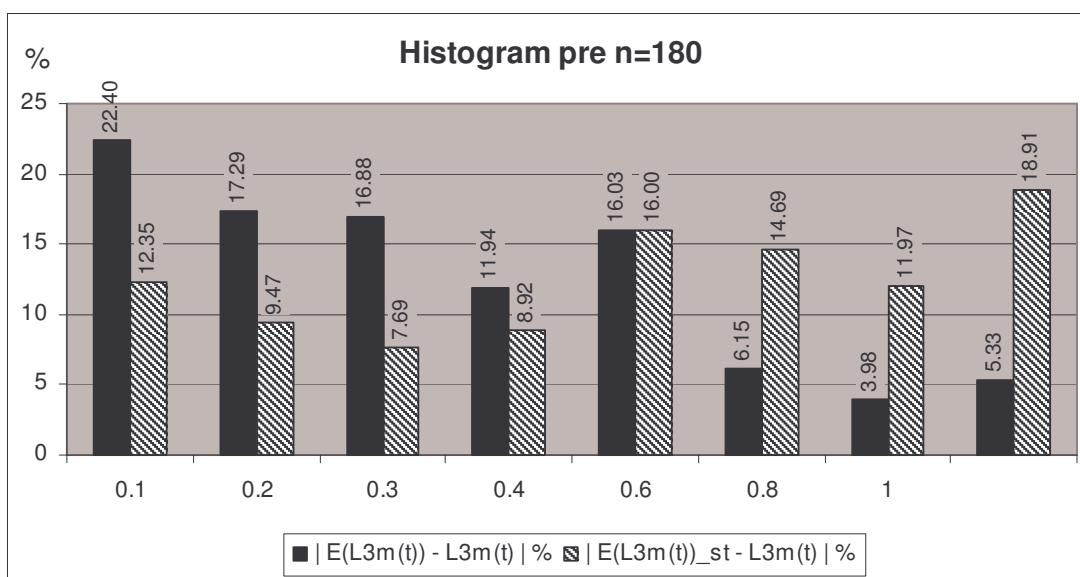
**Graf 19:** Porovnanie rozloženia odchýlok, pričom  $E(L6m(t))$  a  $E(L6m(t))_{st}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee modelu použitím aktuálnych, resp. starých parametrov

**2) Libor3m:** Štruktúra a veľkosť odchýlok je podobná pre každé pozorované  $n$ . Výsledky, ktoré budú prezentované sa vzťahujú na  $n=150$  a  $n=180$ . V predchádzajúcej kapitole 2.3 sme vyhodnotili, že zo skúmaných modelov sú najlepšie modely pre  $n=150$  a  $n=180$ , pretože vykazujú najväčšiu schopnosť predpovedať úrokovú mieru. Preto má význam robiť pre ne vyhodnotenie aktuálnych verzus starých parametrov.

Rozdiely v rozložení odchýlok generovaných aktuálnymi a starými parametrami sú výrazné a môžeme vyhodnotiť, že aktuálne parametre sú vhodnejšie na generovanie očakávanej úrokovej miery, lebo vykazujú väčšiu schopnosť predpovedať úrokovú mieru. Pre model  $n=150$  pravdepodobnosť, s akou sa generuje odchýlka od reálnej úrokovej miery menšia ako 0.8 % je pri použití aktuálnych parametrov 90.15 % a iba 76.28 % pri použití starých parametrov. Pre model  $n=180$  sa pravdepodobnosť rovná 90.69 % oproti 69.12 %. Okrem toho, úroková miera odhadnutá pomocou aktuálnych parametrov generuje odchýlky od reality veľkosti do 0.1 %, 0.2 %, 0.3 % s dvakrát väčšou pravdepodobnosťou v porovnaní s úrokovou mierou odhadnutou pomocou starých parametrov. Výsledky sú dokumentované v grafoch 20 a 21. Štruktúra je taká, že odchýlky do 0.6 % sa generujú s vyššou pravdepodobnosťou pri aktuálnych parametroch, potom pri odchýlkach veľkosti 0.6% sa modely vyrovnajú a ďalej, tie najväčšie odchýlky model so starými parametrami generuje s vyššou pravdepodobnosťou.



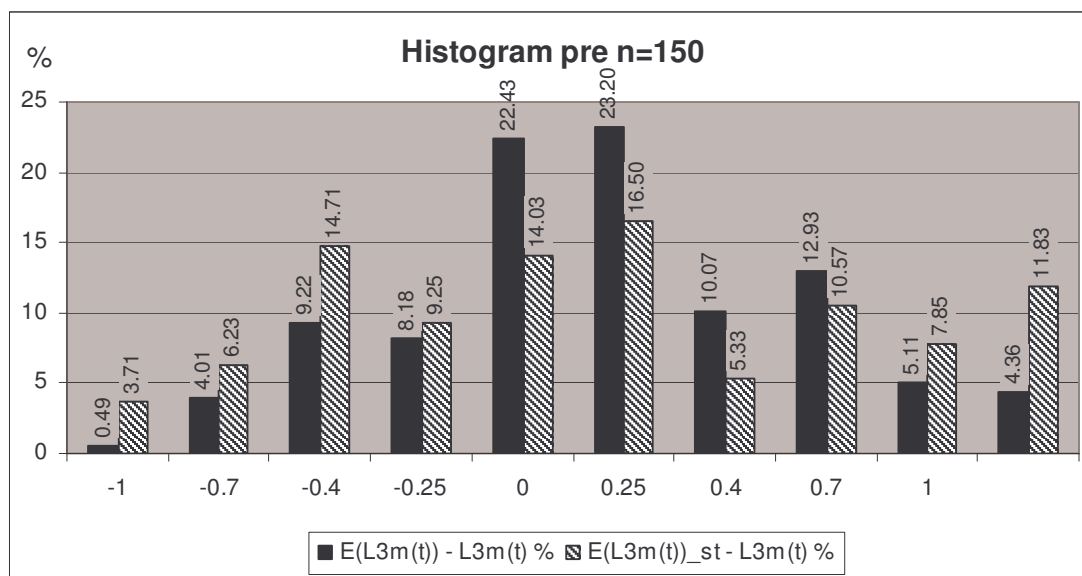
**Graf 20:** Porovnanie rozloženia odchylok v absolútnej hodnote, pričom  $E(L3m(t))$  a  $E(L3m(t))_{st}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee modelu použitím aktuálnych, resp. starých parametrov



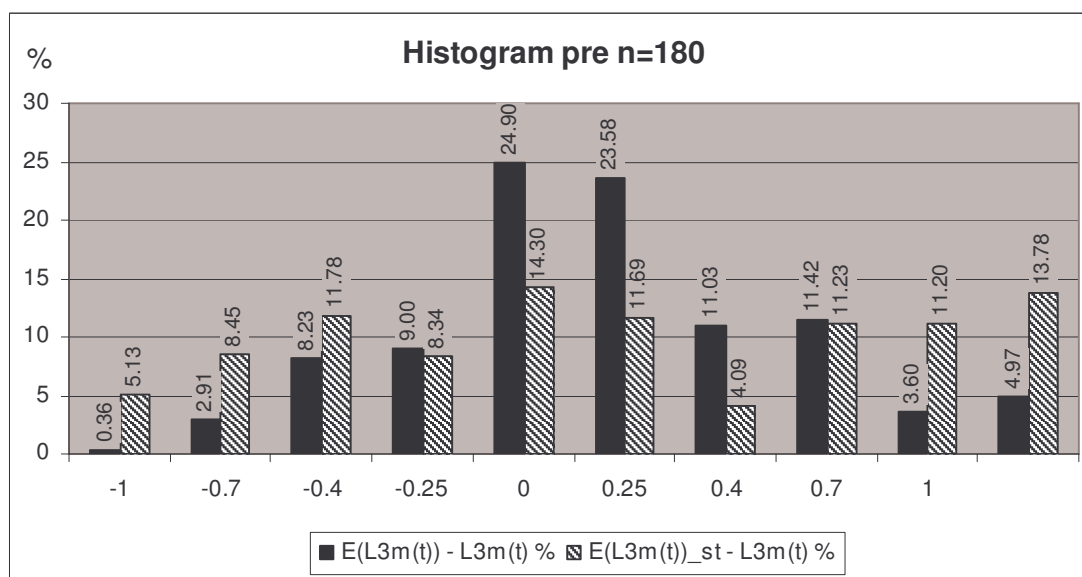
**Graf 21:** Porovnanie rozloženia odchylok v absolútnej hodnote, pričom  $E(L3m(t))$  a  $E(L3m(t))_{st}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee modelu použitím aktuálnych, resp. starých parametrov

Pri analýze odchylok bez absolútnej hodnoty sa dá zistiť, že model so starými parametrami o niečo viac nadhodnocuje reálnu úrokovú mieru ako ju podhodnocuje. Takéto rozloženie majú aj odchyľky generované aktuálnymi parametrami. Na grafe 22 a 23 sú znázornené tieto odchyľky a môžeme potvrdiť, že model s aktuálnymi

parametrami je lepší, lebo generuje menšie odchýlky od reálnej úrokovej miery ako model so starými parametrami.



**Graf 22:** Porovnanie rozloženia odchýlok, pričom  $E(L3m(t))$  a  $E(L3m(t))_{st}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee modelu použitím aktuálnych, resp. starých parametrov



**Graf 23:** Porovnanie rozloženia odchýlok, pričom  $E(L3m(t))$  a  $E(L3m(t))_{st}$  je generovaná úroková miera pomocou Ho&Lee modelu použitím aktuálnych, resp. starých parametrov

**Úspešnosť trafenia trendu:** Pri použití aktuálnych parametrov na generovanie úrokovej miery, model s pravdepodobnosťou v priemere 63 % vie predpovedať, aký bude mať trend úroková miera. Pre určité  $n$  je tá pravdepodobnosť ešte vyššia. Tento výsledok je uvedený v podkapitole 2.3.1. Úspešnosť trafenia trendu je podstatne

nižšia, keď na generovanie úrokovej miery použijeme staré parametre. V priemere sa rovná iba 52.99%. Pre rôzne  $n$  je hodnota úspešnosti trafenia trendu pri použití starých parametrov na generovanie uvedená v tabuľke 7.

n	Úspešnosť trafenia trendu	n	Úspešnosť trafenia trendu
10	52.64%	110	49.51%
20	54.67%	120	50.08%
30	54.20%	130	47.17%
40	55.19%	140	47.42%
50	55.02%	150	51.29%
60	57.66%	160	50.38%
70	61.04%	170	50.41%
80	60.32%	180	50.11%
90	59.56%	190	49.40%
100	55.22%	200	48.49%

**Tabuľka 5:** Úspešnosť trafenia trendu pre Libor3m generovaný starými parametrami

## Záver

Zafixovanie parametrov na jeden deň nespôsobuje nestabilitu modelu. Parametre sa za jeden deň nezmenia výrazne, ale aj napriek tomu sa s aktuálnymi parametrami dá presnejšie odhadnúť očakávaná úroková miera. Keď sa parametre zafixujú na dlhšie obdobie, model stráca na kvalite. Vychádzajúc z analýzy porovnania odchýlok od reálnej úrokovej miery a vyhodnotenia úspešnosti trafenia trendu prichádzame k záveru, že aktuálne parametre lepšie vystihujú realitu. Výkonnosť modelu so starými parametrami výrazne klesá v prípade, keď sa zväčšuje obdobie, nakoľko sa dopredu generuje úroková miera. Parametre by sa mali aktualizovať, aby bol model schopný presnejšie odhadnúť očakávanú úrokovú mieru.

## Záver

V predloženej diplomovej práci sme sa zaoberali modelovaním okamžitej úrokovej miery pomocou Ho&Lee modelu. Predložili sme metódu na kalibrovanie parametrov, ktorá je založená na historických dátach. Prezentovali sme rôzne scenáre vývoja úrokovej miery vygenerované pomocou odhadnutých parametrov. Vyhodnotili sme výkonnosť modelu a kvalitu predikcie.

Kvalita modelu je ovplyvnená dĺžkou (parametrom  $n$ ) časového radu historických údajov, ktoré sme použili na kalibráciu parametrov, aj dĺžkou doby na akú sme dopredu generovali očakávanú úrokovú mieru. Vhodným zvolením parametra  $n$  môžeme vylepšiť kvalitu predikcie modelu. Nakoniec sme analyzovali možnosť zafixovania parametrov na určité obdobie. Dospeli sme k záveru, že so zafixovaním parametrov model stráca na kvalite a pre spoľahlivejšiu predikciu potrebujeme parametre pravidelne aktualizovať. Zhrnutie výsledkov sme poskytli na konci každej podkapitoly.

V budúcnosti možno prácu obohatiť aj o použitie iného bezarbitrážneho modelu na generovanie úrokovej miery a porovnať, či bude vykazovať vyššiu kvalitu predikcie ako Ho&Lee.

## Literatúra

- [1] J. D. Brown: *Skewness and kurtosis*, Shiken: JALT Testing & Evaluation SIG Newsletter, Vol. 1 No. 1 Apr. 1997. (p. 16 - 18) [ISSN 1881-5537]. Dostupné na adrese: [http://jalt.org/test/bro\\_1.htm#Brown](http://jalt.org/test/bro_1.htm#Brown)
- [2] Kevin C. Ahlgrim, ASA, Stephen P. D'Arcy, FCAS, MAAA, and Richard W. Gorvett, FCAS, MAAA: *Parameterizing Interest Rate Models*. Dostupné na adrese: <http://www.casact.org/pubs/forum/99sforum/99sf001.pdf>
- [3] I. Melicherčík, L. Olšarová, V. Úradníček: *Kapitoly z finančnej matematiky 1*. Bratia Sabovci, Zvolen, 2005, ISBN 80-89029-88-4
- [4] I. Melicherčík, L. Olšarová: *Kapitoly z finančnej matematiky 2*. Bratia Sabovci, Zvolen, 2005, ISBN 80-89029-93-0
- [5] D. Ševčovič and A. Urbánová Csajková: *Calibration of one factor interest rate models*, Journal of Electrical Engineering, 55, No. 12/s (2004), 46-50.
- [6] D. Ševčovič and A. Urbánová Csajková: *On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model*, Central European J. of Operation Research, 13, 2005, 169-188.