Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2007 Róbert Zvonár

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Ekonomická a finančná matematika

Stabilita v nekonečne opakovaných hrách Cournotovho duopolu

Autor: Róbert Zvonár
Školiteľ: doc. RNDr. Ján Pekár PhD.

Bratislava 2007

Prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne pod vedením vedúceho diplomovej práce a čerpal som len z uvedenej literatúry.

V Bratislave 20. apríla 2007

....

Róbert Zvonár

Úprimné poďakovanie patrí môjmu diplomovému vedúcemu doc. RNDr. Ján Pekár PhD. za námet mojej diplomovej práce, za poskytnutie množstva relevantného študijného materiálu, za množstvo neoceniteľných rád, ale najmä za to, že to so mnou celé tie 4 ostatné semestre, ktoré vznikala táto práca, vydržal. Ďakujem!

Róbert Zvonár

Abstrakt

V súčasnosti sa všetci čoraz častejšie stretávame s pojmom kartel. Či už ide o kartely legálne, napr. OPEC, alebo kartely nelegálne, ich prítomnosť na trhu je prinajmenšom nežiadúca. V tejto práci sa preto pozrieme na stabilitu vytvorených kartelov, t.j. budeme skúmať podmienky, za ktorých kartelová dohoda nebude porušená, a naopak. Najprv sa zameriame na prípad klasického Cournotovho duopolu a následne nás bude zaujímať Cournotov duopol na trhu s komplementárnymi tovarmi.

Kľúčové slová:

Cournotov duopol, kartel, opakované hry, Veta prostého ľudu

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

V súčasnosti, snáď viac ako kedykoľvek v minulosti, v čase vzrastajúcej konkurencie v dôsledku zjednocovania Európy a rastúcej globalizácie, sme čoraz častejšie konfrontovaní so skutočnosťou, že "konkurenčné" spoločnosti, v snahe zvýšiť svoj zisk alebo bojovať proti silnejšiemu konkurentovi, vytvárajú kartelové dohody.

Kartely možno vo všeobecnosti rozdeliť na dve skupiny: legálne a nelegálne. Bezpochyby najznámejším predstaviteľom legálneho kartelu je Organizácia krajín vyvážajúcich ropu – OPEC. Avšak omnoho pálčivejším problémom sú práve nelegálne kartely, ktoré výrazne deformujú trh a rušia tak platnosť trhových princípov, a ktorých existenciu (na rozdiel od OPECu) možno ovplyvniť.

V tejto práci sa teda budeme zaoberať skúmaním podmienok, za ktorých existuje reálna obava z vytvorenia tichej dohody medzi spoločnosťami pôsobiacimi na trhu. Predmetom nášho záujmu bude špeciálny prípad konkurencie, a síce, keď na trhu pôsobia len dve frmy, t.j. prípad duopolu.

Práca je rozdelená do troch kapitol. V prvej kapitole, ktorá celá vychádza z publikácie [7], uvedieme čitateľa do problematiky opakovaných hier, ktoré sú veľmi úspešne používané na aproximáciu dlhodobých vzťahov medzi firmami vystupujúcimi na trhu. Hlavným výstupom tejto kapitoly bude znenie tzv. *Vety prostého ľudu*, ktorej tvrdenie špecifikuje množiny ekvilibrií nekonečne opakovaných hier.

V druhej kapitole aplikujeme vedomosti z predchádzajúcej kapitoly na klasický Cournotov duopol, ktorý bol prvýkrát predstavený francúzskym filozofom, matematikom a ekonómom Augustinom Cournotom ešte v roku 1838. Výsledkom bude stanovenie podmienok, pri ktorých možno považovať vytvorený kartel za stabilný.

V tretej kapitole najprv navrhneme model Cournotovho duopolu s komplementárnymi tovarmi, ktorý budeme následne používať v nekonečne opakovanej hre. Výsledkom bude, obdobne ako v druhej kapitole, stanovenie podmienok, za ktorých je vytvorený kartel stabilný, avšak tentokrát na trhu s komplementárnymi tovarmi.

Kapitola 1

Opakované hry

Najdôkladnejšie preskúmanou triedou dynamických hier sú opakované hry, v ktorých hráči čelia tej istej "statickej hre" v každej perióde a celková výplata každého hráča je normalizovaný súčet diskontovaných výplat v jednotlivých periódach. Ak sú akcie hráčov na konci každej periódy odpozorovateľné, hráči môžu podmieniť svoje stratégie predchádzajúcim vývojom hry, čo môže viesť k ekvilibriovým výstupom, ktoré nenastávajú v príslušnej statickej hre.

Keďže v opakovaných hrách sa množiny prípustných akcií alebo funkcie výplat nemenia v závislosti od predchádzajúcej hry, nemôžu byť tieto použité na modelovanie takých dôležitých fenoménov ako sú napr. investície do výrobných strojov a pod. A predsa môžu byť opakované hry dobrou aproximáciou niektorých dlhodobých vzťahov v ekonomických a politických vedách – obzvlášť vtedy, ak sú "dôvera" a "spoločenský tlak" dôležité, rovnako ako v prípadoch, kedy sú neformálne dohody použité na vynútenie obojstranne výhodných obchodov bez právne vymožiteľných kontraktov. Existuje mnoho variant na túto tému, vrátane Chamberlinovho [1] neformálneho argumentu, že oligopolisti môžu použiť opakované hry , aby sa tajne dohodli na vyšších cenách, a Macaulayho [11] pozorovania, že vzťahy medzi firmou a jej dodávateľmi sú často založené na "dobrom mene" a hrozbe straty budúcich obchodných príležitostí.

V tejto časti budeme najskôr analyzovať hry na nekonečných časových horizontoch, pričom sa zameriame na "Vetu prostého ľudu", ktorá opisuje ekvilibriá, keď sú hráči buď úplne trpezliví alebo takmer úplne. V ďalšom budeme diskutovať rôzne rozšírenia modelov na prípady, keď nie všetci hráči hrajú v každej perióde.

1.1 Nekonečne opakované hry

1.1.1 Model

Základným stavebným kameňom opakovanej hry – hra, ktorá sa opakuje – nazývame *statickú hru*. Predpokladáme statickú hru s n hráčmi v tvare $G = \{A_i, g_i(\cdot); i \in I\}$, kde $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina $n \in N$ hráčov, A_i je množina akcií hráča i a $g_i(\cdot) : A = \times_{j \in I} A_j \to R$ je výplatná funkcia hráča i. Nech $\mathcal{A}_i$ je priestor pravdepodobnostných rozdelení nad A_i.

Aby sme definovali opakovanú hru, musíme opísať priestor stratégií a funkcie výplat hráčov. Budeme uvažovať hry, v ktorých hráči odpozorujú na konci každej periódy realizované akcie. A teda, nech $a^t \equiv (a_1^t, \ldots, a_n^t)$ sú akcie hrané v perióde t. Predpokladáme, že hra začína v perióde 0 s nulovou históriou h^0. Pre $t \geq 1$, nech $h^t = (a^0, a^1, \ldots, a^{t-1})$ sú realizované voľby akcií vo všetkých periódach pred t, a nech $H^t = (A)^t$ je priestor všetkých možných histórií s t periódami.

Keďže všetci hráči poznajú h^t, čistá stratégia s_i hráča i v opakovanej hre je postupnosť funkcií s_i^t – jedna pre každú periódu t – ktoré zobrazujú histórie $h^t \in H^t$ na akcie $a_i \in A_i$. (Nezabúdajme, že stratégia musí špecifikovať hru vo všetkých možných prípadoch bez ohľadu na to, či nastanú alebo nie.) Zmiešaná stratégia σ_i v opakovanej hre je postupnosť zobrazení σ_i^t z H^t na zmiešané akcie $\alpha_i \in \mathcal{A}_i$. Pamätajme, že stratégia hráča i nemôže závisieť na minulých hodnotách rozloženia pravdepodobností jeho oponentov α_{-i}, ale len na minulých hodnotách a_{-i}.

V celej tejto časti uvažujeme len nekonečne opakované hry. Pri hrách s konečným a známym počtom period je množina vzhľadom na podhry dokonalých ekvilibrií určená spätnou indukciou, ktorú však nemožno aplikovať na modely s konečným, ale neznámym počtom opakovaní, a modely na nekonečnom horizonte. Nekonečne opakované modely lepšie popisujú situácie, kde sú si všetci hráči vedomí toho, že hra bude s veľkou pravdepodobnosťou pokračovať aj ďalšou periódou; konečne opakované hry opisujú situácie, kde je čas ukončenia všeobecne predvídaný.

Existuje niekoľko alternatívnych tvarov výplatných funkcií pre nekonečne opakované hry. My sa v tejto kapitole zameriame na prípad, kedy hráči diskontujú budúce výplaty diskontným faktorom $\delta < 1$. V takej hre je maximalizovanou účelovou funkciou hráča i normalizovaný súčet (diskontovaných) výplat[1] v tvare

$$u_i = E_\sigma(1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t g_i(\sigma^t(h^t)),$$

kde operátor E_σ označuje očakávanie s ohľadom na rozdelenie nad nekonečnými históriami, ktoré je generované profilom stretégií σ. Normalizačný faktor $(1-\delta)$ slúži na meranie výplat statickej a opakovanej hry v rovnakých jednotkách.

1.1.2 Veta prostého ľudu pre nekonečne opakované hry

"Veta prostého ľudu" pre opakované hry tvrdí, že ak sú hráči dostatočne trpezliví, potom akékoľvek dostupné a individuálne racionálne výplaty môžu byť vynutené ekvilibriom. Preto, v hranicich krajnej trpezlivosti, opakovaná hra v podstate umožňuje, aby sa akákoľvek výplata stala ekvilibriovým výstupom.

[1] V ďalších kapitolách budeme uvažovať za funkcie výplat hráčov sumu diskontovaných výplat v jednotlivých periódach t. Toto však nijako nevplýva na platnosť ďalej opísaných úsudkov, úvah a tvrdení.

	L	R
U	-2, 2	1, -2
M	1, -2	-2, 2
D	0, 1	0, 1

Obrázok 1.1: Statická hra

Aby sme však toto tvrdenie sformulovali v presnej podobe, musíme zadefinovať pojmy "dostupný" a "individuálne racionálny". Zadefinujme *minmaxovú výplatu* hráča i ako

$$\underline{v}_i = \min_{\alpha_{-i}} \max_{\alpha_i} g_i(\alpha_i, \alpha_{-i}). \tag{1.1}$$

Toto predstavuje najnižšiu výplatu hráča i, ktorú mu môžu zabezpečiť jeho oponenti pri akomkoľvek výbere α_{-i}, za podmienky, že hráč i bude správne predvídať α_{-i} a zahrá svoju najlepšiu odpoveď (*best response*). Profil stratégií m^i_{-i} nazývame *minmaxový profil* proti hráčovi i. Nech m^i_i je taká stratégia hráča i, že $g(m^i_i, m^i_{-i}) = \underline{v}_i$.

Pre lepšiu ilustráciu tejto definície vypočítame minmaxové hodnoty hry na Obrázku 1.1. Aby sme vypočítali minmaxovú hodnotu hráča 1, najprv vyjadríme jeho výplaty pre U, M a D ako funkciu pravdepodobnosti q, ktorú hráč 2 pridelil akcii L; zo zrejmého zápisu dostávame, že tieto výplaty sú $v_U(q) = -3q + 1$, $v_M(q) = 3q - 2$ a $v_D(q) = 0$. Keďže hráč 1 si môže vždy zabezpečiť výplatu 0 zahraním D, jeho minmaxová výplata je prinajmenšom takáto; otázkou je, či môže hráč 2 udržať maximálnu výplatu hráča 1 na 0 nejakým výberom q. Keďže q nevstupuje do v_D, môžeme správnou voľbou q minimalizovať maximum v_U a v_M, čo nastáva v bode, kde sa oba výrazy rovnajú, t.j. $q = \frac{1}{2}$. Keďže $v_U(\frac{1}{2}) = v_M(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, minmaxová výplata hráča 1 je výplata 0, ktorú dosiahne zahraním D. (Poznamenajme, že $\max(v_U(q), v_M(q)) \leq 0$ pre $\forall q \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, takže minmaxová stratégia hráča 2 proti hráčovi 1, m^1_2, je akékoľvek q z tohto intervalu.)

Podobne, aby sme našli minmaxovú hodnotu hráča 2, najprv vyjadríme výplatu hráča 2 pre L a R ako funkciu pravdepodobností p_U a p_M, ktorú hráč 1 pridelil U a M:

$$v_L = 2(p_U - p_M) + (1 - p_U - p_M), \quad (1.2)$$

$$v_R = -2(p_U - p_M) + (1 - p_U - p_M). \quad (1.3)$$

Minmaxová výplata hráča 2 je teda určená výrazom

$$\min_{p_U, p_M} \max[2(p_U - p_M) + (1 - p_U - p_M), -2(p_U - p_M) + (1 - p_U - p_M)].$$

Riešením (alebo vykreslením rovníc (1.2) a (1.3)) vidíme, že minmaxová výplata hráča 2 je 0, ktorá je dosiahnuteľná profilom $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Tu, na rozdiel od minmaxu proti hráčovi 1, minmaxový profil je jednoznačne určený: Ak $p_U > p_M$, výplata pre L je kladná, ak $p_M > p_U$, výplata pre R je kladná, a ak $p_U = p_M < \frac{1}{2}$, potom L aj R majú kladné výplaty.

Poznamenajme, že ak obmedzíme našu pozornosť iba na čisté stratégie v rovnici (1.1), minmaxové hodnoty oboch hráčov budú rovné 1. Je jasné, že minimalizáciou cez menšiu množinu v rovnici (1.1) nemôžeme dostať nižšie hodnoty.

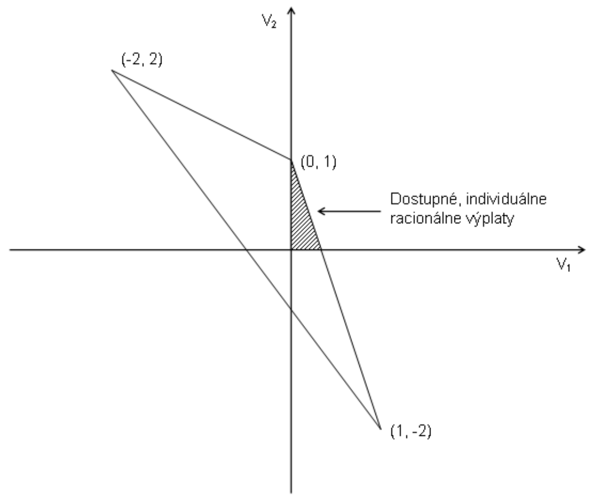
Pozorovanie 1 *Výplata hráča i je prinajmenšom $\underline{v}_i$ v každom statickom ekvilibriu a v každom Nashovom ekvilibriu opakovanej hry, bez ohľadu na výšku diskontného faktora.*[2]

A teda, na základe apriórnych podkladov vieme, že žiadne ekvilibrium opakovanej hry nemôže poskytnúť hráčovi výplatu nižšiu ako je jeho minmaxová hodnota.

Ďalej si zavedieme definíciu dostupných výplat. Množina dostupných výplat pre akýkoľvek diskontný faktor je

$$V = \text{konvexný obal } \{v | \exists a \in A, g(a) = v\}.$$

[2] Dôkaz možno nájsť v publikácii [7] na str. 151.



Obrázok 1.2: Dostupné, individuálne racionálne výplaty

Táto množina je zobrazená na Obrázku 1.2. Vyšráfovaná oblasť na obrázku je množina všetkých dostupných výplat Pareto-dominujúcich minmaxovým výplatam, ktoré sú 0 pre oboch hráčov. Množina dostupných, ostro individuálne racionálnych výplat je množina $\{v \in V | v_i > \underline{v}_i \ \forall i\}$. Obrázok 1.2 vykresľuje tieto množiny pre hru na Obrázku 1.1, v ktorej sú minmaxové výplaty $(0, 0)$.

$G(\delta)$ označíme nekonečnekrát opakovanú hru G s diskontným faktorom $\delta \in (0, 1)$.

Veta 1 (Veta prostého ľudu) [3] *Pre každý dostupný vektor výplat v, kde $v_i > \underline{v}_i$ pre každého hráča i, $\exists \underline{\delta} < 1$ také, že pre $\forall \delta \in (\underline{\delta}, 1)$, $G(\delta)$ má Nashovo ekvilibrium s výplatami v.*[4]

[3] Nazýva sa "Veta prostého ľudu", pretože ústne podanie tejto vety bolo súčasťou Teórie hier dávno predtým, ako bola zaznamenaná v tlačovej podobe.

[4] Dôkaz možno nájsť v publikácii [7] na str. 153–154.

Poznámka 1 *Myšlienka tejto vety je jednoducho taká, že ak sú hráči trpezliví, akýkoľvek konečný zisk z jedno-periódovej deviácie je vyvážený hoci i malou stratou na úžitku v každej budúcej perióde. Stratégie konštruované v dôkaze tohto tvrdenia sú "neústupčivé": Hráč, ktorý deviuje, bude mať minmaxovú výplatu v každej nasledujúcej perióde.*

Podľa stratégií použitých v dôkaze Vety 1, jednorázová deviácia vyvolá neústupčivý trest. Avšak pre trestajúceho hráča môže byť vykonanie tohto trestu veľmi nákladné. Napr. v Cournotovom oligopole, minmaxové stratégie vyžadujú, aby oponenti hráča i produkovali také množstvo, že ceny padnú pod priemerné náklady hráča i, a teda môžu byť rovnako aj pod ich vlastnými nákladmi. Keďže minmaxové stratégie môžu byť nákladné, vyvstáva otázka, či hráčovi i zabráni v jednorázovej deviácii strach z toho, že jeho oponenti budú reagovať neústupčivým trestom popísaným vyššie. Inými slovami, ide o to, že stratégie použité v dôkaze Nashovej Vety prostého ľudu nie sú vzhľadom na podhry dokonalé. To vyvoláva otázku, či sa tvrdenie Vety prostého ľudu týka výplat v dokonalom ekvilibriu.

Odpoveďou na túto otázku je áno, ako ukazuje Dokonalá veta prostého ľudu. Friedman [3] dokázal slabý výsledok, niekedy nazývaný Veta prostého ľudu s "Nashovými hrozbami".

Veta 2 (Friedman [3]) *Nech α^* je statické ekvilibrium (ekvilibrium statickej hry) s výplatami e. Potom pre $\forall v \in V$, kde $v_i > e_i$ pre každého hráča i, $\exists \underline{\delta} < 1$ také, že pre $\forall \delta \in (\underline{\delta}, 1)$, $G(\delta)$ má vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium s výplatami v.*[5]

Friedmanov výsledok ukazuje, že trpezliví, zhodní Cornotoví duopolisti môžu "ticho spolupracovať" produkovaním polovice monopolistického výstupu[6], pričom akákoľvek deviácia je trestaná návratom ku Cournotovmu výstupu bez možnosti zmeny tohto stavu. Toto ekvilibrium je "podvodné", pretože vedie k monopolistickej cene; o tajnej dohode hovoríme ako

[5] Dôkaz možno nájsť v publikácii [7] na str. 154–155.

[6] K tomuto sa ešte vrátime v časti o Cournotovom duopole.

o "tichej", nakoľko môže byť vynútená bez použitia záväzného kontraktu. Namiesto toho je každá firma odradená od porušenia dohody (opodstatneným) strachom z vyprovokovania Cournotovej konkurencie.

Tvrdenie Friedmanovej vety je slabšie ako Veta prostého ľudu, okrem hier so statickým ekvilibriom, ktoré zabezpečuje všetkým hráčom minmaxové hodnoty. (Toto je veľmi špeciálna podmienka, ale platí pre väzňovu dilemu a Bertrandovu konkurenciu s dokonalými substitútmi a konštantnými výnosmi z rozsahu.) A teda, Friedmanova veta necháva otvorenú otázku, či požiadavka dokonalého ekvilibria obmedzuje hranice množiny ekvilibriových výplat.

V snahe zodpovedať túto otázku, Fuenberg a Maskin [6] navrhujú obmenený typ stratégie použitej Rubinsteinom [15] - tá núti oponentov hráča i minmaxovať jeho výplatu nie na základe hrozby "potrestania", ak nebudú minmaxovať, ale radšej ponúknutím odmeny, ak budú. Pri vytváraní profilov stratégií, ktoré poskytujú odmeny za trestanie devianta, musíme však dávať pozor, aby sme neodmenili tiež pôvodného devianta, čo by mohlo anulovať efekt trestu a urobiť tak deviovanie atraktívnym. Potreba, aby sme boli schopní poskytnúť odmeny za trestanie hráča i bez odmeňovania samotného hráča i, vedie k požiadavke "plnej dimenzie" použitej v nasledujúcom tvrdení:

Veta 3 (Fudenberg a Maskin [6]) *Predpokladajme, že dimenzia množiny dostupných výplat V sa rovná počtu hráčov. Potom pre $\forall v \in V$, kde $v_i > \underline{v}_i$, $\exists \underline{\delta} < 1$ také, že pre $\forall \delta \in (\underline{\delta}, 1)$, $G(\delta)$ má vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium s výplatami v.*[7]

Poznámka 2 *Fudenberg a Maskin poskytli príklad hry s tromi hráčmi s $dim(V) = 1$, kde Veta prostého ľudu zlyhá. Abreu a Dutta (1990) oslabili požiadavku plnej dimenzie na $dim(V) = I - 1$.*

[7] Dôkaz možno nájsť v publikácii [7] na str. 158–160.

1.2 Opakované hry s meniacimi sa oponentmi

Klasické opakované hry predpokladajú, že tá istá pevne stanovená množina hráčov hrá v každej jednej perióde. Avšak výsledky podobné Vete prostého ľudu môžeme získať tiež v niektorých prípadoch, kedy nie všetci hráči hrajú v každej perióde. V tejto časti opíšeme niekoľko variantov tohto prípadu.

1.2.1 Opakované hry s dlhodobými a krátkodobými hráčmi

Prvým variantom, ktorý budeme uvažovať, je prípad, kedy niektorí hráči sú dlhodobí hráči, ako v štandardných opakovaných hrách, kým úlohy prislúchajúce ostatným "hráčom" sú plnené postupnosťou krátkodobých hráčov, z ktorých každý hrá iba raz.

Príklad

Predstavme si, že dlhodobá firma čelí postupnosti krátkodobých zákazníkov, z ktorých každý hrá iba raz, ale je informovaný o všetkých predchádzajúcich hrách, keď si vyberá svoje akcie. Každú periódu zákazník volí akciu prvý a rozhoduje sa, či kúpi alebo nekúpi tovar od firmy. Ak sa zákazník rozhodne nekúpiť, obaja hráči získavajú výplatu 0. Ak sa zákazník rozhodne kúpiť, potom sa musí firma rozhodnúť, či ponúkne vysokú alebo nízku kvalitu. Ak ponúkne vysokú kvalitu, obaja hráči majú výplatu 1; ak ponúkne nízku kvalitu, výplata fimy je 2 a výplata zázazníka je -1.

Nasledujúce stratégie sú vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibriá tejto hry, keď je firma dostatočne trpezlivá: Firma začína ponukou vysokej kvality vždy, keď si zákazník kúpi tovar a pokračuje to tak dlho, kým neponúkla nízku kvalitu v minulosti. Ak niekedy firma ponúkne nízku kvalitu, ponúka nízku kvalitu pri každej ďalšej príležitosti. Zákazník začína kúpou tovaru od firmy a pokračuje to tak dlho, kým firma nikdy neponúkla nízku kvalitu. Ak firma niekedy ponúkne nízku kvalitu, potom žiadny zo zákazníkov už nikdy viac nekúpi tovar. Stratégie zákazníkov sú optimálne, pretože každý zázkazník sa zaujíma iba o výplatu v danej perióde, a teda mal by kúpiť len vtedy, ak očakáva, že kvalita v danej perióde bude vysoká. Firma sa vystavuje krátkodobým nákladom ponukaním vysokej kvality, avšak na druhej strane, pre trpezlivú firmu sú tieto náklady kompenzované strachom, že ponuka nízkej kvality by viedla k strate zákazníkov v budúcnosti. Poznamenajme, že toto ekvilibrium zdôvodňuje, prečo by mali zákazníci uprednostňovať obchodovanie s firmou, o ktorej sa predpokladá, že zostane na trhu nejakú chvíľu, v porovnaní s pokútnou firmou, pre ktorú je dlhodobé uvažovanie nedôležité.

Spôsob ako rozšíriť Vetu prostého ľudu aj na hry tohto typu je modifikovať definície dostupných výplat a minmaxových hodnôt zahrnutím obmedzení, na základe ktorých hrajú krátkodobí hráči vždy krátkodobú nejlepšiu odpoveď.

Aby sme mohli formálne potvrdiť túto domnienku, označme hráčov tak, že hráči $i = 1, \ldots, l$ sú dlhodobí hráči, ktorí maximalizujú normalizovanú diskontovanú sumu ich výplat v jednotlivých periódach ako v bežných opakovaných hrách, a nech hráči $i = (l+1), \ldots, I$ predstavujú postupnosť krátkodobých hráčov, ktorí sa snažia v každej perióde maximalizovať danú výplatu. T.j. statická hra má I hráčov a v opakovanej hre sa jednotlivci, tvoriaci hráčov $l+1$ až I, menia každú periódu. (Alebo inak, hráči $l+1$ až I by mohli byť dlhodobí hráči, ktorých diskontný faktor je 0.) Nech

$$B : \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_l \to \mathcal{A}_{l+1} \times \ldots \times \ldots \times \mathcal{A}_I$$

je priradenie, ktoré zobrazuje akýkoľvek profil akcií $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ pre dlhodobých hráčov na zodpovedajúce Nash-ekvilibriové akcie pre krátkodobých hráčov. T.j. pre $\forall \alpha \in \text{graf}(B)$ a $i \geq l+1$, α_i je najlepšia odpoveď na α_{-i}.

Pre každého dlhodobého hráča i definujeme minmaxovú výplatu $\underline{v}_i$ ako

$$\min_{\alpha \in graf(B)} \max_{a_i \in A_i} g_i(a_i, \alpha_{-i}).$$

(Minimum sa dosahuje, pretože graf zobrazenia B je kompakt a funkcie výplat sú spojité v zmiešaných stratégiach. Poznamenajme, že táto definícia sa mení na obvyklú definíciu v prípade, že všetci hráči sú dlhodobí.) Majme

$$U = \{v = (v_1, \ldots, v_l) \in \mathbb{R}^l | \exists \alpha \in \text{graf}(B), \text{ kde } g_i(\alpha) = v_i \text{ pre } i = 1, \ldots, l\}$$

a množinu

$$V = \text{ konvexný obal } (U).$$

Toto je modifikovaná definícia množiny dostupných výplat.

Ako sme poznamenali, mohli by sme sa domnievať, že Veta prostého ľudu by sa dala rozšíriť na základe modifikovaných definícií dostupnosti a minmaxových úrovní. Avšak, ako ukázali Fudenberg, Kreps a Maskin [4], toto rozšírenie dosiahneme iba za predpokladu, že výber zmiešanej akcie každého hráča je verejne odpozorovateľný. Ak hráči poznajú len realizované akcie svojich oponentov, množina vzhľadom na podhry dokonalých ekvilibrií môže byť striktne menšia. Dôvod pre toto je taký, že v snahe presvedčiť krátkodobého hráča zahrať počas svojej periódy akciu na ekvilibriovej ceste, niektorí z dlhodobých hráčov môžu potrebovať použiť zmiešané akcie. Ak nie sú miešajúce pravdepodobnosti odpozorovateľné, vyvolanie tejto náhodnosti si vyžaduje, aby nadchádzajúce výplaty donútili dlhodobých hráčov so zmiešanými akciami k indiferentnosti medzi čistými akciami, ktorým pridelili kladnú pravdepodobnosť, čo však spôsobí náklady z hľadiska efektívnosti možných ekvilibriových výplat.

Obmedzená množina ekvilibrií s neodpozorovateľnými miešajúcimi pravdepodobnosťami je priesečník dostupných, individuálne racionálnych výplat s obmedzeniami $v_i \leq \overline{v}_i$, kde $\overline{v}_i$ je definované ako

$$\overline{v}_i = \max_{\alpha \in \text{graf}(B)} \min_{a_i \in \text{nosič}(\alpha_i)} g_i(a_i, \alpha_{-i}), \tag{1.4}$$

kde nosič(α_i) predstavuje množinu tých akcií hráča i, ktorým bola priradená nenulová pravdepodobnosť.

Pre pevne stanovený profil zmiešaných akcií α, rovnica (1.4) počíta najhoršiu výplatu hráča i spomedzi akcií, pre zahranie ktorých α_i stanovuje kladnú pravdepodobnosť. Intuitívne, ak sa od hráča i žiada, aby hral α_i pozdĺž ekvilibriovej cesty, musí byť ochotný použiť každú akciu v α_i.

Veta 4 (Fudenberg, Kreps a Maskin [4]; Fudenberg a Levine [5]) *Predpokladajme, že dimenzia V je rovná l, počtu dlhodobých hráčov. Potom pre $\forall v \in V$, kde $\underline{v}_i < v_i < \overline{v}_i$ pre $i = 1, \ldots, l$, $\exists \underline{\delta} < 1$ také, že pre $\forall \delta \in (\underline{\delta}, 1)$, existuje vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium s výplatami v.*

1.2.2 Hry s prekrývajúcimi sa generáciami hráčov

Crémer [2] uvažoval opakovanú hru, v ktorej prekrývajúce sa generácie hráčov žijú T periód tak, že v každom čase t je jeden hráč vo veku T, ktorý hrá svoje posledné kolo, jeden hráč vo veku $T-1$, ktorý hrá ešte dve kolá, a tak ďalej až k novému hráčovi, ktorý bude hrať T-krát. V každej perióde si T hráčov simultánne vyberá, či budú pracovať alebo ulievať sa, a ich výbery sú na konci každej periódy odhalené; hráči si rozdelia rovným dielom výsledný výstup, ktorý je rastúcou funkciou počtu pracujúcich. Náklady spojené s vynaloženou snahou presahujú $\frac{1}{T}$ podielu nárastu vo výstupe, takže ulievanie sa je dominantnou stratégiou v statickej hre, ktorá má príchuť väzňovej dilemy (*Prisoner's dilemma*) s T hráčmi. Výplaty v opakovanej hre sú priemerom ziskov v jednotlivých periódach.

Predstavme si, že efektívnym výstupom pre všetkých hráčov je pracovať. Tento výstup sa nemôže stať Nashovým ekvilibriom, keďže T-ročný hráč sa bude vždy ulievať. A predsa existujú ekvilibriá, kde väčšina hráčov pracuje. Najľahšie to uvidíme, ak sa ďalej zameriame na model. Nech $T = 10$. Predpokladajme, že ak k hráčov pracuje, celkový výstup je $2k$, a kontraproduktívnosť snahy je 1. Potom, ak uprednostňujeme linearitu vo výstupe a snahe, výplata pre pracujúceho, ak pracuje tiež k oponentov, je $\frac{2(k+1)}{10} - 1$, a výplata pre ulievajúceho sa je $\frac{2k}{10}$. Efektívny výstup pre všetkých hráčov je pracovať, s výsledným úžitkom 1 pre každého.

Teraz uvažujme nasledujúci profil stratégií: "10-roční hráči sa vždy ulievajú. Tak dlho, kým sa žiadny z hráčov vo veku menej ako 10 rokov nikdy neulieval, všetci hráči mladší ako 10 rokov pracujú. Ak sa niektorý z hráčov vo veku menej ako 10 rokov niekedy ulieval, potom sa ulievajú všetci hráči." Ak sa všetci hráči zariadia podľa tohto profilu, každý hráč získa $\frac{18}{10} - 1 = \frac{4}{5}$ v každej perióde, v ktorej pracuje, a $\frac{9}{5}$ v perióde, v ktorej má 10 rokov. Je zrejmé, že žiadny hráč nemôže získať deviovaním v perióde, v ktorej má 10 rokov. Ak hráč deviuje vo veku 9 rokov, získa $\frac{8}{5}$ v perióde, v ktorej deviuje, a 0 v nasledujúcej perióde, čo je menej ako $\frac{4}{5} + \frac{9}{5}$; mladší hráč môže deviáciou iba stratiť. Preto sú tieto stratégie vzhľadom na podhry dokonalým ekvilibriom.

Kandori [10] a Smith [16] zovšeobecnili tento typ konštrukcie a poskytli podmienky na získanie Vety prostého ľudu.

Kapitola 2

Cournotov duopol

V roku 1838 publikoval francúzsky filozof, matematik a ekonóm Augustin Cournot svoje vrcholné dielo Výskumy v matematických princípoch bohatstva (*Researches into Mathematical Principles of Wealth*), ktoré nemalo obdoby. Hoci starousadlíci Francúzskej liberálnej školy, ktorí v tom období dominovali ekonomickým profesiám, nechali jeho dielo bez povšimnutia, dopad jeho práce na modernú ekonómiu môže byť len ťažko precenený.

V tomto diele Cournot prvýkrát predstavil svoju dopytovú funkciu. Písal ju vo všeobecnom tvare ako $D = F(p)$. Predpokladá, že $F(\cdot)$ je spojitá, a považuje za empirickú záležitosť, že dopytová funkcia je klesajúca ("zákon dopytu"). Taktiež zavádza myšlienku "elasticity", hoci ju nezapisuje v matematickom tvare.

Následne hneď prechádza k analýze monopolu. Tu zavádza koncept ziskmaximalizujúceho výrobcu. Cournot tiež zavádza nákladovú funkciu $\Phi(D)$ a zaoberá sa klesajúcimi, konštantnými a rastúcimi nákladmi z rozsahu. Matematicky ukazuje, ako si výrobca vyberie také množstvo produkcie, kedy je hraničný príjem rovný hraničným nákladom.

V nasledujúcej kapitole Cournot prezentuje svoj slávny "duopolistický" model. Zostavuje matematický model s dvomi konkurenčnými výrobcami homogenného produktu. Každý producent si je vedomý toho, že rivalovo

Obrázok 2.1: Antoine Augustin Cournot (1801-1877)

rozhodnutie o vyrábanom množstve bude mať dopad na ceny, ktorým čelí, a teda aj jeho zisk. Následne sa každý výrobca rozhoduje pre množstvo, ktoré maximalizuje jeho zisk, vzhľadom na reakcie jeho rivala. Cournot matematicky získal deterministické riešenie v podobe množstiev produkovaných jednotlivými producentmi, ktoré je v súlade so vzájomnými predpokladanými reakciami. Cournot ukázal, ako môže byť toto ekvilibrium získané ako priesečník dvoch nakreslených "reakčných kriviek."

Porovnaním riešení Cournot poznamenáva, že pri duopole sú ceny nižšie a celkové produkované množstvo väčšie ako pri monopole. Toto bol prvý krok k preniknutiu do podstaty veci, výsledkom čoho bolo, že s rastúcim počtom výrobcov, rastie ponúkané množstvo a cena klesá. Taktiež predstavuje prípad neobmedzenej konkurencie (*unlimited competition*), t.j. kde je počet výrobcov taký veľký, že vstup alebo odchod niektorého z nich má zanedbateľný efekt na celkové produkované množstvo. Pokračuje získaním cien a množstiev v tejto "dokonale konkurenčnej" situácii, predovšetkým ukázaním, že v riešení je cena rovná hraničným nákladom.

Hoci bol Cournot nespravodlivo zabudnutý svojimi vrstovníkmi, rozvoj monopolistickej konkurencie v tridsiatych rokoch 20. storočia čerpal vo veľkej miere z jeho práce. Ako sa vyvíjala teória hier počas päťdesiatych rokov, Mayberry, Nash a Shubik [12] preformulovali Cournotovu duopolistickú teóriu na nekooperatívnu hru s množstvami ako strategickými premennými. Ukázali, že Cournotovo riešenie nebolo nič iné ako "Nashovo ekvilibrium" (Nash [13]).

2.1 Nekonečne opakovaný model

Uvažujme nekonečnekrát opakovanú hru Cournotovho duopolu, t.j. duopolisti volia v každej perióde $t = 0, 1, 2, \ldots$ vyrábané množstvá Q_1^t, resp. Q_2^t. Zisky firiem v perióde t sú $\pi_1(Q_1^t, Q_2^t)$ pre firmu 1 a $\pi_2(Q_1^t, Q_2^t)$ pre firmu 2. Výplaty firiem za celú hru sú potom

$$\pi_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi_1(Q_1^t, Q_2^t), \qquad \pi_2 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi_1(Q_1^t, Q_2^t),$$

kde δ je spoločný diskontný faktor firiem.

Aby sme bližšie špecifikovali funkciu $\pi_i(Q_1^t, Q_2^t)$ pre $i = 1, 2$, predpokladajme, že firmy nemajú žiadne fixné náklady a hraničné náklady c sú konštantné. Cena p je lineárnou klesajúcou funkciou ponúkaného množstva Q, t.z. má tvar $p(Q) = a - bQ$. Zisk firmy v perióde t je $\pi_i(Q_1^t, Q_2^t) = [a - b(Q_1^t + Q_2^t) - c]Q_i^t$ pre $i = 1, 2$.

Obe firmy sa snažia v každej perióde maximalizovať svoj zisk. V konkurenčnom prostredí tento cieľ predstavuje riešenie nasledujúcej sústavy lineárnych rovníc:

$$\frac{\partial \pi_1(Q_1^t, Q_2^t)}{\partial Q_1^t} = a - b(2Q_1^t + Q_2^t) - c = 0 \qquad \text{pre } t = 1, 2, \ldots,$$
$$\frac{\partial \pi_2(Q_1^t, Q_2^t)}{\partial Q_2^t} = a - b(Q_1^t + 2Q_2^t) - c = 0 \qquad \text{pre } t = 1, 2, \ldots$$

Optimálne vyrábané množstvo produkcie vypočítané na základe daného systému lineárnych rovníc je ${Q_1^t}^* = {Q_2^t}^* = \frac{1}{3}\frac{a-c}{b}$. Toto množstvo môžeme označiť ako *rovnovážne duopolistické množstvo.* Celkový zisk každej z firiem za celú hru vyjadruje nasledovný vzťah:

$$\pi_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \frac{1}{9} \frac{(a-c)^2}{b} = \frac{1}{(1-\delta)} \frac{1}{9} \frac{(a-c)^2}{b} \qquad \text{pre } i = 1, 2.$$

2.1.1 Vytvorenie kartelu

Je zrejmé, že cieľom každej firmy je maximalizácia jej zisku. A teda firmy v snahe dosiahnuť ešte vyššie zisky môžu vytvoriť kartel. Kartel, pôsobiaci na trhu ako monopol, maximalizuje svoj zisk pri vyrábanom množstve spĺňajúcom podmienku

$$\frac{\partial \pi^m}{\partial Q^m} = a - 2bQ^m - c = 0,$$

kde π^m je zisk monopolistu a Q^m je množstvo vyrábané monopolistom. Riešením tejto rovnice je $Q^{m*} = \frac{1}{2}\frac{a-c}{b}$. Toto množstvo označíme *monopolistické množstvo.* Zisk monopolistu si firmy rozdelia, a teda obaja budú vyrábať $Q_1^m = Q_2^m = \frac{1}{4}\frac{a-c}{b}$, kde Q_1^m, Q_2^m sú množstvá vyrábané firmami pri vytvorení kartelu. Dostávame teda vzťah

$$\pi_i^m = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \frac{1}{8} \frac{(a-c)^2}{b} = \frac{1}{(1-\delta)} \frac{1}{8} \frac{(a-c)^2}{b} \qquad \text{pre } t = 1, 2, \tag{2.1}$$

kde π_1^m, π_2^m je celkový zisk firmy 1 a 2 pri vytvorení kartelu.

Vidíme, že pri vytvorení kartelu obe firmy svoj zisk zvýšili. Má teda zmysel skúmať stabilitu tohto "spojenectva". Tomuto sa budeme venovať v nasledujúcej časti.

2.1.2 Deviácia od dohodnutého kartelu

Je potrebné si uvedomiť, že množstvá vyrábané pri vytvorení kartelu netvoria stabilný bod systému, t.j. ak sa niektorá z firiem odchýli od dohodnutého vyrábaného množstva, môže svoj zisk zvýšiť. V tejto časti si priblížime, ako by sa mohla celá hra v takomto prípade vyvíjať.

Ak sa niektorá z firiem rozhodne deviovať, teda zvýšiť svoj zisk na úkor druhej firmy, nebude ničím prekvapivým, že na hľadanie *deviujúceho množstva* - označíme ho Q_i^d pre $i = 1, 2$ - použijeme opäť deriváciu zisku podľa množstva. Rovnica bude mať nasledujúci tvar:

$$\frac{\partial \pi_i(Q_i^d)}{\partial Q_i^d} = a - b\left(2Q_i^d + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b}\right) - c = 0 \qquad \text{pre } i = 1, 2,$$

Deviujúce množstvo z tejto rovnice vypočítame veľmi jednoducho a je rovné $Q_i^d = \frac{3}{8}\frac{a-c}{b}$. Zisk deviujúcej firmy $\pi_i^d = \frac{9}{64}\frac{(a-c)^2}{b}$ je vyšší ako zisk, ktorý by v danej perióde dosiahla pri hraní množstva dohodnutého pri karteli.

Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že deviuje firma 1, a to hneď v perióde $t = 0$.

V snahe zabrániť deviácii firmy 1, musí mať firma 2 pripravenú tzv. *trestajúcu stratégiu*, ktorá minimalizuje zisk deviujúcej firmy, a zároveň firma 2 nemôže zahraním inej stratégie zvýšiť svoj zisk. Na splnenie týchto dvoch požiadavok postačí, ak nedeviujúca firma bude maximalizovať svoj zisk, čo bude mať za následok pokles zisku firmy 1, ktorá svoje vyrábané množstvo optimalizovala za predpokladu nezmenenej výroby nedeviujúcej firmy.

Reakciou firmy 2 na deviáciu bude teda výroba zisk-maximalizujúceho množstva k množstvu vyrábaného deviujúcou firmou, pričom predpokladáme, že firma 1 svoje množstvo ponúkané na trhu meniť nebude. Tento predpoklad je ľahko zdôvodniteľný, nakoľko firma 1 vyrába množstvo maximalizujúce jej zisk a nemá dôvod ho meniť. Množstvo hrané firmou 2 v nasledujúcej perióde $t = 1$ sa opäť nachádza implicitne zahrnuté vo vzťahu

$$\frac{\partial \pi_2(Q_2^1)}{\partial Q_2^1} = a - b\left(\frac{3}{8}\frac{a-c}{b} + 2Q_2^1\right) - c = 0.$$

Toto množstvo je $Q_2^1 = \frac{5}{16}\frac{a-c}{b}$.

Reakcia hráča 1 nebude vôbec prekvapivá. Opäť bude maximalizovať svoj zisk za predpokladu, že firma 2 nezmení množstvo ponúkaných produktov. Firma 1 teda bude v perióde $t = 2$ vyrábať množstvo, ktoré je riešením nasledujúcej rovnice:

$$\frac{\partial \pi_1(Q_1^2)}{\partial Q_1^2} = a - b\left(2Q_1^2 + \frac{5}{16}\frac{a-c}{b}\right) - c = 0.$$

Takto to bude pokračovať ďalej. Každú periódu bude jedna z firiem meniť množstvo ako reakciu na množstvo vyrábané druhou firmou.

Pre názornosť si uvádzame tabuľku s množstvami, ktoré ponúkajú obe firmy v niekoľkých prvých periodách:

Perióda	Firma 1	Firma 2
0	$\frac{3}{8}\frac{a-c}{b}$	$\frac{1}{4}\frac{a-c}{b}$
1	$\frac{3}{8}\frac{a-c}{b}$	$\frac{5}{16}\frac{a-c}{b}$
2	$\frac{11}{32}\frac{a-c}{b}$	$\frac{5}{16}\frac{a-c}{b}$
3	$\frac{11}{32}\frac{a-c}{b}$	$\frac{21}{64}\frac{a-c}{b}$
4	$\frac{43}{128}\frac{a-c}{b}$	$\frac{21}{64}\frac{a-c}{b}$
5	$\frac{43}{128}\frac{a-c}{b}$	$\frac{85}{256}\frac{a-c}{b}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Všeobecný vzťah, ktorý implicitne obsahuje množstvo produkcie Q_1^t ako reakciu na vyrábané množstvo Q_2^{t-1}, možno zapísať nasledovne:

$$\frac{\partial \pi_1(Q_1^t)}{\partial Q_1^t} = a - b(2Q_1^t + Q_2^{t-1}) - c = 0.$$

Z tohto vzťahu je explicitná hodnota množstva Q_1^t nasledovná:

$$Q_1^t = \frac{\frac{a-c}{b} - Q_2^{t-1}}{2}. \tag{2.2}$$

Analogicky možno vyjadriť množstvo Q_2^t v nasledovnom tvare:

$$Q_2^t = \frac{\frac{a-c}{b} - Q_1^{t-1}}{2}. \tag{2.3}$$

Vzťah (2.2) možno jednoduchými úpravami za pomoci (2.3) upraviť do nasledujúceho rekurentného vzorca:

$$
\begin{aligned}
Q_1^t &= \frac{a-c}{2b} - \frac{Q_2^{t-1}}{2} \\
&= \frac{a-c}{2b} - \frac{\frac{a-c}{b} - Q_1^{t-2}}{4} \\
&= \frac{1}{4}Q_1^{t-2} + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b}.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Analogicky dostaneme vzťah pre Q_2^t:

$$
Q_2^t = \frac{1}{4}Q_2^{t-2} + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b}. \tag{2.5}
$$

Z výrazov (2.4) a (2.5) je veľmi jednoduché ukázať, že stabilným bodom tohto systému je práve *rovnovážne duopolistické množstvo*.

2.1.3 Stabilita tichej dohody

V tejto časti budeme hľadať odpoveď na otázku, kedy sa firmám oplatí deviovať od množstva produkcie dohodnutého kartelom. K tomu nám poslúžia predchádzajúce zistenia a úvahy.

Zo vzťahov (2.4) a (2.5) vidíme, že množstvo vyrábané v perióde t nie je rekurentným vyjadrením produkcie z predchádzajúcej periódy, ale množstva z periódy $t-2$. Toto sa dalo očakávať na základe štruktúry uvádzanej stratégie. Postupnosť vyrábanej produkcie pre každého hráča možno teda na základe (2.4) a (2.5) rozdeliť na nasledovné podpostupnosti:

$$
\begin{aligned}
Q_{11}^k &= Q_1^t &\qquad& \text{kde } k = \tfrac{t}{2} \text{ pre } t = 0, 2, 4, \ldots, \\
Q_{12}^k &= Q_1^t && \text{kde } k = \tfrac{t-1}{2} \text{ pre } t = 1, 3, 5, \ldots, \\
Q_{21}^k &= Q_2^t && \text{kde } k = \tfrac{t}{2} \text{ pre } t = 0, 2, 4, \ldots, \\
Q_{22}^k &= Q_2^t && \text{kde } k = \tfrac{t-1}{2} \text{ pre } t = 1, 3, 5, \ldots
\end{aligned}
$$

Ľahko môžeme ukázať, že horeuvedené postupnosti možno rekuretne vyjadriť pomocou predchádzajúceho člena:

$$\begin{aligned} Q_{i1}^k &= Q_i^t = \frac{1}{4}Q_i^{t-2} + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b} = \frac{1}{4}Q_{i1}^{\frac{t}{2}-1} + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b} \\ &= \frac{1}{4}Q_{i1}^{k-1} + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b} \qquad \text{pre } i = 1,2, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} Q_{i2}^k &= Q_i^t = \frac{1}{4}Q_i^{t-2} + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b} = \frac{1}{4}Q_{i2}^{\frac{t-1}{2}-1} + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b} \\ &= \frac{1}{4}Q_{i2}^{k-1} + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b} \qquad \text{pre } i = 1,2. \end{aligned}$$

Úpravou predchádzajúcich vzťahov dostávame

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{k+1} &= \frac{1}{4}Q_{ij}^k + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}Q_{ij}^{k-1} + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b}\right) + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 Q_{ij}^{k-1} + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \dots \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} Q_{ij}^0 + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b}\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} Q_{ij}^0 + \frac{1}{4}\frac{a-c}{b}\frac{(\frac{1}{4})^{k+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} Q_{ij}^0 - \frac{1}{3}\frac{a-c}{b}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} - 1\right) \qquad \text{pre } i,j = 1,2. \end{aligned}$$

Takže dostávame vzťah

$$Q_{ij}^k = \left(\frac{1}{4}\right)^k Q_{ij}^0 + \frac{1}{3}\frac{a-c}{b}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \qquad \text{pre } i,j = 1,2. \tag{2.6}$$

Dosadením do výrazu (2.6) za Q_{ij}^0 dostávame konkrétne podoby postupností Q_{ij}^k pre $i, j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} Q_{11}^k &= \left(\frac{1}{4}\right)^k \frac{3}{8}\frac{a-c}{b} + \frac{1}{3}\frac{a-c}{b}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \\ &= \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\frac{a-c}{b}; \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} Q_{12}^k &= \left(\frac{1}{4}\right)^k \frac{3}{8}\frac{a-c}{b} + \frac{1}{3}\frac{a-c}{b}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \\ &= \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\frac{a-c}{b}; \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} Q_{21}^k &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \frac{a-c}{b} + \frac{1}{3}\frac{a-c}{b}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \\ &= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\frac{a-c}{b}; \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} Q_{22}^k &= \left(\frac{1}{4}\right)^k \frac{5}{16}\frac{a-c}{b} + \frac{1}{3}\frac{a-c}{b}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \\ &= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{48}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\frac{a-c}{b}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pomocou vzťahov (2.7) a (2.9) môžeme vypočítať zisk deviujúcej firmy v každej párnej perióde:

$$\begin{aligned} \pi_1(Q_{11}^k, Q_{21}^k) &= [a - b(Q_{11}^k + Q_{21}^k) - c]Q_{11}^k \\ &= \left[a - b\left(\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\frac{a-c}{b}\right) - c\right]Q_{11}^k \\ &= \left[a - c - \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\Big(a-c\Big)\right]Q_{11}^k \\ &= \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\Big(a-c\Big)\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\frac{a-c}{b} \\ &= \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]^2\frac{(a-c)^2}{b} \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{36}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} + \frac{1}{576}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}\right]\frac{(a-c)^2}{b}. \qquad (2.11)$$

Analogicky možno určiť zisk deviujúcej firmy v nepárnej perióde:

$$\begin{aligned}
\pi_1(Q_{12}^k, Q_{22}^k) &= [a - b(Q_{12}^k + Q_{22}^k) - c]Q_{12}^k \\
&= \left[a - b\left(\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{48}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right]\frac{a-c}{b}\right) - c\right]Q_{12}^k \\
&= \left[a - c - \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{48}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right]\left(a-c\right)\right]Q_{12}^k \\
&= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{48}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right]\left(a-c\right)\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right]\frac{a-c}{b} \\
&= \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{144}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} - \frac{1}{1152}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}\right]\frac{(a-c)^2}{b}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Na základe (2.11) a (2.12) môžeme vypočítať nasledovný celkový zisk deviujúcej firmy:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{2k}\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{36}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} + \frac{1}{576}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}\right]\frac{(a-c)^2}{b} + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{2k+1}\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{144}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} - \frac{1}{1152}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}\right]\frac{(a-c)^2}{b} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{9}\left(1+\delta\right)\delta^{2k} + \frac{1}{36}\left(1+\frac{\delta}{4}\right)\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2k} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{576}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\delta}{4}\right)^{2k}\right]\frac{(a-c)^2}{b} \\
&= \left[\frac{1}{9}\left(\frac{1+\delta}{1-\delta^2}\right) + \frac{1}{36}\left(\frac{1+\frac{\delta}{4}}{1-\frac{\delta^2}{4}}\right) + \frac{1}{576}\left(\frac{1-\frac{\delta}{2}}{1-\frac{\delta^2}{16}}\right)\right]\frac{(a-c)^2}{b}. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Snahou firmy 2 je, aby stratégia opísaná na niekoľkých predchádzajúcich stranách bola dostatočne veľkým trestom na to, aby pre firmu 1 nebolo výhodné deviovať od dohodnutého monopolistického množstva. Ak teda zisk firiem pri vytvorení kartelu bude vyšší ako zisk pri deviácii, žiadna z firiem nemá dôvod odchýliť sa od dohodnutého vyrábaného množstva. Na určenie hodnôt diskontného faktora δ, pri ktorých sa neoplatí deviovať, nám poslúžia výrazy (2.1) a (2.13), pre ktoré musí platiť, že $\pi_1^m > \pi_1$. Takže dostávame vzťah:

$$\frac{1}{8(1-\delta)}\frac{(a-c)^2}{b} > \left[\frac{1}{9}\left(\frac{1+\delta}{1-\delta^2}\right)+\frac{1}{36}\left(\frac{1+\frac{\delta}{4}}{1-\frac{\delta^2}{4}}\right)+\frac{1}{576}\left(\frac{1-\frac{\delta}{2}}{1-\frac{\delta^2}{16}}\right)\right]\frac{(a-c)^2}{b}.$$

Túto nerovnosť možno upraviť na tvar

$$\frac{\delta^2\left(1-\frac{\delta}{4}\right)-\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^3}{64\left(1-\delta\right)\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)\left(1-\frac{\delta^2}{16}\right)} > 0$$

Z tohto výrazu sa hodnoty δ, pre ktoré sa neoplatí deviovať, explicitne vyjadriť nedajú, avšak numericky, za pomoci matematických softvérov, možno ľahko zistiť, že daný výraz je pravdivý pre $\delta > 0,6223$, približne.

Na základe týchto vedomostí môžeme sformulovať nasledujúce tvrdenie:

Veta 5 (Veta prostého ľudu pre Cournotov duopol) *Nech δ je jedno z riešení implicitne zahrnutých v nerovnici*

$$\frac{\delta^2\left(1-\frac{\delta}{4}\right)-\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^3}{64\left(1-\delta\right)\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)\left(1-\frac{\delta^2}{16}\right)} > 0$$

a nech s je profil stratégií, v ktorom firmy 1 a 2 produkujú množstvo $Q_i^t = Q_i^m = \frac{1}{4}\frac{a-c}{b}$ pre $i = 1,2$ a $t = 0,1,2,\ldots$ Potom, pre dostatočne trpezlivú firmu, s je vzhľadom na podhry dokonalé Nashovo ekvilibrium.

Kapitola 3

Cournotov duopol s komplementárnymi tovarmi

V tejto kapitole, podobne ako v predchádzajúcej, budeme skúmať stabilitu vytvoreného kartelu, avšak tentokrát sa budeme pohybovať na trhu komplementárnych tovarov. Najskôr si opíšeme použitý statický model a následne jeho použitím vytvoríme opakovanú hru, ktorú budeme analyzovať.

3.1 Statický model

Uvažujme model s dvomi komplementárnymi produktmi, ktoré majú rovnakú kvalitu u_c. Firmy predávajú pri nulových nákladoch. Firmy volia vyrábané množstvo v snahe maximalizovať svoj zisk.

Zákazníci sú indexovaní parametrom θ, ktorý vyjadruje ich ochotu kúpiť si jednu jednotku tovaru. Predpokladáme, že sú rovnomerne rozložení na intervale $[0, 1]$. Úžitok získaný zákazníkom θ pri kúpe jednej jednotky tovaru je daný vzťahom

$$u_c\theta - p_i \qquad \text{pre } i = 1, 2,$$

pričom p_i vyjadruje cenu tovaru vyrábaného firmou i stanovenú trhom na základe ponuky a dopytu. Pri kúpe oboch produktov súčasne, môžeme o zákazníkovi povedať, že získal nový produkt, ktorý má úžitok u_k. V tejto súvislosti je kľúčový predpoklad

$$u_k = \alpha * u_c, \tag{3.1}$$

kde $\alpha > 2$. Úžitok zákazníka pri kúpe oboch produktov je teda

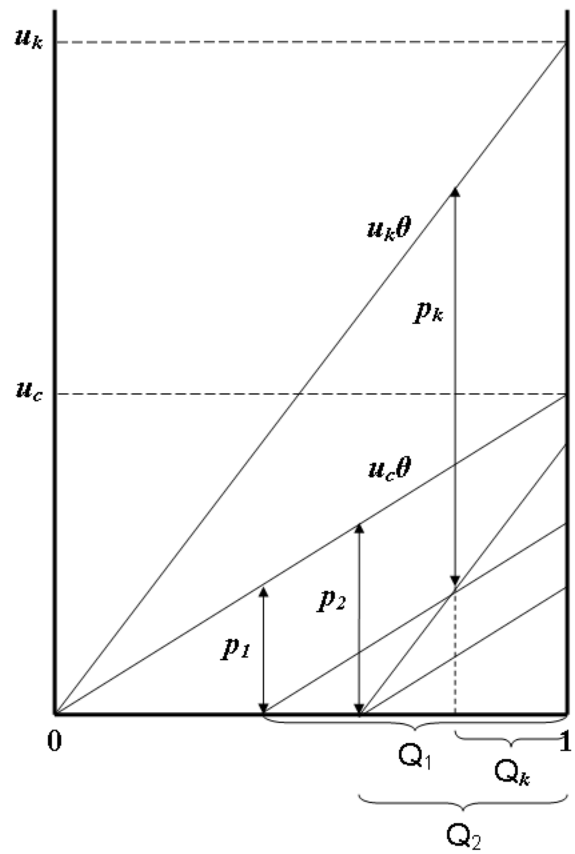
$$u_k\theta - p_k,$$

kde p_k je cena stanovená trhom pre produkt, ktorý je spojením oboch komplementárnych tovarov.

Aby sme sa pohli ďalej, je nutné zistiť cenu jednotlivých produktov stanovenú trhom na základe množstva vyrábaného firmami 1 a 2. Pre lepšiu názornosť použijeme Obrázok 3.1, v ktorom, bez újmy na všeobecnosti, predpokladáme, že firma 1 ponúka väčšie množstvo. Trhom stanovená cena produktu firmy 1 je rovná $p_1 = u_c(1 - Q_1)$. V ďalšom budeme používať značenie $p_c = p_1$. Je zrejmé, že pri nižšej cene by bol dopyt väčší ako ponuka, čím sa vytvára tlak na rast cien, ktoré následne skonvergujú do nami stanovenej ceny p_c. Naopak, ak by cena bola stanovená na vyššiu úroveň ako p_c, ponuka by prevažovala nad dopytom, čo by bol tlak na pokles cien. To by opäť viedlo k poklesu na úroveň p_c.

Rovnakým prístupom môžeme vyjadriť cenu produktu ponúkaného firmou 2, pre ktorú teda platí $p_2 = u_c(1-Q_2)$. Túto cenu však v ďalšom potrebovať nebudeme, keďže z Obrázku 3.1 je zrejmé, že pre každého zákazníka je výhodnejšie kúpiť si tovar ponúkaný firmou 1, keďže v takomto prípade je úžitok každého z nich vyšší ako pri kúpe produktu vyrábaného firmou 2.

Použitím rovnakého princípu môžeme taktiež vyjadriť cenu tretieho produktu, teda produktu tvoreného jednou jednotkou z produkcie oboch firiem. Je zrejmé, že množstvo takýchto tovarov na trhu je determinované produkciou firmy, ktorá vyrába menšie množstvo, a teda platí $p_k = u_k(1 - Q_2)$. Treba si však uvedomiť – je to zrejmé z Obrázku 3.1 – že dopyt po treťom produkte nebude rovný produkcii firmy s menším vyrábaným množstvom,



Obrázok 3.1: Trhom stanovené ceny

pretože niektorí zákazníci májú väčší úžitok pri kúpe iba jedného produktu. Oba produkty si kúpia tí zákazníci, ktorých sklon ku kúpe tovaru θ spĺňa $u_k\theta - p_k \geq u_c\theta - p_c$. A teda dostávame nerovnosť

$$u_k\theta - u_k(1-Q_2) \geq u_c\theta - u_c(1-Q_1),$$

za predpokladu, že firma 1 produkuje viac ako firma 2. Riešením je

$$\theta \geq \frac{u_k(1-Q_2) - u_c(1-Q_1)}{u_k - u_c}.$$

K predchádzajúcemu je potrebné podať vysvetlenie, ako je možné, že hoci cena tovaru produkovaného v menšom objeme je stanovená trhom, dopyt po tomto produkte je v konečnom dôsledku menší ako jeho ponuka. Toto vychádza z predpokladu, že sa pohybujeme na dvoch separátnych, nezávislých, trhoch, a teda produkcia jedného tovaru nemá vplyv na cenu druhého tovaru. Avšak zákazníci sa následne rozhodujú na základe svojich preferencií, čo vedie k tomu, že firma s menšou produkciou vykazuje prebytok ponuky nad dopytom.

Pre ďalšie je kľúčovým predpokladom taktiež fakt, že zisk z predaja tretieho produktu si firmy rozdelia na polovicu.

Na základe týchto vedomostí môžeme zadefinovať nasledujúce funkcie zisku oboch firiem:

$$\pi_1(Q_1,Q_2) = \begin{cases} \frac{u_k}{u_k-u_c}(Q_1-Q_2)u_c(1-Q_1) + \frac{u_kQ_2-u_cQ_1}{u_k-u_c}\frac{u_k}{2}(1-Q_2) & \text{ak } Q_1 \geq Q_2 \\ \\ \frac{u_kQ_1-u_cQ_2}{u_k-u_c}\frac{u_k}{2}(1-Q_1) & \text{ak } Q_1 \leq Q_2 \end{cases}$$

$$\pi_2(Q_1,Q_2) = \begin{cases} \frac{u_k}{u_k-u_c}(Q_2-Q_1)u_c(1-Q_2) + \frac{u_kQ_1-u_cQ_2}{u_k-u_c}\frac{u_k}{2}(1-Q_1) & \text{ak } Q_2 \geq Q_1 \\ \\ \frac{u_kQ_2-u_cQ_1}{u_k-u_c}\frac{u_k}{2}(1-Q_2) & \text{ak } Q_2 \leq Q_1 \end{cases}$$

Z podoby funkcií zisku jednotlivých hráčov možno očakávať, že pri snahe firiem maximalizovať svoj zisk bude mať táto hra štyri (statické) Nashove ekvilibriá. Jedno bude pre prípad, že firma 1 vyrába viac ako firma 2, druhé, naopak, keď bude firma 2 produkovať viac ako firma 1 a dve ekvilibriá môžeme očakávať pre prípad, že obe firmy ponúkajú rovnaké množstvo tovarov. Najprv sa budeme zaoberať situáciou, kedy firma 1 produkuje viac ako firma 2.

Na výpočet optimálne produkovaného množstva opäť použijeme nutné podmienky prvého rádu. Dostávame tak nasledujúcu sústavu rovníc:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} &= \frac{u_k u_c}{u_k - u_c}(1-2Q_1+Q_2) - \frac{u_k u_c}{2(u_k-u_c)}(1-Q_2) = 0 \\
\frac{\partial \pi_2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2} &= \frac{u_k}{2(u_k-u_c)}(u_k - 2u_kQ_2 + u_cQ_1) = 0.
\end{aligned}
$$

Riešením tohto systému je dvojica $(Q_1^*, Q_2^*) = \left(\frac{5u_k}{8u_k-3u_k}, \frac{4u_k+u_c}{8u_k-3u_c}\right)$. Je zrejmé, že toto ekvilibrium je skutočne nami hľadaným ekvilibriom pre prípad, že firma 1 produkuje viac ako firma 2, pretože $Q_1 > Q_2$.

Uvedomme si, že funkcie výplat oboch hráčov sú totožné, a teda ekvilibrium pre prípad, kedy firma 2 vyrába viac ako firma 1 bude $(Q_1^*, Q_2^*) = \left(\frac{4u_k+u_c}{8u_k-3u_c}, \frac{5u_k}{8u_k-3u_k}\right)$.

Teraz upriamime našu pozornosť na prípady ekvilibrií so symetrickým ponúkaným množstvom produkcie. Ak uvažujeme prípad, že obe firmy sa snažia produkovať viac ako konkurencia, opätovným použitím nutných podmienok prvého rádu dostávame

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} &= \frac{u_k u_c}{u_k - u_c}(1-2Q_1+Q_2) - \frac{u_k u_c}{2(u_k-u_c)}(1-Q_2) = 0 \\
\frac{\partial \pi_2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2} &= \frac{u_k u_c}{u_k - u_c}(1-2Q_2+Q_1) - \frac{u_k u_c}{2(u_k-u_c)}(1-Q_1) = 0.
\end{aligned}
$$

Ako už bolo spomenuté, a z uvedenej sústavy je to jasne vidieť, obe firmy budú produkovať rovnaké množstvo, t.j. riešenie hore napísaného systému bude symetrické. Tým riešením je dvojica $(Q_1^*, Q_2^*) = (1, 1)$.

Posledné ekvilibrium vypočítame, ak budeme uvažovať prípad, že obaja hrači sa snažia maximalizovať svoj zisk za predpokladu, že budú vyrábať menej tovarov ako ich konkurent. Dostávame tak nasledujúcu sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_1(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} &= \frac{u_k}{2(u_k-u_c)}(u_k-2u_kQ_1+u_cQ_2)=0\\ \frac{\partial \pi_2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2} &= \frac{u_k}{2(u_k-u_c)}(u_k-2u_kQ_2+u_cQ_1)=0.\end{aligned}$$

Riešením tohto systému je $(Q_1^*,Q_2^*)=\left(\frac{u_k}{2u_k-u_c},\frac{u_k}{2u_k-u_c}\right)$.

A teda po zhrnutí dostávame nasledujúcu tabuľku s prehľadom výplat hráčov v jednotlivých periódach:

Ekvilibrium	Zisk firmy 1	Zisk firmy 2
$\left(\frac{5u_k}{8u_k-3u_k},\frac{4u_k+u_c}{8u_k-3u_c}\right)$	$\frac{u_k(u_k-u_c)}{(8u_k-3u_c)^2}(8u_k+3u_c)$	$\frac{u_k(u_k-u_c)}{(8u_k-3u_c)^2}8u_k$
$\left(\frac{4u_k+u_c}{8u_k-3u_c},\frac{5u_k}{8u_k-3u_k}\right)$	$\frac{u_k(u_k-u_c)}{(8u_k-3u_c)^2}8u_k$	$\frac{u_k(u_k-u_c)}{(8u_k-3u_c)^2}(8u_k+3u_c)$
$(1,1)$	0	0
$\left(\frac{u_k}{2u_k-u_c},\frac{u_k}{2u_k-u_c}\right)$	$\frac{u_ku_c(u_k-u_c)}{2(2u_k-u_c)^2}$	$\frac{u_ku_c(u_k-u_c)}{2(2u_k-u_c)^2}$

Z tejto tabuľky možno ľahko ukázať, že preferovaným ekvilibriom každého hráča je prípad, kedy vyrába viac ako jeho protihráč.

3.2 Nekonečne opakovaný (statický) model

V tejto časti budeme uvažovať nekonečne opakovanú hru Cournotovho duopolu s komplementárnymi tovarmi, t.j. v každej perióde budú firmy hrať hru opísanú v predchádzajúcej časti.

Ako už bolo spomínané v predchádzajúcich kapitolách, v opakovaných hrách nie je potrebné hrať (statické) Nashovo ekvilibrium, a teda v tejto časti sa zameriame na výpočet ekvilibrií, ktoré by mohli byť podporené v tejto opakovanej hre.

3.2.1 Vytvorenie kartelu

Opäť môžeme predpokladať, že firmy v snahe maximalizovať svoj zisk budú spolupracovať, t.j. budú sa snažiť maximalizovať súčet svojich očakávaných ziskov. Opätovným aplikovaním nutnej podmienky prvého rádu dostávame:

$$\frac{\partial \pi_1(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} + \frac{\partial \pi_2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} = \frac{u_k}{2(u_k-u_c)}(u_k - 2u_kQ_1 + u_cQ_2 - u_c + u_cQ_2) = 0$$
$$\frac{\partial \pi_1(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2} + \frac{\partial \pi_2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2} = \frac{u_k}{2(u_k-u_c)}(u_k - 2u_kQ_2 + u_cQ_1 - u_c + u_cQ_1) = 0$$

Zo štruktúry daného systému je zrejmé, že musí platiť $Q_1^* = Q_2^*$. Riešením je teda množstvo $Q_1^* = Q_2^* = \frac{1}{2}$. Zisk každého z hráčov je v takomto prípade $\pi_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{u_k}{8}$.

V ďalšom budeme opäť používať pre zisk firmy i za celú hru značenie π_i. V prípade uzavretia kartelovej dohody bude tento zisk rovný

$$\pi_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \frac{u_k}{8} = \frac{1}{1-\delta}\frac{u_k}{8} \qquad \text{pre } i = 1,2,$$

kde δ je diskontný faktor.

3.2.2 Deviácia od dohodnutého kartelu

Prvoradým cieľom každého z hráčov, firiem, je, ako už niekoľkokrát zaznelo, maximalizácia zisku. Z krátkodobého pohľadu je nástrojom na dosiahnutie tohto cieľa deviácia od vytvoreného kartelu. Z dlhodobého hľadiska však tento prístup nemusí vo väčšine prípadov obstáť. A práve týmto problémom sa budeme opätovne zaoberať, tentokrát v spojitosti s Cournotovým duopolom na trhu komplementárnych tovarov.

Opäť budeme predpokladať, že deviovať bude firma 1 a to hneď v perióde $t = 0$.

Predtým však ako sa pohneme ďalej, pre budúce zjednodušenie práce, vyjadríme najlepšiu reakciu (best response) firmy na množstvo zahrané konkurenčnou firmou v tvare explicitného vzťahu. Aplikovaním nutnej podmienky prvého rádu na prvú vetvu funkcie zisku, dostáveme vyjadrenie optimálne vyrábaného množstva pre firmu s väčšou produkciou:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_i(Q_1, Q_2)}{\partial Q_i} &= \frac{u_k u_c}{u_k - u_c}(1 - 2Q_i + Q_j) - \frac{u_k u_c}{2(u_k - u_c)}(1 - Q_j) = 0 \\ &\Rightarrow Q_i^B = \frac{1 + 3Q_j}{4} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Rovnakým spôsobom získame explicitné vyjadrenie optimálne ponúkaného množstva pre firmu s menšou produkciou:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_i(Q_1, Q_2)}{\partial Q_i} &= \frac{u_k}{2(u_k - u_c)}[u_k Q_i(1 - Q_i) - u_c Q_j(1 - Q_i)] = 0 \\ &\Rightarrow Q_i^B = \frac{u_k + u_c Q_j}{2u_k} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Deviant teda vychádza z predpokladu, že konkurenčná firma bude dodržiavať množstvo stanovené kartelom, a teda dosadením kartelového množstva produkcie $\frac{1}{2}$ do výrazu (3.2) získame deviujúce množstvo v perióde $t = 0$:

$$Q_1^0 = \frac{1 + 3 * \frac{1}{2}}{4} = \frac{5}{8},$$

kde Q_1^0 je množstvo hrané firmou 1 v perióde $t = 0$. Zisk deviujúcej firmy bude $\pi_1\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) = \frac{u_k}{u_k - u_c}\left(\frac{u_k}{8} - \frac{7u_c}{64}\right)$, čo je viac ako pri dodržaní kartelovej dohody.

Trestajúca stratégia bude trochu odlišná ako v prípade klasického Cournotovho duopolu, čo vyplýva z podoby funkcie zisku. Teraz budeme totiž predpokladať, že nedeviujúca firma bude v reakcií na produkciu zahranú deviantom vždy meniť množstvo svojej ponuky tak, aby maximalizovala svoj zisk, avšak za predpokladu, že jej produkcia bude aspoň taká ako u nedeviujúcej firmy, t.j. na výpočet optimálne ponúkanej produkcie budeme používať len vzťah (3.2). Dôvodom pre takýto prístup je snaha, aby deviujúca firma mala vždy menší zisk ako nedeviujúca, čo je taktiež istou formou trestu, nehovoriac o tom, že takto bude zmarená tiež snaha deviujúcej firmy o dosiahnutie maximálneho možného zisku.

A teda trestajúcu produkciu hranú firmou 2 v nasledujúcej perióde získame použitím výrazu (3.2):

$$Q_2^1 = \frac{1 + 3 * \frac{5}{8}}{4} = \frac{23}{32}.$$

Odpoveď firmy 1 však už nie je tak jasná. Teraz už totiž nie je zrejmé, či je pre firmu 1 výhodné hrať množstvo väčšie ako množstvo ponúkané firmou 2, alebo produkovať menej ako firma 2. Na výpočet optimálneho množstva produkcie použijeme teda oba vzťahy, (3.2) aj (3.3), a na základe výšky zisku rozhodneme, aké množstvo bude firma 1 vyrábať v perióde $t = 2$:

$$\begin{aligned}
(3.2) \Rightarrow Q_1^2 &= \frac{1 + 3 * \frac{23}{32}}{4} = \frac{31}{32} \\
\Rightarrow \pi_1\left(\frac{31}{32}, \frac{23}{32}\right) &= \frac{u_k}{2 * 32^2 * (u_k - u_c)}(207u_k - 263u_c); \\
(3.3) \Rightarrow Q_1^2 &= \frac{u_k + u_c * \frac{23}{32}}{2u_k} = \frac{1}{2} + \frac{23}{64}\frac{u_c}{u_k} \\
\Rightarrow \pi_1\left(\frac{1}{2} + \frac{23}{64}\frac{u_c}{u_k}, \frac{23}{32}\right) &= \frac{u_k}{2(u_k - u_c)}\left(\frac{1}{2}u_k - \frac{23}{64}u_c\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{23}{64}\frac{u_c}{u_k}\right).
\end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami sa možno dopracovať k nerovnosti, z ktorej je jasné, že pre firmu 1 je výhodnejšie vyrábať menej ako firma 2, a teda optimálne ponúkaným množstvom firmou 1 v perióde $t = 2$ je $Q_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{23}{64}\frac{u_c}{u_k}$.

Je zrejmé, že v dôsledku použitej trestajúcej stratégie bude firma 1 od periódy $t = 2$ vždy ponúkať množstvo menšia ako firma 2. Ďalší priebeh hry je teda obdobný ako v predchádzajúcej časti, firmy budú postupne v jednotlivých periódach upravovať svoje produkcie v reakcii na množstvo hrané druhou firmou.

V nasledujúcej tabuľke možno vidieť množstvá ponúkané jednotlivými firmami počas niekoľkých prvých periód hry:

Perióda	Firma 1	Firma 2
0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{5}{8}$	$\frac{23}{32}$
2	$\frac{1}{2}+\frac{23}{64}\frac{u_c}{u_k}$	$\frac{23}{32}$
3	$\frac{1}{2}+\frac{23}{64}\frac{u_c}{u_k}$	$\frac{5}{8}+\frac{69}{256}\frac{u_c}{u_k}$
4	$\frac{1}{2}+\frac{5}{16}\frac{u_c}{u_k}+\frac{69}{512}\left(\frac{u_c}{u_k}\right)^2$	$\frac{5}{8}+\frac{69}{256}\frac{u_c}{u_k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Použitím predchádzajúcich vzťahov a zistení dostávame nasledujúce rekurentné vyjadrenie produkcie každej z firiem v jednotlivých periódach:

$$
\begin{aligned}
Q_1^t &= \frac{u_k + u_c Q_2^{t-1}}{2u_k} = \frac{1}{2} + \frac{u_c}{2u_k} Q_2^{t-1} = \frac{1}{2} + \frac{u_c}{2u_k}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} Q_1^{t-2}\right) \\
&= \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k} Q_1^{t-2} + \frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2}; \qquad (3.4) \\
Q_2^t &= \frac{1 + 3Q_1^{t-1}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} Q_1^{t-1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{u_c}{2u_k} Q_2^{t-2}\right) \\
&= \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k} Q_2^{t-2} + \frac{5}{8}. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Z týchto vzťahov je zrejmé, že nasledujúci systém má stabilný bod, keďže $\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k} < 1$, a je ním dvojica $\left(\frac{4u_k+u_c}{8u_k-3u_c}, \frac{5u_k}{8u_k-3u_c}\right)$. Tento bod je jedným z ekvilibrií v statickej hre a je to ekvilibrium preferované firmou 2. Tento poznatok nasvedčuje tomu, že v dlhodobom horizonte si deviujúca firma nedodržaním kartelovej dohody pohorší.

3.2.3 Stabilita tichej dohody

V tejto časti sa pokúsime sformulovať podmienky, za ktorých sa žiadna z firiem neodchýli od dohodnutého kartelu, pretože použitá trestajúca stratégia by zapríčinila pokles zisku deviujúcej firmy počas hry.

Aby sme sa pohli ďalej, potrebujeme spočítať zisk deviujúcej firmy v každej perióde. Na získanie tohto výrazu bude potrebné vyjadriť množstvo ponúkané v jednotlivých periódach na základe produkcie z predchádzajúcej periódy. A teda zopakujeme prístup použitý v časti o klasickom Cournotovom duopole a každú z postupností (3.4) a (3.5) rozdelíme na dve podpostupnosti, čím dosiahneme požadovaný efekt. Formálne teda môžeme napísať:

$$\begin{aligned}
Q_{11}^k &= Q_1^t \qquad && \text{kde } k = \tfrac{t}{2} \text{ pre } t = 0,2,4,\ldots; \\
Q_{12}^k &= Q_1^t \qquad && \text{kde } k = \tfrac{t-1}{2} \text{ pre } t = 1,3,5,\ldots; \\
Q_{21}^k &= Q_2^t \qquad && \text{kde } k = \tfrac{t}{2} \text{ pre } t = 0,2,4,\ldots; \\
Q_{22}^k &= Q_2^t \qquad && \text{kde } k = \tfrac{t-1}{2} \text{ pre } t = 1,3,5,\ldots
\end{aligned}$$

Ľahko možno opäť ukázať, že v takto získaných postupnostiach je každý člen vyjadrený pomocou predchádzajúceho:

$$\begin{aligned}
Q_{11}^k &= Q_1^t = \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_1^{t-2} + \frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{11}^{\frac{t}{2}-1} + \frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{11}^{k-1} + \frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2}; \\
Q_{12}^k &= Q_1^t = \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_1^{t-2} + \frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{12}^{\frac{t-1}{2}-1} + \frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{12}^{k-1} + \frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2}; \\
Q_{21}^k &= Q_2^t = \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_2^{t-2} + \frac{5}{8} = \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{21}^{\frac{t}{2}-1} + \frac{5}{8} \\
&= \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{21}^{k-1} + \frac{5}{8}; \\
Q_{22}^k &= Q_2^t = \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_2^{t-2} + \frac{5}{8} = \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{22}^{\frac{t-1}{2}-1} + \frac{5}{8} \\
&= \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{22}^{k-1} + \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

Postupným upravovaním horeuvedených výrazov získame explicitné vyjadrenie množstva ponúkaného firmami v jednotlivých periódach:

$$
\begin{aligned}
Q_{1j}^{k+1} &= \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{1j}^{k} + \frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{1j}^{k-1} + \frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2} \\
&= \left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^2 Q_{1j}^{k-1} + \left(\frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right) = \dots \\
&= \left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^{k+1} Q_{1j}^{0} + \left(\frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k} + \left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^k\right) \\
&= \left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^{k+1} Q_{1j}^{0} + \left(\frac{1}{8}\frac{u_c}{u_k} + \frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^{k+1} - 1}{\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k} - 1} \qquad \text{pre } j = 1, 2,
\end{aligned}
$$

resp.

$$
\begin{aligned}
Q_{2j}^{k+1} &= \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{2j}^{k} + \frac{5}{8} = \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}Q_{2j}^{k-1} + \frac{5}{8}\right) + \frac{5}{8} \\
&= \left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^2 Q_{2j}^{k-1} + \frac{5}{8}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right) = \dots \\
&= \left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^{k+1} Q_{2j}^{0} + \frac{5}{8}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k} + \left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^k\right) \\
&= \left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^{k+1} Q_{2j}^{0} + \frac{5}{8}\frac{\left(\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}\right)^{k+1} - 1}{\frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k} - 1} \qquad \text{pre } j = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Použitím substitúcie $\beta = \frac{3}{8}\frac{u_c}{u_k}$ ($= \frac{3}{8}\frac{1}{\alpha}$ zo vzťahu (3.1)) dostávame:

$$
\begin{aligned}
Q_{1j}^{k} &= \beta^k Q_{1j}^{0} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\beta\right)\frac{1-\beta^k}{1-\beta} \qquad \text{pre } j = 1, 2; \\
Q_{2j}^{k} &= \beta^k Q_{2j}^{0} + \frac{5}{8}\frac{1-\beta^k}{1-\beta} \qquad \text{pre } j = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Dosadením za Q_{1j}^0 a Q_{2j}^0 teda získame optimálne vyrábané množstvo v jednotlivých periódach pre obe firmy:

$$
Q_{11}^{k} = \frac{5}{8}\beta^k + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\beta\right)\frac{1-\beta^k}{1-\beta}
$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{8}\left(1-\frac{23}{3}\beta\right)\beta^k + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\beta\right)\right); \tag{3.6}$$

$$Q_{11}^k = \frac{5}{8}\beta^k + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\beta\right)\frac{1-\beta^k}{1-\beta}$$
$$= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{8}\left(1-\frac{23}{3}\beta\right)\beta^k + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\beta\right)\right); \tag{3.7}$$

$$Q_{21}^k = \frac{1}{2}\beta^k + \frac{5}{8}\frac{1-\beta^k}{1-\beta}$$
$$= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{8}\left(-1-4\beta\right)\beta^k + \frac{5}{8}\right); \tag{3.8}$$

$$Q_{22}^k = \frac{23}{32}\beta^k + \frac{5}{8}\frac{1-\beta^k}{1-\beta}$$
$$= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}-\frac{23}{4}\beta\right)\beta^k + \frac{5}{8}\right). \tag{3.9}$$

Použitím vzťahov (3.6) a (3.8) môžeme vyjadriť zisk deviujúcej firmy v každej párnej perióde (okrem periódy $t = 0$, resp. $k = 0$) v nasledujúcom tvare:

$$\begin{aligned}
\pi_1(Q_{11}^k, Q_{21}^k) = {} & \frac{u_k}{2(u_k-u_c)}\left[\frac{u_k}{1-\beta}\left(\frac{1}{8}\left(1-\frac{23}{3}\beta\right)\beta^k + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\beta\right)\right)\right.\\
& \left.-\frac{u_c}{1-\beta}\left(\frac{1}{8}\left(-1-4\beta\right)\beta^k+\frac{5}{8}\right)\right] * \\
& *\left[\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{8}\left(-1+\frac{23}{3}\beta\right)\beta^k + \left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\beta\right)\right)\right]\\
= {} & \frac{1}{2(1-\beta)^2}\frac{u_k}{u_k-u_c}\left[\frac{u_c}{8}\left(\alpha-\frac{23}{3}\alpha\beta+1+4\beta\right)\beta^k\right.\\
& \left.+\frac{u_c}{8}*8*\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\alpha\beta-\frac{5}{8}\right)\right]*\\
& *\left[\frac{1}{8}\left(-1+\frac{23}{3}\beta\right)\beta^k + \left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\beta\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Zavedením substitúcií

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2(1-\beta)^2}\frac{1}{8}\Big(\alpha - \frac{23}{3}\alpha\beta + 1 + 4\beta\Big) * \Big(-1 + \frac{23}{3}\beta\Big) \\
b &= \frac{1}{2(1-\beta)^2}\Bigg[\Big(\alpha - \frac{23}{3}\alpha\beta + 1 + 4\beta\Big) * \Big(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\beta\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\alpha\beta - \frac{5}{8}\Big) * \Big(-1 + \frac{23}{3}\beta\Big)\Bigg] \\
c &= \frac{8}{2(1-\beta)^2}\Big(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\alpha\beta - \frac{5}{8}\Big) * \Big(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\beta\Big)
\end{aligned}
$$

môžeme upraviť výraz (3.10) na nasledujúci tvar:

$$
\pi_1(Q_{11}^k, Q_{21}^k) = \frac{u_k u_c}{8(u_k - u_c)}\Big(a * \beta^{2k} + b * \beta^k + c\Big). \tag{3.11}
$$

Tento vzťah nemožno použiť na vyjadrenie zisku deviujúcej firmy v periódе $t = 0$, resp. $k = 0$, pretože v tejto periódе (ako jedinej počas celého trvania hry) firma 1 produkovala viac ako firma 2, t.j. na výpočet jej zisku bol použitý iný vzťah a tento zisk bol $\pi_1\Big(Q_1^0, Q_2^0\Big) = \pi_1\Big(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{u_k}{u_k - u_c}\Big(\frac{u_k}{8} - \frac{7u_c}{64}\Big)$.

Použitím výrazov (3.7) a (3.9) vypočítame zisk deviujúcej firmy v každej nepárnej periódе:

$$
\begin{aligned}
\pi_1(Q_{12}^k, Q_{22}^k) &= \frac{u_k}{2(u_k - u_c)}\Bigg[\frac{u_k}{1-\beta}\Bigg(\frac{1}{8}\Big(1 - \frac{23}{3}\beta\Big)\beta^k + \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\beta\Big)\Bigg) \\
&\quad - \frac{u_c}{1-\beta}\Bigg(\frac{1}{8}\Big(\frac{3}{4} - \frac{23}{4}\beta\Big)\beta^k + \frac{5}{8}\Bigg)\Bigg] * \\
&\quad * \Bigg[\frac{1}{1-\beta}\Bigg(\frac{1}{8}\Big(-1 + \frac{23}{3}\beta\Big)\beta^k + \Big(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\beta\Big)\Bigg)\Bigg] \\
&= \frac{1}{2(1-\beta)^2}\frac{u_k}{u_k - u_c}\Bigg[\frac{u_c}{8}\Big(\alpha - \frac{23}{3}\alpha\beta - \frac{3}{4} + \frac{23}{4}\beta\Big)\beta^k
\end{aligned}
$$

$$+\frac{u_c}{8}*8*\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\alpha\beta-\frac{5}{8}\right)\Bigg]*$$
$$*\left[\frac{1}{8}\left(-1+\frac{23}{3}\beta\right)\beta^k+\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\beta\right)\right]. \tag{3.12}$$

Zavedením ďalších substitúcií

$$d=\frac{1}{2(1-\beta)^2}\frac{1}{8}\left(\alpha-\frac{23}{3}\alpha\beta-\frac{3}{4}+\frac{23}{4}\beta\right)*\left(-1+\frac{23}{3}\beta\right)$$
$$e=\frac{1}{2(1-\beta)^2}\Bigg[\left(\alpha-\frac{23}{3}\alpha\beta-\frac{3}{4}+\frac{23}{4}\beta\right)*\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\beta\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\alpha\beta-\frac{5}{8}\right)*\left(-1+\frac{23}{3}\beta\right)\Bigg]$$

upravíme vzťah (3.12) na nasledujúci tvar:

$$\pi_1(Q_{12}^k,Q_{22}^k)=\frac{u_k u_c}{8(u_k-u_c)}\Big(d*\beta^{2k}+e*\beta^k+c\Big). \tag{3.13}$$

Keď poznáme zisk deviujúcej firmy v každej periode, tak bez problémov spočítame zisk tejto firmy za celú hru, ktorý je rovný súčtu diskontovaných ziskov v jednotlivých periódach. A teda na základe výrazov (3.11) a (3.13) dostávame:

$$\pi_1=\frac{u_k}{u_k-u_c}\left(\frac{u_k}{8}-\frac{7u_c}{64}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{2k}\left[\frac{u_k u_c}{8(u_k-u_c)}\Big(a*\beta^{2k}+b*\beta^k+c\Big)\right]$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{2k+1}\left[\frac{u_k u_c}{8(u_k-u_c)}\Big(d*\beta^{2k}+e*\beta^k+c\Big)\right]$$
$$=\frac{u_k u_c}{8(u_k-u_c)}\left(\alpha-\frac{7}{8}\right)+\frac{u_k u_c}{8(u_k-u_c)}\Bigg[\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{2k}\Big(a*\beta^{2k}+b*\beta^k+c\Big)$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{2k+1}\Big(d*\beta^{2k}+e*\beta^k+c\Big)\Bigg]$$
$$=\frac{u_k u_c}{8(u_k-u_c)}\Bigg(\alpha-\frac{7}{8}+a\frac{(\beta\delta)^2}{1-(\beta\delta)^2}+b\frac{\beta\delta^2}{1-\beta\delta^2}+c\frac{\delta^2}{1-\delta^2}$$

$$
\begin{aligned}
&+d\frac{\delta}{1-(\beta\delta)^2}+e\frac{\delta}{1-\beta\delta^2}+c\frac{\delta}{1-\delta^2}\Bigg) \\
&= \frac{u_k}{8(\alpha-1)}\left(\alpha-\frac{7}{8}+\frac{a(\beta\delta)^2+d\delta}{1-(\beta\delta)^2}+\frac{b\beta\delta^2+e\delta}{1-\beta\delta^2}+\frac{c\delta}{1-\delta}\right) \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

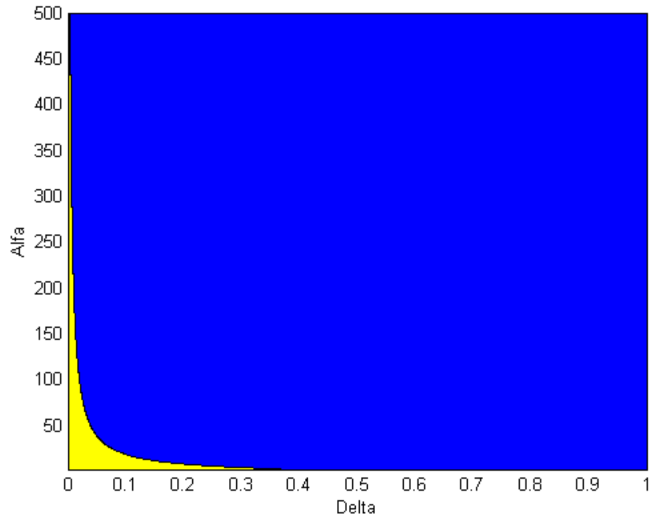
Aplikovaním rovnakých úvah ako v časti o klasickom Cournotovom duopole môžeme teraz zistiť, za akých podmienok je vyššie popísaná stratégia dostatočným trestom pre deviujúceho hráča, resp. za akých podmienok sa žiadnemu z hráčov neoplatí odchýliť sa od dohodnutého kartelu. Výsledkom budú opäť hodnoty diskontného faktora δ, pri ktorých je zisk každej z firiem vyšší pri dodržaní kartelovej dohody ako pri deviácii. Riešenie získame z nasledujúceho vzťahu:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-\delta}\frac{u_k}{8} &> \frac{u_k}{8(\alpha-1)}\left(\alpha-\frac{7}{8}+\frac{a(\beta\delta)^2+d\delta}{1-(\beta\delta)^2}+\frac{b\beta\delta^2+e\delta}{1-\beta\delta^2}+\frac{c\delta}{1-\delta}\right) \\
\frac{1}{1-\delta} &> \frac{1}{\alpha-1}\left(\alpha-\frac{7}{8}+\frac{a(\beta\delta)^2+d\delta}{1-(\beta\delta)^2}+\frac{b\beta\delta^2+e\delta}{1-\beta\delta^2}+\frac{c\delta}{1-\delta}\right) \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Za povšimnutie stojí fakt, že v nerovnici (3.15) hodnota výrazu na ľavej ani pravej strane nezávisí od u_k či u_c. Jediné neznáme, ktoré vstupujú do tohto vzťahu, sú veľkosť diskontného faktora δ a hodnota α, ktorá vyjadruje koľkokrát vyšší úžitok poskytuje nákup oboch tovarov v porovnaní s kúpou len jedného tovaru.

Obrázok 3.2 predstavuje grafické zobrazenie vzťahu (3.15). Modrou farbou je vyznačená oblasť, na ktorej je výraz (3.15) pravdivý, t.j. oblasť, na ktorej sa žiadnému z hráčov neoplatí deviovať, pretože by to v dlhodobom horizonte pre neho znamenalo pokles zisku.

Na základe všetkých predchádzajúcich výpočtov a zistení môžeme sformulovať nasledujúce tvrdenie:



Obrázok 3.2: Oblasť stabilnej kartelovej dohody

Veta 6 (Veta prostého ľudu pre Cournotov duopol s komplementmi) *Nech α a δ nadobúdajú také hodnoty, pre ktoré spĺňajú nerovnosť*

$$\frac{1}{1-\delta} > \frac{1}{\alpha-1}\left(\alpha - \frac{7}{8} + \frac{a(\beta\delta)^2 + d\delta}{1-(\beta\delta)^2} + \frac{b\beta\delta^2 + e\delta}{1-\beta\delta^2} + \frac{c\delta}{1-\delta}\right)$$

a nech s je profil stratégií, v ktorom firmy 1 a 2 produkujú množstvo $Q_i^t = \frac{1}{2}$ pre $i = 1, 2$ a $t = 0, 1, 2, \ldots$ Potom, pre dostatočne trpezlivú firmu, s je vzhľadom na podhry dokonalé Nashovo ekvilibrium.

Záver

Cieľom tejto práce bolo hľadanie podmienok, pri ktorých možno prehlásiť tichú dohodu medzi dvomi spoločnosťami za stabilnú, t.j. stanovenie hodnôt diskontného faktora δ, pre ktoré je zisk každej z firiem vyšší pri kooperácii ako pri deviácii.

Pri skúmaní oboch modelov, ktoré boli v tejto práci predstavené, sme nazerali na trhovú konkurenciu medzi spoločnosťami ako na nekonečne opakovanú hru. Vychádzajúc z tohto predpokladu, bola hlavným stavebným kameňom tejto analýzy Veta prostého ľudu, ktorá vymedzuje množinu vzhľadom na podhry dokonalých ekvilibrií pre nekonečne opakované hry. Základnou podmienkou dosiahnutia stanoveného cieľa bolo navrhnutie profilov stratégií pre obe firmy. Tieto následne determinovali celý priebeh hry. Tým pádom sme mali všetky potrebné informácie, aby sme mohli určiť podmienky, za ktorých je kartel vytvorený dvomi konkurenčnými firmami stabilný.

Výsledkom pre každý skúmaný model je nerovnosť, ktorej pravdivostná hodnota hovorí o stabilite príslušnej nekonečne opakovanej hry, čím sme splnili stanovený cieľ.

Literatúra

[1] Chamberlin, E. (1929): "Duopoly: Value where sellers are few", *Quarterly Journal of Economics* 43: 63–100.

[2] Crémer, J. (1986): "Cooperation in ongoing organizations", *Quarterly Journal of Economics* 101: 33–49.

[3] Friedman, J. (1971): "A noncooperative equilibrium for supergames", *Review of Economic Studies* 38: 1–12.

[4] Fudenberg, D. & Kreps, D. & Maskin, E. (1990): "Repeated games with long-run and short-run players", *Review of Economic Studies* 57: 555–574.

[5] Fudenberg, D. & Levine, D. (1990): "Efficiency and observability in games with long-run and short-run players", Mimeo.

[6] Fudenberg, D. & Maskin, E. (1986): "The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information", *Econometrica* 54: 533–556.

[7] Fudenberg, D. & Tirole, J. (1991): "Game theory", The MIT Press.

[8] Gabszewicz, J. & Sonnac, N. & Wauthy, X. (2001): "On price competition with complementary goods", *Elsevier* 70: 431–437.

[9] http://cepa.newschool.edu/het/profiles/cournot.htm

[10] Kandori, M. (1989): "Social norms and community enforcement", Mimeo.

[11] Macaulay, S. (1963): "Non-contractual relations in business: A preliminary study", *American Sociological Review* 28: 55–67.

[12] Mayberry, J. P. & Nash, J. F. & Shubik, M. (1953): "A comparison of treatments of a duopoly situation", *Econometrica* 21: 141–154.

[13] Nash, J. F. (1951): "Non-cooperative games", *Annals of Mathematics* 54: 286–295.

[14] Puente, S. (2002): "Dynamic Stability in Repeated Games".

[15] Rubinstein, A. (1979): "Equilibrium in supergames with the overtaking criterion", *Journal of Economic Theory* 21: 1–9.

[16] Smith, L. (1989): "Folk theorems in overlapping-generations games", Mimeo.

[17] Wen, Q. (1994): "The "Folk Theorem" for Repeated Games with Complete Information", *Econometrica* 62: 949–954.