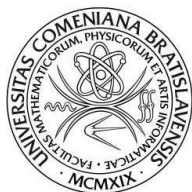


FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



Hodnotenie investície do obnoviteľného zdroja
energie prostredníctvom reálnych opcí

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Hodnotenie investície do obnoviteľného zdroja energie prostredníctvom reálnych opcií

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Ladislav Barkoci

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Zuzana Chladná

BRATISLAVA 2008

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne, len s pomocou nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a uvedenej literatúry.

V Bratislave, júl 2008

.....

Ladislav Barkoci

PodĎakovanie

Veľmi pekne ďakujem vedúcej diplomovej práce RNDr. Zuzane Chladnej za jej odborné vedenie, pripomienky, návrhy a čas, ktorý mi venovala pri vypracovávaní diplomovej práce.

Abstrakt

Účelom tejto práce je hodnotenie investície do obnoviteľného zdroja energie z pohľadu drobného investora. Predstavíme pomerne novú a v praxi zatiaľ málo známu metódu hodnotenia investičných príležitostí—*metódu reálnej opcie*, ktorá umožňuje lepšie zachytenie flexibility v investičnom rozhodovaní než klasická metóda čistej súčasnej hodnoty (NPV). Vysvetlíme jednoduchý a ľahko použiteľný spôsob riešenia úloh s reálnymi opciami založený na modelovaní budúceho vývoja hodnoty investičného projektu pomocou binomického stromu. Aplikujúc reálne opcie zhodnotíme z pohľadu bežného drobného investora efektívnosť investície do slnečných kolektorov za účelom dosiahnutia úspory nákladov na energiu.

Kľúčové slová: reálna opcia, NPV, hodnotenie investičných projektov, obnoviteľný zdroj energie

Obsah

Úvod	3
1 Reálne opcie a investičné rozhodovanie	5
1.1 Porovnanie prístupu NPV a reálnej opcie	6
1.2 Definícia reálnych opcií a ich porovnanie s finančnými opciami	8
1.3 Optimálny čas investície	9
1.4 Typy reálnych opcií	9
2 Riešenie reálnych opcií	11
2.1 Binárne stromové modely	11
2.1.1 Jednokrokový binárny model	11
2.1.2 Viackrokový binárny stromový model	13
2.2 Oceňovanie európskych reálnych opcií	15
2.3 Oceňovanie amerických reálnych opcií	17
2.4 Kalibrácia binárnych stromov	20
3 Hodnotenie investície do obnoviteľného zdroja energie prostredníctvom reálnych opcií	23
3.1 Motivácia	23
3.2 Formulácia modelu	24
3.2.1 Predpoklady modelu a definícia premenných	24
3.2.2 Analýza a zostavenie modelu	26
3.3 Riešenie modelu	31
3.4 Analýza výsledkov	36
Záver	40
Literatúra	41

Prílohy	44
A Úplné binomické stromy riešenia modelu	44
B Úplné binomické stromy optimálnych rozhodnutí	48

Úvod

Dvadsiate storočie sa zvykne označovať aj ako storočie ropy. Dvadsiateprvé storočie bude érou jej všeobecného, katastrofálneho nedostatku. Tempo, akým sa v krajinách BRIC (Brazília, Rusko, India, Čína) darí čoraz väčšej časti obyvateľov dostať z biedy do nižšej strednej vrstvy, je určujúce aj pre rast ich dopytu po energii. Spolu s tradične veľkou spotrebou vyspelých západných krajín to vyvoláva tlak na rast ťažby ropy, svetové ložiská sú však obmedzené. Najmä štáty s malými zásobami čoraz viac rozmyšľajú o spôsobe jej náhrady a snažia sa využívať *obnoviteľné zdroje energie*¹.

Najväčším z obnoviteľných zdrojov energie je *slnečná energia*. Množstvo dopadajúcej slnečnej energie na Zem je približne 14 000-krát väčšie ako celá energia spotrebúvaná ľudstvom v súčasnosti². Jedným zo spôsobov jej využitia sú slnečné kolektory. Aj keď sa v poslednej dobe zvyšuje ekologické povedomie ľudstva, stále platí, že určujúcim faktorom ich rozšírenosti (a tým aj podielu slnečných kolektorov na svetovej produkcii energie) je ich ekonomická výhodnosť v porovnaní s ostatnými zdrojmi.

Cieľom predkladanej práce je hodnotenie investície do obnoviteľného zdroja energie. Veriac v premisu, že masové rozšírenie akejkoľvek technológie je determinované jej výhodnosťou pre priemerného človeka, snažíme sa určiť rentabilitu takejto investície z pohľadu drobného investora.

Doteraz najviac používaná metóda hodnotenia ekonomickej efektívnosti—*čistá súčasná hodnota* (Net Present Value) čelí kritike kvôli svojej nedostatočnej schopnosti zachytiť viacero aspektov, ktoré môžu významnou mierou ovplyvniť hodnotu projektu a tým aj investičné rozhodovanie. NPV zlyháva napríklad v prípade *stochastického vývoja vstupných parametrov* v čase alebo pri posudzovaní *flexibility manažérskeho rozhodovania* počas trvania projektu (napríklad zvýšenie produkcie

¹pozri napríklad [1]

²http://solarsys.wmtrade.sk/index.php?option=com_content&task=view&id=23&Itemid=33

pri priaznivom vývoji alebo naopak jej zníženie s cieľom obmedziť straty pri vývoji negatívnom). NPV sa snaží odpovedať na otázku, *či máme investovať*, nevie však poskytnúť odpoveď na to, *kedy investovať*.

Problémy čistej súčasnej hodnoty sa snaží riešiť *teória reálnych opcií*. V jej ponímaní je investícia chápaná ako možnosť voľby³ realizovať daný projekt v priebehu nejakého časového obdobia. Aplikujúc poznatky z teórie finančných opcií sa táto teória snaží odpovedať na otázky: Aká je hodnota práva vykonať investíciu v priebehu daného obdobia? Kedy by sme mali právo vykonať investíciu uplatniť?

Diplomová práca je rozdelená do troch kapitol. V prvej kapitole sa venujeme predstaveniu reálnych opcií, porovnávame ich s metódou čistej súčasnej hodnoty a ukazujeme ich rôznorodosť.

V druhej kapitole vybudujeme od základov teóriu slúžiacu na riešenie reálnych opcií pomocou binomických stromov. Predstavíme si základné typy opcií a odvodíme ich riešenie. Ďalej si ukážeme ako postupovať pri konštrukcii binomického stromu.

V tretej kapitole aplikujeme teóriu reálnych opcií na riešenie problému hodnotenia ekonomickej výhodnosti investície do slnečných kolektorov z pohľadu drobného investora. Okrem určenia celkovej efektívnosti si porovnáme viaceré alternatívy umožňujúce (za cenu rozdielnych počiatočných nákladov) rozličnú využiteľnosť slnečných kolektorov. Ukážeme si tiež, ako riešiť pomocou reálnych opcií otázku správneho načasovania investície.

³option (angl.)—možnosť, právo voľby, výberu

Kapitola 1

Reálne opcie a investičné rozhodovanie

Investícia sa v ekonómii chápe ako akt obetovania súčasných nákladov v prospech očakávaných budúcich ziskov¹. Rozhodnutia o budúcich investíciách sú nanajvýš dôležité, pretože²:

- operujú s najväčšími sumami peňazí
- sú spojené s investovaním do fixných aktív s dlhou životnosťou
- stoja veľa času
- sú veľmi neisté a rizikové.

Klasickú teóriu hodnotenia investičných projektov reprezentuje *metóda čistej súčasnej hodnoty* (net present value—NPV). Investičné rozhodovanie by podľa tejto metódy malo pozostávať z troch krokov. Prvým je výpočet súčasnej hodnoty budúcich peňažných tokov, ktoré nám táto investícia prinesie. V druhom kroku by sme mali určiť súčasnú hodnotu všetkých výdavkov, ktoré sú potrebné na uskutočnenie investície a dosiahnutie budúcich príjmov. Posledným krokom je určenie rozdielu medzi týmito dvoma hodnotami. Ak je výsledok kladný (súčasná hodnota príjmov prevyšuje súčasnú hodnotu výdavkov), tak by sme mali investovať, ak je záporný, tak by sme mali investíciu zamietnuť.

Čistá súčasná hodnota je však založená na niektorých implicitných predpokladoch, ktoré sú často prehliadané³. NPV predpokladá, že *investícia je vratná*, t.j.

¹Dixit, Pindyck, 1994, str. 3 [5]

²Kráľovič, Vlachynský, 2002, str. 62 [8]

³Dixit, Pindyck, 1994, str. 6 [5]

nejakým spôsobom môže byť zvrátiteľná a výdavky na ňu použité môžu byť získané späť. Ak je investícia nevratná, tak NPV predpokladá, že ide o možnosť investovať *teraz alebo nikdy*, t.j., ak ju podnik nepodnikne teraz, tak ju už nebude môcť podniknúť nikdy v budúcnosti. Väčšina reálnych investičných projektov však tieto predpoklady nespĺňa.

Problémom NPV je aj spôsob, akým posudzuje vplyv náhodných veličín. Tieto sú v procese výpočtu nahradzované ich strednými hodnotami, bez posúdenia vplyvu ich vývoja na manažérske rozhodovanie, čo vedie k skresleniu výsledku.

V ďalšej časti si budeme na jednoduchom príklade ilustrovať rozdiely v posudzovaní investičných rozhodnutí pri použití NPV a reálnej opcie.

1.1 Porovnanie prístupu NPV a reálnej opcie

Na porovnanie prístupu oboch metód použijeme jednoduchý príklad⁴. Predstavme si podnik, ktorý má možnosť investovať do továrne na výrobu nejakého výrobku. Investícia je nevratná, t.j. továreň a jej strojové zariadenie je natoľko špecifické, že je použiteľné len na výrobu tohto jediného výrobku, a podnik nemôže (napríklad v prípade nepriaznivého vývoja) továreň predať a tým získať svoje prostriedky späť. Kvôli jednoduchosti predpokladajme, že továreň môže byť postavená hneď (výška investície je 1 600 korún) a na začiatku každého roka (aj v období 0) vyprodukuje jeden výrobok, ktorý sa hneď predá. Aktuálny zisk z predaja jedného výrobku je vo výške 200 korún, ale ďalší rok sa zmení. S pravdepodobnosťou $p = 0,5$ narastie na 300 korún a s pravdepodobnosťou $(1 - p)$ klesne na 100 korún. Kvôli jednoduchosti tiež predpokladajme, že v ďalších obdobiach sa zisk už meniť nebude a riziko jeho zmeny je perfektne diverzifikovateľné, a teda budúce peňažné toky diskontujeme bezrizikovou úrokovou mierou (10% p.a.).

Aká je hodnota tejto investície? Mal by podnik investovať hneď alebo počkať ako sa zmení zisk z predaja výrobku?

Uvažujme, že investujeme hneď. Počítajúc čistú súčasnú hodnotu klasickým spôsobom dostávame výsledok⁵:

$$NPV_1 = -1600 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1,1)^t} = -1600 + 2200 = 600 \quad (1.1)$$

⁴Dixit, Pindyck, 1994, str. 27 [5]

⁵Všimnime si, že pri výpočte sme na odhad budúceho zisku použili jeho strednú hodnotu (určenú pomocou pravdepodobností jeho jednotlivých možných hodnôt)

Čistá súčasná hodnota projektu určená pomocou klasickej NPV je kladná, mali by sme teda investíciu bezodkladne uskutočniť.

Záver uvedený vyššie je však nesprávny, pretože pri výpočte sme nezohľadnili *oportunitné náklady* rozhodnutia investovať hneď oproti rozhodnutiu počkať na zmenu zisku a v prípade jeho nepriaznivého vývoja investíciu neuskutočniť. Aby sme identifikovali tieto náklady, počítajme NPV opäť, tentokrát za predpokladu, že investíciu odložíme o rok a rozhodneme sa na základe čistej súčasnej hodnoty projektu v dvoch rozličných alternatívach vývoja⁶:

$$\begin{aligned} NPV_2 &= 0,5 \max \left\{ \frac{-1600}{1,1} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{300}{(1,1)^t}; 0 \right\} + 0,5 \max \left\{ \frac{-1600}{1,1} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{100}{(1,1)^t}; 0 \right\} \\ &= 0,5 \max \left\{ \frac{-1600 + 3300}{1,1}; 0 \right\} + 0,5 \max \left\{ \frac{-1600 + 1100}{1,1}; 0 \right\} \\ &= 0,5 \left\{ \frac{1700}{1,1} \right\} + 0,5 \{0\} = \frac{850}{1,1} = 773 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ak počkáme rok, predtým než sa rozhodneme či investovať do továrne, tak dnešná čistá súčasná hodnota projektu vzrastie na 773 korún.

Všimnime si, že ak by sme mali možnosť investovať len dnes alebo nikdy, tak správnym rozhodnutím by bolo investovať dnes. V prípade, že nie je možnosť vyčkať s investíciou (a teda nie sú ani oportunitné náklady nevyužitia tejto možnosti), tak platí klasická NPV. Investovať dnes by bolo správne rozhodnutie aj v situácii, že by sme mohli v prípade nepriaznivého vývoja zisku svoju investíciu odvolať a získať investované prostriedky späť. Dve veci sú potrebné na vznik oportunitných nákladov—nevratnosť investície a možnosť odložiť čas investovania na budúcnosť.

Všimnime si tiež, že možnosť oddialiť investíciu má svoju hodnotu. Na jej výpočet môžeme použiť predchádzajúce zistenia a hodnotu takejto *reálnej opcie* určiť ako rozdiel medzi NPV projektu s opciou a NPV projektu bez opcie:

$$NPV_2 - NPV_1 = 773 - 600 = 173$$

V našom príklade má opcia oddialiť investíciu hodnotu 173 korún.

⁶Všimnime si, že keďže investícia sa uskutoční až v čase 1, tak v čase 0 projekt neprináša žiadne výdavky ani príjmy.

1.2 Definícia reálnych opcií a ich porovnanie s finančnými opciami

Definícia 1.1 (Reálna opcia) *Reálna opcia je právo, nie však povinnosť, vykonať nejakú investíciu za vopred stanovenú cenu (realizačná cena) do stanoveného času (čas expirácie, maturita opcie)⁷.*

Investícia sa považuje za nenávratnú. Ak podnik investuje, využije danú opciu, avšak vzdáva sa možnosti ďalšieho odkladu rozhodnutia (*oportunitné náklady*).

Teória reálnych opcií vznikla aplikáciou poznatkov získaných pri oceňovaní finančných opcií na svet reálnych investičných projektov. Podobne ako v prípade finančných opcií, aj pri reálnych opciách možno identifikovať základné faktory ovplyvňujúce ich hodnotu:

1. *Podkladové aktívum*—Pri finančných opciách je podkladovým aktívom nejaký finančný nástroj (napríklad akcia), podkladovým aktívom reálnych opcií je konkrétny *investičný projekt*.
2. *Realizačná cena*—Pri finančných opciách predstavuje cenu, za ktorú môžeme kúpiť (alebo predať) dané aktívum. Pri reálnych opciách je to výška prostriedkov, ktoré musíme investovať do projektu, *výška investície*.
3. *Čas expirácie*—Pri reálnych opciách je to čas, do ktorého môžeme investíciu uskutočniť.
4. *Volatilita podkladového aktíva*—Volatilitu hodnoty investičného projektu charakterizuje *rizikovosť projektu*.
5. *Bezriziková úroková miera*—V reálnom svete vyjadruje časovú hodnotu peňazí.
6. *Výnos podkladového aktíva*—Pri finančných opciách ide napríklad o dividendový výnos (ak je podkladovým aktívom akcia) alebo kupónový výnos (v prípade obligácie). Výnosom projektu sú peňažné prostriedky, ktoré nám prináša (cash flow—CF).

Medzi finančnými a reálnymi opciami možno badať aj isté rozdiely. Prvým je pozorovateľnosť a existencia historického vývoja ceny podkladového aktíva. Pri investičných projektoch nám takáto pomocná informácia častokrát chýba (vzhľadom na ich častú jedinečnosť a neopakovateľnosť).

⁷Copeland, Antikarov, 2001, str. 4 [3]

Druhý rozdiel vyplýva zo samotnej podstaty podkladového aktíva. Pri finančných opciách je podkladovým aktívom finančný nástroj zväčša obchodovaný na burze, ktorého cenu vlastník opcie nemôže ovplyvniť. Investičný projekt je väčšinou riadený tým istým subjektom, ktorý vlastní reálnu opciu naň. V takomto prípade môže vlastník svojimi rozhodnutiami ovplyvniť cenu podkladového aktíva (projektu) a tým aj cenu danej reálnej opcie (napríklad inovácia výrobku, ktorá zvýši jeho predajnosť, pravdepodobne povedie aj k zvýšeniu hodnoty reálnej opcie postaviť továreň vyrábajúcu tento produkt).

1.3 Optimálny čas investície

Vráťme sa k príkladu z podkapitoly 1.1. V prípade uplatnenia opcie (podniknutia investície) v čase 0, bola hodnota projektu nižšia, než pri rozhodnutí vyčkať na zmenu zisku a uplatniť opciu (investovať) až v čase 1.

Reálne opcie nám navyše oproti klasickej NPV analýze umožňujú určiť *optimálny čas investície*—pri výpočte bude tento čas charakterizovaný vyššou výplatom v prípade okamžitého uplatnenia, než bude cena opcie v prípade jej ponechania na žive.

1.4 Typy reálnych opcií

Napriek veľkej rôznorodosti investičných príležitostí sa v literatúre ustálila istá kategorizácia reálnych opcií. Ich základnú terminológiu uvádza vo svojej práci napríklad Michnová⁸:

- *option to wait*—predstavuje možnosť odložiť investičné rozhodnutie. Jej analógiou je americká call opcia na akciu vyplácajúcu dividendy, kde expiračná cena korešponduje s počiatočnými nákladmi, vlastníctvo akcie s vlastníctvom projektu a dividendy s kladnými alebo zápornými finančnými tokmi plynúcimi z tejto investície. Možnosť oddialiť rozhodovanie má určitú nezápornú hodnotu (cenu opcie), pretože oproti príležitosti teraz alebo nikdy umožňuje využiť dynamický systém rozhodovania v rôznych okamihoch na základe všetkých vtedy dostupných informácií.
- *option to abandon*—možnosť ukončiť projekt pred predpokladaným termínom v prípade jeho nevýnosnosti a prediť vybavenie (napríklad stroje alebo patent)

⁸Michnová, 2008, str. 13 [10]

za určitú cenu (americká put opcia). Daný typ reálnej opcie chráni investora pred stratami v prípade, že situácia na trhu je horšia ako sa očakávalo. Treba pripomenúť, že tento krok je nezvratný a opätovné spustenie projektu nákladné, preto v realite je investor ochotný akceptovať dočasné straty presvedčený vierou v potenciálne budúce výnosy.

- *option to switch*—reprezentuje flexibilitu v prechode od jednej alternatívy k inej. Ide prevažne o zmenu v technickom alebo softvérovom vybavení, pričom pôvodný model je optimálny v inej situácii ako model nový. Pre ilustráciu: kúrenie uhlím je výhodnejšie v situácii, keď je jeho cena nízka, ale v prípade, že vzrastie, uprednostníme plynové kúrenie.
- *compound option*—sú reálne opcie umožňujúce viac realizácií (po uplatnení jednej opcie, môže byť realizovaná ďalšia). Napríklad option to switch môže byť považovaná za compound option, ak je povolený prechod od jednej alternatívy k druhej a naopak neobmedzený počet krát.
- *rainbow option*—reálne opcie obsahujúce niekoľko zdrojov náhodnosti. Všetky z vyššie spomínaných druhov opcií sa môžu správať ako rainbow v prípade, že rozhodnutie závisí od viacerých premenných (cien rôznych vstupov resp. výstupov), z ktorých každá sleduje iný stochastický proces alebo sa tieto procesy líšia parametrami.

V realite väčšina investičných príležitostí spĺňa definíciu posledných dvoch uvedených typov reálnych opcií.

Kapitola 2

Riešenie reálnych opcií

V prvej kapitole sme si predstavili reálne opcie a uviedli základné rozhodovacie problémy, pri ktorých môžu pomôcť. V druhej kapitole sa budeme venovať vybudovaniu aparátu na riešenie konkrétnych úloh na reálne opcie.

2.1 Binárne stromové modely

Koncept reálnych opcií vznikol ako analógia finančných opcií vo svete reálnych investícií. Keďže v čase vzniku reálnych opcií¹ bola teória oceňovania finančných opcií už relatívne dobre rozvinutá, je prirodzené, že aj metódy oceňovania reálnych opcií sú analógiou metód z finančného sveta.

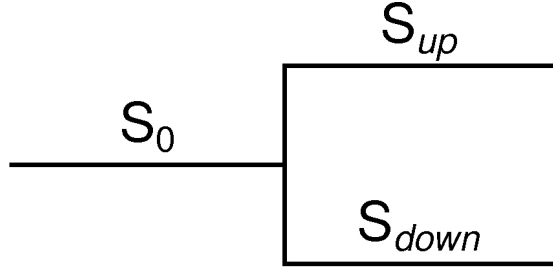
V nasledujúcich častiach sa budeme venovať oceňovaniu reálnych opcií pomocou *binomických stromov*. Túto metódu sme zvolili, pretože je v praxi najviac používaná. Hlavnou príčinou je zrejme názornosť riešenia a z toho vyplývajúce jednoduché modelovanie vzťahov a ekonomická interpretácia výsledkov.

2.1.1 Jednokrokový binárny model

Označme počiatočnú (súčasnú) cenu podkladového aktíva S_0 (v čase $t = 0$) a predpokladajme, že za nejaký (krátky) časový úsek δt môžu nastať dva prípady: cena podkladového aktíva vzrastie nahor na hodnotu S_{up} alebo poklesne nadol na hodnotu S_{down} , pričom prvý prípad nastáva s pravdepodobnosťou p a druhý s pravdepodobnosťou $1 - p$ (kde $0 < p < 1$). Znázornenie tejto situácie je na obrázku 2.1. Predpokladajme ďalej spojitú úrokovanie s bezrizikovou ročnou úrokovou mierou

¹Ako prvý použil pojem reálna opcia profesor Myers v článku s názvom „Determinants of Corporate Borrowing“ uverejnenom v Journal of Finance v roku 1977 [11]

r . Kvôli zachovaniu jednoduchosti základného modelu abstrahujeme od vyplácania dividend, transakčných nákladov, požiadaviek na kolaterál a daní.



Obrázok 2.1: Jednokrokový binárny strom

Naším cieľom je určiť súčasnú hodnotu opcie, ktorá má v čase δt hodnotu V_{up} , v prípade rastu ceny podkladového aktíva, a hodnotu V_{down} , v prípade poklesu ceny podkladového aktíva, chceme teda vypočítať hodnotu $V_0 = V(S_0, 0)$ pre známu hodnotu ceny podkladového aktíva v čase $t = 0$. Za týmto účelom si vytvoríme tzv. *bezrizikové portfólio*², ktoré bude pozostávať z jednej reálnej opcie a $-\Delta$ podkladového aktíva. Parameter Δ volíme tak, aby hodnota nášho portfólia bola rovnaká bez ohľadu na to, či cena podkladového aktíva vzrastie alebo poklesne, t.j.

$$V_{up} - \Delta S_{up} = V_{down} - \Delta S_{down} \quad (2.1)$$

odkiaľ

$$\Delta = \frac{V_{up} - V_{down}}{S_{up} - S_{down}} \quad (2.2)$$

Hodnota tohto portfólia v čase $t = 0$ je

$$V_0 - \Delta S_0$$

Z rovnosti medzi touto hodnotou a diskontovanou hodnotou bezrizikového portfólia pri vzostupe ceny podkladového aktíva nahor³

$$V_0 - \Delta S_0 = e^{-r\delta t}(V_{up} - \Delta S_{up})$$

²Model odvodenia súčasnej hodnoty reálnej opcie pri jednokrokovom binárnom modeli uvedený v tejto podkapitole je analógiou modelu odvodenia hodnoty finančnej opcie aký uvádza Melicherčík a kol. v [9]

³Alternatívne môžeme použiť aj hodnotu portfólia pri poklese ceny podkladového aktíva nadol, pretože portfólio sme zostavili tak, aby boli tieto hodnoty rovnaké.

dostávame vzťah pre výpočet hodnoty reálnej opcie v čase $t = 0$:

$$\begin{aligned} V_0 &= \Delta S_0 + e^{-r\delta t}(V_{up} - \Delta S_{up}) \\ &= \frac{V_{up} - V_{down}}{S_{up} - S_{down}} S_0 + e^{-r\delta t} \left(V_{up} - \frac{V_{up} - V_{down}}{S_{up} - S_{down}} S_{up} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Vzťah (2.3) môžeme upraviť do tvaru, z ktorého bude zrejmé, že súčasnú hodnotu reálnej opcie je možné určiť ako diskontovanú strednú hodnotu z hodnôt reálnej opcie pri vzostupe a poklese ceny podkladového aktíva:

$$V_0 = e^{-r\delta t} \left[\frac{V_{up} S_0 e^{r\delta t} - V_{down} S_0 e^{r\delta t} + S_{up} V_{down} - S_{down} V_{up}}{S_{up} - S_{down}} \right] \quad (2.4)$$

$$V_0 = e^{-r\delta t} \left[\frac{(S_0 e^{r\delta t} - S_{down}) V_{up}}{S_{up} - S_{down}} + \frac{(S_{up} - S_0 e^{r\delta t} - S_{down} + S_{down}) V_{down}}{S_{up} - S_{down}} \right] \quad (2.5)$$

$$V_0 = e^{-r\delta t} \left[\frac{S_0 e^{r\delta t} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} V_{up} + \left(1 - \frac{S_0 e^{r\delta t} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} \right) V_{down} \right] \quad (2.6)$$

$$V_0 = e^{-r\delta t} [q V_{up} + (1 - q) V_{down}] \quad (2.7)$$

kde

$$q = \frac{S_0 e^{r\delta t} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} \quad (2.8)$$

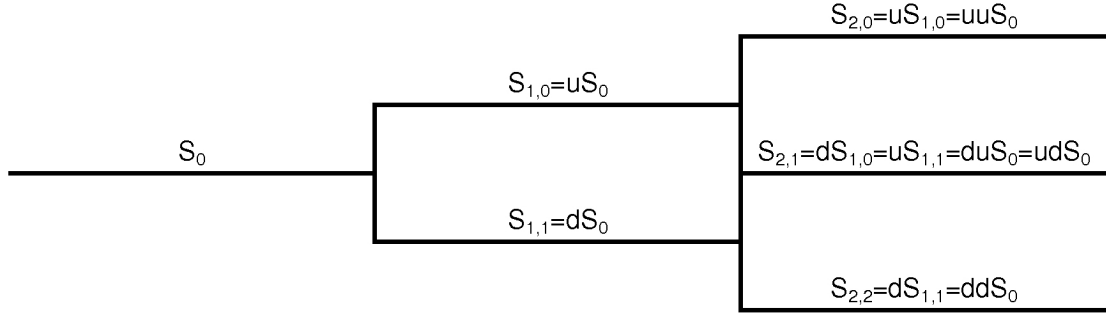
sa nazýva *rizikovo neutrálna pravdepodobnosť*. Dá sa ukázať, že $0 < q < 1$. Zo vzťahu (2.7) vyplýva, že súčasnú hodnotu reálnej opcie možno určiť ako diskontovanú strednú hodnotu jej budúcich hodnôt, avšak nie pri pôvodných pravdepodobnostiach, ale pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach definovaných v jednokrokovom binárnom modeli vzťahom (2.8).

2.1.2 Viackrový binárny stromový model

Pri praktických aplikáciách sa na určenie hodnoty reálnej opcie používa viackrový binárny stromový model, ktorý vzniká akoby skladaním jednokrových binárnych modelov. Príklad viackrového binárneho stromu ukazuje obrázok 2.2. Pri výpočte sa postupuje od konca stromu. Pomocou rizikovo neutrálnych pravdepodobností sa vypočítajú hodnoty opcie v predchádzajúcich uzloch, v ďalšom kroku sa rovnaký postup použije na stanovenie hodnôt opcie v ich predchádzajúcich uzloch, a tak ďalej, až kým sa neurčí hodnota opcie v prvom uzle.⁴

Oceňovanie opcií pomocou binárnych stromov navrhli použiť Cox, Ross, Rubinstein vo svojej práci [4] ako jednoduchšiu alternatívu k prístupu Blacka a Scholesa [2].

⁴Bližšie si tento postup na príklade európskej a americkej opcie ukážeme v nasledujúcich podkapitolách (2.2), (2.3)



Obrázok 2.2: Viackrokový binárny strom

Ak si označíme hodnotu podkladového aktíva v predchádzajúcom časovom okamihu ako S , tak Cox, Ross, Rubinstein vo svojej práci predpokladajú, že hodnota podkladového aktíva v nasledujúcom časovom okamihu bude pri pohybe smerom nahor rovná uS a pri pohybe smerom nadol rovná dS , pričom predpokladajú, že hodnoty reálnych čísel u (up), d (down) sa v celom strome nemenia. Toto prináša z výpočtového hľadiska dve praktické vlastnosti. Prvá sa týka vzorca na výpočet rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti (2.8), ktorý možno upraviť:

$$q = \frac{Se^{r\delta t} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} = \frac{Se^{r\delta t} - dS}{uS - dS} \quad (2.9)$$

$$q = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \quad (2.10)$$

Za predpokladu, že sa bezriziková úroková miera r nemení, tak zo vzťahu (2.10) vidíme, že sa v strome nebude meniť ani rizikovo neutrálna pravdepodobnosť, takže nie je potrebné ju v každom uzle opäť počítať.

Druhá praktická vlastnosť vyplývajúca z predpokladu, že sa u a d v strome nemenia je rekombinácia hodnôt podkladového aktíva. Rekombinácia vyplýva z toho, že platí:

$$udS = duS$$

Teda ak je dnes hodnota podkladového aktíva S , v ďalšom okamihu pôjde nahor a v nasledujúcom nadol, tak jej hodnota bude rovnaká ako keď by išla najprv nadol a potom nahor. Toto významnou mierou znižuje počet uzlov v strome a tým aj množstvo výpočtov, ktoré treba urobiť. Obrázok 2.2 je príkladom rekombinačného stromu (k rekombinácii hodnoty podkladového aktíva dochádza v uzle $S_{2,1}$).

2.2 Oceňovanie európskych reálnych opcií

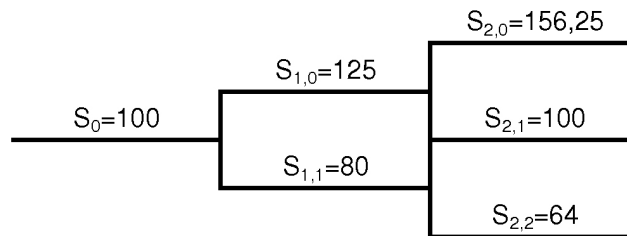
Pri európskych reálnych opciách je možné ich uplatnenie len v čase expirácie T . Výplatná funkcia je daná vzťahom:

$$V_T = \max(S_T - K; 0) \quad \text{pre call opciu} \quad (2.11)$$

$$V_T = \max(K - S_T; 0) \quad \text{pre put opciu} \quad (2.12)$$

kde S_T predstavuje hodnotu podkladového aktíva v čase expirácie T a K predstavuje realizačnú cenu reálnej opcie.

Výpočet hodnoty európskej reálnej opcie si ukážeme na príklade. Predpokladajme, že nám niekto ponúka možnosť kúpiť (call opcia) o dva mesiace ($T = 2$) za 110 korún (realizačná cena $K = 110$) tovarne, ktorej súčasná hodnota je 100 korún (súčasná hodnota podkladového aktíva $S_0 = 100$). Hodnota tejto továrne závisí od situácie na trhu výrobkov, ktoré sa v tejto továrni vyrábajú. Podľa nášho názoru by sa s pravdepodobnosťou $p = 0,5$ mala cena továrne v nasledujúcom mesiaci zvýšiť na 1,25 násobok ($u = 1,25$) a s pravdepodobnosťou $p = 0,5$ by mala klesnúť na 0,8 násobok ($d = 0,8$). V ďalšom mesiaci by sa mala cena továrne meniť podľa rovnakých pravidiel. Bezriziková úroková miera je 0,5% mesačne ($r = 0,005$). Binomický strom predpokladaného vývoja hodnoty továrne je znázornený na obrázku 2.3.



Obrázok 2.3: Binomický strom vývoja hodnoty továrne

Vývoj hodnoty reálnej opcie na kúpu továrne bude priamo závisieť od vývoja hodnoty továrne (ako jej podkladového aktíva). Pri výpočte budeme postupovať od konca binárneho stromu. V čase expirácie opcie bude jej hodnota daná vzťahom (2.11). Hodnota v jednotlivých uzloch bude nasledovná:

$$V_{2,0} = \max(S_T - K; 0) = \max(156,25 - 110; 0) = 46,25$$

$$V_{2,1} = \max(S_T - K; 0) = \max(100 - 110; 0) = 0$$

$$V_{2,2} = \max(S_T - K; 0) = \max(64 - 110; 0) = 0$$

Hodnoty v uzloch v čase $t = 1$ určíme pomocou rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti (2.10)

$$q = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0,005} - 0,8}{1,25 - 0,8} \doteq 0,4556$$

a vzťahu (2.7)

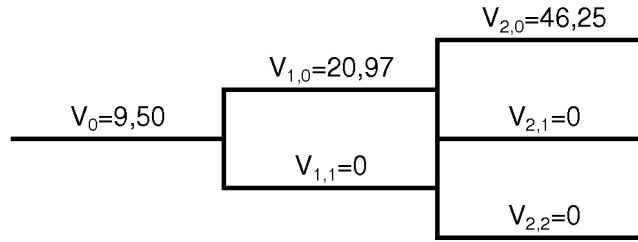
$$V_{1,0} = e^{-r\delta t}[qV_{2,0} + (1 - q)V_{2,1}] = e^{-0,005}[0,4556 \times 46,25 + (1 - 0,4556) \times 0] \doteq 20,97$$

$$V_{1,1} = e^{-r\delta t}[qV_{2,1} + (1 - q)V_{2,2}] = e^{-0,005}[0,4556 \times 0 + (1 - 0,4556) \times 0] = 0$$

Rovnakým spôsobom určíme aj hodnotu reálnej opcie v čase $t = 0$:

$$V_0 = e^{-r\delta t}[qV_{1,0} + (1 - q)V_{1,1}] = e^{-0,005}[0,4556 \times 20,97 + (1 - 0,4556) \times 0] \doteq 9,50$$

Hodnota takejto reálnej opcie je teda 9,50 korún. Ak nám niekto dnes ponúkne právo kúpiť o dva mesiace túto továreň za cenu 110 korún a bude chcieť za toto právo menej ako 9,50, tak by sme to mali prijať, ak bude chcieť viac, tak by sme to mali odmietnuť. Strom vývoja hodnoty tejto reálnej opcie je znázornený na obrázku 2.4.



Obrázok 2.4: Vývoj hodnoty reálnej opcie na kúpu továrne

Šikovnému čitateľovi na tomto mieste určite napadlo, že takéto rekurzívne počítanie je príliš zdĺhavé a že by sa možno dalo zjednodušiť. Pri európskych opciách je to skutočne možné, hodnota opcie v čase $t = 0$ sa dá vypočítať priamo z hodnôt výplat v čase $t = T$ a to pri call opciách⁵ pomocou vzťahu:

$$V_0 = e^{-rT} \left\{ \sum_{n=0}^T \frac{T!}{(T-n)!n!} q^n (1-q)^{T-n} \max(u^n d^{T-n} S_0 - K; 0) \right\} \quad (2.13)$$

kde n predstavuje počet krokov v binomickom strome ($\delta t = T/n$).

Tento vzťah je prvým krokom pri odvodení tvrdenia, že pri rovnakých predpokladoch a nekonečne jemnom delení času v binomickom strome ($n \rightarrow \infty$), konverguje

⁵Pre put opcie platí analogický vzťah s príslušnou zmenou v argumente funkcie maxima (viď analógiu so vzťahmi (2.11) a (2.12)).

riešenie pomocou binomického stromu k Black-Scholesovým vzorcom. Odvodenie vzťahu (2.13) a uvedeného tvrdenia pre finančné opcie nájde čitateľ v práci Coxa, Rossa a Rubinsteina [4], pre reálne opcie v práci Copelanda a Antikarova [3].

2.3 Oceňovanie amerických reálnych opcií

Americká call opcia je právo kúpiť podkladové aktívum za vopred dohodnutú cenu K *kedykoľvek* pred dátumom vypršania T . *Americká put opcia* je právo predat' podkladové aktívum za vopred dohodnutú cenu K *kedykoľvek* pred dátumom vypršania T . Rozdiel oproti európskej opcii vyplýva zo skutočnosti, že americkú opciu môžeme uplatniť kedykoľvek, jej hodnota v žiadnom časovom okamihu nemôže byť nižšia ako hodnota, ktorú by sme získali jej okamžitým uplatnením.

Rozdeľme dobu životnosti americkej opcie na n rovnako dlhých časových intervalov, každý o dĺžke δt . Označme j -ty uzol v čase $i\delta t$ ako uzol (i, j) , kde $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq i$. Hodnota podkladového aktíva v uzle (i, j) je rovná

$$S_0 u^{i-j} d^j \quad (2.14)$$

Hodnotu reálnej opcie v uzle (i, j) označme ako $V_{i,j}$. Hodnota americkej call opcie v čase jej expirácie je rovnaká ako v prípade rovnakej európskej opcie (pretože máme na výber len rovnaké dve možnosti a to buď opciu uplatniť alebo neuplatniť):

$$V_{n,j} = \max(S_0 u^{n-j} d^j - K; 0) \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (2.15)$$

Pre americkú put opciu platí analogický vzťah:

$$V_{n,j} = \max(K - S_0 u^{n-j} d^j; 0) \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (2.16)$$

V ďalších uzloch (pre $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq i$) by sme hodnotu v prípade európskej opcie ráтали pomocou rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti q a vzťahu (2.7) ako

$$e^{-r\delta t} [qV_{i+1,j} + (1-q)V_{i+1,j+1}] \quad (2.17)$$

V prípade americkej opcie je však možná v čase $i\delta t$ aj jej okamžitá realizácia (uplatnenie). Pri americkej call opcii bude mať táto realizácia hodnotu:

$$S_0 u^{i-j} d^j - K \quad (2.18)$$

Držiteľ americkej opcie má teda v každom časovom okamihu počas jej životnosti možnosť zvoliť si z dvoch možností:

- *uplatniť opciu*—v tom prípade bude jeho výplata daná vzťahom (2.18)
- *nechať opciu neuplatnenú*—keďže opcia ostáva neuplatnená až do ďalšieho časového okamihu, jej hodnota sa určí ako diskontovaná priemerná hodnota z hodnôt v ďalšom okamihu pomocou vzťahu (2.17)

Uvažujeme s racionálnym investorom, ktorý maximalizuje svoj majetok, a teda v každom okamihu si bude voliť väčšiu z oboch hodnôt. Výsledný vzťah pre hodnotu americkej call opcie (pre $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq i$) bude:

$$V_{i,j} = \max \{ S_0 u^{i-j} d^j - K; e^{-r\delta t} [qV_{i+1,j} + (1-q)V_{i+1,j+i}] \} \quad (2.19)$$

Pre úplnosť uvedieme aj analogický vzťah platný pre americkú put opciu:

$$V_{i,j} = \max \{ K - S_0 u^{i-j} d^j; e^{-r\delta t} [qV_{i+1,j} + (1-q)V_{i+1,j+i}] \} \quad (2.20)$$

Konkrétny výpočet si bližšie ozrejníme na príklade. Predpokladajme, že nám niekto ponúka možnosť predat' hocikedy v priebehu nasledujúcich dvoch mesiacov (americká put opcia, $T = 2$) za 110 korún (realizačná cena $K = 110$) továrne, ktorej súčasná hodnota je 100 korún (súčasná hodnota podkladového aktíva $S_0 = 100$). Hodnota tejto továrne závisí od situácie na trhu výrobkov, ktoré sa v tejto továrni vyrábajú. Podľa nášho názoru by sa s pravdepodobnosťou $p = 0,5$ mala cena továrne v nasledujúcom mesiaci zvýšiť na 1,25 násobok ($u = 1,25$) a s pravdepodobnosťou $p = 0,5$ by mala klesnúť na 0,8 násobok ($d = 0,8$). V ďalšom mesiaci by sa mala cena továrne meniť podľa rovnakých pravidiel. Bezriziková úroková miera je 0,5% mesačne ($r = 0,005$). Binomický strom predpokladaného vývoja hodnoty továrne je identický ako v príklade európskej call opcie z podkapitoly (2.2) a je znázornený na obrázku 2.3.

V čase expirácie opcie bude jej hodnota daná vzťahom (2.16). Hodnota v jednotlivých uzloch bude nasledovná:

$$\begin{aligned} V_{2,0} &= \max(K - S_0 u^2 d^0; 0) = \max(110 - 156,25; 0) = 0 \\ V_{2,1} &= \max(K - S_0 u^1 d^1; 0) = \max(110 - 100; 0) = 10 \\ V_{2,2} &= \max(K - S_0 u^0 d^2; 0) = \max(110 - 64; 0) = 46 \end{aligned}$$

Hodnoty v uzloch v čase $t = 1$ určíme pomocou rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti (2.10)

$$q = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0,005} - 0,8}{1,25 - 0,8} \doteq 0,4556$$

a vzťahu (2.20):

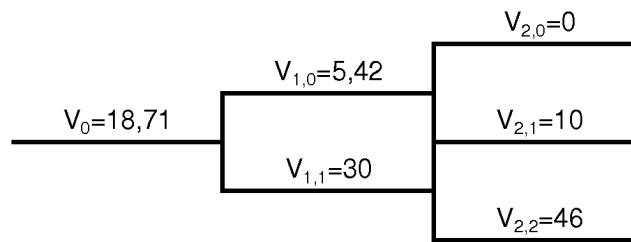
$$\begin{aligned} V_{1,0} &= \max \{ K - S_0 u^{i-j} d^j; e^{-r\delta t} [qV_{i+1,j} + (1-q)V_{i+1,j+i}] \} \\ &= \max \{ 110 - 125; e^{-0,005} [0,4556 \times 0 + (1 - 0,4556) \times 10] \} \\ &= \max \{ -15; 5,42 \} \doteq 5,42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{1,1} &= \max \{ K - S_0 u^{i-j} d^j; e^{-r\delta t} [qV_{i+1,j} + (1-q)V_{i+1,j+i}] \} \\ &= \max \{ 110 - 80; e^{-0,005} [0,4556 \times 10 + (1 - 0,4556) \times 46] \} \\ &= \max \{ 30; 29,45 \} = 30 \end{aligned}$$

Rovnakým spôsobom určíme aj hodnotu reálnej opcie v čase $t = 0$:

$$\begin{aligned} V_{0,0} &= \max \{ K - S_0 u^{i-j} d^j; e^{-r\delta t} [qV_{i+1,j} + (1-q)V_{i+1,j+i}] \} \\ &= \max \{ 110 - 100; e^{-0,005} [0,4556 \times 5,42 + (1 - 0,4556) \times 30] \} \\ &= \max \{ 10; 18,71 \} \doteq 18,71 \end{aligned}$$

Hodnota takejto reálnej opcie je teda 18,71 korún. Ak nám niekto dnes ponúkne právo prediť hocikedy v priebehu nasledujúcich dvoch mesiacov túto továreň za cenu 110 korún a bude chcieť za toto právo menej ako 18,71 korún, tak by sme to mali prijať, ak bude chcieť viac, tak by sme to mali odmietnuť. Strom vývoja hodnoty tejto reálnej opcie je znázornený na obrázku 2.5.

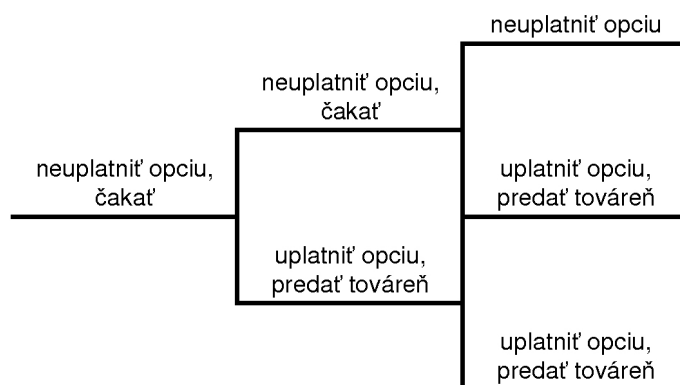


Obrázok 2.5: Vývoj hodnoty americkej reálnej opcie na predaj továrne

Pri americkej opcii je možná jej realizácia aj v inom než expiračnom čase. V reálnom živote to znamená mať možnosť investovať nielen na konci nejakého obdobia, ale aj v ľubovoľnom čase počas neho. Pre správne načasovanie investície je potrebné vedieť *kedy* sa má investícia uskutočniť. Ako bolo spomenuté v prvej kapitole, reálne opcie dávajú odpoveď aj na túto otázku. Všimnime si uzol $(1, 1)$ v našom príklade. Investor mal na výber dve možnosti:

- *nechať opciu neuplatnenú*—v tom prípade by bola jej hodnota 29,45
- *uplatniť opciu*—hodnota uplatnenia bola 30

Výpočtový algoritmus zvolil možnosť uplatniť opciu, v reči reálneho sveta to znamená nečakať na ďalší vývoj a predat' tovar, ktorej aktuálna hodnota je 80 za realizačnú cenu 110 a inkasovať zisk 30. Pri počítaní hodnoty reálnej opcie teda priamo vypočítame aj akciu, ktorú by sme mali v každom uzle podniknúť. Pre opciu z nášho príkladu znázorňuje strom optimálnych akcií obrázok 2.6.



Obrázok 2.6: Strom optimálnych rozhodnutí pre opciu na predaj tovaru

2.4 Kalibrácia binárnych stromov

Pri finančných opciách vystupujú v úlohe podkladového aktíva cenné papiere alebo komodity, ktoré sa vo väčšine prípadov pravidelne obchodujú na burze. Máme teda k dispozícii históriu vývoja ich ceny, ktorú môžeme použiť na odhadnutie jej budúceho vývoja.

Investičné rozhodovanie sa vo väčšine prípadov odohráva pred realizáciou projektu alebo na jeho začiatku. Historické dáta v takom prípade jednoducho nie sú. Ak máme šťastie, tak sa nám podarí nájsť podobný projekt realizovaný v minulosti, a volatilitu nášho projektu odhadneme pomocou neho.

Väčšinou však platí, že projekt je natoľko jedinečný, že podobný projekt jednoducho neexistuje. V takom prípade sa snažíme identifikovať *zdroje volatility projektu*, mechanizmus akým ovplyvňujú jeho hodnotu a v prípade, že je zdrojov volatility viacero, tak aj vzájomné vzťahy medzi nimi.

Pod zdrojom volatility rozumieme premennú (väčšinou ekonomického charakteru, napríklad cenu komodity), ktorej vývoj je z pohľadu projektu *exogénny* (nemôžeme ho ovplyvniť) a *náhodný* (nie je možné ho deterministicky predpovedať). Príkladom zdroja volatility projektu výstavby novej tepelnej elektrárne môže byť cena uhlia, pri projekte kúpy zlatej bane to môže byť cena zlata na finančných trhoch.

Ak má daný projekt jeden zdroj volatility, pre ktorý máme k dispozícii historické dáta o jeho vývoji v minulosti, tak sa môžeme pomocou nich pokúsiť o kalibráciu binomického stromu. V pôvodnom C-R-R modeli [4] jeho autori Cox, Ross, Rubinstein vychádzajú z toho, že ceny podkladového aktíva (v našom prípade zdroja volatility) sa menia v pravidelných rovnako veľkých skokoch, pre ktoré platí [6]:

$$up = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \quad (2.21)$$

$$down = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \quad (2.22)$$

kde σ je *volatilita* daného zdroja meraná napríklad nevychýleným odhadom smerodajnej odchýlky relatívnych prírastkov jeho historických cien

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2} \quad (2.23)$$

kde

$$Y_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \quad (2.24)$$

pričom S_t predstavuje cenu aktíva v čase t . Ak historické dáta nemáme alebo ich (z rôznych dôvodov) nepovažujeme za relevantné, tak musíme volatilitu zdroja určiť inak, napríklad expertným odhadom.

Reálne projekty majú častokrát zdrojov volatility viacero. Hodnota zlatej bane bude napríklad okrem ceny zlata pravdepodobne závisieť aj od ceny energií ako dôležitého nákladu. Ako riešiť takúto situáciu? Ak jeden zdroj volatility výrazne dominuje nad ostatnými (výrazne viac ovplyvňuje cenu podkladového aktíva), tak môžeme ostatné zdroje zanedbať a sústrediť sa na čo najlepšie modelovanie hlavného zdroja. Ak máme viacero približne rovnako dôležitých zdrojov volatility, tak Copeland a Antikarov⁶ navrhujú použiť konsolidačný prístup. Najprv je potrebné namodelovať jednotlivé zdroje volatility a vzťahy (závislosti) medzi nimi. Následne sa pomocou simulácie Monte Carlo odhadne, ako sa spoločné pôsobenie týchto zdrojov prejaví

⁶Vid' kapitola 10 v [3]

na celkovej hodnote projektu a určí sa jeho celková (konsolidovaná) volatilita, ktorá sa použije na modelovanie binomického stromu.

Prístup založený na identifikácii zdrojov volatility projektu nemusí vždy viesť k uspokojivému výsledku. Nemusí byť napríklad splnený predpoklad exogénnosti zdroja - predstavme si, že sme významný výrobca počítačových pamätí a plánujeme projekt výstavby novej továrne, ktorej kapacita bude predstavovať relatívne významné percento ich celosvetovej produkcie. V tom prípade pri pokuse použiť ako zdroj volatility cenu pamätí narazíme na problém, pretože sa môže stať, že cena pamätí bude ovplyvnená množstvom pamätí, aké sa rozhodneme produkovať v našej novej továrni. Ceny pamätí môžu tiež závisieť od akcií, ktoré podniknú naši konkurenti. V takýchto prípadoch môžeme použiť ďalšie metódy na určenie predpokladaného vývoja zdroja volatility (napríklad teóriu hier) alebo opustíme koncept zdroja volatility úplne a pokúsime sa určiť volatilitu projektu priamo (napríklad expertným odhadom).

V tejto kapitole sme si objasnili základné princípy riešenia úloh s reálnymi opciami - binomický strom, európske reálne opcie, americké reálne opcie. Aj keď zvyknú byť skutočné projekty zložitejšie - majú viacero zdrojov volatility (*rainbow options*) alebo je cena jednej opcie závislá od ceny inej (*compound options*) - základné úlohy riešené v tejto kapitole sú ich stavebnými prvkami. Ako použiť tieto stavebné prvky pri riešení skutočných rozhodovacích problémov pomocou reálnych opcií si ukážeme v ďalších kapitolách.

Kapitola 3

Hodnotenie investície do obnoviteľného zdroja energie prostredníctvom reálnych opcí

V nasledujúcej kapitole využijeme reálne opcie popísané v predchádzajúcich častiach ako nástroj na analýzu efektívnosti investovania do obnoviteľných zdrojov energie z pohľadu drobného investora. Okrem určenia výhodnosti jednotlivých alternatív sa budeme venovať aj zisteniu optimálneho času investovania.

3.1 Motivácia

Skleníkový efekt a energetická závislosť sú dva pojmy, ktoré sa skloňujú v diskusiách čoraz častejšie. Tieto výrazy majú spoločného pôvodcu—fosílna palivá. Pomoc pri riešení ekologických a politických problémov vidia mnohé krajiny v obnoviteľných zdrojoch energie. Aj napriek podpore štátu, autorít a všeobecnému zvyšovaniu ekologického povedomia sa tieto technológie presadzujú len pomaly. Kľúčovým faktorom, ktorý zaujíma každého, kto zvažuje ich využitie, je ich ekonomická efektívnosť.

Spoločným znakom väčšiny obnoviteľných zdrojov energie sú:

- Relatívne *vysoké počiatočné investície* a z toho vyplývajúca *dlhá doba návratnosti*.
- *Nízke prevádzkové náklady*—v porovnaní so zdrojmi založenými na fosílnych palivách, ktoré na produkciu energie potrebujú ich neustálu dodávku, sú prevádzkové náklady obnoviteľných zdrojov energie nízke, pretože sú tvorené len

nákladmi na údržbu príslušných zariadení. Kvôli tejto skutočnosti sa ekonomický prínos obnoviteľných zdrojov vyjadruje väčšinou pomocou ušetrených nákladov na fosílna palivá (ktoré by inak bolo potrebné spotrebovať).

- *Problémy s využiteľnosťou*—množstvo vyrobenej energie závisí od prírodných javov a zákonitostí a nemusí korešpondovať s jej aktuálnou potrebou (napríklad nestálosť vetra pri veternej energii).

Ako zohľadniť špecifiká obnoviteľných zdrojov energie pri hodnotení ich ekonomickej efektívnosti si ukážeme na príklade. Predstavme si rodinu, ktorá je pri budovaní rodinného domu postavená pred rozhodnutie, aké kúrenie zakúpi. Prvá alternatíva je klasické *ústredné kúrenie* (pomocou radiátorov). Druhá alternatíva je *podlahové kúrenie*. Prvá alternatíva je investične menej náročnejšia. Pri oboch alternatívach je možná dodatočná inštalácia slnečných kolektorov, avšak s rozličným účelom. Slnečné kolektory nie sú vhodné pri kúrení s vysokou teplotou teplonosného média, teda nie sú vhodné pri radiátorovom kúrení. Tu sa dajú využiť len na ohrev teplej úžitkovej vody (TÚV). Pri podlahovom kúrení je teplota média nižšia a teda je možné využiť slnečné kolektory aj na prikurovanie.

Predpokladajme, že rodina nemá žiadne osobné preferencie jednotlivých druhov kúrení (napríklad estetické, zdravotné) a o výbere typu kúrenia sa rozhoduje len na základe investičných nákladov jednotlivých alternatív a možných úspor pri použití slnečných kolektorov. Ako by sa mala rodina rozhodnúť? Aký typ kúrenia by si mala inštalovať s ohľadom na ekonomickú výhodnosť dodatočnej inštalácie slnečných kolektorov?

3.2 Formulácia modelu

3.2.1 Predpoklady modelu a definícia premenných

Analyzujme situáciu z pohľadu rodiny. Predpokladajme, že podlahové kúrenie je drahšie o X korún (závisí od konkrétneho projektu domu). V prípade, že sa rozhodneme pre *alternatívu I* (radiátorové kúrenie a slnečné kolektory len na ohrev teplej úžitkovej vody), je výhodnejšie použiť menšie kolektorové pole. *Investičné náklady* (náklady na kúpu a inštaláciu) takéhoto poľa označme I_1 . *Množstvo energie*, ktorým *ročne usporíme*, vyjadrené v kWh zemného plynu označme U_1 (predpokladáme, že ako hlavný zdroj energie na kúrenie a ohrev TÚV bude rodina používať zemný

plyn)¹. Ročné prevádzkové náklady kolektorového poľa sú odhadované na N_1 korún (najmä náklady na prevádzkové náplne a údržbu). Alternatíva II počíta s väčším kolektorovým poľom, ktorého investičné náklady sú I_2 korún, ušetrí sa ním U_2 kWh zemného plynu ročne a ročné prevádzkové náklady sú N_2 .

Predpokladaná životnosť kolektorov a kúrenia je T rokov a to je tiež časový horizont, ktorý nás z pohľadu investičného rozhodnutia zaujíma.

Ďalej predpokladajme, že jediným zdrojom volatility je cena zemného plynu. Z historických dát odhadneme jej volatilitu a jej možný budúci vývoj namodelujeme pomocou binomického stromu (pričom použijeme rovnakú symboliku ako v (2.14)). Kvôli zjednodušeniu výpočtu úspor tiež predpokladáme, že cena plynu sa mení vždy k 1.1. daného roka (dĺžka obdobia v binomickom strome je jeden rok) a vtedy sa tiež rozhodujeme, či budeme v danom roku kolektory používať, čím získame úsporu U_k a budeme zároveň znášať prevádzkové náklady N_k (pričom predpokladáme, že hodnoty U_k a N_k sú v danom čase známe a vyjadrené k danému dňu). Pri všetkých ekonomických veličinách (ceny, investičné a prevádzkové náklady) abstrahujeme od inflácie.

V modeli použijeme tieto premenné:

- X - rozdiel medzi cenou podlahového a radiátorového kúrenia (Sk)
- I_k - investičné náklady na kúpu kolektorového poľa pri alternatíve k (Sk)
- U_k - ročná úspora pri použití slnečných kolektorov pri alternatíve k (kWh zemného plynu)
- N_k - ročné prevádzkové náklady kolektorového poľa pri alternatíve k (Sk)
- T - životnosť kolektorov a kúrenia, časový horizont riešenia úlohy (roky)
- σ - ročná volatilita ceny 1 kWh zemného plynu
- $S_{i,j}$ - cena 1 kWh zemného plynu v roku i a uzle j binomického stromu (Sk)
- r - ročná bezriziková úroková miera (% p.a.)

¹Od 1.1.2008 prešiel Úrad pre reguláciu sieťových odvetví (www.urso.gov.sk) na reguláciu ceny za 1 kWh zemného plynu, teda plyn sa nemeria v objemových jednotkách (m^3) ale v jednotkách energie, ktorá vznikne pri jeho spálení (pri spálení 1 m^3 zemného plynu sa uvoľní teplo približne 39 MJ, t.j. 10,8 kWh).

3.2.2 Analýza a zostavenie modelu

Súčasnú hodnotu rozdielu vstupných nákladov pri oboch alternatívach poznáme (X). Na prijatie správneho rozhodnutia potrebujeme ešte určiť rozdiel v súčasnej hodnote oboch alternatív. Na jeho zistenie použijeme porovnanie usporých nákladov na vykurovanie. Alternatíva I bez akéhokoľvek kolektora prinesie úspory 0 Sk. Súčasnú hodnotu úspor, ktoré prinesie pri alternatíve I možnosť nainštalovať kolektory len na ohrev TÚV, označme V_0^I . Súčasnú hodnotu úspor, ktoré získame pri alternatíve II vďaka možnosti nainštalovať kolektory na ohrev TÚV a aj na prikurovanie, označme V_0^{II} . Alternatíva II je výhodnejšia, ak

$$V_0^{II} - V_0^I > X \quad (3.1)$$

teda ak je súčasná hodnota toho, čo inštaláciou podlahového kúrenia získame, väčšia, než súčasná hodnota nákladov, ktoré musíme vynaložiť. V opačnom prípade by sme sa mali rozhodnúť pre alternatívu I.

V_0^I je hodnota reálnej opcie investovať do nákupu menšieho kolektorového poľa. Túto možnosť máme aj pri radiátorovom kúrení bez potreby ďalších dodatočných investícií. Ďalej máme tiež možnosť si dnes za cenu X kúpiť reálnu opciu investovať aj do kúpy väčšieho kolektorového poľa, hodnota tejto opcie je V_0^{II} .

Hodnota reálnej opcie pri alternatíve I

Pri radiátorovom kúrení budeme mať možnosť *hocikedy* počas nasledujúcich T rokov kúpiť menšie kolektorové pole na ohrev TÚV. Ide teda o *americkú reálnu call opciu* resp. *option to wait*. Realizačná cena tejto opcie sú investičné náklady na kúpu menšieho kolektorového poľa I_I . Čo je však jej podkladové aktívum? Čo si kupujeme pri investovaní do kolektorov v tomto prípade? Slovná odpoveď na túto otázku je relatívne jednoduchá—kupujeme si úspory, ktoré dosiahneme v nasledujúcich rokoch. Prípadne použijúc ekonomickú terminológiu—kupujeme si *súčasnú hodnotu* týchto úspor.

Súčasná hodnota úspor celkom sa rovná súčtu súčasných hodnôt úspor, ktoré dosiahneme v jednotlivých rokoch. Na začiatku každého roka (viď predpoklady) sa rozhodujeme (poznajúc cenu zemného plynu platnú na nasledujúce obdobie), či budeme v danom roku prevádzkovať kolektory. Ak áno, získame úsporu v podobe menšieho množstva zemného plynu, ktoré spotrebujeme v danom roku (usporíme U_I kWh zemného plynu). Na prevádzkovanie kolektorov však budeme musieť vynaložiť prevádzkové náklady vo výške N_I . Keďže sa rozhodujeme racionálne, tak je zrejmé,

že kolektory budeme v danom roku prevádzkovať, len ak bude úspora väčšia než náklady na jej dosiahnutie.

Na hodnotové vyjadrenie výšky úspory potrebujeme poznať cenu zemného plynu. Jej vývoj je podľa predpokladov možné modelovať pomocou binomického stromu. Ak si označíme cenu zemného plynu na začiatku obdobia i v uzle j ako $S_{i,j}$, tak hodnota usporeného zemného plynu v tomto uzle bude:

$$U_I S_{i,j} \quad (3.2)$$

Využitím tohto vzťahu (a predpokladu racionálnosti investora) môžeme úsporu v roku i v uzle j vyjadriť ako:

$$M_{i,j}^I = \max(U_I S_{i,j} - N_I; 0) \quad (3.3)$$

čo je vzťah veľmi podobný známemu vzťahu (2.11), ktorý slúži na výpočet výplaty európskej reálnej call opcie v čase jej expirácie. A naozaj, možnosť zapnúť v danom roku kolektory (ak boli niekedy predtým nainštalované) a získať tým úsporu možno chápať ako *európsku reálnu call opciu* expirujúcu v danom roku. Ak investujeme do kolektorov, tak vlastne získame sadu európskych reálnych call opcií, ktoré postupne expirujú jedna v každom roku (až do konca životnosti kúrenia). Súčasná hodnota úspor, ktorú si kupujeme pri investovaní do kolektorov, je *hodnota tejto sady opcií* a to je aj hľadané *podkladové aktívum* americkej reálnej call opcie na investovanie do kolektorov. Vzniká tu situácia, že hodnota jednej opcie závisí od hodnoty inej opcie (v tomto prípade dokonca viacerých opcií), takže v prípade opcie na investíciu do kolektorov ide o tzv. *zloženú opciu* (z angl. *compound option*).

Na určenie hodnoty V_0^I potrebujeme poznať binomický strom vývoja ceny podkladového aktíva (aby sme mohli použiť vzťahy na výpočet hodnoty americkej reálnej opcie odvodené v časti (2.3)), t.j. potrebujeme v každom uzle poznať hodnotu zostávajúcich európskych reálnych call opcií.

Aplikujúc vzťah (2.13), ktorý slúži na výpočet hodnoty európskej reálnej call opcie priamo z hodnôt výplat v čase expirácie, môžeme hodnotu jednej našej európskej reálnej call opcie, ktorá expiruje v čase l , $l \geq i$ (pre konkrétny uzol i, j ju označme $H_{i,j}^I(l)$), vypočítať pomocou vzťahu:

$$H_{i,j}^I(l) = e^{-r(l-i)} \left\{ \sum_{n=0}^{l-i} \frac{(l-i)!}{(l-i-n)!n!} q^n (1-q)^{l-i-n} \max(u^n d^{l-i-n} S_{i,j} U_I - N_I; 0) \right\} \quad (3.4)$$

kde u, d sú hodnoty z binomického stromu vývoja ceny zemného plynu a q je rizikovo neutrálna pravdepodobnosť vypočítaná na základe u a d (pomocou vzťahu (2.10)).

Hodnota všetkých zostávajúcich európskych opcií v uzle i, j (označme ju $P_{i,j}^I$) je súčtom hodnôt jednotlivých zostávajúcich opcií. Využijúc vzťah (3.4) ju môžeme vypočítať:

$$P_{i,j}^I = \sum_{l=i+1}^T H_{i,j}^I(l) \quad (3.5)$$

$$P_{i,j}^I = \sum_{l=i+1}^T e^{-r(l-i)} \left\{ \sum_{n=0}^{l-i} \frac{(l-i)!}{(l-i-n)!n!} q^n (1-q)^{l-i-n} \max(u^n d^{l-i-n} S_{i,j} U_I - N_I; 0) \right\} \quad (3.6)$$

Podkladové aktívum našej americkej opcie má teda v uzle i, j hodnotu $P_{i,j}^I$. Ak pôjde v nasledujúcom období cena zemného plynu nahor, tak cena podkladového aktíva bude

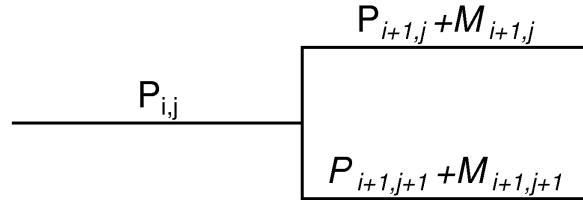
$$P_{i+1,j}^I + M_{i+1,j}^I$$

teda táto cena bude súčtom hodnoty ostávajúcich európskych opcií v uzle $i+1, j$ a hodnoty európskej opcie, ktorá práve v tom roku expiruje (pretože aj tá bola v uzle i, j súčasťou podkladového aktíva).

Ak pôjde cena zemného plynu nadol, tak cena podkladového aktíva bude

$$P_{i+1,j+1}^I + M_{i+1,j+1}^I$$

Vývoj hodnoty podkladového aktíva znázorňuje obrázok 3.1.



Obrázok 3.1: Vývoj hodnoty podkladového aktíva zloženej opcie v alternatíve I

Poznajúc vývoj hodnoty podkladového aktíva môžeme pristúpiť k výpočtu hodnoty samotnej americkej opcie na investovanie do menšieho kolektorového poľa. V čase expirácie vypočítame hodnotu tejto opcie pomocou vzťahu (2.15), ktorý patrične modifikujeme, aby sme zohľadnili skutočnosť, že v poslednom roku môžeme investovaním získať už len úsporu toho roku (predpokladáme, že investícia sa uskutoční začiatkom roka, a teda úsporu daného roka ešte získame):

$$V_{T,j}^I = \max(M_{T,j}^I - I_I; 0) \quad j = 0, 1, \dots, T \quad (3.7)$$

Vnútri binomického stromu využijeme poznatok z časti (2.3) a síce, že investor si pri americkej opcii vnútri stromu vyberá lepšiu z možností *uplatniť opciu* a *nechať opciu neuplatnenú*. Na stanovenie hodnoty opcie použijeme vzťah na určenie hodnoty americkej opcie vnútri stromu (2.19), ktorý takisto patrične modifikujeme. Výsledný vzťah pre hodnotu americkej call opcie (pre $0 \leq i \leq T - 1$, $0 \leq j \leq i$) bude:

$$V_{i,j}^I = \max \{ P_{i,j}^I + M_{i,j}^I - I_I; e^{-r} [qV_{i+1,j}^I + (1 - q)V_{i+1,j+i}^I] \} \quad (3.8)$$

Prvá časť výrazu je hodnota v prípade uplatnenia opcie. Je súčtom súčasnej hodnoty zostávajúcich európskych opcií $P_{i,j}^I$ a hodnoty opcie, ktorá expiruje v danom roku $M_{i,j}^I$ (opäť predpokladáme, že investícia sa uskutoční začiatkom roka a teda získame aj úsporu daného roka), od ktorého je potrebné odpočítať výšku investície I_I . Druhá časť výrazu je hodnota v prípade, ak opciu neuplatníme, vypočítaná pomocou vzťahu (2.7). Rizikovo neutrálnu pravdepodobnosť q v tomto prípade vypočítame podľa vzťahu (2.8), na použitie ktorého potrebujeme poznať hodnotu podkladového aktíva v uzle i, j a jeho hodnotu v nasledujúcom období pri pohybe nahor a nadol.

Pri počítaní budeme postupovať od konca stromu až finálne určíme hodnotu V_0^I (resp. $V_{0,0}^I$).

Hodnota reálnej opcie pri alternatíve II

Pri určovaní hodnoty reálnej opcie pri alternatíve II môžeme využiť veľa z výpočtu V_0^I . Rovnako ako v alternatíve I aj tu platí, že investovaním do kolektorového poľa si kupujeme súčasnú hodnotu budúcich úspor, akurát tie úspory budú väčšie (pretože okrem ohrevu TÚV usporíme aj na kúrení), a tiež budú väčšie ročné prevádzkové náklady. Opäť si teda pri investovaní kupujeme sadu európskych reálnych call opcií. Ich hodnota sa vypočíta rovnako ako pri alternatíve I.

Rozdiel oproti alternatíve I vyplýva z faktu, že ak máme podlahové kúrenie, tak stále nám ostáva možnosť kúpiť menšie kolektorové pole, ktoré bude slúžiť len na ohrev TÚV. Toto sa nám môže hodiť v situácii, že sa cena zemného plynu vyvíja dostatočne priaznivo na to, aby bolo pre nás výhodné kúpiť menšie kolektorové pole, ale nie dosť priaznivo na to, aby sa nám oplatilo kúpiť pole väčšie (vzhľadom na jeho väčšie investičné a prevádzkové náklady).

Vzhľadom na predchádzajúce úvahy vidíme, že V_0^{II} je hodnota *americkej reálnej call opcie*, pri ktorej máme v každom uzle binomického stromu na výber tri možnosti:

1. Investovať do menšieho kolektorového poľa použiteľného len na ohrev TÚV

2. Investovať do väčšieho kolektorového poľa použiteľného na ohrev TÚV a prikurovanie

3. Nechať opciu neuplatnenú

Pri ohodnotení alternatívy II využijeme vzťahy, ktoré sme odvodili pre výpočet hodnoty alternatívy I. Úsporu v roku i v uzle j pri investovaní do väčšieho kolektorového poľa (výplatu európskej opcie expirujúcej v danom roku) môžeme vyjadriť ako:

$$M_{i,j}^{II} = \max(U_{II}S_{i,j} - N_{II}; 0) \quad (3.9)$$

Hodnotu všetkých zostávajúcich európskych opcií v uzle i, j pri investovaní do väčšieho kolektorového poľa (označme ju $P_{i,j}^{II}$) môžeme (využívajúc analógiu so vzťahom (3.6)) vypočítať:

$$P_{i,j}^{II} = \sum_{l=i+1}^T e^{-r(l-i)} \left\{ \sum_{n=0}^{l-i} \frac{(l-i)!}{(l-i-n)!n!} q^n (1-q)^{l-i-n} \max(u^n d^{l-i-n} S_{i,j} U_{II} - N_{II}; 0) \right\} \quad (3.10)$$

Keď poznáme ako sa bude vyvíjať hodnota úspor pri investovaní do väčšieho kolektorového poľa, tak môžeme pristúpiť k výpočtu hodnoty samotnej opcie uskutočniť tieto investície. V čase expirácie vypočítame hodnotu opcie pomocou vzťahu:

$$V_{T,j}^{II} = \max(M_{T,j}^I - I_I; M_{T,j}^{II} - I_{II}; 0) \quad j = 0, 1, \dots, T \quad (3.11)$$

Prvý výraz je hodnota možnosti investovať do menšieho kolektorového poľa, druhý výraz je výplata pri investovaní do väčšieho kolektorového poľa (pri oboch predpokladáme, že investícia sa uskutoční začiatkom roka, a teda úsporu daného roka ešte získame). Keďže investor je racionálny, tak hodnota nemôže byť záporná.

Vnútri stromu si vyberáme takisto zo spomínaných troch možností. Vzťah pre hodnotu tejto call opcie (pre $0 \leq i \leq T-1$, $0 \leq j \leq i$) bude:

$$V_{i,j}^{II} = \max \{ P_{i,j}^I + M_{i,j}^I - I_I; P_{i,j}^{II} + M_{i,j}^{II} - I_{II}; e^{-r}[qV_{i+1,j}^{II} + (1-q)V_{i+1,j+i}^{II}] \} \quad (3.12)$$

Prvá časť výrazu je hodnota v prípade uplatnenia opcie a investovania do menšieho kolektorového poľa, druhá časť je hodnota pri investovaní do väčších kolektorov. Táto hodnota je v prípade menších (väčších) kolektorov súčtom súčasnej hodnoty zostávajúcich európskych opcií $P_{i,j}^I$ ($P_{i,j}^{II}$) a hodnoty opcie, ktorá expiruje v danom roku $M_{i,j}^I$ ($M_{i,j}^{II}$) (opäť predpokladáme, že investícia sa uskutoční začiatkom roka, a teda získame aj úsporu daného roka), od ktorého je potrebné odpočítať výšku investície I_I (I_{II}).

Tretia časť výrazu je hodnota v prípade, ak opciu neuplatníme, vypočítaná pomocou vzťahu (2.7). Rizikovo neutrálnu pravdepodobnosť q v tomto prípade vypočítame podľa vzťahu (2.8), na použitie ktorého potrebujeme poznať hodnotu podkladového aktíva v uzle i, j a jeho hodnotu v nasledujúcom období pri pohybe nahor a nadol. V tejto opcii však vystupujú podkladové aktíva dve, jedným je súčasná hodnota úspor v prípade investovania do menších kolektorov a druhým je súčasná hodnota úspor pri investovaní do väčších kolektorov. Ktoré podkladové aktívum teda použiť? Odpoveď znie, že ak je trh v rovnováhe (ceny podkladových aktív nie sú nadhodnotené ani podhodnotené), tak je jedno, ktoré podkladové aktívum použijeme, pretože v oboch prípadoch dostaneme rovnaký výsledok (čitateľ si to môže ľahko overiť). Toto vyplýva zo skutočnosti, že pohyby nahor a nadol v hodnote podkladového aktíva I, podkladového aktíva II a opcie sú úplne korelované, a teda bezrizikové portfólio z jednokrokového binárneho modelu môžeme konštruovať z hociktorej dvojice týchto aktív (aj dvoch podkladových aktív). Ak by sme nedostali zakaždým rovnaký výsledok, tak by to znamenalo, že niektoré aktívum je zle ocenené a existuje možnosť bezrizikového arbitrážneho zisku².

3.3 Riešenie modelu

Prvým krokom pri riešení modelu je kalibrácia binomického stromu vývoja ceny zemného plynu. Vzhľadom na skutočnosť, že cena zemného plynu pre domácnosti podlieha na Slovensku štátnej regulácii a tiež preto, že Slovenská republika je relatívne mladý štát, tak máme k dispozícii len obmedzené historické dáta, ktoré považujeme za nevhodné na modelovanie ceny zemného plynu do budúcnosti. Namiesto týchto dát využijeme skutočnosť, že podľa výnosu 4/2005 Úradu pre reguláciu sieťových odvetví (ÚRSO) sa cena zemného plynu pre domácnosti určuje ako oprávnené náklady dodávateľa plus primeraný zisk, pričom hlavnou zložkou oprávnených nákladov sú náklady na obstaranie zemného plynu (referenčná cena zemného plynu). Podľa nariadenia vlády SR 409/2007 sa referenčná cena plynu počíta z priemeru deviatich mesačných priemerov ceny ropy Brent upravenej o koeficient a menový kurz SKK voči USD. Na výpočet parametrov teda použijeme historické údaje o vývoji ceny ropy Brent³, z ktorých (pomocou vzťahu (2.23)) určíme ročnú volatilitu, a tú použijeme na modelovanie vývoja ceny zemného plynu.

²Pre hlbavého čitateľa odporúčame naformulovať si konkrétny príklad, na ktorom určite veľmi rýchlo nájde príležitosť arbitráže.

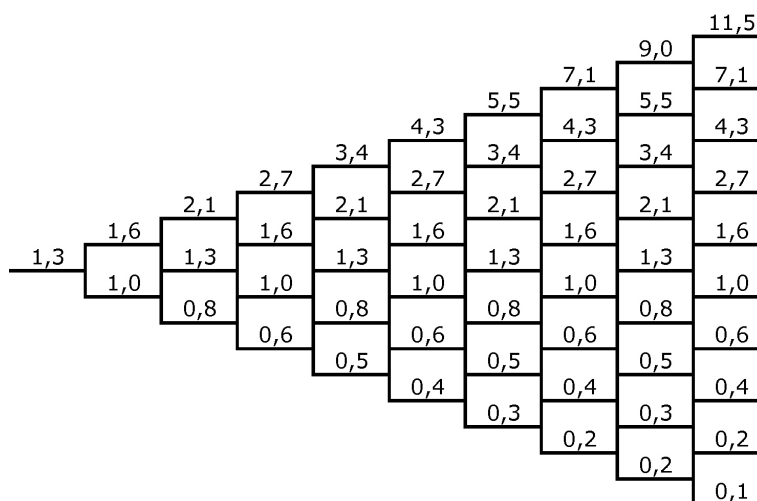
³Zdroj: <http://tonto.eia.doe.gov/dnav/pet/hist/rbrted.htm>

Z ročnej volatility, použitím vzťahov (2.21) a (2.22) vypočítame parametre u , d binomického stromu (jedno obdobie v strome má dĺžku jeden rok). Bezrizikovú ročnú úrokovú mieru (r) určíme ako priemerný úrok, ktorý ponúkajú tri najväčšie slovenské banky pri termínovanom účte s viazanosťou 12 mesiacov. Za začiatočnú cenu zemného plynu (S_0) zvolíme cenu 1 kWh zemného plynu platnú pre domácnosti SR kategórie D3 od 1.1.2008. Rizikovo neutrálnu pravdepodobnosť určíme pomocou hodnôt u , d a r zo vzťahu (2.10). Hodnoty jednotlivých parametrov a vypočítaných vstupných premenných sú zhrnuté v tabuľke 3.2.

Parametre	
Bezriziková úroková miera - r (% p.a.)	3,50%
Ročná volatilita - σ	0,2431
S_0 (Sk)	1,29 Sk
u	1,2752
d	0,7842
Riz. neut. pravdepodobnosť - up - q	0,5108

Tabuľka 3.2: Vstupné parametre použité pri výpočte

Pomocou vstupných parametrov zostrojíme binomický strom vývoja ceny zemného plynu. Strom pre prvých desať období znázorňuje obrázok 3.3, celý binomický strom je uvedený v prílohe A.1.



Obrázok 3.3: Ukážka časti binomického stromu vývoja ceny zemného plynu za prvých desať období (Sk/kWh)

Voľba ďalších parametrov je závislá od veľkosti rodiny a rodinného domu. Uvažujeme štvorčlennú rodinu (dva rodičia a dve deti) a dvojposchodový dom s celkovou obytňou plochou $140m^2$. Kolektorové pole odporúčané pre takúto rodinu na ohrev TÚV a pole odporúčané na ohrev TÚV a prikurovanie, náklady na ich kúpu a inštaláciu a odhadované ročné prevádzkové náklady získame priamo zo stránky ich výrobcu⁴. Podobným spôsobom zistíme aj rozdiel medzi investičnými nákladmi na radiátorové a podlahové kúrenie⁵. Konkrétne číselné hodnoty sú uvedené v tabuľke 3.4.

Položka	Alternatíva I	Alternatíva II
Investičné náklady na kúpu kolektorového poľa - I (Sk)	109 951	204 284
Ročná úspora pri použití slnečných kolektorov - U (kWh zemného plynu)	3 168	5 123
Ročné prevádzkové náklady kolektorového poľa - N (Sk)	550	1 021
Rozdiel medzi cenou podlahového a radiátorového kúrenia - X (Sk)	40 000	

Tabuľka 3.4: Odhadovaná výška investičných a prevádzkových nákladov a odhadovaná úspora energie

Poslednými konštantami, ktoré potrebujeme vložiť do modelu, sú množstvá energie, ktoré sa usporia pri používaní slnečných kolektorov. Ako východiskový údaj použijeme priemerné hodnoty slnečného žiarenia dopadajúceho na $1m^2$ na území Slovenska v jednotlivých mesiacoch⁶. Z týchto dát si (prenásobením účinnosťou a veľkosťou absorbčnej plochy) určíme priemerné očakávané množstvo energie, ktoré dodá dané kolektorové pole. Ďalej je potrebné určiť očakávané množstvo energie, ktoré daná rodina spotrebuje v jednotlivých mesiacoch na prípravu TÚV a vykurovanie rodinného domu. Úspora za daný mesiac bude potom vo výške minima z množstva energie, ktorá je k dispozícii a ktorá je žiadaná. Celková ročná úspora bude súčtom úspor za jednotlivé mesiace. Odhadnuté hodnoty sú uvedené v tabuľke 3.4.

Po odhadnutí vstupných konštánt môžeme pristúpiť k výpočtu hodnôt jednotlivých opcí. Pomocou vzťahov (3.7) a (3.8) vypočítame hodnoty opcie alternatívy I v jednotlivých uzloch binomického stromu. Výsledná hodnota v čase $t = 0$ je:

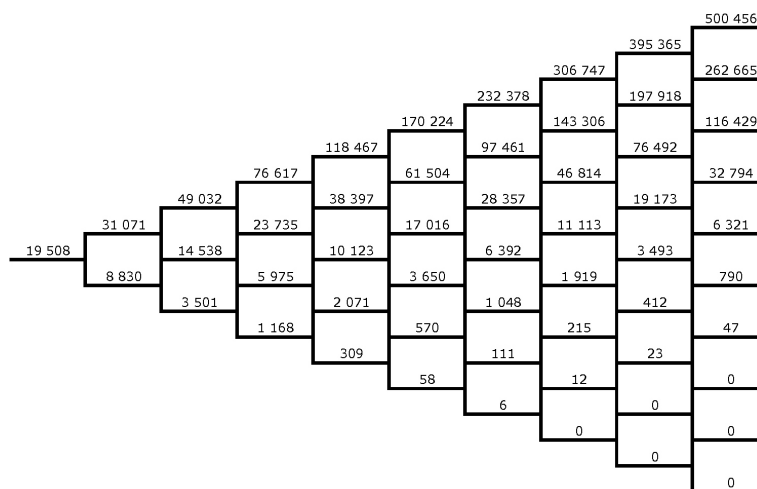
$$V_0^I = 19\,508$$

⁴Zdroj: www.thermosolar.sk

⁵Vid' napríklad: www.reisenauer.sk

⁶Zdroj: <http://www.solarenergy.sk/system/slnečne-žiarenie>

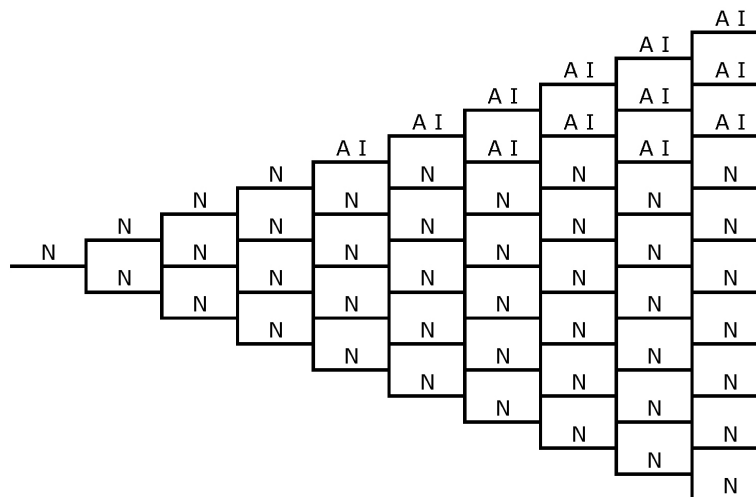
Strom vývoja ceny opcie I pre prvých desať období znázorňuje obrázok 3.5, celý binomický strom je uvedený v prílohe A.2.



Obrázok 3.5: Ukážka časti binomického stromu vývoja ceny opcie pri alternatíve I za prvých desať období (Sk)

Pri rozhodovaní o investovaní do kúpy slnečných kolektorov je dôležitou informáciou aj čas, kedy tak máme urobiť. V reči reálnych opcií je to čas, kedy máme uplatniť opciu. Strom optimálnych rozhodnutí pri opcii I pre prvých desať období znázorňuje obrázok 3.6, celý binomický strom je uvedený v prílohe B.1, na oboch obrázkoch je použité nasledovná symbolika optimálneho rozhodnutia:

- A I - Uplatniť opciu z alternatívy I, t.j. investovať do menšieho kolektorového poľa použiteľného len na ohrev TÚV
- N - Nechať opciu v danom uzle neuplatnenú

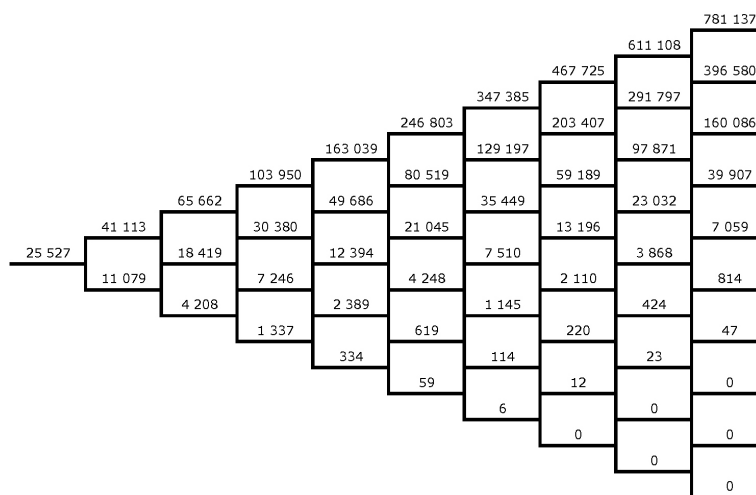


Obrázok 3.6: Ukážka časti stromu optimálnych rozhodnutí pri opcii v alternatíve I za prvých desať období

Hodnoty opcie pri alternatíve II v jednotlivých uzloch binomického stromu vypočítame pomocou vzťahov (3.11) a (3.12). Výsledná hodnota v čase $t = 0$ je:

$$V_0^{II} = \mathbf{25\ 527}$$

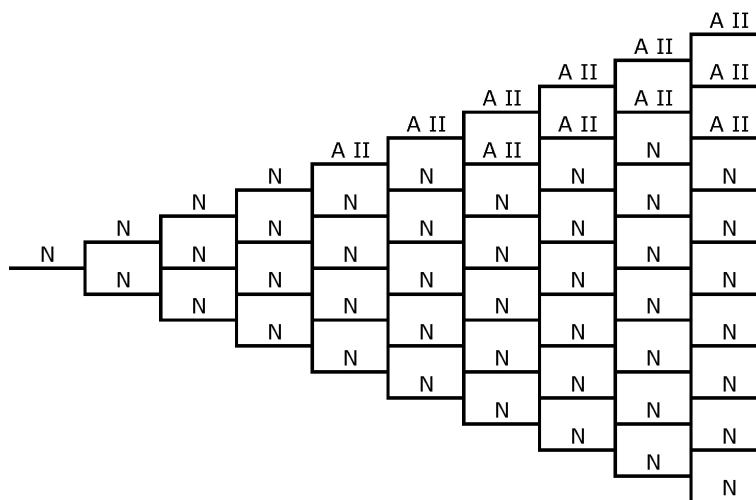
Strom vývoja ceny opcie II pre prvých desať období znázorňuje obrázok 3.7, celý binomický strom je uvedený v prílohe A.3.



Obrázok 3.7: Ukážka časti binomického stromu vývoja ceny opcie pri alternatíve II za prvých desať období (Sk)

Rovnako aj pri opcii II nás zaujíma, kedy by sme mali uplatniť opciu a investovať do menšieho kolektorového poľa, kedy do väčšieho a kedy by sme mali čakať a

opciu nechať v danom období neuplatnenú. Symbolika optimálnych rozhodnutí je rovnaká ako pri obrázku 3.6, pribudla tu však tretia možnosť - A II - uplatniť opciu z alternatívy II, t.j. investovať do väčšieho kolektorového poľa použiteľného na ohrev TÚV a prikurovanie.



Obrázok 3.8: Ukážka časti stromu optimálnych rozhodnutí pri opcii v alternatíve II za prvých desať období

Po vyčíslení súasných hodnôt obidvoch alternatív môžeme urobiť finálne rozhodnutie. Rozdiel medzi oboma alternatívami je

$$V_0^{II} - V_0^I = 6\,019$$

čo je menej ako súčasná hodnota nákladov, ktoré by sme museli dnes vynaložiť na získanie dodatočnej možnosti investovať do väčšieho kolektorového poľa (40 000). **Správne rozhodnutie** určené použitím reálnej opcie **je použiť radiátorové kúrenie**⁷.

3.4 Analýza výsledkov

Okrem odpovede na otázku, či sa rodine oplatí investovať do drahšieho kúrenia, za účelom väčšej dodatočnej úspory po inštalovaní kolektorov, nám model umožňuje získať aj ďalšie informácie. Pozornému čitateľovi určite neunikol prekvapivý výsledok týkajúci sa času inštalácie kolektorov (viď obrázky 3.6 a 3.8). **V obidvoch alternatívach nie je výhodné inštalovať kolektory hneď v prvom roku, a**

⁷pri daných predpokladoch

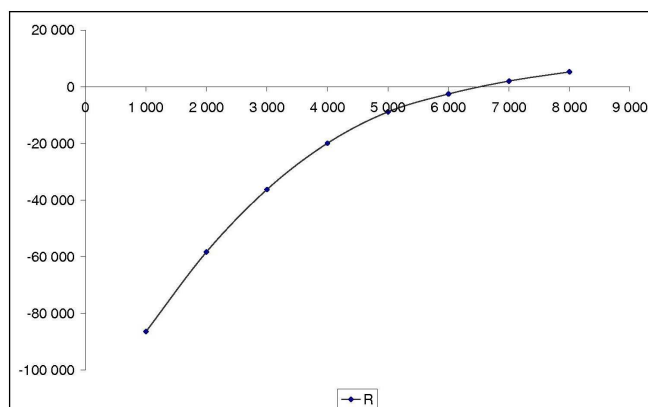
neskôr sa to oplátí len pri pohybe ceny zemného plynu nahor. Samozrejme výsledok je závislý na hodnotách vstupných parametrov, záver je však zrejмый, **obnoviteľné zdroje energie nie sú ekonomicky výhodné za každých okolností resp. pre každého**.

Zamerajme sa na kolektorové pole z alternatívy I a využijme náš model na zistenie, za akých okolností, a pre koho, sa oplátí investovať do kolektorov už v prvom roku. Za týmto účelom si definujme premennú R nasledovným spôsobom:

$$R_0^I = P_{0,0}^I + M_{0,0}^I - I_I - e^{-r}[qV_{1,0}^I + (1-q)V_{1,1}^I] \quad (3.13)$$

Ak je R kladné (hodnota okamžitého uplatnenia opcie je vyššia, ako jej ponechanie nažive), tak sa do kolektorov oplátí investovať hneď v čase $t = 0$.

Všimnime si súvis hodnoty R s jednotlivými premennými, ktoré sme spomínali ako spoločné znaky obnoviteľných zdrojov energie, a to tak, že budeme skúmať vývoj hodnoty R pri zmene jedného vstupného parametra pri podmienke ceteris paribus (hodnoty ostatných останích nezmenené). Ako prvú analyzujeme *využitelnosť* obnoviteľného zdroja energie, ktorú charakterizuje ročná úspora energie pri použití slnečných kolektorov (U). Vývoj hodnoty R v závislosti od U znázorňuje obrázok 3.9.



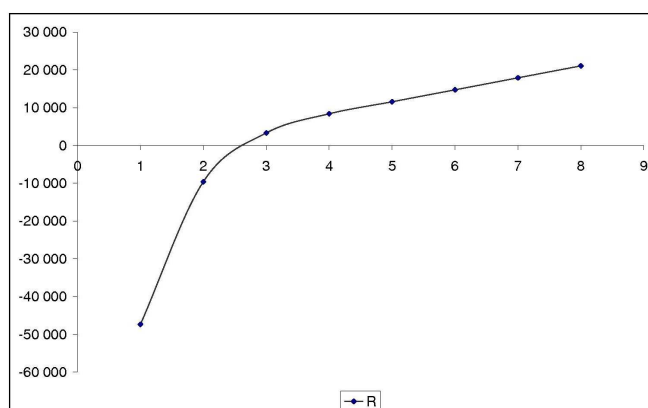
Obrázok 3.9: Vývoj R v závislosti od ročnej úspory energie U

Bod zlomu ($R = 0$) nastáva pri hodnote $U = 6\,504$ kWh. Problémom pri využívaní slnečnej energie na vykurovanie je, že v čase najväčšej potreby (v zime) je jej najmenej. Iná situácia nastane v prípade využívania kolektorov (okrem prípravy TÚV) napríklad aj na ohrievanie bazéna. V takomto prípade je možné dosiahnuť

výrazne vyššiu využiteľnosť (U), pretože sa plne vyčerpá potenciál slnečných letných dní.

Záver: Obstaráť takéto kolektorové pole sa v súčasnosti (pri súčasnej cene zemného plynu) oplatí, **ak získanú energiu vieme dostatočne využiť**, napríklad na ohrievanie bazéna.

Pod spoločnými znakmi obnoviteľných zdrojov energie sme spomínali aj *nízke prevádzkové náklady*, ktoré sú dané *ušetrenými nákladmi za fosílna palivá*. Skúmame vývoj R pri zmene ceny 1 kWh energie (S)—viď obrázok 3.10.

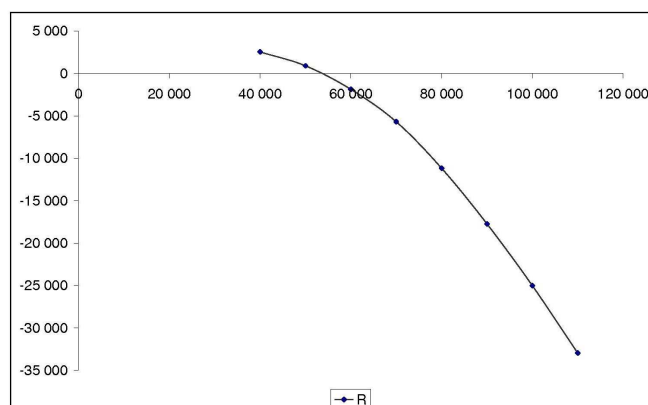


Obrázok 3.10: Vývoj R v závislosti od ceny 1 kWh energie S

Bod zlomu ($R = 0$) nastáva pri hodnote $S = 2,64$ Sk/kWh.

Záver: Inštalovať slnečné kolektory hneď sa domácnosti oplatí, ak ako **základný zdroj energie** na ohrev TÚV používa **energiu drahšiu ako 2,64 Sk/kWh** (teda napríklad elektrickú energiu, ktorej aktuálne ceny na Slovensku pre domácnosti sú nad 3 Sk/kWh).

Posledným parametrom sú *investičné náklady*. Vývoj hodnoty R v závislosti od veľkosti investičných nákladov (I) znázorňuje obrázok 3.11.



Obrázok 3.11: Vývoj R v závislosti od veľkosti investičných nákladov I

Bod zlomu ($R = 0$) nastáva pri hodnote $I = 53\,705$ Sk. Teda investovať okamžite by sa oplatilo v prípade, ak by cena uvažovaného kolektorového poľa klesla pod $53\,705$ Sk. Pochopiteľne vplyvom technického pokroku a zlepšovaním výrobného procesu sa cena môže postupne znížiť na túto úroveň. Oveľa reálnejšia je však možnosť zavedenia cielenej štátnej dotácie⁸. Ako vyplýva z modelu, ak by vláda zaviedla napríklad pevný príspevok vo výške $7\,000$ Sk na 1m^2 kolektorovej plochy (nami uvažované kolektorové pole má veľkosť 8m^2), tak by sa aj bežnej slovenskej rodine (splňajúcej parametre nášho modelu) oplatila okamžitá investícia do kúpy kolektorov. Prípadne by sa náš model dal využiť na ciele nastavenie štátnych dotácií tak, aby boli dosiahnuté príslušné politické a ekologické ciele (cieľom EÚ je do roku 2010 dosiahnuť 12%-ný podiel obnoviteľných zdrojov energie (OZE) na celkovej spotrebe energie, do roku 2020 tento podiel zvýšiť na 25% a do roku 2040 dokonca na 50%. Podiel OZE na celkovej spotrebe energie v Slovenskej republike predstavuje v súčasnosti necelé 4%)⁹.

Záver: Vo väčšej miere by sa kolektorové pole oplatilo **v prípade zníženia investičných nákladov** (napríklad zavedenie štátnej dotácie).

⁸V súčasnosti je systém štátnych dotácií nákupu slnečných kolektorov veľmi netransparentný, o štátnu dotáciu je možné žiadať na príslušnom fonde Ministerstva životného prostredia SR, avšak chýbajú jasné pravidlá ich prideľovania (napríklad pevná suma dotácie na 1m^2 kolektorovej plochy), projekty sa posudzujú „individuálne“.

⁹http://www.agroporadenstvo.sk/oze/legislativa/Legislativa_INTERREG.pdf

Záver

Závislosť súčasnej ľudskej civilizácie od fosílnych palív je už aj medzi širokou verejnosťou vnímaná ako vážny ekologický a politický problém. Vyspelé štáty a najmä tie, ktoré sú závislé na importe zahraničných fosílnych palív, sa snažia túto závislosť znížiť rozvojom využívania obnoviteľných zdrojov energie. Nanajvýš aktuálnou sa stáva otázka efektívnosti investícií do týchto zdrojov.

V predkladanej diplomovej práci sme sa venovali problému hodnotenia investície do obnoviteľného zdroja energie pomocou reálnych opcií. Po stručnom oboznámení sa so spôsobom, akým reálne opcie pristupujú k hodnoteniu investičných príležitostí, a ich krátkej charakteristike, sme sa venovali podrobnému vysvetleniu princípov ich riešenia. Ukázali sme si, ako modelovať vývoj hodnoty projektu pomocou binomického stromu a ako takýto model využiť, pri stanovení hodnoty reálnej opcie.

V tretej kapitole sme poznatky o reálnych opciách využili pri hodnotení investície do slnečných kolektorov. Na konkrétnom príklade sme si ilustrovali špecifiká takejto investície a ich zohľadnenie v riešení. Okrem určenia hodnoty opcie investovať do väčšieho kolektorového poľa, sme sa venovali aj zisteniu optimálneho investičného rozhodnutia v jednotlivých uzloch binomického stromu. Dospeli sme k záveru, že pre uvažovaného investora (bežnú rodinu) nie je (za daných predpokladov) v súčasnosti efektívne ani v jednej z alternatív podniknúť investíciu do slnečných kolektorov. Navyše alternatíva II, ktorá si vyžaduje dodatočné výdavky v čase $t = 0$, je celkovo menej efektívna a nemala by byť uskutočnená. Vychádzajúc z týchto zistení o optimálnych investičných rozhodnutiach konkrétneho investora, sme cítili potrebu bližšie sa venovať hľadaniu odpovede na otázku, pre koho a za akých okolností by investícia do slnečných kolektorov mohla byť výhodná. Za týmto účelom sme analyzovali vplyvy vybraných parametrov na optimálne investičné rozhodnutie v čase $t = 0$. Na základe výsledkov sme sa pokúsili identifikovať konkrétne skupiny investorov, respektíve konkrétne podmienky vhodné na investovanie. Načrtli sme tiež možnosť využitia vypracovaného modelu hodnotenia investície na určenie optimálnej dotačnej politiky štátu.

Literatúra

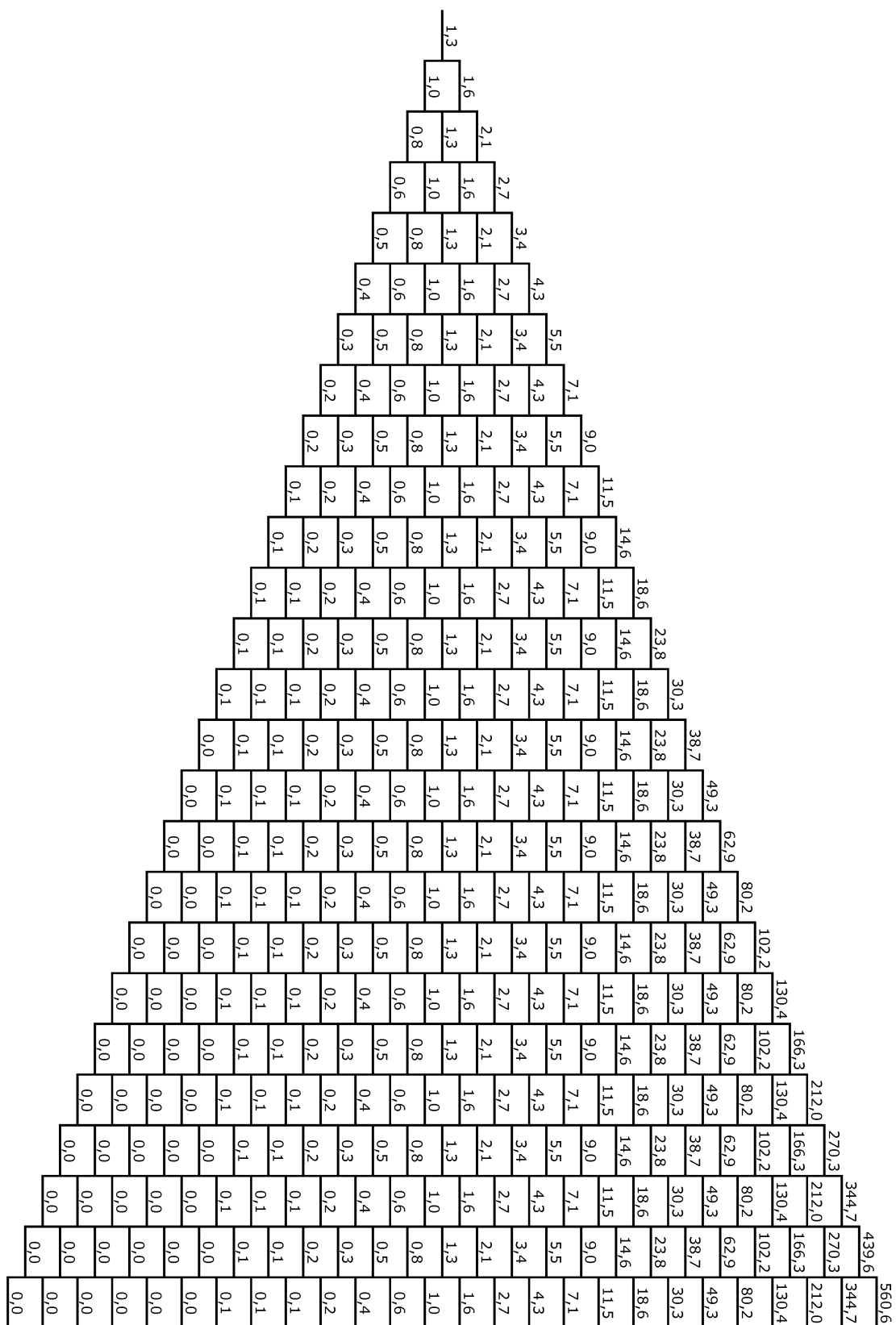
- [1] BALÁŽ, P.: *Energy – Key Factor of EU´ Economic Policy*, Journal of Economics (03/2008), p. 274-295, 2008. Dostupné na: <http://www.cceol.com/>
- [2] BLACK, F.—SCHOLES, M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, vol. 81, 1973. Dostupné na: <http://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/260062>
- [3] COPELAND, T.—ANTI-KAROV V.: *Real Options: A Practitioner's Guide*, TEXERE, New York, 2001
- [4] COX, J. C.—ROSS, S. A.—RUBINSTEIN, M.: *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, Vol. 7, p. 229-263, 1979. Dostupné na: <http://www.isb.uzh.ch/studium/courses06-07/pdf/errarticle.pdf>
- [5] DIXIT, A. K.—PINDYCK, R. S.: *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994
- [6] HULL, J. C.: *Options, Futures and Other Derivatives*. 4th edition. Prentice-Hall International, New Jersey, 2000.
- [7] CHLADNÁ, Z.: *Real options applications for strategic investment decisions*, Viedeň, 2007.
- [8] KRÁLOVIČ, J.—VLACHYNSKÝ, K.—MARkovič, P.: Finančný manažment, IURA EDITION, Bratislava, 2002.
- [9] MELICHERČÍK, I.—OLŠAROVÁ, L.—ÚRADNÍČEK, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005
- [10] MICHNOVÁ, I.: *Analýza investičného rozhodovania pri uplatnení reálnej opcie*, Bratislava, 2008

- [11] MYERS, S. C.: *Determinants of Corporate Borrowing*, Journal of Financial Economics, Vol.5, p.147-175, 1977. Dostupné na: <http://bbs.cenet.org.cn/uploadImages/20035171194642347.pdf>
- [12] ŠEVČOVIČ, D.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Bratislava, 2001. Dostupné na: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/derivaty/skripta.pdf>

Prílohy

Príloha A

Úplné binomické stromy riešenia modelu



Príloha A.1: Binomický strom vývoja ceny zemného plynu (Sk/kWh)

[illegible]

Príloha A.2: Binomický strom vývoja ceny opcie pri alternatíve I (Sk)

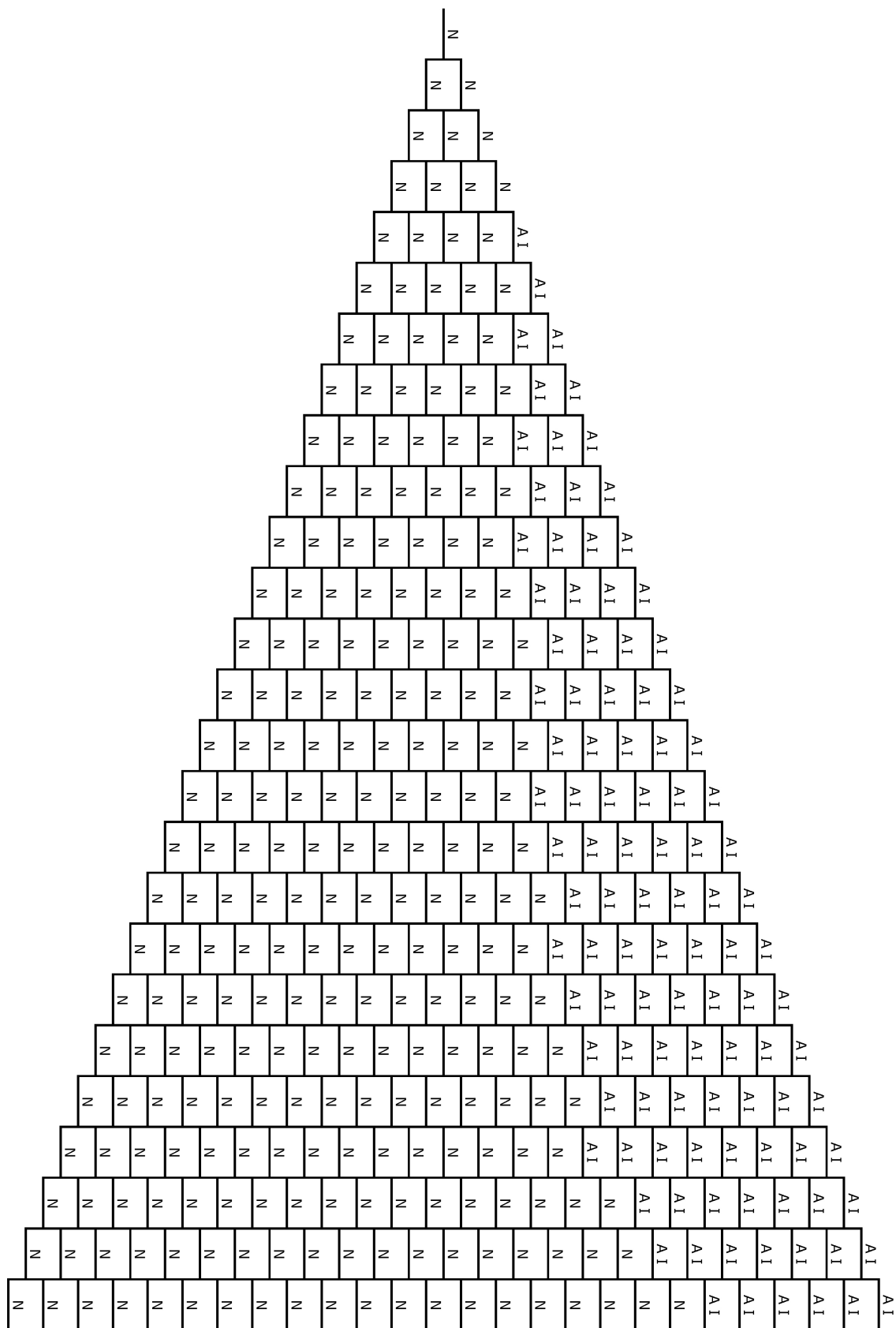
[illegible]

Príloha B

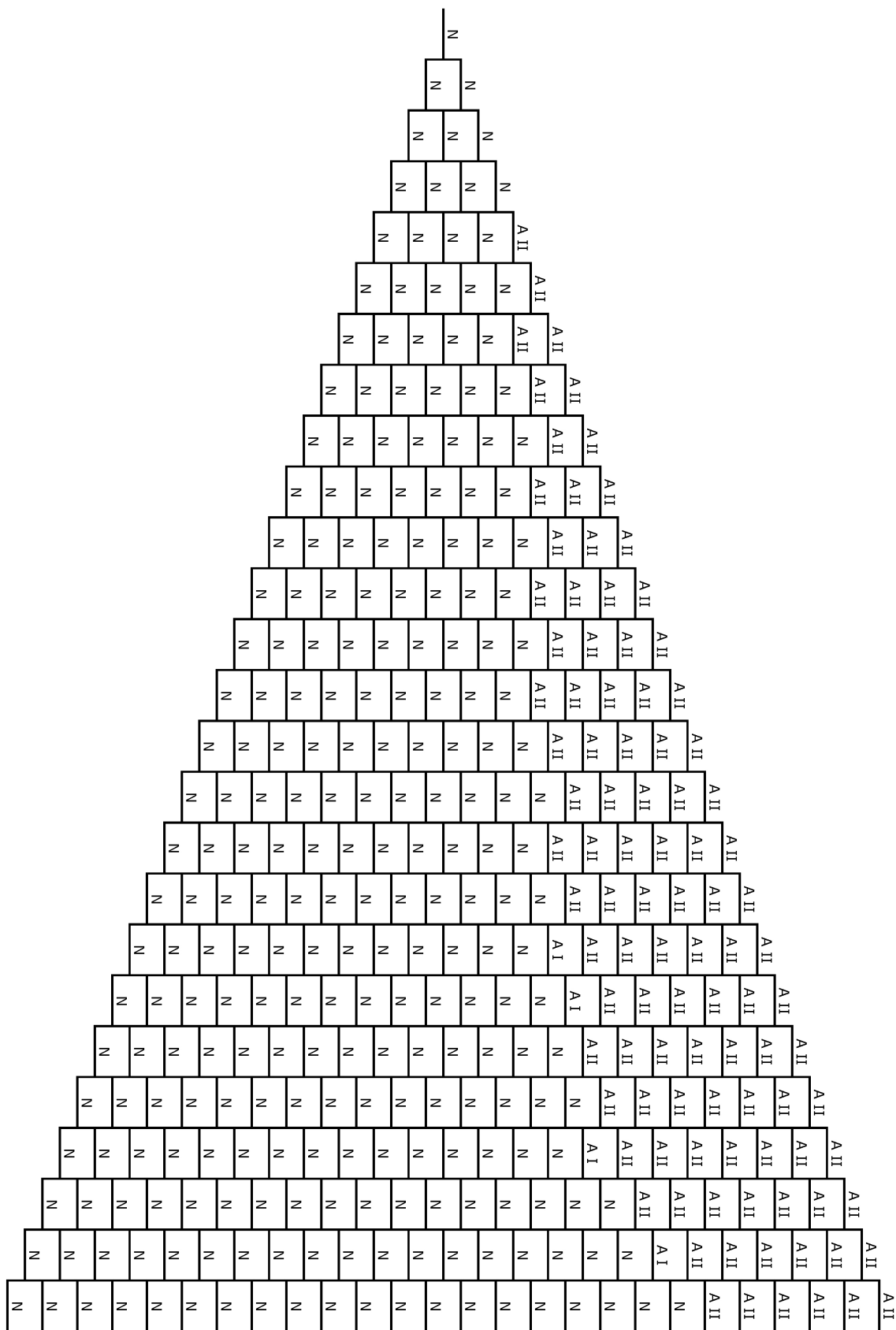
Úplné binomické stromy optimálnych rozhodnutí

LEGENDA:

- **A I** - Uplatniť opciu z alternatívy I, t.j. investovať do menšieho kolektorového poľa použiteľného len na ohrev TÚV
- **A II** - Uplatniť opciu z alternatívy II, t.j. investovať do väčšieho kolektorového poľa použiteľného na ohrev TÚV a prikurovanie
- **N** - Nechať opciu v danom uzle neuplatnenú



Príloha B.1: Strom optimálnych rozhodnutí pri opcii v alternatíve I



Príloha B.2: Strom optimálnych rozhodnutí pri opcii v alternatíve II