

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzity Komenského v Bratislave



## DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2008

Jana Bírová

Modely cien akcií so stochastickou volatilitou.  
Analytická aproximácia NGARCH modelu.

## DIPLOMOVÁ PRÁCA

Jana Bírová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO BRATISLAVA  
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky  
Katedra Aplikovanej Matematiky a Štatistiky

Ekonomická a Finančná Matematika

Vedúca diplomovej práce: RNDr. Beáta Stehlíková.

BRATISLAVA 2008

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu *Modely cien akcií so stochastickou volatilitou* vypracovala samostatne. Všetku použitú literatúru a pramene uvádzam v závere práce.

Jana Bírová

Ďakujem vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej za konzultácie, cenné rady počas práce, ale najmä za množstvo času, ktorý mi veľmi ochotne počas celej tvorby tejto práce venovala.

# Abstrakt

V diplomovej práci sa venujeme oceňovaniu opcií modelmi so stochastickou volatilitou. Z existujúcich prístupov sme si vybrali GARCH modely, a to konkrétne aproximačnú formulu NGARCH modelu pre cenu európskej opcie. Na jednej strane výhodou tejto formuly je malý počet parametrov, ktoré je treba odhadnúť a na druhej sú vhodné vlastnosti nepozorovateľnej volatility. Táto formula zatiaľ nie je v praxi využívaná, avšak jej aplikácia na reálne dáta prináša uspokojivé výsledky. Formulu otestujeme na týždňových hodnotách opcií pre rôzne časy, ceny akcie a expiračné ceny.

**Kľúčové slová:** stochastická volatilita, GARCH modely, NGARCH modely

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>1 Volatilita</b>	<b>7</b>
1.1 Volatilita a jej typické vlastnosti.....	7
1.2 Modelovanie finančných procesov, Black–Scholesov a Mertonov model.....	8
1.3 Stochastická volatilita.....	13
1.4 Implikovaná volatilita.....	16
1.5 Historická volatilita.....	19
<b>2 Modelovanie volatility</b>	<b>21</b>
2.1 GARCH modely.....	21
2.2 NGARCH modely.....	22
2.3 Analytická aproximácia NGARCH modelu.....	26
<b>3 Empirická analýza</b>	<b>29</b>
3.1 Model so stochastickou volatilitou.....	29
3.2 Približné riešenie ceny opcie a odhad parametrov.....	31
3.3 Experimentálne výsledky 1 .....	32
3.4 Iný postup pre odhad parametrov.....	33
3.5 Experimentálne výsledky 2.....	34
<b>Záver</b>	<b>38</b>
<b>Literatúra</b>	<b>39</b>

# Úvod

Pri modelovaní finančných procesov nás hlavne zaujíma budúci vývoj ich cien a s ním spojené riziko. Na opísanie rizika sa používa pojem volatilita. Čím je dané aktívum viac rizikové, tým má vyššiu volatilitu. V súčasnosti existuje viacero prístupov, ako volatilitu do modelu zahrnúť a ktoré jej vlastnosti má model zachytiť. Požiadavka časovo závislej volatILITY sa stala jednou zo základných. Odozvou na túto požiadavku sú modely so stochastickou volatilitou, ktoré v prípade oceňovania opcií vedú ku zovšeobecneniu Black-Scholesovej formuly.

Práca je rozdelená na tri časti. Prvá kapitola obsahuje základné informácie o volatilita a stručný prehľad modelov časovo závislej volatILITY. V druhej kapitole sa venujeme možnosti použiť na modelovanie diskkrétne parametrické GARCH modely. Dôvodom výberu je fakt, že pre nelineárny GARCH model bola odvodená explicitná formula pre cenu európskej opcie. Túto formulu analyzujeme v tretej kapitole. Opíšeme spôsob matematického modelovania, ktorý sme použili pri empirickej analýze a spôsob odhadovania parametrov. Pri analýze najprv použijeme vygenerované dáta so známymi hodnotami parametrov a potom skutočné hodnoty cien akcií a opcií.

# Kapitola 1

## Volatilita

Časový vývoj finančných aktív je prirodzene nestály. Pri jeho analýze môžeme sledovať trend vo vývoji spolu s náhodnými zmenami. Ekonomická teória financií a hlavne finančná matematika sa snažia tieto náhodné zmeny zachytiť a vysvetliť. Volatilita na finančných trhoch opisuje práve tieto náhodné zmeny. Používa sa na kvatifikovanie rizika spojeného s budúcou cenou. Zachytávame ňou mieru pohybov cien aktív. Čím sú zmeny cien daného aktíva vyššie, tým rastie aj jeho volatilita. Dané aktívum je viac rizikové.

Nech  $\sigma_t^2$  je variancia náhodnej premennej v čase  $t$ . Jej štandardnú odchýlku  $\sigma_t$  označujeme pojmom volatilita. Štandardne sa vyjadruje ako ročná hodnota v %.

### 1.1 Volatilita a jej typické vlastnosti

Vzťah medzi volatilitou a výnosmi (cenami) finančných aktív je predmetom rozsiahlych štúdií. V súčasnosti je všeobecne známe, že volatilita sa s časom mení. A taktiež sú známe a zdokumentované mnohé jej typické vlastnosti, ktoré sú empiricky pozorovateľné. To dalo podnet k rozvoju modelov časovo závislej volatility.

- Volatility clustering



Týmto pojmom označujeme zhlukovanie volatility. Pre určité časové obdobia je volatility vyššia respektíve nižšia ako jej priemerné hodnoty a je pre ňu typické, že sa tieto obdobia objavujú v zhlukoch. To znamená, že keď je volatility vysoká, je pravdepodobné, že vysoká aj ostane. S týmto javom súvisí aj pretrvávajúce - pomalé vymaznutie šokov z časového priebehu volatility. Určitý čas trvá, kým sa volatility vráti ku svojej dlhodobej hodnote.

- Leverage effect

Na finančných trhoch je často pozorovaná negatívna korelácia medzi okamžitými výnosmi a zmenou volatility. Tento jav sa medzi odbornou verejnosťou nazýva leverage effect. Zvyčajne sa opisuje pomocou "dobrých" a "zlých" správ. Zmena volatility pri veľkej negatívnej zmene výnosu býva často vyššia ako pri rovnako veľkej pozitívnej zmene. Teda "zlé" správy majú väčší vplyv na jej priebeh. Leverage effect hovorí o asymetrickej povahe v zhlukoch volatility.

- Mean-reversion

Mean-reverting procesy sú procesy, ktoré sa v dlhodobom časovom horizonte blížia ku svojej priemernej hodnote. Táto vlastnosť volatility vyplýva zo zhlukovania. Volatility sa po období fluktuácií priťahuje späť ku svojej dlhodobej priemernej hodnote. Teda sa predpokladá, že táto dlhodobá úroveň existuje.

## **1.2 Modelovanie finančných procesov, Black-Scholesov a Mertonov model**

- Modelovanie finančných procesov

Časový vývoj finančných aktív je viacmenej nestály. Pri jeho analýze môžeme sledovať trend vo vývoji spolu s náhodnými zmenami, hovoríme, že vývoj má stochastický charakter. Trend predstavuje zložku, ktorá hovorí o dlhodobom vývoji finančného aktíva. Fluktučná zložka reprezentuje náhodné zmeny. Stochastický proces je  $t$ -parametrický systém náhodných premenných  $\{x(t), t \in I\}$ , kde  $I$  je interval alebo diskretná množina indexov. Na jeho modelovanie používame stochastické diferenciálne rovnice, v ktorých je náhodnosť prítomná prostredníctvom Wienerovho procesu.

Pri modelovaní finančných procesov sa vo väčšine prípadov používajú ich výnosy a nie samotné ceny. Hlavným dôvodom je to, že výnosy majú výhodnejšie štatistické vlastnosti a preto sa s ich časovými radmi pracuje ľahšie ako s cenami.

Budeme modelovať výnos  $S_t = \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}$ , ktorý sa približne rovná  $\log\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right)$ . Pretože

platí  $\log(1+x) \approx x$  pre malé  $x$ . Ďalej budeme predpokladať, že sú to nezávislé náhodné premenné s normálnym rozdelením. Preto môžeme tieto výnosy modelovať ako prírastky Brownovho pohybu s driftom. Brownov pohyb je základným procesom, z ktorého sú odvodené procesy popisujúce vývoj na finančnom trhu.

Brownov pohyb s driftom  $x(t) = \mu t + \sigma w(t)$  sa skladá z deterministickej zložky  $\mu t$ , nie je v nej žiadna náhodnosť, nazýva sa drift a z náhodnej zložky  $\sigma w(t)$ , ktorá sa nazýva volatilita. Prírastok na intervale dĺžky  $\Delta t$  je  $\mu \Delta t + \sigma w(\Delta t)$ , čo je náhodná premenná s rozdelením  $N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$ . Proces  $S_t$ , ktorý sa riadi  $\log\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = \mu + \sigma w(t)$  sa nazýva geometrický Brownov pohyb. Stochastická diferenciálna rovnica pre vývoj ceny akcie má tvar

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw(t)$$

Ako bude vyzerat' príslušné riešenie ceny tejto akcie? Odpoveď na túto otázku nám dáva Itôva lemma, ktorá je základnou vetou pre stochastické procesy.

*Itôva lemma*<sup>1</sup>:

Nech  $f(x, t)$  je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná  $x$  je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice  $dx(t) = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dW(t)$ , kde  $w(t)$  je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie  $f$  je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt$$

dôsledkom čoho funkcia  $f$  vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dx.$$

Riešenie spomínanej stochastickej diferenciálnej rovnice pre vývoj ceny akcie je

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma w_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t\right)$$

- Black-Scholesov a Mertonov model

Základným nástrojom oceňovania Európskych opcií je Black-Scholesova, Mertonova formula. Merton odvodil cenu pre európsku kúpnu opciu (call opcia) využitím ekonomických a matematických predpokladov. Hlavná myšlienka spočíva v konštrukcii zabezpečeného portfólia, ktorého hodnota nezávisí od hodnoty jednotlivých zložiek.

Portfólio sa skladá z bezrizikových dlhopisov, akcií a opcií na tieto akcie. Pred stratou na burze je zabezpečené pomocou vlastníctva akcií a opcií zároveň. Nákup/predaj zložiek portfólia je realizovaný nákupom/predajom inej zložky portfólia. Záporné množstvo daného aktíva znamená, že toto aktívum dlžíme. Zaistené portfólio zarobí len bezrizikovú úrokovú mieru  $r$ . Ďalej sa predpokladá, že obchodovanie je spojité v ľubovoľných množstvách, neexistujú transakčné náklady a úroková miera je konštantná.

Matematické predpoklady:

- geometrický Brownov pohyb

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW(t)$$

---

<sup>1</sup> Vid' Melicherčík, Olšárová (2005), Ševčovič (2001)

- Itôva lemma

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(s,t) \partial^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS$$

Ekonomické predpoklady:

- nulový rast investícií  $Q_s S + Q_v V + B = 0$
- samofinancovateľnosť portfólia  $SdQ_s + VdQ_v + \delta B = 0$
- riziková neutralita/ no arbitrage  $d\pi = r\pi dt$

Spojením predpokladov dostávame

$$\begin{aligned} d(Q_s S + Q_v V + B) &= d0 \\ SdQ_s + Q_s dS + VdQ_v + Q_v dV + dB &= 0 \\ (SdQ_s + VdQ_v + \delta B) + Q_s dS + Q_v dV + rBdt &= 0 \\ Q_s dS + Q_v dV - r(SQ_s + VQ_v)dt &= 0 \\ \frac{Q_s}{Q_v} dS + dV - r \left( S \frac{Q_s}{Q_v} + V \right) dt &= 0 \\ -\Delta dS + dV - r(V - \Delta S)dt &= 0 \\ -\Delta dS + \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS - r(V - \Delta S)dt &= 0 \\ \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r(V - \Delta S) \right) dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \Delta \\ \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r \left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) \right) dt &= 0 \end{aligned}$$

známu formulu pre európsku call opciu :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$$V(S, T) = \max(S - E, 0)$$

Prvá rovnica je parabolická diferenciálna rovnica, ktorú vieme riešiť pomocou Greenovej funkcie. Druhá rovnica predstavuje koncovú podmienku v čase expirácie. Vyriešením dostaneme cenu pre call opciu :

$$V(S, t) = SN(d_1) - E \exp(-r(T-t))N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\left( \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \ln \frac{S}{E} \right)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \ln \frac{S}{E} \right)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

Zo vzťahu medzi kúpnu a predajnou opciou (put opcia) je odvodená formula pre put opciu. Tento vzťah voláme put-call parita. Vyplýva z vytvorenia dvoch stratégií, ktoré majú rovnakú hodnotu. 1. stratégia je založená na kúpe jednej akcie a put opcie na túto akciu. 2. stratégia spočíva v investovaní expiračnej ceny do bezrizikového finančného nástroja a nákupe call opcie na tú istú akciu. Naše portfólio má hodnotu  $S \exp(-D(T-t)) + put = call + E \exp(-r(T-t))$ . Dosadením získame vzťah pre put opciu.

$$V(S, t) = E \exp(-r(T-t))N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Ďalej budeme pod cenou opcie myslieť cenu kúpnej opcie európskeho typu.

Black-Scholesova formula predpokladá konštantnú volatilitu. V súčasnosti je všeobecne známe, že volatilita sa s časom mení. Tento poznatok bol empiricky dokázaný a to viedlo k rozvoju modelov časovo závislej volatility.

### 1.3 Stochastická volatilita

*''Suppose we use the standart deviation ... of possible future returns on a stock ... as a measure of it's volatility. Is it reasonable to take that volatility as constant over time? I think not.''*

*Fisher Black*

Modely so stochastickou volatilitou vedú ku zovšeobecneniu Black-Scholesovej formuly. Volatilita je v nich časovo závislá a opisujeme ju pomocou nepozorovateľného náhodného procesu. Tieto modely sú opísané dvoma premennými. Prvou z nich je výnos (cena) aktíva, ktorá je pozorovateľná a druhou je nepozorovateľná volatilita. Obidve premenné obsahujú náhodné zložky, ktoré sú navzájom korelované. Tým, že sa pripustí nenulová korelácia, je možné zachytiť známy leverage effect.

- Spojité modely stochastickej volatility

Náhodný vývoj ceny akcie budeme modelovať ako funkciu času. Predpokladáme, že cena akcie sleduje stochastickú diferenciálnu rovnicu v Itôvej forme.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw_1(t) \quad (1.1)$$

Parameter  $\mu$ , drift, v deterministickej zložke rovnice určuje trend vo vývoji.  $w_1(t)$  je štandardný Wienerov proces, ktorý predstavuje náhodnú zložku vývoja ceny akcie. Ďalej predpokladáme, že volatilita je funkcia stochastického procesu  $y(t)$ , ktorý vieme vyjadriť diferenciálnou rovnicou taktiež v Itôvej forme.

$$dY = \alpha(m - Y)dt + f(Y)dw_2(t) \quad (1.2)$$

$$\sigma = g(Y)$$

Rovnica (1.2) predstavuje všeobecnú triedu tzv. "mean-reverting" procesov pre stochastickú volatilitu. Riešenie  $y_t$  sa v limite blíži k strednej hodnote  $m$  s rýchlosťou približovania  $\alpha$ . Tejto vlastnosti hovoríme "mean=reversion".  $\alpha(m - Y)$  je drift. Ak je hodnota  $y$  v niakom čase  $t$  väčšia ako  $m$ , tak riešenie v tomto bode klesá. Naopak, ak je hodnota  $y$  menšia ako  $m$ , tak riešenie v tomto bode rastie.  $\alpha$  ovplyvňuje rýchlosť stúpania respektíve klesania.  $f(Y)$  je koeficient rozptylu, vo všeobecnosti môže závisieť od času  $t$  aj od hodnoty  $y$ . O hodnote  $\frac{1}{\alpha}$  hovoríme ako o pamäti. Ako rýchlo, respektíve pomaly vymiznú z časového priebehu volatility šoky, hodnoty výrazne rozdielne od priemerných. Wienerov proces  $w_2(t)$  je korelovaný s  $w_1(t)$ .

Doteraz bolo navrhnutých množstvo rôznych modelov stochastickej volatility podľa jej požadovaných vlastností. Základným problémom je nájsť model, ktorý sa približuje realite a odhadnúť jeho parametre. Všeobecne môžeme špecifikovať:

- výber nepozorovateľnej premennej (volatilita výnosov  $\sigma$ , log-volatilita výnosov  $\log(\sigma)$  a iné)
- rozdelenie náhodnej zložky (normálne rozdelenie, t-rozdelenie a iné)
- výber funkcií pre drift a volatilitu
- zahnúť do modelu skoky a ďalšie vysvetľujúce premenné

V závislosti od výberu funkcií  $g$  a  $f$ , rozdeľujeme modely stochastickej volatility na 4 základné podtriedy<sup>2</sup>. Líšia sa vo voľbe funkcie pre drift a volatilitu. Náhodné zložky majú normálne rozdelenie. V GARCH modeloch sa využíva známy Hestonov model.

*Ornstein Uhlenbeck* model, kde  $\sigma = g(Y) = Y$ ,  $f(Y) = k$ ,  $k$  je kladná konštanta

---

<sup>2</sup> Pre porovnanie efektívnosti týchto modelov pozri Buchbinder, Chistilin (2006)

$$d\sigma = \alpha(m - \sigma)dt + kdw_2(t)$$

*Exponenciálny Ornstein Uhlenbeck* model, kde  $\sigma = g(Y) = \exp(Y)$ ,  $f(Y) = k$ ,  $k$  je kladná konštanta

$$d\sigma = \sigma \left[ \frac{k^2}{2} - \alpha(\ln \sigma - m) \right] dt + k\sigma dw_2(t)$$

*Heston* model, kde  $\sigma = g(Y) = \sqrt{Y}$ ,  $f(Y) = k\sqrt{Y}$ ,  $k$  je kladná konštanta

$$d\sigma = \frac{1}{2\sigma} \left[ \alpha(m - \sigma^2) - \frac{k^2}{4} \right] dt + \frac{k}{2} dw_2(t)$$

*Hull White* model, kde  $\sigma = g(Y) = \sqrt{Y}$ ,  $f(Y) = kY$ ,  $k$  je kladná konštanta

$$d\sigma = \frac{1}{2\sigma} \left[ \alpha(m - \sigma^2) - \frac{k^2\sigma^2}{4} \right] dt + \frac{k\sigma}{2} dw_2(t)$$

Tieto modely určujú volatilitu ako Markovov proces. Teda budúca hodnota volatility závisí len od súčasnej hodnoty, a nie od minulých hodnôt. Vyplýva to z predpokladu, že stochastický proces  $y(t)$ , vieme vyjadriť diferenciálnou rovnicou v Itôvej forme. Diferenciálne rovnice v Itô tvare majú Markovove vlastnosti. Je to v súlade so slabou formou trhovej efektívnosti - iba súčasné ceny aktív by mali vytvárať ich budúce hodnoty<sup>3</sup>.

- Diskrétné modely stochastickej volatility

Na simuláciu procesov používame diskrétny prípad modelov stochastickej volatility. Je to nevyhnutné v prípade, ak nemáme explicitné riešenie danej diferenciálnej rovnice. V diskretnom prípade volatilita závisí na jej minulých hodnotách, túto závislosť určuje voľba funkcie  $\sigma = g(Y)$ . Procesy simulujeme napríklad tak, že diferenciály nahradíme diferenciami. Z (1.2) dostávame

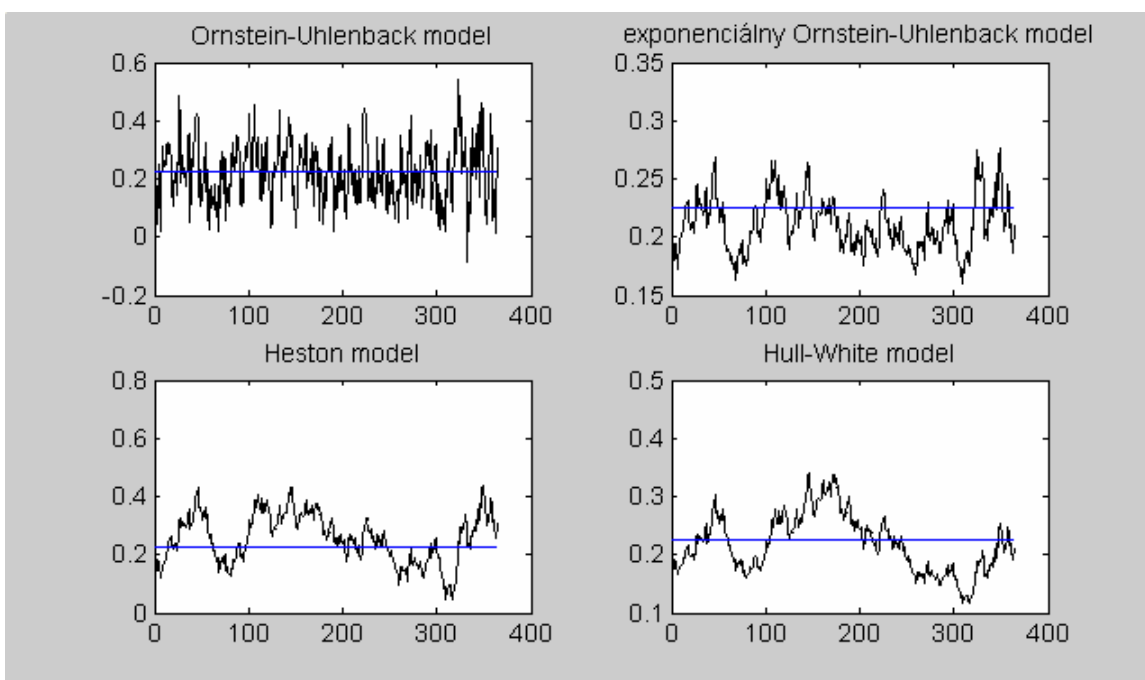
$$\Delta Y = \alpha(m - Y)\Delta t + f(Y)\Delta w$$

---

<sup>3</sup> Vid' Ševčovič (2001)



Je nutné zvoliť začiatočnú hodnotu procesu a nasledujúce hodnoty generujeme podľa predpisu. Kvôli aproximácii normálnym rozdelením sa v niektorých modeloch môžeme dostať do záporných hodnôt. Voľbou funkcie  $g(Y)$  sa dá zabezpečiť nezápornosť procesu. Napríklad pre  $g(Y) = k\sqrt{Y}$ , kde  $k$  je kladná konštanta, sa proces ihneď vráti do kladných hodnôt, ak je v niektorom okamihu hodnota  $Y$  nulová.



Obr. 1.31 Časový priebeh volatility v modeloch Ornstein-Uhlenback, exponenciálny Ornstein-Uhlenback, Heston a Hull-White.

Porovnanie pre parametre zvolené tak, aby sa volatility v limite blížila k hodnote ročnej volatility, približne 0,225 a spoločný wienerov proces.

## 1.4 Implikovaná volatility

Ako pre model so stochastickou volatilitou približne určiť začiatočnú aproximáciu volatility z cien akcií a opcií? Jednoduchou možnosťou je, že aktuálna volatilita sa aproximuje implikovanou volatilitou z at-the money (expiračná cena je blízka cene akcie), ktorá má krátky čas do splatnosti. Modelovanie volatility prístupom implikovanej volatility predpokladá, že sa volatilita v čase nemení, je konštantná. Tento predpoklad nie je správny, avšak mi tento prístup budeme používať len na odhad začiatočnej aproximácie.

Nech opcia má oceňovací vzorec daný funkciou  $V(S, E, t, \sigma^*, r)$ . Nech  $S$ ,  $E$  sú dané a nech je daná hodnota  $V$  opcie s expiračnou cenou  $E$  v čase  $T$ . Potom jediné kladné číslo  $\sigma^* > 0$  riešiacie implicitnú rovnicu  $V = V(S, E, t, \sigma^*, r)$  (1.3) nazývame IMPLIKOVANOU VOLATILITOU akcie vypočítanej na základe uvažovanej opcie.

Implikovaná volatilita je hodnota  $\sigma$ , ktorá rieši Black-Scholesovu rovnicu vtedy, keď všetky ostatné parametre sú známe. Teda hľadáme riešenie  $\sigma^* \in (0, \infty)$ , ktoré rieši (1.3). Rovnovážna cena opcie z Black-Scholesovej formuly je funkcia 5 parametrov :  $S$ ,  $E$ ,  $r$ ,  $\tau$  a  $\sigma$ . Sigma je hodnota okamžitej volatility, ktorá je daná trhom. Všetky parametre okrem  $\sigma$  sú pozorovateľné. Implikovanú volatilitu nevieme explicitne vyrátať z Black-Scholesovej formuly dosadením  $S$ ,  $E$ ,  $r$ ,  $\tau$  a  $V$ . Preto sa na určenie implikovanej volatility používajú numerické metódy. Rovnica (1.3) má kladné riešenie  $\sigma^*$  len vtedy, ak je rozumne ocenená. Nech  $S$ ,  $E$ ,  $r$  a  $\tau$  sú dané. Kedy  $\sigma^*$  existuje?

Závislosť ceny opcie od volatility na  $(0, \infty)$  je rastúca  $\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} > 0\right)$ . So zvyšujúcim sa rizikom rastie aj cena opcie. Akcie s vyššou volatilitou majú väčšie riziko zmeny ceny, či už smerom nahor alebo nadol. Pre limitné prípady platí:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} V_{call}(S, E, t, \sigma, r) = \max(S - E \exp(-r(T-t)), 0)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} V_{call}(S, E, t, \sigma, r) = [SN(d_1) - E \exp(-r(T-t))N(d_2)] = \hat{S}$$

Ak je cena opcie  $V$  z intervalu  $\left(S - E \exp(-r(T-t)), \hat{S}\right)$ , tak  $\sigma^*$  existuje. Z toho, že (1.3) je na  $(0, \infty)$  rastúca funkcia volatility vyplýva, že existuje práve jedna  $\sigma^*$ . Bežne využívaný iteračný algoritmus je algoritmus Newton-Raphson. Nevýhoda tohto algoritmu je, že pri nevhodne zvolenej prvej iterácii, riešenie, ktoré existuje, môžeme prehliadnuť.

*Iteračná metóda:*

Newton-Raphson iteračná schéma má tvar

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{V(\sigma_n) - V_{market}}{V'(\sigma_n)} \quad (1.4)$$

kde  $\sigma_n$  je n-tá iterácia pre  $\sigma_{imp}$ . (1.4) môžeme prepísať nasledovne:

$$\frac{\sigma_{n+1} - \sigma_{imp}}{\sigma_n - \sigma_{imp}} = 1 - \frac{V(\sigma_n) - V(\sigma_{imp})}{\sigma_n - \sigma_{imp}} \frac{1}{V'(\sigma_n)} = 1 - \frac{V'(\sigma_n^*)}{V'(\sigma_n)} \quad (1.5)$$

kde  $\sigma_n^* \in (\sigma_n; \sigma_{imp})$ . Pod podmienkou, že 1. iterácia je vybraná správne, limita  $\sigma_n$  konverguje k jedinému riešeniu  $\sigma_{imp}$ . Z (1.5) vyplýva podmienka pre  $n > 1$ :

$$0 < \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_{imp}}{\sigma_n - \sigma_{imp}} < 1 \quad (1.6)$$

Pri tejto podmienke je rad  $\{\sigma_n\}$  monotónny, ohraničený a konverguje k jedinému riešeniu  $\sigma_{imp}$ . Newton-Raphson metóda je populárna kvôli vlastnosti kvadratickej konvergencie. Ak  $\sigma^*$  existuje, potom existuje otvorený interval  $(a, b)$ , taký že  $\sigma_n \in (a, b)$  pre každé  $n$   $\{\sigma_n\} \rightarrow \sigma^*$ .

*Prvá iterácia:*

Prvú iteráciu potrebujeme určiť tak, aby  $\sigma_1$  patrila do intervalu  $(a, b)$ . Manaster a Koehler navrhli vybrať 1. iteráciu takú, ktorá maximalizuje  $V'(\sigma)$ . Pre takéto riešenie máme:

$$\sigma_1 = \sqrt{\left| \frac{2}{\tau} \left( \ln \frac{S}{E} + r\tau \right) \right|} \quad (1.7)$$

Ak  $\sigma^* < \sigma_1$ , derivácia ceny je rastúca funkcia na intervale  $(\sigma^*, \sigma_1)$  a opačne. Ak  $\sigma_1 < \sigma^*$ , derivácia ceny je klesajúca funkcia na intervale  $(\sigma^*, \sigma_1)$ . Preto je funkcia ceny na tomto intervale rýdzokonvexná respektíve rýdzokonkávna. V prvom prípade dostávame rad  $\sigma^* \leq \dots \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$  a v druhom  $\sigma^* \geq \dots \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$ . Pri podmienke (1.4) je rad  $\{\sigma_n\}$  monotónny, ohraničený a teda konverguje k jedinému riešeniu  $\sigma_{imp}$ .

## 1.5 Historická volatilita

Modelovanie volatility prístupom historickej volatility taktiež predpokladá, že sa volatilita v čase nemení, je konštantná. Tento prístup budeme tiež používať na odhad začiatočnej aproximácie.

Metóda historickej volatility je jednoducho aplikovateľná, v praxi je kvôli tejto svojej vlastnosti často využívaná. Vo finančnom svete sa volatilita väčšinou odhaduje ako štandardná odchýlka zmeny hodnoty finančného aktíva za určité časové obdobie.

Predpokladom pre dobrý odhad je správne zvolenie rozsahu historických pozorovaní. Pri malom počte dát môžeme získať výsledok ovplyvnený krátkodobými fluktuáciami. A naopak pri veľkom rozsahu dát náš výsledok ovplyvňujú príliš vzdialené pozorovania.

Nech  $S_t$  je cena aktíva. Z predpokladov Black-Scholesovho modelu vyplýva, že logaritmy výnosov  $r_t = \log(S_t / S_{t-1})$  sú nezávislé a majú normálne rozdelenie. Ak je dĺžka časového intervalu  $(S_{t-1}, S_t)$  rovná  $\Delta t$ , tak variancia  $r_t$  je  $\sigma^2 \Delta t$ .

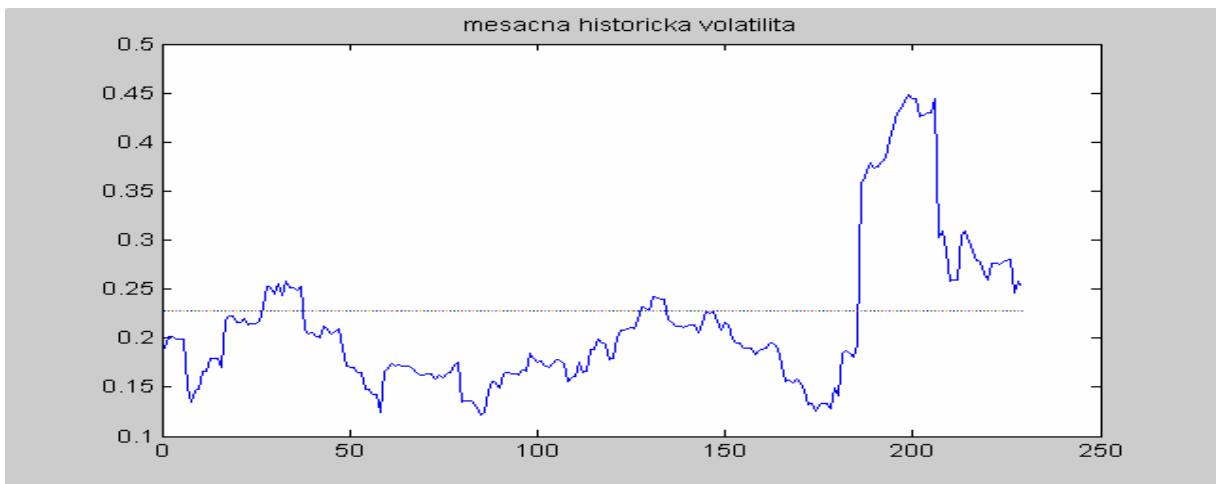
Varianciu odhadneme nasledovne

$$Var r = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2$$

$$\bar{r} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N r_i$$

Odhad parametra potom bude

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{Var} r}{\Delta t}$$



Obr. 1.51 Historická volatilita akcie MSFT

Pri zvolenom mesačnom rozsahu historických denných dát na obrázku 1.51 môžeme vidieť výrazné rozdiely od hodnoty získanej z denných dát dĺžky jedného roka.

## Kapitola 2

# Modelovanie volatility

Istý čas vo finančnom svete prevládal názor, že volatility je konštantná. Tento názor je už dávno minulosťou a empiricky bolo dokázané, že volatility sa v čase mení<sup>4</sup>. Odvtedy bolo navrhnutých mnoho modelov, ktoré sa snažia zachytiť stochastickú povahu volatility. Pretože volatility nie je možné pozorovať priamo, modely spojitej volatility nie sú jednoducho implementovateľné. Jednou z možností je použiť diskkrétne parametrické modely. Medzi tieto patria GARCH modely. Navyše pre nelineárny GARCH model bola odvodená explicitná formula pre cenu európskej opcie.

### 2.1 GARCH modely

V súčasnosti existuje množstvo ekonometrických modelov, ktoré sa snažia vysvetliť časovo závislú volatility. Jedným z možných prístupov sú GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) modely, ktoré vysvetľujú volatility ako funkciu jej predchádzajúcich pozorovaní a cien aktíva. Variabilita vysvetľovanej premennej sa systematicky mení so zmenami vysvetľujúcej premennej. Vyvinuli sa z autoregresných ARCH modelov, ktoré volatility vyjadrujú len ako funkciu

---

<sup>4</sup> Vid' Ball, Torous

predchádzajúcich cien aktíva. Tvar modelu priradzuje väčšiu váhu pozorovaniám, ktoré sú bližšie k súčasnosti. Výhodou týchto modelov je, že tento tvar dokáže zachytiť niektoré z vlastností volatility. A to hlavne zhukovanie (Volatility clustering), a jeho následky ako pretrvávanie a pomalé vymaznutie šokov z priebehu. Autormi tejto triedy modelov sú Engle a Bollerslev<sup>5</sup>.

Všeobecný tvar modelu GARCH (p, q) je

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = c + \sum_{i=1}^p \Phi_i \ln \frac{S_{t-i}}{S_{t-i-1}} + \sum_{j=1}^q \Theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}$$

GARCH model sa skladá vždy z dvoch rovníc. Prvá rovnica vysvetľuje vývoj výnosov a druhá je rovnicou pre časovo meniacu sa volatilitu ( $h_t = \sigma_{t+1}^2$ ). Parametre  $\alpha$ ,  $\beta$  predstavujú pamäť procesu. Pričom parameter  $\alpha$  odráža okamžitú reakciu na nové informácie a parameter  $\beta$  vyjadruje pretrvávanie respektíve vymaznutie informácií z procesu. Medzi najpopulárnejší a aj najjednoduchší patrí GARCH (1,1). Tento vysvetľuje volatilitu pomocou najnovšieho pozorovania.

GARCH modely sú ľahko použiteľné a implementovateľné. Umožňujú určiť volatilitu priamo z historických výnosov aktíva. Ale ich nedostatkom je, že nie sú schopné zachytiť niektoré črty časovo meniacej sa volatility. A to hlavne leverage effect a taktiež ťažké chvosty distribučného rozdelenia.

## 2.2 NGARCH modely

---

<sup>5</sup> Vid' Bollerslev (1992)

Z jednoduchých GARCH modelov sa v poslednom období vyvinulo množstvo rôznych typov, ktoré sa snažia zachytiť typické vlastnosti volatility. Jedným z nich sú NGARCH modely. Boli vyvinuté špeciálne na zachytenie negatívnej korelácie medzi okamžitými výnosmi a zmenou volatility. Pre jednoduchosť používame NGARCH(1,1).

Nech  $h_{t+\Delta}$  je podmienená variancia log-výnosov na intervale  $[t, t + \Delta]$ , v našom prípade to bude jeden deň. Označme  $h_t = \sigma_{t+1}^2$ . Všeobecný nelineárny podmienený heteroskedastický asymetrický model predpokladá, že logaritmy výnosov cien akcií a časovo meniaci sa volatilita sledujú dynamický proces v tvare:

$$\ln \frac{S_{t+\Delta}}{S_t} = r_f + \delta_{t+\Delta} - \frac{1}{2} h_{t+\Delta} + \sqrt{h_{t+\Delta}} \varepsilon_{t+\Delta} \quad (2.1)$$

$$h_{t+\Delta} = f(h_s, \varepsilon_s, s \leq t; \Theta)$$

kde  $r_f$  je bezriziková úroková miera,  $\delta_{t+\Delta}$  je prémie za riziko a  $\varepsilon_{t+\Delta}$  je štandardná normálna náhodná premenná. Nelinearitu v modeli obsahuje druhá rovnica.

Za účelom podmienky no-arbitrage sa dynamický proces prevedie do rizikovo neutrálnej miery<sup>6</sup>.

$$\ln \frac{S_{t+\Delta}}{S_t} = r_f - \frac{1}{2} h_{t+\Delta} + \sqrt{h_{t+\Delta}} v_{t+\Delta}$$

$$h_{t+\Delta} = f\left(h_s, v_s - \frac{\delta_s}{\sqrt{h_s}}, s \leq t; \Theta\right)$$

kde  $v_{t+\Delta}$  je štandardná normálna náhodná premenná. Od voľby funkcie  $f(h_s, \varepsilon_s, s \leq t; \Theta)$  závisia vlastnosti konkrétneho NGARCH modelu. K najznámejším a aj najviac využívaným patria nasledovné dva typy<sup>7</sup>. Viac si povieme o *Engle a Ng* modely, z ktorého vychádza analytická aproximácia NGARCH modelu.

<sup>6</sup> Prevod do rizikovo neutrálnej miery môžeme uskutočniť, len za vhodných podmienok. Vid' Rubinstein (1976)

<sup>7</sup> Empirické porovnanie týchto dvoch modelov ponúkajú vo svojej práci Hsieh, Ritchken (2000)



- Engle a Ng (1993) a taktiež Duan (1995)

Dynamický systém je definovaný:

$$\delta_{t+1} = \lambda \sqrt{h_{t+1}}$$

$$h_{t+1} = f(h_s, \varepsilon_s, s \leq t; \Theta) = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (\varepsilon_t - \gamma)^2$$

v rizikovo neutrálnej miere položíme  $v_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + \lambda$ ,  $\omega = \gamma + \lambda$

$$\ln \frac{S_{t+1}}{S_t} = r_f - \frac{1}{2} h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}} \left( v_{t+1} + \frac{1}{2} \right)$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (v_t - \omega)^2$$

Kvôli zaisteniu kladnej volatility je potrebné, aby parametre  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  boli nezáporné. Z druhej rovnosti vyplýva, že prémie za riziko má vplyv na volatilitu, aj keď riziko je lokálne neutralizované v prvej rovnosti. Teda cena opcie daná NGARCH modelom závisí od rizika. Položením  $\beta_0 \geq 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_2 \geq 0$  zaistíme nezápornosť a stacionaritu procesu. Pre očakávaný výnos a varianciu výnosov založených na informácii v čase  $t$  platí:

$$E_t \left[ \ln \frac{S_{t+1}}{S_t} \right] = r_f + \lambda \sqrt{h_{t+1}} - \frac{1}{2} h_{t+1}$$

$$Var \left[ \ln \frac{S_{t+1}}{S_t} \right] = h_t$$

Keďže máme zabezpečenú stacionaritu  $h_t$  môžeme zdefinovať nepodmienujúcu varianciu

$$\sigma_{t+1}^2 = E[h_t] = \frac{\beta_0}{1 - \beta_2(1 - \omega^2) - \beta_1}$$

Výraz  $\beta_2(1-\omega^2)+\beta_1$  určuje pretrvávajúce-vymyznutie šokov z modelu. Ak sa blíži k hodnote jedna, šoky sa z modelu vytrácajú pomaly. Pre malé hodnoty  $(\beta_2(1-\omega^2)+\beta_1 \ll 1)$  šoky vymyznú rýchlejšie.

- *Heston a Nandi*

Dynamický systém je definovaný:

$$\delta_{t+1} = \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \sqrt{h_{t+1}}$$

$$h_{t+1} = f(h_s, \varepsilon_s, s \leq t; \Theta) = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 (\varepsilon_t - \gamma \sqrt{h_t})^2$$

Tento model má dva jednoduché predpoklady. Prvým predpokladom je, že logaritmy výnosov cien akcií sledujú dynamický proces (2.1). Druhý hovorí o predpoklade, že hodnota call opcie jednu periódu do expirácie spĺňa B-S formulu.

v rizikovo neutrálnej miere položíme  $v_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + \lambda$ ,  $\omega = \gamma + \lambda + \frac{1}{2}$

$$\ln \frac{S_{t+1}}{S_t} = r_f - \frac{1}{2} h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}} \left( v_{t+1} + \frac{1}{2} \right)$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 (v_t - \omega \sqrt{h_t})^2$$

Model je zvolený tak, aby v prípade, keď sa volatilita rovná nule, zarobil len bezrizikovú úrokovú mieru. V prípade, keď sa parametre blížia k nule, model je ekvivalentný s Black-Scholesovým modelom.

Obidva modely majú 4 parametre, ktoré je potrebné odhadnúť spolu s počiatkovou hodnotou  $h_0$ .  $\lambda$  je odmena za investovanie. Parameter  $\gamma$  odráža negatívnu koreláciu medzi výnosmi a zmenou volatility. Túto zachytíme položením  $\beta_2 \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$ .

$$\text{Cov}_t(h_{t+1}, \ln(S_{t+1})) = -2\beta_2\gamma^3\sqrt{h_t}$$

$\gamma$  určuje asymetrickosť (šikmosť) logaritmov výnosov. Pri vysoko pozitívnych šokoch má odlišný vplyv na volatilitu ako pri rovnako vysokých negatívnych šokoch. Položením  $\gamma = 0$  dostaneme GARCH model.

### 2.3 Analytická aproximácia NGARCH modelu

Nech  $h_{t+\Delta}$  je podmienená variancia log-výnosov na intervale  $[t, t + \Delta]$ . Označme  $h_t = \sigma_{t+1}^2$ . V ďalšom pod volatilitou budeme rozumieť podmienenú varianciu.

$$\ln \frac{S_{t+\Delta}}{S_t} = r_f + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \sqrt{h_t}v_{t+\Delta} \quad (2.2)$$

$$h_{t+\Delta} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (v_{t+\Delta} - \gamma)^2 \quad (2.3)$$

Nech cena akcie sleduje dynamický proces (2.2) a podmienená variancia  $h_t$  sleduje proces (2.3). Podmienený variančný proces  $h_t$  a okamžité výnosy sú korelované. Pri oceňovaní opcí potrebujeme rizikovo neutrálnu mieru pre okamžitú cenu. Vieme, že je to pri niektorej pravdepodobnostnej miere a prevedieme to na rizikovo neutrálnu mieru<sup>8</sup>.

$$\ln \frac{S_{t+\Delta}}{S_t} = r_f - \frac{1}{2}h_t + \sqrt{h_t}u_{t+\Delta} \quad (2.4)$$

$$h_{t+\Delta} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (u_{t+\Delta} - \gamma^*)^2 \quad (2.5)$$

---

<sup>8</sup> Prevod do rizikovo neutrálnej miery môžeme uskutočniť, len za vhodných podmienok. Vid' Rubinstein (1976)

$u_{t+\Delta} = v_{t+\Delta} + \lambda$  predstavuje podmienku na informáciu v čase  $t$ , je to normálna náhodná premenná rešpektujúca rizikovo neutrálnu mieru a  $\gamma^* = \gamma + \lambda$ . Zodpovedajúci spojitý systém dostaneme tak, že z normálnych rozdelení spravíme rozdiely. Z týchto rozdelení v limitnom prípade dostaneme Wienerov proces<sup>9</sup>.

$$d \ln S_t = \left( r_f - \frac{1}{2} h_t \right) dt + \sqrt{h_t} dw_{1,t} \quad (2.6)$$

$$dh_t = (\beta_0 - \Theta h_t) dt - 2\beta_2 \gamma^* h_t dw_{1,t} + \beta_2 h_t dw_{2,t} \quad (2.7)$$

kde  $\Theta = 1 - \beta_1 - \beta_2(1 + \gamma^{*2})$  a  $(w_{1,t}, w_{2,t})$  je dvojrozmerný Brownov pohyb. Použitím Itô-Taylor formuly dostávame

$$\ln \frac{S_{t+\Delta}}{S_t} = \left( r_f - \frac{1}{2} h_t \right) \Delta + \sqrt{h_t} z_{t+\Delta} \quad (2.8)$$

$$h_{t+\Delta} - h_t = (\beta_0 - \Theta h_t) \Delta - 2\beta_2 \gamma^* h_t z_{t+\Delta} + \beta_2 h_t (z_{t+\Delta} - \Delta)^2 \quad (2.9)$$

kde  $z_{t+\Delta}$  je nezávislá normálna náhodná premenná na  $N(0, \Delta)$ . Nech  $f^*(\Theta)$  predstavuje funkciu ceny aktíva pre rizikovo neutrálnu mieru procesu (2.6), (2.7). V rizikovo neutrálnej miere je generujúca funkcia momentová funkcia.

$$f^*(\Theta) = E_i^* [S_T^\Theta]$$

Čiže v bode  $t$  je to stredná hodnota na takú mocninu, v akom bode to počítam. V ďalšom odvodení autori využili stromovú vlastnosť podmieneného očakávania a následný prechod k limite pre odvodenie aproximačnej formuly. Potom modelovali portfólio podobným spôsobom ako Black, Scholes .

**Tvrdenie<sup>10</sup>:**

<sup>9</sup> Pre podrobnejšie odvodenie vid' Foster a Nelson (1994)

<sup>10</sup> Pre podrobnejšie odvodenie vid' Youngsoo Choi (2004)

Ak rizikovo neutrálna miera spotových cien spĺňa rovnosti (2.4), (2.5), potom cenu Európskej call opcie v čase  $t$  s expiračnou cenou  $E$  a expiračným časom  $T$  môžeme aproximovať vzťahom

$$V = V(S_t, h_t, T - t / \Theta) = S_t N(d_1) - E \exp(-r(T - t)) N(d_2)$$

kde

$$\sigma_g^2 = \left[ \frac{\beta_0}{\Theta} (T - t) + \left( h_t - \frac{\beta_0}{\Theta} \right) \frac{1 - \exp(-\Theta(T - t))}{\Theta} \right] / (T - t)$$

$$\Theta = 1 - \beta_1 - \beta_2 (1 + \gamma^{*2})$$

$$d_1 = \frac{\left( \left( r + \frac{\sigma_g^2}{2} \right) (T - t) + \ln \frac{S_t}{E} \right)}{\sigma_g \sqrt{T - t}}, \quad d_2 = \frac{\left( \left( r - \frac{\sigma_g^2}{2} \right) (T - t) + \ln \frac{S_t}{E} \right)}{\sigma_g \sqrt{T - t}}$$

Rozdiel od Black-Scholesovej formuly je v tom, že máme jednu rovnicu navyše s časovo meniacou sa volatilitou. Formula určuje hodnoty cien opcií ako funkciu súčasnej ceny akcie a volatility zloženej priamo z historických cien.

## Kapitola 3

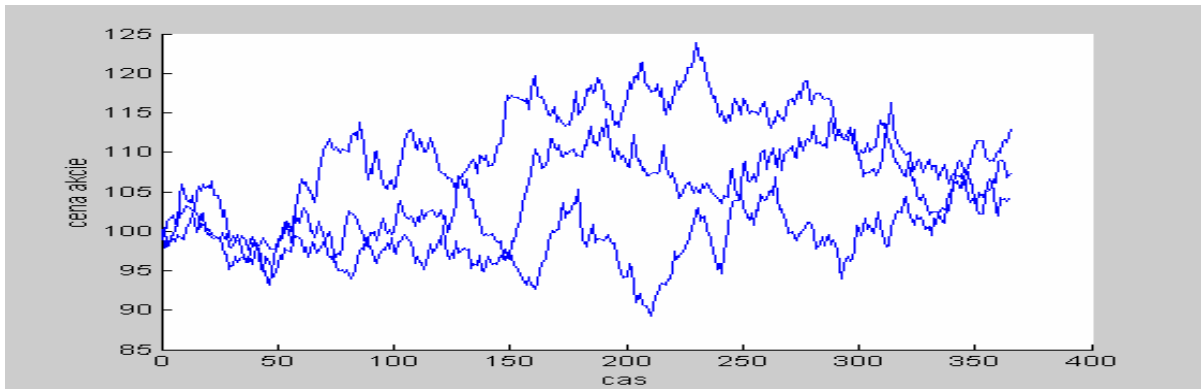
# Empirická analýza

V tejto kapitole opíšeme spôsob matematického modelovania, ktorý sme použili pri empirickej analýze formuly z tvrdenia a spôsob odhadovania parametrov. Pri analýze najprv použijeme vygenerované dáta so známymi hodnotami parametrov a potom skutočné hodnoty cien akcií a opcí. Pri kalibrácii modelu použijeme opcie s rôznymi cenami a časmi akcie Microsoft. Ďalej nasledujú empirické výsledky, ktoré sme dosiahli.

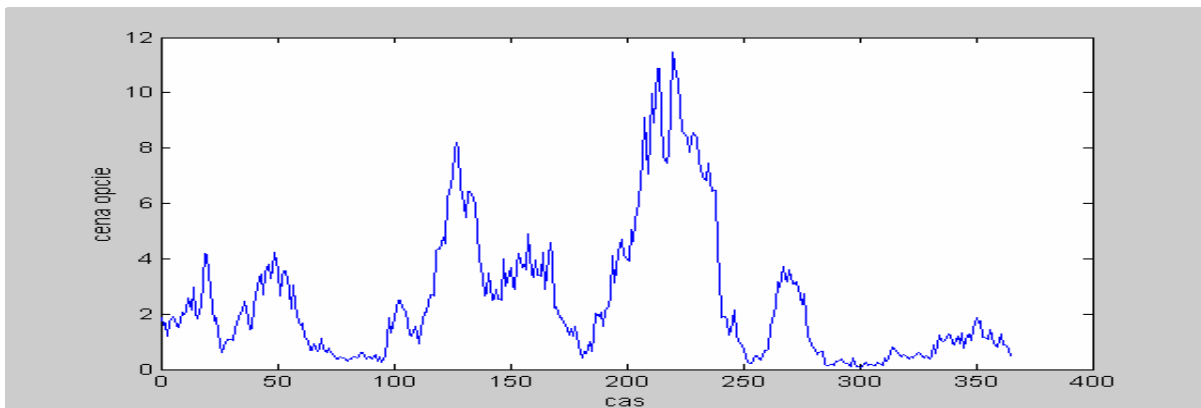
### 3.1 Model so stochastickou volatilitou

V prvej časti budeme na testovanie modelu používať vygenerované dáta podľa NGARCH modelu *Engle a Ng* so známymi hodnotami parametrov,  $\lambda = 0$ ,  $r = 0$ ,  $\beta_0 = 6.575 * 10^{-6}$ ,  $\beta_1 = 0.90$ ,  $\beta_2 = 0.04$ . Počiatočné hodnoty pre variačný proces a cenu akcie sú  $S_0 = 100$ ,  $h_0 = 0.0001096$ .  $h_0$  zodpovedá hodnote ročnej volatilitu približne 0,2. Očakávaný vývoj výnosov akcie a variančný proces budeme simulovať diferenčnými rovnicami v tvare ekvivalentnom pre *Engle a Ng* model

$$\ln \frac{S_{t+\Delta}}{S_t} = \left( r_f - \frac{1}{2} h_t \right) dt + \sqrt{h_t} w_1$$
$$h_{t+\Delta} = h_t + (\beta_0 - \Theta h_t) dt - 2\beta_2 \gamma^* h_t dt w_1 + \beta_2 h_t dt w_2$$



Obr.3.11 Časový priebeh vývoja ceny akcie



Obr. 3.12 Časový priebeh vývoja ceny opcie

Pre variančný proces platí :

$$E = 0, D = \left[ (-2\beta_2\gamma^*)^2 h_t^2 + \beta_2^2 h_t^2 \right] dt$$

Variačný proces môžeme prepísať do tvaru s jedným wienerovým procesom.

$$dh_t = (\beta_0 - \Theta h_t) dt + \sqrt{1 + 4\gamma^*} \beta_2 h_t dt w_3$$

Tento proces pre volatilitu sa dá zaradiť do triedy Hull-White procesov. Log-variancia výnosov má tvar  $h_t = \sigma_{t+1}^2$  a rozdelenie šokov je normálne. Drift parametre  $\beta_0$  a  $\Theta$  predpokladáme, že sú konštanty a zachytávajú mean-reverting povahu procesu. V limitnom prípade sa variančný proces blíži k hodnote  $\beta_0/\Theta$ .  $\left(\lim_{t \rightarrow \infty} h_t \rightarrow \beta_0/\Theta\right)$

### 3.2 Približné riešenie ceny opcie a odhad parametrov

Na výpočet cien opcií budeme používať explicitnú formulu z tvrdenia.

$$\sigma_g^2 = \left[ \frac{\beta_0}{\Theta}(T-t) + \left( h_t - \frac{\beta_0}{\Theta} \right) \frac{1 - \exp(-\Theta(T-t))}{\Theta} \right] / T-t$$

Narozdiel od NGARCH modelu, obsahuje dva neznáme parametre  $\beta_0$ ,  $\Theta$ , a nie štyri. Tieto je potrebné odhadnúť, pričom vieme, že podiel  $\sqrt{\beta_0/\Theta * 365}$  by sa mal blížiť k ročnej hodnote volatility.

Naša cieľová funkcia minimalizuje sumu štvorcov odchýliek medzi teoretickou cenou opcie vypočítanej na základe tvrdenia, označujeme  $V_2$ , a skutočnou cenou opcie, označujeme  $V_1$ .

$$\min SSE(\beta_0, \Theta) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (V_{1,i} - V_{2,i})^2$$

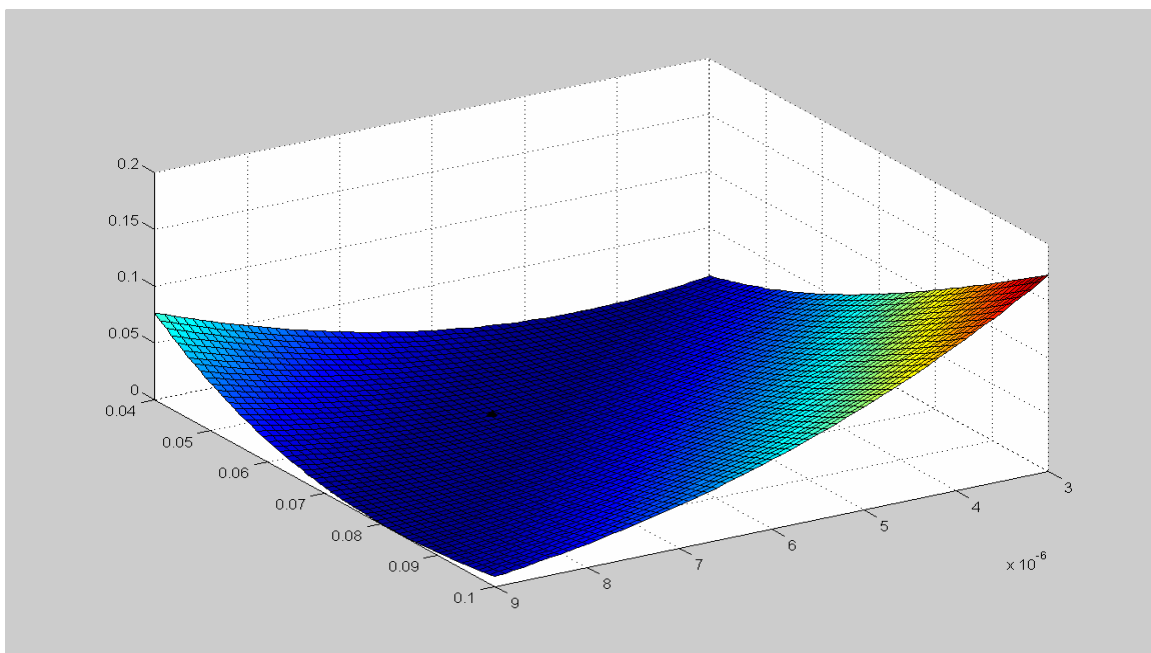
Derivácie minimalizačnej funkcie podľa parametrov sú tvaru:

- $\frac{\partial^2 SSE(\beta_0, \Theta)}{\partial \beta_0^2} = 2 \sum \left( \frac{\partial V_2}{\partial \beta_0} \right)^2 + \frac{\partial^2 V_2}{\partial \beta_0^2} (V_{2,i} - V_{1,i})$



- $\frac{\partial^2 SSE(\beta_0, \Theta)}{\partial \beta_0 \Theta} = 2 \sum \left( \frac{\partial V_2}{\partial \beta_0} \right) \left( \frac{\partial V_2}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial^2 V_2}{\partial \beta_0 \Theta} (V_{2,i} - V_{1,i})$
- $\frac{\partial^2 SSE(\beta_0, \Theta)}{\partial \beta_0 \Theta} = \frac{\partial^2 SSE(\beta_0, \Theta)}{\partial \Theta \beta_0}$
- $\frac{\partial^2 SSE(\beta_0, \Theta)}{\partial^2 \Theta^2} = 2 \sum \left( \frac{\partial V_2}{\partial \Theta} \right)^2 + \frac{\partial^2 V_2}{\partial \Theta^2} (V_{2,i} - V_{1,i})$

Matica druhých derivácií je symetrická<sup>11</sup>.



Obr. 3.21 Závislosť minimalizačnej funkcie od parametrov  $\beta_0, \Theta$

### 3.3 Experimentálne výsledky 1

<sup>11</sup> Celá derivácia minimalizačnej funkcie je uvedená v prílohe

Testovanie sme začali so známymi hodnotami parametrov. Do minimalizačnej funkcie sme dosadili hodnoty blízke bodom, ku ktorým by mala funkcia konvergovať. Reálne sa optimalizácia takýmto spôsobom nedá robiť, avšak aj napriek dobre zvoleným hodnotám sme nezískali uspokojivé výsledky.

Výsledky pre rôzne optimalizačné metódy<sup>12</sup>:

- 1. gradientna metóda: nekonverguje
- Levenberg-Marquardtova metóda: konverguje, ale k inému bodu ako je optimálne riešenie ( $\beta_0 = 10,6475$ ,  $\Theta = 98451,1$ )
- Newtonova metóda: konverguje k inému bodu, ako je optimálne riešenie a k inému bodu ako predchádzajúca metóda ( $\beta_0 = 0,01470$ ,  $\Theta = 135,987$ )
- Kvazinewtonovská metóda: nekonverguje
- Simplexová metóda: nekonverguje

Podobné výsledky sme získali aj pri nahradení presnej hodnoty variačného procesu implikovanou volatilitou. Preto bolo treba zvoliť iný postup, ako odhadnúť parametre modelu, respektíve minimalizovať funkciu dvoch premenných.

### 3.4 Iný postup pre odhad parametrov

Optimalizácia minimalizačnej funkcie vzhľadom na obidva parametre nefunguje. V druhom postupe si najprv určíme, aká má byť približná hodnota limity variačného procesu. Jej počiatočnú hodnotu určíme ako minimum štvorcových chýb medzi skutočnou cenou a cenou danou Black-Scholesovou formulou.

V prvom kroku odhadneme limitnú hodnotu volatility a hodnotu  $\Theta$ .

---

<sup>12</sup> Prvé štyri metódy sú súčasťou programu Mathematica, piata je z programu Matlab

$$\lim\left(\frac{\beta_0}{\Theta}\right) = \min SSE(\sigma^2) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (V_{1,i} - V_{Black-Scholes,i})^2$$

$$\beta_0 = \lim\left(\frac{\beta_0}{\Theta}\right) * \Theta$$

$$\sigma_g^2 = \left[ \lim\left(\frac{\beta_0}{\Theta}\right)(T-t) + \left(h_t - \lim\left(\frac{\beta_0}{\Theta}\right)\right) \frac{1 - \exp(-\Theta(T-t))}{\Theta} \right] / T-t$$

V druhom kroku budeme hýbať s touto hodnotou limity tak, aby sme získali minimum pôvodnej minimalizačnej funkcie.

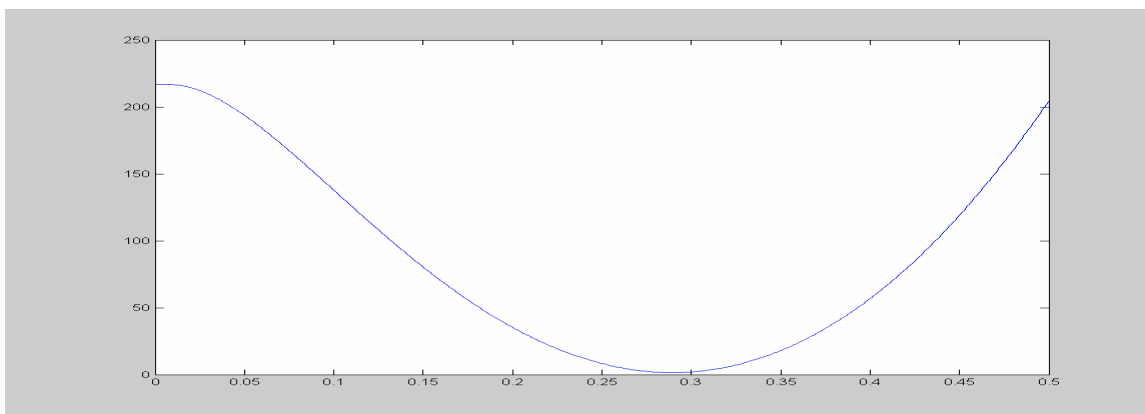
### 3.5 Experimentálne výsledky 2

Najprv sme určili limitu volatilty  $\beta_0/\Theta$ . Optimálna hodnota konštantnej volatility pre reálne dáta vypočítaná pomocou Black-Scholesovej formuly nám vyšla 0,289819. Pre túto je zodpovedajúca limita 0,00033598. Priebeh účelovej funkcie, v ktorej berieme  $\beta_0$ ,  $\Theta$  také, že  $\beta_0/\Theta$  je limita volatility je znázornený na obrázku 3.52. Je vidieť, že sme schopný optimalizovať dané parametre.

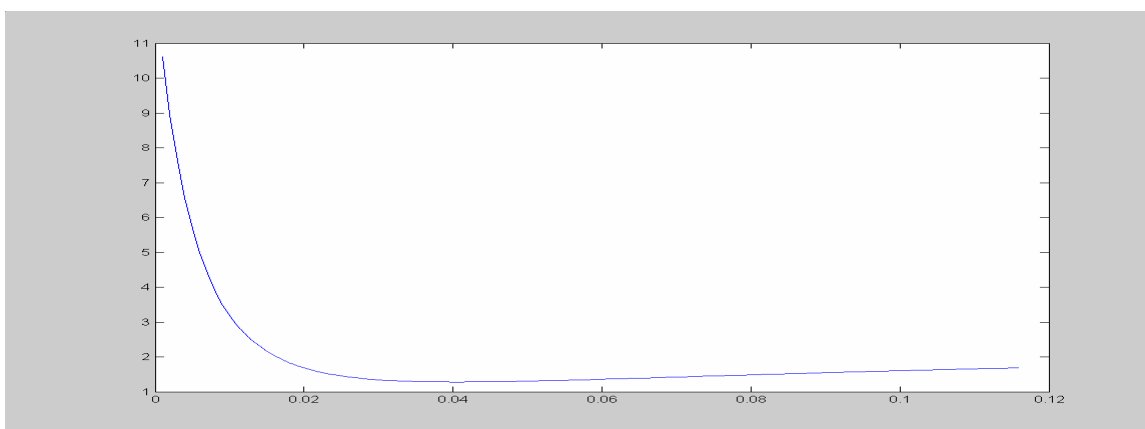
- Optimálna účelová funkcia v Black-Scholesovi dosiahla hodnotu 1,04887. Pri rozsahu dát 72 je rozdiel medzi skutočnou cenou a modelovanou cenou 0,0134471 dolára na jednu opciu.

- Optimálna účelová funkcia daná aproximačnou formulou dosiahla hodnotu 1,0854, teda na jednu opciu pripadá rozdiel medzi skutočnou cenou a modelovanou cenou 0,115075 dolára.

Hodnota účelovej funkcie daná aproximačnou formulou je o niečo horšia ako v Black-Scholesovi. Ale limitná hodnota volatility nemusí byť odhadnutá presne. V druhom kroku sme zobrali rôzne hodnoty limity  $\beta_0/\Theta$ . S limitou sme sa hýbali okolo hodnoty konštantnej limity vypočítanej v prvom kroku.



Obr. 3.51 Optimálna hodnota konštantnej volatility vypočítaná na základe Black-Scholesovej formuly



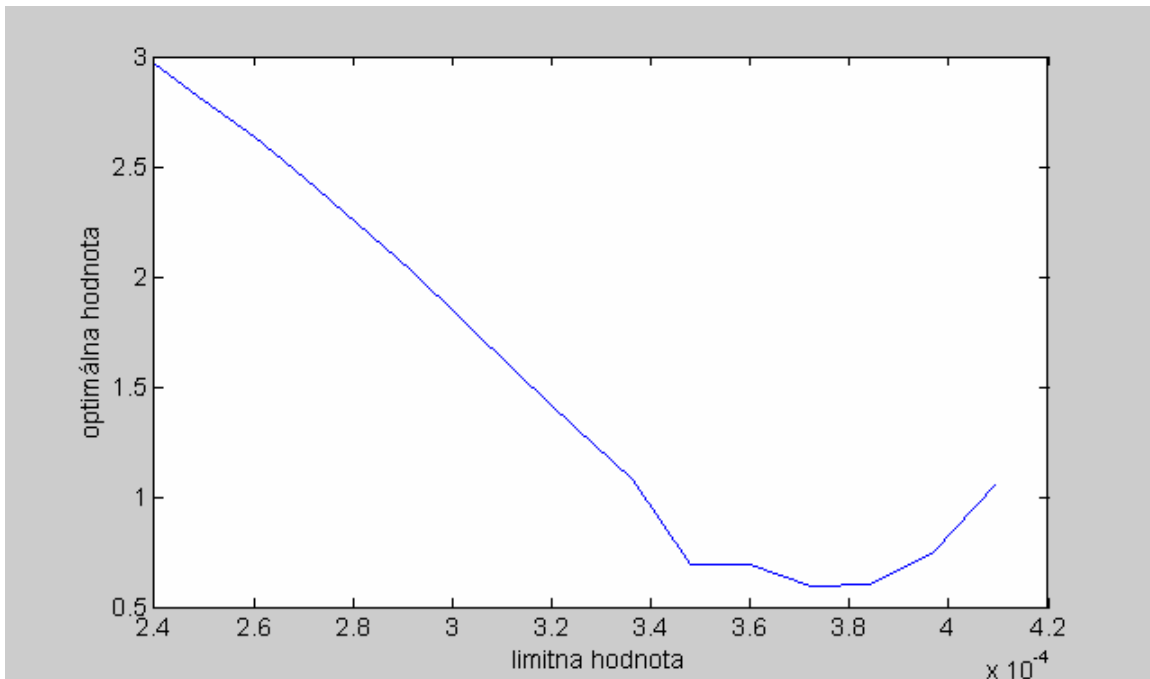
Obr. 3.52 Účelová funkcia, v ktorej berieme  $\beta_0/\Theta$  ako limitu.

Závislosť optimálnej účelovej funkcie od limitnej hodnoty je znázornená na obrázku 3.53 a príslušné odhady parametrov sú uvedené v tabuľke 3.51 .

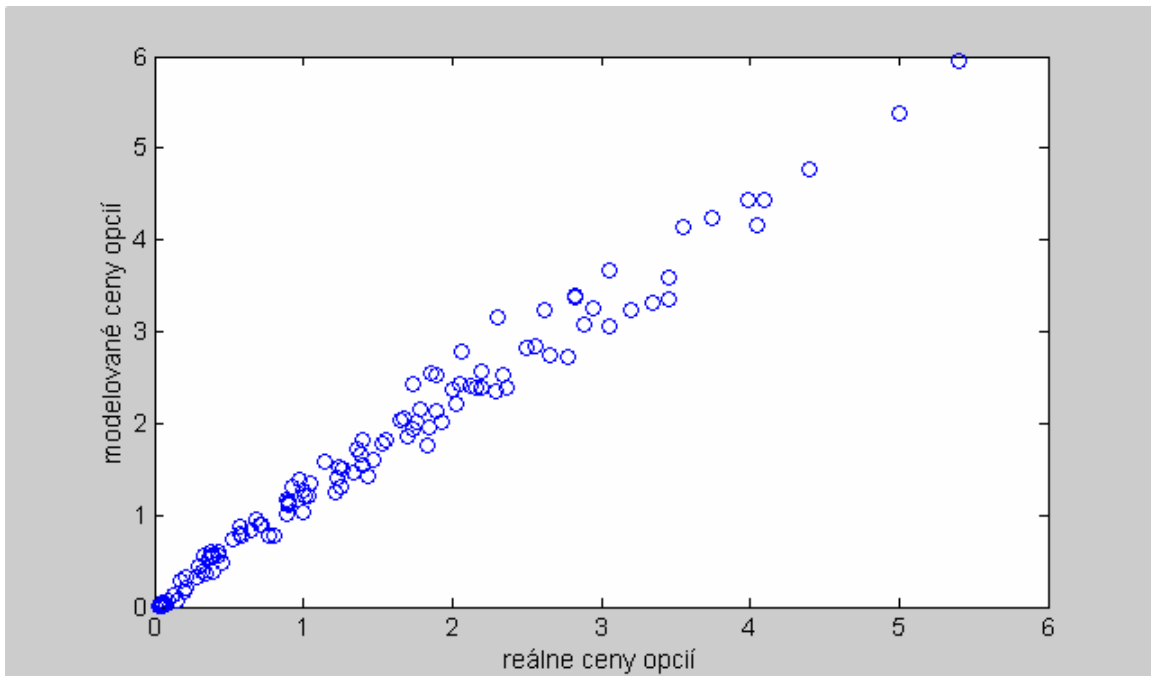
Limita $h_t$	Optimálna účelová funkcia	Odhad parametra $\Theta$	Odhad parametra $\beta_0$
0,0002401	2,95919	0,00574748	1,37997E-06
0,00025	2,8021	0,00636147	1,59037E-06
0,0002601	2,63087	0,00712531	1,85329E-06
0,0002704	2,44446	0,00809258	2,18823E-06

0,0002809	2,2423	0,00934023	2,62367E-06
0,0002916	2,02484	0,0109809	3,20203E-06
0,0003025	1,79407	0,0131863	3,98886E-06
0,0003136	1,55418	0,0162356	5,09148E-06
0,0003249	1,31193	0,020618	6,69879E-06
0,0003364	1,07718	0,0272516	9,16744E-06
0,0003481	0,863958	0,0379024	1,31938E-05
0,00036	0,693259	0,055501	1,99804E-05
<b>0,0003721</b>	<b>0,595608</b>	<b>0,0842826</b>	<b>0,000313616</b>
0,0003844	0,605044	0,13376	0,00051411734
0,0003969	0,75212	0,225359	8,9445E-05
0,0004096	1,06312	0,391119	0,000160202

Tabuľka 3.51: Závislosť optimálnej účelovej funkcie od limitnej hodnoty a príslušné odhady parametrov.



Obr. 3.53 Závislosť optimálnej účelovej funkcie od zvolenia limitnej hodnoty  $\beta_0/\Theta$



Obr. 3.53 Reálne ceny verzus modelované ceny

Limitná hodnota volatility z B-S formuly nebola pre nami používanú aproximačnú formulu odhadnutá presne. Bola však dobrým ukazovateľom pre zvolenie limitnej hodnoty pre  $\beta_0/\Theta$ , nakoľko optimalizácia minimalizačnej funkcie vzhľadom na obidva parametre nebola efektívna. Optimálna účelová funkcia daná aproximačnou formulou dosiahla hodnotu 0,595608, teda na jednu opciu pripadá rozdiel medzi skutočnou cenou a modelovanou cenou 0,00827 dolára. Tento výsledok je v porovnaní s optimálnou hodnotou v Black-Scholesovi výrazne lepší a zachytáva reálne hodnoty cien opcií.

## Záver

V práci sme sa zaoberali modelovaním cien opcií, ktoré zahŕňajú stochastickú povahu volatility. Pre empirickú analýzu sme si vybrali analytickú formulu odvodenú z NGARCH modelu. Jej výhodou je, že narozdiel od NGARCH modelu, obsahuje dva neznáme parametre  $\beta_0$ ,  $\Theta$ , a nie štyri. A v porovnaní s Black-Scholesovou formulou volatilita nie je konštantná v čase.

Optimalizácia minimalizačnej funkcie vzhľadom na obidva parametre nepriniesla očakávané výsledky. Preto sme museli zvoliť iný prístup pre odhadovanie parametrov. V druhom postupe sme najprv určili, aká má byť približná hodnota limity variačného procesu a následne sme optimalizovali jej hodnotu spolu s parametrami. Pre druhý postup optimalizácie parametrov sme konštatovali, že modelované ceny opcií sú blízke reálnym cenám.

V budúcnosti možno prácu obohatiť o predikcie cien opcií s už odhadnutými parametrami modelu. Nakoľko bude model efektívny pri zafixovaných hodnotách parametrov.

## Literatúra

- [1] Ball, C.A., Torous, W.N.(1999), *The Stochastic Volatility of Short-Term Interest Rates: Some International Evidence*, The Journal of Finance
- [2] Bollerslev, T., Engle, R.F. a Nelson, D.B (1994): *ARCH Models*, Handbook of Econometrics IV, 2959-3038, ad. Engle, R.F. a Mcadden, D.C. North-Holland, Amsterdam.
- [3] Buchbinder, G.L, Chistilin, K.M.(2007), *Multiple time scales and the empirical models for stochastic volatility*, ScienceDirect
- [4] Foster, D., Nelson, D. (1994), *Asymptotic filtering theory for univariate ARCH models*, *Econometrica*, 52, 289-311
- [5] Hsieh, K.C., Ritchken, Peter (2006): *An Empirical Comparison of GARCH Option Pricing Models*,
- [6] Melicherčík, I., Olšárová, L. (2005), *Kapitoly z finančnej matematiky*, Bratia Sabovci, Zvolen, ISBN 8089029-93-0
- [7] Kwok, Y. K. (1998) *Mathematical Models of Financial Derivates*, Springer-Verlag
- [8] Manaster, S., Koehler, G. (1982), *The Calculation of Implied Variances from the Black-Scholes Model*, The Journal of Finance
- [9] Rubinstein, M. (1976), *The valuation of uncertain income streams and the pricing of options*, Bell Journal of Econometrics and Management Science, 7, 407-425
- [10] Ševčovič, D. (2001), *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*
- [11] Youngsoo Choi (2004), *An analytical approximation to the option formula for the GARCH model*, International Review of Financial Analysis



Príloha:

$$Konš \tan ta1 = \frac{1}{2} E \exp(-r(T-t)) \sqrt{T-t}, \quad Konš \tan ta2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_g^2}} \exp\left(-\frac{d_2^2}{2}\right),$$

$$Konš \tan ta3 = \frac{(d_1 d_2 - 1)}{2\sigma_g^2}$$

$$-\frac{\partial V_2}{\partial \beta_0} = Konš \tan ta1 Konš \tan ta2 \frac{\partial \sigma_g^2}{\partial \beta_0} \quad -\frac{\partial^2 V_2}{\partial \beta_0^2} = \frac{\partial V_2}{\partial \beta_0} Konš \tan ta3 \frac{\partial \sigma_g^2}{\partial \beta_0}$$

$$-\frac{\partial V_2}{\partial \Theta} = Konš \tan ta1 Konš \tan ta2 \frac{\partial \sigma_g^2}{\partial \Theta}$$

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial \Theta^2} = \frac{\partial V_2}{\partial \Theta} \left[ Konš \tan ta3 \frac{\partial \sigma_g^2}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 \sigma_g^2}{\partial \Theta^2} \frac{\partial \sigma_g^2}{\partial \Theta} \right]$$

$$-\frac{\partial^2 V_2}{\partial \beta_0 \Theta} = Konš \tan ta1 Konš \tan ta2 \left[ Konš \tan ta3 \frac{\partial \sigma_g^2}{\partial \beta_0} \frac{\partial \sigma_g^2}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 \sigma_g^2}{\partial \beta_0 \Theta} \right]$$

$$\frac{\partial \sigma_g^2}{\partial \beta_0} = \frac{1}{\Theta} - \frac{1 - \exp(-\Theta(T-t))}{\Theta^2(T-t)}$$

$$\frac{\partial \sigma_g^2}{\partial \Theta} = \frac{2\beta_0(1 - \exp(-\Theta(T-t)) - \beta_0\Theta(T-t)(1 + \exp(-\Theta(T-t))))}{\Theta^3} + \dots$$

$$\dots + h_t \left[ \frac{\exp(-\Theta(T-t))}{\Theta} - \frac{1 - \exp(-\Theta(T-t))}{\Theta^2(T-t)} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_g^2}{\partial \Theta^2} = \frac{2\beta_0\Theta(T-t) - 6\beta_0 + \exp(-\Theta(T-t)) [4\beta_0\Theta(T-t) + \beta_0\Theta^2(T-t)^2 + 6\beta_0]}{\Theta^4(T-t)} + \dots$$

$$\dots + h_t \left[ \frac{\exp(-\Theta(T-t)) [\Theta^3(T-t)^2 + 2\Theta^2(T-t) + 2\Theta] + 2\Theta}{\Theta^4(T-t)} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_g^2}{\partial \beta_0 \Theta} = \frac{2(1 - \exp(-\Theta(T-t))) - \Theta(T-t)(1 + \exp(-\Theta(T-t)))}{\Theta^3(T-t)}$$