

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



Optimalizácia portfólia vzhľadom na miery rizika a jej implementácia vo webovej aplikácii

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Viktor Cibulka

Bratislava 2008

Optimalizácia portfólia vzhľadom na miery rizika a jej implementácia vo webovej aplikácii

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Viktor Cibulka

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Soňa Kilianová, Mgr.
Vedúci diplomovej práce

BRATISLAVA 2008

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne, iba s pomocou literatúry uvedenej v zozname, konzultácií s vedúcou diplomovej práce a vedomostí získaných počas štúdia.

.....

Viktor Cibulka

V Bratislave, 28. apríla 2008

Rád by som sa poďakoval vedúcej diplomovej práce Mgr. Soni Kilianovej, za všestran-
nú odbornú pomoc, množstvo cenných pripomienok a rád, ako aj za ochotu a podporu
prejavenú pri vedení diplomovej práce.

Abstrakt

Portfólio, ktoré je zložené z akcií podlieha riziku týchto aktív. Preto sa zameriame na minimalizáciu miery rizika portfólia. Na začiatok sa oboznámime so základnými pojmami ako očakávaný výnos, disperzia, stochastická diferenciálna rovnica a Average Value-at-Risk. Tieto veličiny aplikujeme na portfólio. Zaoberať sa budeme mierami rizika portfólia, ktoré predstavujú disperzia a Average Value-at-Risk Deviation. V teoretickej časti práce vybudujeme podmienky pre tvorbu optimálneho portfólia. Potom aplikujeme teoretické poznatky na konkrétne portfólio, ktoré bude vytvorené a spravované pomocou webovej aplikácie.

Kľúčové slová: Average Value-at-Risk, očakávaný výnos, Markowitzova teória portfólia, miera rizika

Abstract

Portfolio, which is set up of shares, underlies risks of these assets. Therefore we want to focus on minimalization of the risk rate of this portfolio. At the beginning we are introducing the basic terms like expected return, dispersion, stochastic differential equation and Average Value - at - Risk. These quantities are applied in portfolio. We are trying to deal with the risk rates of portfolio, which are represented by Standard Deviation and Average Value-at-Risk Deviation. In the theoretical part of dissertation we are building up the conditions for optimal portfolio. Then we are applying theoretical knowledge in concrete portfolio, which will be created and managed by a web application.

Keywords: Average Value-at-Risk, expected return, Markowitz portfolio theory, measure of risk

Obsah

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Cieľ | 3 |
| 2 | Charakteristiky akcií | 5 |
| 2.1 | Výnos akcie | 6 |
| 2.2 | Očakávaný výnos akcie | 7 |
| 2.3 | Volatilita výnosu akcie | 7 |
| 2.4 | Stochastický vývoj ceny akcie a Brownov pohyb | 8 |
| 2.4.1 | Wienerov proces a Brownov pohyb | 8 |
| 2.4.2 | Geometrický Brownov pohyb | 9 |
| 2.4.3 | Itôova lema | 9 |
| 2.4.4 | Stochastická diferenciálna rovnica pre vývoj ceny akcie | 10 |
| 2.4.5 | Odhad parametrov výnosu | 11 |
| 2.5 | Average Value-at-Risk výnosu akcie | 12 |
| 2.5.1 | Odhad Average Value-at-Risk | 15 |
| 3 | Teória portfólia | 16 |
| 3.1 | Markowitzova formulácia portfólia | 19 |
| 3.1.1 | Analytické riešenie Markowitzovho portfólia | 20 |
| 3.2 | Portfólio s <i>AVaRD</i> ako mierou rizika | 23 |
| 3.2.1 | Generovanie scenárov výnosov akcií | 24 |
| 3.2.2 | Určenie optimálnych váh v portfóliu s <i>AVaRD</i> | 25 |
| 3.2.3 | Transakčné náklady v portfóliu | 29 |
| 3.2.4 | Markowitzovo portfólio s transakčnými nákladmi | 30 |
| 4 | Matematické programovanie a metóda vnútorného bodu | 32 |
| 4.1 | Úloha konvexného kvadratického programovania | 32 |
| 4.1.1 | Metóda vnútorného bodu | 34 |
| 5 | Praktická ukážka tvorby optimálneho portfólia | 37 |
| 5.1 | Praktická tvorba a rebalancia portfólia | 37 |
| 5.2 | Webová aplikácia | 39 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.2.1 | Princíp webovej aplikácie a jej technická podpora | 39 |
| 5.2.2 | Riešenie optimalizácie portfólia pomocou webovej aplikácie | 40 |
| 6 | Záver | 43 |
| | Príloha A | 46 |
| | Príloha B | 51 |

1 Cieľ

Investícia sa považuje za dobrú, ak prináša čo najmenšie riziko. Cieľom investície je prinášať zisk investorovi. Rozšírme preto dobrú investíciu na takú, ktorá prináša čo najväčší zisk pri čo najmenšom riziku. Dobrým spôsobom na znižovanie rizika je investíciu rozložiť do portfólia a zaoberať sa znižovaním rizika tohto portfólia. To bude aj jedným z cieľov tejto diplomovej práce. Minimalizovať riziko portfólia. Portfólio bude zložené z akcií, ktoré nepochybne predstavujú rizikový „materiál“. Teóriu portfólia vybudujeme na základe nepopierateľného prínosu H. Markowitza¹ do modernej teórie portfólia. Pre tvorbu Markowitzovho portfólia je nutné poznať niektoré štatistické charakteristiky aktív, z ktorých je portfólio tvorené, v našom prípade akcií. Tieto základné charakteristiky budú uvedené v Kapitole 2 a samotnému Markowitzovmu portfóliu sa budeme venovať v kapitole nasledujúcej .

Tak ako sa vyvíja svet okolo nás, vyvíjala sa aj teória portfólia. Tento trend vývoja bude zachytávať Podkapitola 3.2, v ktorej sa venujeme pomerne novej veličine, odvodennej od *Average Value-at-Risk*, predstavujúcej riziko portfólia a to *Average Value-at-Risk Deviation*². Základ úlohy na tvorbu portfólia s *AVaRD*, ako mierou rizika, je zhodný s Markowitzovou úlohou. Rozdiel je v použití veličiny, ktorá predstavuje riziko portfólia. Spôsob jej výpočtu si vyžaduje aspoň základnú znalosť stochastického kalkulu, a nie len preto sa tejto problematike venujeme v Kapitole 2.

Spomenuté metódy na tvorbu portfólia vyžadujú vhodný matematický aparát na ich riešenie. Ten nám bude poskytnutý vo forme matematického programovania, o ktorom budeme hovoriť v Kapitole 4. Základnú metódu na riešenie úloh matematického programovania bude predstavovať metóda vnútorného bodu. V súčasnosti je táto metóda dobre známa a často publikovaná, preto sa v Podkapitole 4.1.1 zameriame iba na jej základnú myšlienku.

Teória sa môže stať úspešnou iba ak je aplikovateľná v praxi. Preto venujeme bohatý priestor aj praktickým ukázkam použitia teórií, ktoré sú opísané v Kapitolách 2, 3 a

¹Markowitz, Harry M., ekonóm, ktorý je považovaný za zakladateľa modernej teórie portfólia aj vďaka svojej priekopníckej práci *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 1952.

²ďalej len *AVaRD*

4. Finančný svet je natoľko zložitý, že v praxi sa nevyhneme obmedzeniam na niektoré skutočnosti. Napriek tomu sa vynasnažíme mieru obmedzení minimalizovať a preto sa budeme venovať aj požiadavkám trhu, ako napríklad zahrnúť transakčné náklady do portfólia.

V dnešnej dobe je internet súčasťou nášho života, či ho používame alebo nie. Využívajú ho banky, investičné spoločnosti a každá moderná inštitúcia, či spoločnosť. Preto cieľom tejto práce bolo vytvorenie webovej aplikácie na tvorbu a sledovanie portfólia. V aplikácii budú implementované teoretické poznatky z Kapitol 2, 3 a 4, do formy jednoduchého a praktického využitia. Spojenia sveta financií, internetu a aplikovanej matematiky. Zároveň dúfame, že sa stane prínosom na využitie teórie portfólia v praxi. Bližšie sa budeme venovať uvedenej aplikácii v Kapitole 5.

2 Charakteristiky akcií

Finančné aktíva sú cenné papiere, ktoré sú obchodované na finančných trhoch. Radíme medzi nich dlhopisy, akcie, opcie, futurity a iné. V ďalšom texte sa budeme venovať výhradne jednému typu finančného aktíva a to akciám.

Neoddeliteľnou súčasťou finančných trhov je trh s akciami. Akcia je cenný papier, ktorý umožňuje svojmu majiteľovi vlastniť podiel na majetku spoločnosti, ktorá akciu emitovala. Práva a povinnosti majiteľa akcie upravuje okrem obchodného zákonníka taktiež zákon o cenných papieroch. Akcionár má, okrem iných práv, právo podieľať sa na zisku akciovej spoločnosti vo forme dividendy. O výške dividendy rozhoduje každý rok s ohľadom na dosiahnutý hospodársky výsledok valné zhromaždenie, zložené z akcionárov.

Skutočnou hodnotou akcie je jej kurz na burze cenných papierov. Výška kurzu je ovplyvnená dosahovanými, resp. očakávanými hospodárskymi výsledkami akciovej spoločnosti, vývojom priemyselného odvetvia, v ktorom akciová spoločnosť pôsobí a stavom ekonomiky štátu v ktorom akciová spoločnosť vyvíja svoju činnosť. Na kurz akcie pôsobia aj iné faktory. Napríklad objem produkcie firmy, vývoj jej trhového podielu a schopnosti manažmentu.

Dôležitým faktorom, determinovaným faktormi predošlými, je ponuka resp. dopyt po konkrétnej akcii na burze cenných papierov. Tento aspekt do značnej miery prispieva k nestabilite ceny, teda kurzu akcie. Nie len že sa cena akcie mení zo dňa na deň ale v praxi sa mení aj v kratších časových intervaloch. Neočakávaný vývoj kurzu akcie môže byť spôsobený pozitívnou alebo negatívnou informáciou o spoločnosti, ktorá akciu emitovala, alebo globálnou správou, ktorá zasiahne celý akciový trh a tým pádom aj konkrétne akcie.

Vývoj kurzu každej akcie je individuálny. Napriek tomu sa v praxi dá vypozerovať typický priebeh kurzu a určité štandardné situácie. Denné kurzy vytvárajú krivku, z ktorej môžeme vyčítať základný smer vývoja kurzu. Tento smer sa nazýva trend. Na Obrázku č. 1 je vývoj akcie Google, jej vývoj má rastúci trend. Uvedený obrázok bol získaný z finančného portálu finance.yahoo.com.



Obrázok 1: Krivka vývoja ceny akcie Google s rastúcim trendom

2.1 Výnos akcie

Uvažujme o investorovi, ktorého investičné aktíva tvoria akcie. Ako bolo spomenuté v úvode kapitoly, skutočnou hodnotou akcie je jej cena na akciovom trhu a v ďalšom texte sa pod pojmom cena akcie bude myslieť práve cena akcie na akciovom trhu. Primárnym cieľom racionálneho investora je dosiahnuť zisk z investície, preto aj investor, ktorý investuje do akcií sleduje tento cieľ. Oboznámme sa teda s profitom resp. výnosom³ akcie. Výnos akcie vyjadruje zlomok

$$(1) \quad \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}},$$

kde S_t predstavuje cenu akcie dnes a S_{t-1} je cena akcie v predchádzajúcom čase. Ak $t = 1, 2, \dots, n$, potom interval $[t-1, t]$ predstavuje časový interval, ako deň, mesiac alebo rok. Podľa toho, aký časový okamih predstavuje tento interval, môžeme rozdeliť výnos (1) na jednodňový, mesačný alebo ročný⁴.

Výraz (1) môžeme aproximovať⁵ funkciou prirodzeného logaritmu, to znamená

$$(2) \quad \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \approx \ln \left(\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} + 1 \right) = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = v_t.$$

V nasledujúcich kapitolách, kde sa bude využívať výnos akcie, bude tento výnos vyjadrený práve vzťahom (2).

³v ďalšom texte budem používať iba výraz výnos

⁴môžeme uvažovať aj iné časové obdobia napr. dva týždne a podobne.

⁵pre funkciu $\ln(x+1)$ platí $\ln(x+1) \approx x$, pre $x \approx 0$

2.2 Očakávaný výnos akcie

V predošlej podkapitole sme si opísali postup výpočtu výnosu akcie, ak ceny akcie boli známe. Aký je očakávaný výnos akcie, napríklad zajtra? V tejto časti zodpovieme na túto otázku, aj keď s pravdepodobnosťou rovnou jednej nedokážeme odpovedať úplne presne.

Predpokladajme, že ceny akcií za uplynulých n dní sú známe. Potom podľa (2) môžeme vypočítať $n - 1$ denných výnosov. Definujme si vektor známych výnosov ako

$$(3) \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k),$$

kde $k = n - 1$ a $v_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$. Potom očakávaný výnos, ktorý označíme \bar{v} , je rovný

$$(4) \quad \bar{v} = \mathbb{E}[\mathbf{v}],$$

kde \mathbb{E} predstavuje operátor strednej hodnoty. Ak použijeme aritmetický priemer ako nevychýlený odhad strednej hodnoty [11], dostávame

$$(5) \quad \bar{v} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i.$$

Treba si uvedomiť, že ak sme počítali aritmetický priemer vektora výnosov kde časový interval $[t - 1, t]$ predstavoval jeden deň, tak očakávaný výnos (5) je na ďalší deň.

2.3 Volatilita výnosu akcie

Pri odhadovaní očakávaného výnosu akcie sa dopúšťame určitej chyby. Táto chyba je spôsobená nielen chybou štatistiky, ktorú používame na odhad očakávaného výnosu, ale aj nepredvídateľnými „skokmi“ ceny akcie, ktoré podliehajú akciovému trhu. Tieto skoky vyjadrujú mieru náhodnosti, ktorú nazývame volatilita. Čím väčšie sú tieto skoky, to znamená rozdiely cien akcií, tým väčšia je aj volatilita výnosu akcie. Jednou z metód na meranie volatility výnosu akcie je jej meranie pomocou disperzie.

Definícia 2.1. [11] *Nech ξ je integrovateľná náhodná premenná. Hovoríme, že má disperziu, ak existuje stredná hodnota*

$$D(\xi) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2)$$

Číslo $D(\xi)$ sa nazýva disperzia.

Nevychýleným odhadom disperzie (pozri [11]) je štatistika

$$(6) \quad \bar{\sigma}(\xi) = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\xi_i - \bar{\xi})^2,$$

kde, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ je náhodný výber náhodnej premennej ξ a $\bar{\xi}$ je aritmetický priemer náhodných výberov náhodnej premennej ξ .

Potom odhad disperzie očakávaného výnosu akcie, použijúc (6) a vektor predošlých výnosov \mathbf{v} , je daný ako,

$$(7) \quad \bar{\sigma}(\bar{v}) = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (v_i - \bar{v})^2.$$

2.4 Stochastický vývoj ceny akcie a Brownov pohyb

Na budúcu cenu akcie vplýva veľa faktorov, ktoré často nevieme ani odhadnúť ani určiť mieru ich vplyvu. Preto akciám priradujeme určitú mieru náhodnosti ich vývoja, teda cena akcie vykazuje tzv. stochastický charakter resp. sa riadi stochastickým procesom. Základným kameňom pri budovaní stochastického kalkulu je Brownov pohyb. Brownovmu pohybu a jeho aplikácii na vývoj výnosu akcie sa budeme venovať v tejto podkapitole.

2.4.1 Wienerov proces a Brownov pohyb

Definícia 2.2. [13] *Brownov pohyb $\{X(t), t \geq 0\}$ je t -parametrický systém náhodných veličín, pričom*

1. *všetky prírastky $X(t + \Delta t) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a varianciou $\sigma^2\Delta$;*
2. *pre každé delenie $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ sú prírastky $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), X(t_4) - X(t_3), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu 1;*
3. *$X(0) = 0$ a vzorky ciest sú spojité v premennej $t \geq 0$.*

Wienerovým procesom sa nazýva taký Brownov pohyb, ktorého parametre sú $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$.

Analýzou Brownovho pohybu $\{X(t), t \geq 0\}$ v tvare totálneho diferenciálu jeho prírastkov $dX(t) = X(t + dt) - X(t)$ dospejeme k stochastickej diferenciálnej rovnici pre Brownov pohyb v tvare

$$(8) \quad dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t),$$

pričom $W(t)$ je Wienerov proces. Prechod od prírastkov $dX(t) = X(t + dt) - X(t)$ k stochastickej diferenciálnej rovnici je podrobnejšie opísaný v [13].

2.4.2 Geometrický Brownov pohyb

Ak $X(t), t \geq 0$ je Brownov pohyb s parametrami μ, σ a $y_0 \in \mathbb{R}$ tak systém náhodných premenných $Y(t), t \geq 0$, definovaných ako

$$(9) \quad Y(t) = y_0 e^{X(t)},$$

sa nazýva geometrický Brownov pohyb. Parametre geometrického Brownovho pohybu majú tvar $\mathbb{E}[Y] = y_0 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}$ pre strednú hodnotu a $\text{var}(Y) = y_0^2 e^{2\mu t + \sigma^2 t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$ pre varianciu. Odvodenie parametrov strednej hodnoty a variancie možno nájsť v [13].

2.4.3 Itôova lema

Lema 2.1. [6] *Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice $dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw$, kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál f je daný vzťahom*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw.$$

Pri dôkaze sa využíva rozvinutie funkcie f do Taylorovho radu, podrobnejší opis dôkazu možno nájsť v [13].

2.4.4 Stochastická diferenciálna rovnica pre vývoj ceny akcie

Je zrejmé, že cena akcie sa mení s časom. Preto na modelovanie vývoja ceny akcie použijeme funkciu času $S = S(t)$, kde funkčné hodnoty sú ceny akcie. Podľa [13] zmena ceny akcie vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$(10) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

pričom dS_t predstavuje zmenu ceny akcie za časový okamih dt , μ je trend a σ je volatilita časového vývoja akcie. Wienerov proces je označený ako W_t . Z uvedenej rovnice môžeme počítat cenu akcie S_t nasledovne⁶.

Nech $f(t, x) = \ln(x)$ a $Y_t = f(t, S_t)$, potom

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Z Lemy 2.1 vyplýva

$$dY_t = 0dt + \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt$$

a po dosadení (10)

$$dY_t = 0dt + \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt = \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt,$$

z čoho integráciou dostávame

$$Y_t = Y_0 + \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t.$$

Po dosadení $Y_t = \ln(S_t)$ dostávame

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t.$$

Exponovaním predošlej rovnice dostávame, že cena akcie v čase t je rovná

$$(11) \quad S_t = S_0 e^{(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t)}.$$

Pripomeňme si, že výnos akcie počítame podľa (2) ako $\ln(\frac{S_t}{S_{t-1}})$ a s využitím výpočtu S_t pomocou (11) môžeme počítat stochastický vývoj výnosu akcie pre ceny S_t a S_{t-1} nasledovne,

$$(12) \quad \frac{S_t}{S_{t-1}} = \frac{S_0 e^{(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t)}}{S_0 e^{(\mu(t-1) + \sigma W_{(t-1)} - \frac{1}{2} \sigma^2 (t-1))}} = e^{\mu + \sigma(W_t - W_{t-1}) - \frac{1}{2} \sigma^2}.$$

⁶prebrané z [8]

Výnos akcie v tvare (2) môžeme získať logaritmovaním (12) a preto,

$$(13) \quad \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \mu + \sigma(W_t - W_{t-1}) - \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Prírastok $(W_t - W_{t-1})$ Wienerovho procesu je náhodná premenná z normálneho rozdelenia $N(0, 1)$ so strednou hodnotou nula a disperziou jedna, pozri Def. 2.2. Pre budúcu cenu akcie S_{t+1} bude prírastok Wienerovho procesu v tvare $(W_{t+1} - W_t)$. Tento prírastok môžeme nahradiť hodnotou $\varepsilon \sim N(0, 1)$. Potom pre budúci výnos akcie platí,

$$(14) \quad \ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = \mu + \sigma\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Vo vyjadrení budúceho výnosu (14) vystupujú parametre μ , σ , ε . Parameter μ vyjadruje trend vývoja akcie, σ predstavuje mieru volatility akcie a ε je stochastická zložka.

2.4.5 Odhad parametrov výnosu

Uvažujme o výnose akcie podľa (2). Očakávaný výnos je potom

$$\mathbb{E} \left[\ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) \right].$$

Odhad očakávaného výnosu môžeme získať napríklad pomocou štatistiky aritmetického priemeru, odhad označme $\bar{\mu}$. Očakávaný výnos podľa (14) je rovný

$$\bar{\mu} = \mathbb{E} \left[\ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) \right] = E[\mu + \sigma\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma^2] = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

kde \mathbb{E} predstavuje operátor strednej hodnoty. Použijúc túto skutočnosť v (14) môžeme písať

$$\ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = \bar{\mu} + \bar{\sigma}\varepsilon,$$

kde $\bar{\sigma}$ je druhá odmocnina odhadu disperzie očakávaného výnosu.

2.5 Average Value-at-Risk výnosu akcie

*Value-at-Risk*⁷ je veličina, ktorá nám dáva zrozumiteľný a jednoduchý pohľad na riziko. Voľne povedané, ak by sme pomocou *VaR* chceli určiť riziko, ktoré je spojené s náhodným výnosom akcie r , potom $VaR_\alpha(r)$ odpovedá na otázku: „Pre ktorú hodnotu náhodnej premennej r platí, že s pravdepodobnosťou $\alpha\%$ bude výnos horší než táto hodnota $VaR_\alpha(r)$?”

Veta 2.1. [10] *Nech ξ je náhodná veličina a F_ξ je jej distribučná funkcia, t.j. $F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$. Nech $F_\xi^{-1}(v)$ je sprava spojitá inverzia F_ξ , t.j. $F_\xi^{-1}(v) = \inf\{x : F_\xi(x) > v\}$. Pre fixnú hodnotu $\alpha \in (0, 1)$ definujeme Value-at-Risk VaR_α ako α -kvantil, teda*

$$VaR_\alpha(\xi) = F_\xi^{-1}(\alpha),$$

alebo tiež môžeme písať $VaR_\alpha(\xi)$ ako

$$VaR_\alpha(\xi) = \inf\{x : F_\xi(x) > \alpha\}.$$

VaR je rozšírená nielen pri meraní rizika výnosu akcie, ale je vhodná aj na meranie iných ekonomických ukazovateľov, ako strata podnikov a pod. Hodnoty α volíme podobne ako pri určovaní miery spoľahlivosti, teda napríklad $\alpha = 0.05$ alebo $\alpha = 0.01$.

Inou veličinou odvodenou od *VaR* je *Average Value-at-Risk*⁸. Pre *AVaR* sú zaužívané aj názvy ako *Conditional VaR* alebo *Expected Shortfall*. *AVaR* je vlastne priemer hodnôt, ktoré sú „horšie”, teda za úrovňou *VaR*. Na Obrázku č. 2 je znázornený histogram scenárov⁹ budúceho výnosu akcie MSFT¹⁰. V zakrúžkovanej oblasti sa nachádzajú hodnoty výnosu, ktoré sú za *VaR* a pomocou strednej hodnoty z nich získame hodnotu *AVaR* výnosu. V Prílohe B č. 1 sa nachádza autorom vytvorený program z Matlabu¹¹, ktorý vygeneruje scenáre, vypočíta *AVaR* a nakreslí histogram.

Nasledovná definícia je definíciou *AVaR* pre spojité náhodné premenné, ktorá objasňuje aj jej názov.

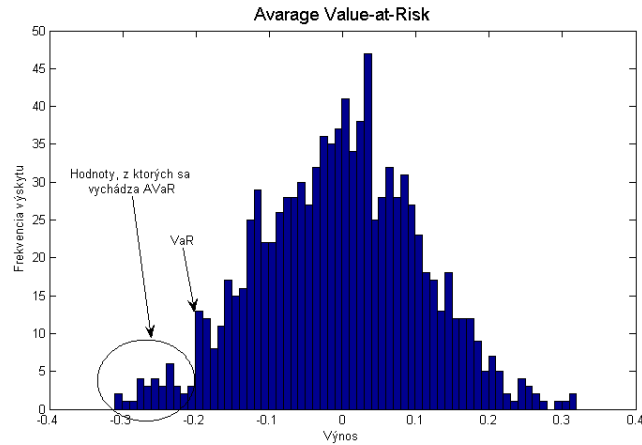
⁷d’alej len *VaR*

⁸d’alej len *AVaR*

⁹generovanie scenárov výnosu bude bližšie popísané v Kapitole 3.2.1

¹⁰MSFT (Microsoft Corp.) je skratka (ticker) spoločnosti kótovanej na akciovej burze. Ak budú v ďalšom texte použité skratky spoločností, pre určenie ich totožnosti pozri finance.yahoo.com

¹¹Matematický softvér, pozri www.mathworks.com



Obrázok 2: Histogram simulovaných budúcich výnosov akcie MSFT. Zakrúžkovaná oblasť obsahuje výnosy, ktoré sú horšie ako hodnota VaR . Z nich pomocou strednej hodnoty vypočítame $AVaR$ výnosov.

Definícia 2.3. [12] *Average Value-at-Risk pri úrovni α , $0 < \alpha < 1$, náhodnej premennej ξ je definovaná nasledovne:*

$$AVaR_{\alpha}(\xi) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F_{\xi}^{-1}(u) du,$$

pričom F_{ξ} je distribučná funkcia náhodnej premennej ξ .

Ak si predstavíme integrál v jednoduchšej forme ako súčet, tak predošlá definícia vyjadruje priemer všetkých kvantilov od 0 po α . Takže aj podľa tejto definície môžeme získať predstavu, že ide skutočne o priemerné hodnoty za VaR a teda aj objasnenie názvu $AVaR$. Nasledovná formulácia $AVaR$ pomocou optimalizačnej úlohy je veľmi dôležitá pre praktické účely počítania $AVaR$.

Veta 2.2. [12] *Average Value-at-Risk pri úrovni α , $0 < \alpha < 1$, náhodnej premennej ξ je riešením nasledovnej optimalizačnej úlohy,*

$$(15) \quad AVaR_{\alpha}(\xi) = \max_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(\xi - x)^{-}] \right\},$$

kde výraz $(\xi - x)^{-}$ predstavuje zápornú časť rozdielu $\xi - x$, teda $(\xi - x)^{-} = \max\{-(\xi - x), 0\}$.

Návod na dôkaz prechodu od Def 2.3 k Vete 2.2 možno nájsť v [10].

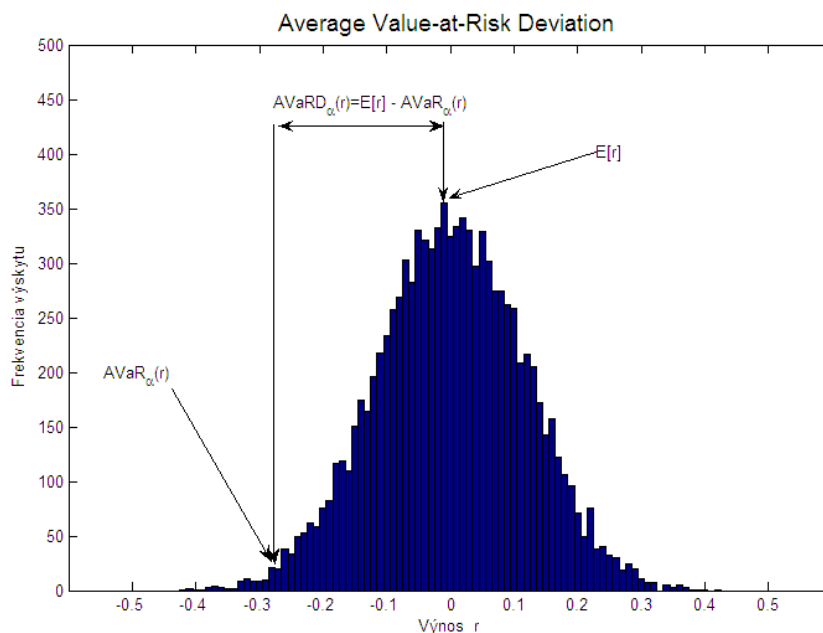
Disperzia náhodnej premennej ξ predstavuje mieru rizika, ktorá nám, voľne povedané, dáva obraz o tom, aká je priemerná odchýlka hodnôt ξ od strednej hodnoty $\mathbb{E}[\xi]$. V nasledujúcej definícii si uvedieme mieru rizika pomocou $AVaR$.

Definícia 2.4. [9] Nech ξ je náhodná premenná s $AVaR_\alpha(\xi)$, $0 < \alpha < 1$. Potom veličinu

$$AVaRD_\alpha(\xi) = \mathbb{E}[\xi] - AVaR_\alpha(\xi)$$

nazývame *Average Value-at-Risk Deviation* a predstavuje mieru rizika náhodnej premennej ξ meranej pomocou $AVaR_\alpha$.

Kde nebude hroziť nedorozumenie budeme index α vynechávať. Na Obrázku č. 3 je znázornená miera rizika $AVaRD$. Histogram¹² na obrázku je vytvorený pomocou 10^4 simulácií budúceho výnosu r akcie MSFT. Dvojitá šípka určuje vzdialenosť strednej hodnoty výnosu od $AVaR$ výnosu. Táto vzdialenosť podľa Def. 2.4 určuje mieru rizika $AVaRD$.



Obrázok 3: Histogram simulovaných budúcich výnosov akcie MSFT. Dvojitá šípka určuje veľkosť miery rizika $AVaRD(r)$

¹²Autorom vytvorený program z Matlabu sa nachádza v Prílohe B č. 1

2.5.1 Odhad Average Value-at-Risk

V článku [4] je ukázaný prístup určenia $AVaR$ pomocou odhadu. Nech $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ je realizácii výnosov akcie a $\mathbf{r}^s = (r_1^s, r_2^s, \dots, r_k^s)$ je vektor vzostupne usporiadaných prvkov vektora \mathbf{r} . To znamená, že $r_i^s \leq r_j^s$ ak $i \leq j$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Aproximáciu $100\% \alpha$ prvkov vektora \mathbf{r}^s pomocou premennej α_k získame nasledovne:

$$(16) \quad \alpha_k = \max_{i \in N} \{i \leq k\alpha\},$$

kde k je počet prvkov vektora \mathbf{r}^s (aj \mathbf{r}). Ak z vektora \mathbf{r}^s vezmeme len prvých α_k prvkov, tak odhad $AVaR_\alpha$ má potom tvar:

$$(17) \quad \overline{AVaR}_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha_k} r_i^s}{\alpha_k}.$$

Pre $k \rightarrow \infty$ je výraz (17) dobrým odhadom $AVaR_\alpha$. Odhad (17) „funguje“ dobre aj pre hodnoty, keď $\alpha_k = k\alpha$. To znamená, že ak vyberieme práve prvých $\alpha_k = k\alpha$ prvkov vektora \mathbf{r}^s a vypočítame ich priemer, získame presnú hodnotu $AVaR_\alpha$. V Tabuľke č.2.5.1 sú porovnávané hodnoty $AVaR$ vygenerovaných scenárov výnosu akcie MSFT počítanej podľa (17) a podľa (15). Miera spoľahlivosti je zvolená $\alpha = 0.05$. V tabuľke zámerne volíme „netradičné“ k , aby sme ukázali správanie odhadu. V stĺpci označenom $AVaR$ sú hodnoty počítané podľa (15) a v stĺpci s značením \overline{AVaR} sú hodnoty počítané podľa (17). Z tabuľky je dobre vidno, že odhad sa spresňuje so zväčšovaním k a skutočne ak $\alpha_k = k\alpha$, hodnoty $AVaR$ sú rovné \overline{AVaR} i pre malé k . V Prílohe B č. 1 sa nachádza autorom vytvorený program z Matlabu, ktorý nasimuluje výnosy, vypočíta z nich $AVaR$ a \overline{AVaR} .

| k | α_k | $k\alpha$ | $AVaR$ | \overline{AVaR} |
|-------|------------|-----------|---------|-------------------|
| 100 | 5 | 5 | -0,2490 | -0,2490 |
| 199 | 9 | 9,95 | -0,2410 | -0,2445 |
| 1000 | 50 | 50 | -0,2679 | -0,2679 |
| 1509 | 75 | 75,45 | -0,2764 | -0,2768 |
| 10000 | 500 | 500 | -0,2615 | -0,2615 |
| 16456 | 822 | 822,8 | -0,2686 | -0,2687 |
| 20000 | 1000 | 1000 | -0,2643 | -0,2643 |
| 31859 | 1092 | 1092,95 | -0.2628 | -0.2628 |

Tabuľka 1: Porovnanie hodnôt \overline{AVaR} pomocou odhadu (17) a hodnôt $AVaR$ počítaných podľa (15). Stĺpec k označuje počty simulácii (počet prvkov vektora \mathbf{r}), stĺpec α_k vyjadruje hodnotu čísla α_k vypočítaného podľa (16) a v stĺpci $k\alpha$ sú súčiny k a α .

3 Teória portfólia

Portfólio je súbor aktív, napríklad akcií, dlhopisov, výmenných kurzov ale aj ich kombinácii. V tejto kapitole sa zameriame na portfólio zložené výhradne z akcií. Jednou z najdôležitejších úloh portfólia je diverzifikovať riziko. To znamená, že pri vhodne zvolených pomeroch aktív v portfóliu môžeme znížiť riziko investície do takéhoto portfólia, skôr, ako by sme celú investičnú sumu zainvestovali do jedného aktíva.

Jednou zo základných priorít investora je „získať čo najviac pri čo najmenšom riziku“. Takýto postoj je vo svojom základe protichodný, nakoľko pri maximalizácii výnosu sa investor vystavuje aj zvýšenému riziku. Preto sa pri tvorbe portfólia obmedzíme na konkrétny výnos, teda ho zafixujeme na určitej hodnote a sústredíme sa na minimalizáciu rizika pri danom výnose.

Uvažujme o portfóliu zloženého z n akcií¹³ s náhodnými výnosmi $\mathbf{r} = (r^1, r^2, \dots, r^n)^T$.

¹³ako počet akcií myslíme počet aktív, nie počet konkrétnych akcií jednej spoločnosti

Nech vektor

$$(18) \quad \bar{\mathbf{r}} = (\bar{r}^1, \bar{r}^2, \dots, \bar{r}^n)^T$$

so zložkami \bar{r}^i pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ reprezentuje očakávané výnosy akcií. Uvažujme, že investor má rozpočet 1 peňažnej jednotky¹⁴ a rozdelí tento rozpočet do pozícií, resp. váh v portfóliu, ktoré označíme

$$(19) \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T,$$

tak aby bola splnená rozpočtová podmienka

$$(20) \quad \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1,$$

kde $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ je jednotkový vektor rozmeru n . Potom očakávaný výnos portfólia je vyjadrený ako

$$(21) \quad \mathbb{E}[\mathbf{w}^T \mathbf{r}] = \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}}.$$

Uvažujme o \mathcal{R} ako o určitej miere rizika nášho portfólia, resp. miere rizika očakávaného výnosu portfólia. Nech r_p predstavuje zafixovaný výnos, ktorý „požadujeme“ od nášho portfólia. Potom \mathcal{R} minimalizujeme pri danom očakávanom výnose r_p a portfólio musí spĺňať (20). Tieto požiadavky zapíšeme nasledovne:

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{R}(\mathbf{w}^T \mathbf{r})$$

$$(22) \quad \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} \geq r_p,$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1.$$

Riešením takejto úlohy dostávame optimálne váhy portfólia vzhľadom na mieru rizika \mathcal{R} . V predošlej formulácii je vektor \mathbf{w} „neobmedzený“, to znamená, že váhy portfólia môžu byť aj záporné. Záporné váhy¹⁵ znamenajú, že sme niekomu dlžní časť portfólia, konkrétne tú časť, ktorú predstavuje $w_i < 0$, $\forall i = \{1, 2, \dots, n\}$. V praxi to pri akciovom portfóliu znamená, že si požičiame akcie v hodnote, ktorú predstavuje zlomok hodnoty portfólia

¹⁴bez újmy na všeobecnosti

¹⁵v literatúre sa označujú aj ako short-position alebo krátka pozícia

určený zápornými váhami, hneď ich predáme a potom ich pri ďalšej alokácii portfólia kúpime a vrátime späť. Výhoda krátkych pozícií je v tom, že ak si dnes požičieme 100 kusov akcií Ford v cene 30\$ za kus a o mesiac bude cena akcie 25\$ za kus, tak bilancia je nasledovná

$$100 * 30\$ - 100 * 25\$ = 500\$.$$

To znamená, že takouto transakciou zarobilo portfólio 500\$ za mesiac na transakcii so zápornými váhami. Z toho vyplýva, že krátke pozície sú výhodné vtedy, ak očakávané ceny akcií budú nižšie ako, ceny za ktoré sme si akcie „požičali“. Samozrejme, že takáto transakcia bude zisková iba v prípade, ak sa očakávaná cena akcie aj naplnia. Je dobré si uvedomiť, že nikto „nepožičiava nič zadarmo“ a preto treba počítať s určitými nákladmi za takúto transakciu. Napríklad ak by sme si vedeli požičať jednu akciu s úrokom 4.5% z ceny akcie na rok, potom by bilancia vyzerala nasledovne

$$100 * 30\$ - 100 * 30\$ * 0.045 - 100 * 25\$ = 3000\$ - 135\$ - 2500\$ = 365$,$$

ak by sme si akcie vypožičali práve na jeden rok. To ale znamená, že získať na takejto transakcii môžeme iba vtedy ak platí

$$-\frac{S_{t+1} - S_t}{S_{t+1}} 100\% > \pi\%,$$

kde π je úrok za vypožičanie si akcie na časové obdobie $[t, t + 1]$. Táto podmienka je iba jedna z mnohých, kedy nie sú záporné váhy v portfóliu výhodné, resp. povolené. Podmienka nezáporností tvorí reštrikciu na váhy portfólia napr. aj z dôvodov legislatívnych. To znamená, že niektoré portfólia, ako napr. portfólia na zabezpečenie dôchodkového sporenia, sú zákonom regulované a záporné váhy nie sú povolené. Optimalizačný problém minimalizácie rizika portfólia so zahrnutím obmedzenia nezáporných váh sa zmení nasledovne,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{R}(\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}}) \\ \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} &\geq r_p, \\ \mathbf{w}^T \mathbf{1} &= 1, \\ \mathbf{w} &\geq \mathbf{0}_n, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{0}_n = (0, 0, \dots, 0)$ je n -rozmerný nulový vektor.

3.1 Markowitzova formulácia portfólia

V predošlej kapitole sme si ozrejmili všeobecnú úlohu na minimalizáciu miery rizika portfólia. H. Markowitz sa zaoberal mierou rizika, ktorú predstavovala variancia, resp. disperzia. Takáto úloha sa nazýva aj Mean-Variance, pretože minimalizuje varianciu portfólia pri danom očakávanom výnose. Do optimalizačného problému vstupujú historické ceny aktív, v našom prípade akcií. Z historických cien akcií sa ako prvé vypočítajú historické výnosy týchto akcií a tie budú slúžiť nielen na odhadnutie očakávaného výnosu portfólia, ale aj na výpočet kovariančnej matice, ktorá vstupuje do účelovej funkcie minimalizačného problému. Tieto fakty si zhrnieme do nasledovného optimalizačného problému riešenia Markowitzovho portfólia[8]:

$$(23) \quad \begin{aligned} \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} \quad & \mathbf{w}^T Q \mathbf{w} \\ & \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} = r_p, \\ & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1. \end{aligned}$$

Úloha (23) je úlohou konvexného kvadratického programovania, ktorú bližšie špecifikujeme v Kapitole 4. Ako už bolo spomenuté v úvode kapitoly, ako vstup na odhadovanie premenných vo formulácii Markowitzovho problému potrebujeme historické ceny akcií. Matica historických výnosov akcií v portfóliu má nasledovný tvar

$$V = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_1^2 & \cdots & \cdots & r_1^n \\ r_2^1 & r_2^2 & \cdots & \cdots & r_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ r_k^1 & \cdot & \cdots & \cdots & r_k^n \end{pmatrix},$$

kde stĺpce matice sú chronologicky usporiadané výnosy akcií, pričom n je počet akcií a k je počet výnosov akcií. Jednotlivé prvky matice V sú počítané podľa (2). Vektor $\bar{\mathbf{r}}$ je vektor očakávaných výnosov akcií, ktorého prvky \bar{r}^i získame pomocou (5) zo stĺpcov matice výnosov V . Skalárnym súčinom vektora $\bar{\mathbf{r}}$ a vektora váh \mathbf{w} dostávame očakávaný výnos portfólia a ten dávame do rovnosti s požadovaným výnosom portfólia, ktorý predstavuje

parameter r_p . Matica Q je kovariančná matica výnosov akcií vstupujúcich do portfólia. Kovariančná matica má tvar:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ q_{n1} & \cdot & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

kde prvky q_{ij} pre $i \neq j$ sú kovariancie medzi výnosmi akcií i a j . Prvky q_{ii} , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ na diagonále matice Q predstavujú disperziu očakávaného výnosu akcie i . Na odhad prvkov q_{ij} kovariančnej matice môžeme použiť nasledovnú štatistiku

$$(24) \quad q_{ij} = \frac{1}{k-1} \sum_{l=1}^k (r_l^j - \bar{r}^j)(r_l^i - \bar{r}^i), \quad \forall i, j = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Prvok r_l^j je l -ta zložka j -teho vektora výnosov (stĺpca matice výnosov) a \bar{r}^j je j -ta zložka vektora očakávaných výnosov \bar{r} .

3.1.1 Analytické riešenie Markowitzovho portfólia

V tejto časti si ukážeme analytické riešenie Markowitzovho portfólia pomocou Lagrangeovej analýzy. Postup riešenia je prebraný z [8]. Preformulujme matematický zápis (23) nasledovne

$$(25) \quad \begin{aligned} \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i w_j q_{ij} \\ & \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}^i = r_p, \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1, \end{aligned}$$

pričom \bar{r}^i predstavuje prvky vektora $\bar{\mathbf{r}}$, q_{ij} je kovariancia medzi výnosmi akcie i a j ak $i \neq j$, inak je to disperzia akcie i a w_i sú váhy akcie i v portfóliu. Aby sme dosiahli práve jedno riešenie minimalizácie (25) musia byť splnené nasledovné predpoklady:

1. \bar{r}^i sú lineárne nezávislé. Ak by to tak nebolo, môžeme lineárne závislý výnos vynechať, to znamená vylúčiť prislúchajúcu akciu z portfólia;
2. z predošlého predpokladu vyplýva, že kovariančná matica s prvkami q_{ij} je regulárna a pozitívne definitná;
3. existujú dve akcie, pre ktoré platí $\bar{r}^i \neq \bar{r}^j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Medzi základné metódy na riešenie Markowitzovho optimálneho portfólia patrí analytická metóda Lagrangeových multiplikátorov. Lagrangeova funkcia daného optimalizačného problému vyzerá nasledovne

$$\mathcal{L}(w, \lambda, \delta) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i w_j q_{ij} + \lambda \left(\sum_{i=1}^n w_i \bar{r}^i - r_p \right) + \delta \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right)$$

Nakoľko predpoklad 2. určuje, že matica kovariancií výnosov je pozitívne definitná, tak Lagrangeova funkcia $\mathcal{L}(w, \lambda, \delta)$ dosahuje minimum v bode, kde parciálne derivácie prvého rádu sú nulové. Preto pre minimum musí platiť,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^n w_j q_{ij} - \lambda \bar{r}^i - \delta = 0, \quad i = \{1, 2, \dots, n\}$$

čo môžeme zapísať vo vektorov tvare ako

$$(26) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = Q\mathbf{w} - \lambda \bar{\mathbf{r}} - \delta \mathbf{1} = 0$$

kde \mathbf{w} je vektor váh, $\bar{\mathbf{r}}$ je vektor očakávaných výnosov, Q je kovariančná matica a $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ je jednotkový vektor rozmeru n . Parciálne derivácie Lagrangeovej funkcie podľa λ, δ musia byť tiež nulové,

$$(27) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = r_p - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} = 0$$

$$(28) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} = 1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 0.$$

Systém (26)–(28) je systém $n + 2$ lineárnych rovníc s $n + 2$ neznámymi. Zvoľme \mathbf{w}_p , teda hľadané váhy, ktoré sú riešením predošlého systému. Vyjadrením \mathbf{w} z (26)

$$(29) \quad \mathbf{w} = \lambda Q^{-1} \bar{\mathbf{r}} + \delta Q^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{w}_p$$

a po dosadení \mathbf{w}_p do (27),(28) dostávame

$$r_p = \lambda \bar{\mathbf{r}}^T Q^{-1} \bar{\mathbf{r}} + \delta \mathbf{1}^T Q^{-1} \bar{\mathbf{r}},$$

$$1 = \lambda \bar{\mathbf{r}}^T Q^{-1} \mathbf{1} + \delta \mathbf{1}^T Q^{-1} \mathbf{1}.$$

Ak označíme $A = \mathbf{1}^T Q^{-1} \bar{\mathbf{r}}$, $B = \bar{\mathbf{r}}^T Q^{-1} \bar{\mathbf{r}}$, $C = \mathbf{1}^T Q^{-1} \mathbf{1}$ a $D = BC - A^2$, dostaneme sústavu

$$r_p = \lambda B + \delta A,$$

$$1 = \lambda A + \delta C,$$

ktorá má práve jedno riešenie, ak je jej determinant D nenulový. Pretože vektor $\bar{\mathbf{r}}$ podľa predpokladu 2. nemá všetky zložky rovnaké, musí platiť $A\bar{\mathbf{r}} - B\mathbf{1} \neq 0$. Matica Q^{-1} je pozitívne definitná, teda $(A\bar{\mathbf{r}} - B\mathbf{1})^T Q^{-1} (A\bar{\mathbf{r}} - B\mathbf{1}) > 0$. Roznásobením dostaneme

$$A^2 B - A^2 B - BA^2 + B^2 C > 0 \text{ a teda } B(BC - A^2) > 0.$$

Keďže $B > 0$, dostávame, že determinant $D = BC - A^2$ je kladný a preto má sústava práve jedno riešenie,

$$(30) \quad \lambda = \frac{1}{D}(r_p C - A) \text{ a } \delta = \frac{1}{D}(B - A r_p).$$

Dosadením Lagrangeových multiplikátorov (30) do (29) dostaneme riešenie Markowit-zovho optimálneho portfólia (23) v tvare

$$\mathbf{w}_p = \mathbf{g} + \mathbf{h} r_p,$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{D} (B(Q^{-1} \mathbf{1}) - A(Q^{-1} r_p)),$$

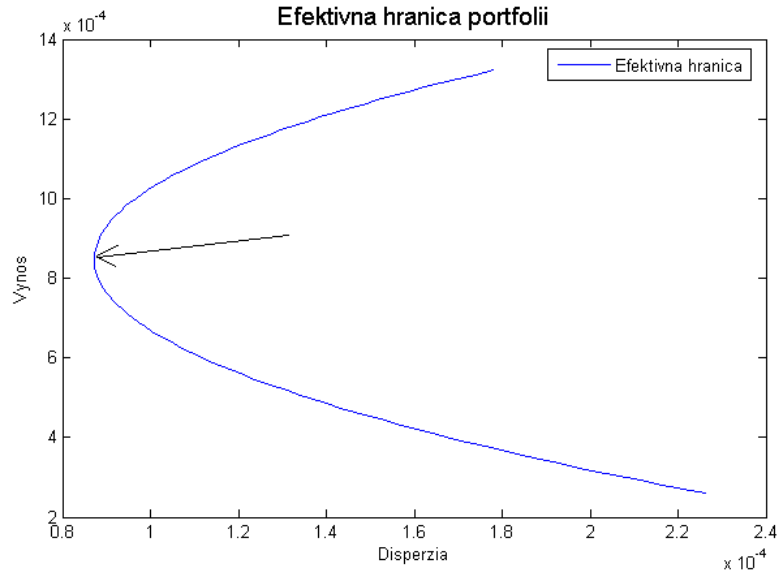
$$\mathbf{h} = \frac{1}{C} (B(Q^{-1} r_p) - A(Q^{-1} \mathbf{1})).$$

Optimálne portfólio má vektor váh rovný \mathbf{w}_p . Potom disperzia výnosu optimálneho portfólia je rovná

$$Var(r_p) = \mathbf{w}_p^T Q \mathbf{w}_p = (\mathbf{g} + \mathbf{h} r_p)^T Q (\mathbf{g} + \mathbf{h} r_p) = \mathbf{g}^T Q \mathbf{g} + (\mathbf{h}^T Q \mathbf{g}) r_p + (\mathbf{g}^T Q \mathbf{h}) r_p + (\mathbf{h}^T Q \mathbf{h}) r_p^2.$$

Z uvedeného vyplýva, že disperzia portfólia je kvadratickou funkciou r_p . Všimnime si, že člen $\mathbf{h}^T Q \mathbf{h}$ pri r_p je kladný. Na Obrázku č. 4 je znázornená parabola, ktorá tvorí

hranicu efektívnych portfólií¹⁶. To znamená, že portfóliá, ktoré sa nachádzajú na tejto parabole, majú optimálne váhy. Aj keď portfóliá v dolnej¹⁷ časti paraboly sú efektívne, vzhľadom na Markowitzovu teóriu, nie sú rozumné, nakoľko môžeme vytvoriť portfólio z hornej časti paraboly (a dosiahnuť vyšší výnos portfólia) pri rovnakej miere rizika.



Obrázok 4: Efektívna hranica portfólií vzhľadom na výnos r_p a disperziu σ . Šípka ukazuje na optimálne portfólio s najnižšou disperziou

3.2 Portfólio s *AVaRD* ako mierou rizika

Markowitzova úloha sa zaoberala minimalizáciou disperzie portfólia, ktorá predstavovala mieru rizika. Zjednodušene sa dá povedať, že minimalizovala priemer vzdialeností očakávaného výnosu od pôvodných hodnôt výnosu. To znamená, že disperzia predstavovala riziko toho, do akej miery sú výnosy rozptýlené od očakávaného výnosu. Preto, čím väčšia je disperzia tým, väčšie je riziko nenadobudnutia očakávaného výnosu a tým aj riziko portfólia. V tejto časti sa budeme zaoberať portfóliom, ktorého riziko bude predstavovať miera $AVaRD_\alpha(\xi) = \mathbb{E}[\xi] - AVaR_\alpha(\xi)$, definovaná v Kapitole 2.5. Mieru rizika *AVaRD*

¹⁶V Prílohe B č. 2 je autorom vytvorený program z Matlabu, ktorý vytvorí efektívnu hranicu portfólií a zakreslí ju do grafu

¹⁷pod vrcholom paraboly

budeme minimalizovať vzhľadom na obmedzenia, ktoré sú obdobné ako v prípade Markowitzovho portfólia. Na úvod potrebujeme získať dáta, z ktorých budeme *AVaRD* portfólia počítať. Tieto dáta budeme generovať na základe informácií získaných z historických dát. Ďalší postup tvorby portfólia je totožný ako pri tvorbe Markowitzovho portfólia.

3.2.1 Generovanie scenárov výnosov akcií

Ako bolo spomenuté v úvode Podkapitoly 3.2, prvým krokom postupu pri tvorbe optimálneho portfólia s mierou rizika *AVaRD* je získanie, teda vygenerovanie, scenárov vývoja budúcich výnosov akcií. Ako základ na generovanie týchto scenárov, nám posluží stochastická diferenciálna rovnica na určenie ceny akcie, resp. jej aplikácia na určenie budúceho výnosu akcie a historické ceny akcií vystupujúcich v portfóliu.

Budúci výnos akcie môžeme podľa (14) počítať nasledovne:

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = \mu + \sigma\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Potom po použití výsledkov z časti 2.4.5 môžeme písať

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = \bar{\mu} + \bar{\sigma}\varepsilon.$$

Odhad premenných $\bar{\mu}$ a $\bar{\sigma}$ získame napríklad z historických výnosov akcie. Jedinú stochastickú zložku predstavuje ε .

Uvažujme o n akciách, potom k scenárov budúceho výnosu akcie $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ môžeme zapísať vo vektorovom tvare, ako

$$\mathbf{r}^i = \begin{pmatrix} r_1^i = \bar{\mu}^i + \bar{\sigma}^i\varepsilon_1 \\ r_2^i = \bar{\mu}^i + \bar{\sigma}^i\varepsilon_2 \\ \vdots \\ r_k^i = \bar{\mu}^i + \bar{\sigma}^i\varepsilon_k \end{pmatrix}$$

pričom zložky ε_i predstavujú jednotlivé realizácie Wienerovho procesu a prvky $\bar{\mu}^i$, $\bar{\sigma}^i$ sú odhadnuté štatistiky očakávaného výnosu akcie i . Prvky ε_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ nasimulujeme ako realizácie štandardného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$.

Matica scenárov budúcich výnosov n akcií potom vyzerá nasledovne:

$$\Xi = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_1^2 & \cdots & r_1^n \\ r_2^1 & r_2^2 & \cdots & r_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_k^1 & \cdot & \cdots & r_k^n \end{pmatrix}$$

Matica má n stĺpcov predstavujúcich vektory jednotlivých scenárov výnosov akcií a k riadkov, ktoré predstavujú jednotlivé vygenerované scenáre.

3.2.2 Určenie optimálnych váh v portfóliu s *AVaRD*

Uvažujme o portfóliu s n akciami a vektorom váh $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. Nech vektor $\mathbf{r} = (r^1, r^2, \dots, r^n)$ predstavuje náhodný vektor budúcich výnosov akcií, $1, 2, \dots, n$. Budúci výnos portfólia je rovný $\mathbf{w}^T \mathbf{r}$ a očakávaný výnos portfólia predstavuje stredná hodnota náhodnej premennej, konkrétne $\mathbb{E}[\mathbf{w}^T \mathbf{r}]$. Podľa vety 2.2 je *AVaR* náhodnej premennej ξ riešením optimalizačnej úlohy (15) a dostávame, že hodnota $AVaR_\alpha$ portfólia pre náhodnú premennú $\mathbf{w}^T \mathbf{r}$ je rovná

$$(31) \quad AVaR_\alpha(\mathbf{w}^T \mathbf{r}) = \max_{a \in \mathbb{R}} \left\{ a - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(\mathbf{w}^T \mathbf{r} - a)^-] \right\}.$$

Podme sa bližšie pozrieť na minimalizáciu rizika portfólia meraného pomocou *AVaRD*. Optimalizačná úloha pre minimalizáciu rizika má tvar:

$$(32) \quad \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \mathbb{E}[\mathbf{w}^T \mathbf{r}] - \max_{a \in \mathbb{R}} \left\{ a - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(\mathbf{w}^T \mathbf{r} - a)^-] \right\} \right\}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}^T \mathbf{r}] \geq r_p,$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1.$$

Účelovú funkciu môžeme prepísať do tvaru jednej minimalizácie cez všetky premenné, teda $a \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Potom má účelová funkcia tvar:

$$\min_{\mathbf{w}, a} \left\{ \mathbb{E}[\mathbf{w}^T \mathbf{r}] - a + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(\mathbf{w}^T \mathbf{r} - a)^-] \right\}.$$

Uvažujme teraz o úlohe (32) nie ako o všeobecnej úlohe, kde náhodná premenná vstupujúca do optimalizačnej úlohy nebola bližšie špecifikovaná, ale ako o úlohe s diskretnou náhodnou premennou. Pre strednú hodnotu diskretnej náhodnej premennej ξ , ktorá nadobúda s pravdepodobnosťami $p_i \in [0, 1]$ hodnoty ξ_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ platí

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{i=1}^k p_i \xi_i.$$

Optimalizačná úloha s diskretnou náhodnou premennou potom nadobudne tvar:

$$(33) \quad \min_{\mathbf{w}, a} \left\{ \mathbf{w}^T \sum_{i=1}^k p_i \tilde{\mathbf{r}}_i^n - a + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k p_i [\mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{r}}_i^n - a]^- \right\},$$

kde $\tilde{\mathbf{r}}_i$ je transpozícia vektora scenárov budúceho výnosu pre všetky aktíva. Vektor scenárov predstavuje i -ty riadok matice scenárov Ξ . Nech tieto realizácie nastávajú s rovnakou pravdepodobnosťou $p_i = \frac{1}{k}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$, kde k je počet riadkov matice scenárov. Potom môžeme účelovú funkciu previesť do tvaru:

$$\min_{\mathbf{w}, a} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{r}}_i - a + \frac{1}{\alpha k} \sum_{i=1}^k [\mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{r}}_i - a]^- \right\}.$$

Zavedme novú premennú $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)$. Cieľom tejto premennej je nahradiť člen $[\mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{r}}_i - a]^-$, tak aby sme odstránili nelinearitu, ktorú tento člen spôsoboval. Potom musí platiť $z_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Úloha hľadania optimálnych váh \mathbf{w} portfólia s *AVaRD* ako mierou rizika portfólia a novou premennou $z_i \geq [\mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{r}}_i - a]^-$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ dostane tvar:

$$(34) \quad \min_{a, \mathbf{w}, \mathbf{z}} \left\{ \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} - a + \frac{1}{\alpha k} \mathbf{z} \right\}$$

$$(35) \quad z_i + \mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{r}}_i - a \geq 0, \quad \forall i = \{1, 2, \dots, k\},$$

$$(36) \quad \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} \geq r_p,$$

$$(37) \quad \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1,$$

$$(38) \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0}_k.$$

V účelovej funkcii (34) vystupuje nový vektor $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{r}^1, \bar{r}^2, \dots, \bar{r}^n)^T$, ktorého jednotlivé prvky sú:

$$\bar{r}_j = \frac{\sum_{i=1}^k \tilde{r}_i^j}{k}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Optimalizačná úloha s účelovou funkciou (34) a obmedzeniami (35)–(38) je úlohou lineárneho programovania. Všeobecný zápis úlohy lineárneho programovania má tvar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ A_{ner} \mathbf{x} &\leq b_{ner}, \\ A_{rov} \mathbf{x} &= b_{rov}, \\ \mathbf{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Úloha (34)–(38) sa dá prepísať do maticovo-vektorového tvaru, kde:

1. účelovú funkciu predstavuje vektor

$$\mathbf{x} = (w_1, w_2, \dots, w_n, a, z_1, z_2, \dots, z_k)^T,$$

s koeficientami

$$\mathbf{c} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n, -1, \frac{1}{\alpha k}, \frac{1}{\alpha k}, \dots, \frac{1}{\alpha k})^T,$$

kde počet prvkov $\frac{1}{\alpha k}$ je rovný dĺžke vektora \mathbf{z} .

2. matica A_{ner} má nasledovné prvky

$$A_{ner} = \begin{pmatrix} -r_1^1 & -r_1^2 & \dots & -r_1^n & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -r_2^1 & -r_2^2 & \dots & -r_2^n & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_k^1 & -r_k^2 & \dots & -r_k^n & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -\bar{r}^1 & -\bar{r}^2 & \dots & -\bar{r}^n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Matica A_{ner} má $k + 1$ riadkov, kde k je počet simulácii z vygenerovanej matice výnosov a počet stĺpcov je rovný $n + k + 1$, kde n predstavuje počet akcií v portfóliu.

3. matica A_{rov} má v našom prípade jeden riadok a preto ju môžeme zapísať vo vektorovom tvare

$$A_{rov} = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0).$$

Matica A_{rov} má $n + k + 1$ prvkov, kde počet núl je rovný $k + 1$.

4. pravá strana nerovnostného ohraničenia označená ako b_{ner} je vektor s prvkami

$$b_{ner} = (0, 0, \dots, -r_p)^T$$

pričom počet núl je rovný k , teda počtu riadkov matice simulácií.

5. pravá strana rovnostného ohraničenia $b_{rov} = 1$

Takúto úlohu lineárneho programovania môžeme numericky riešiť napríklad metódou vnútorného bodu. Po získaní optimálneho riešenia v tvare:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n, \hat{a}, \hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_k)^T,$$

členy $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n$ predstavujú optimálne váhy portfólia a hodnota \hat{a} je *VaR* portfólia. Hodnotu *AVaR* portfólia získame dosadením niektorých členov vektora $\hat{\mathbf{x}}$, konkrétne $\hat{a}, \hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_k$ do časti účelovej funkcie rovnej $-a + \frac{1}{\alpha k} \mathbf{z}$.

Úlohu (34)–(38) môžeme modifikovať pridaním ďalších obmedzení. Napríklad záporné váhy nebudú povolené a taktiež môžeme požadovať, aby sa váhy portfólia nachádzali v určitom intervale. Úloha po modifikácii dostane tvar

$$\begin{aligned} \min_{a, \mathbf{w}, \mathbf{z}} & \left\{ \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} - a + \frac{1}{\alpha k} \mathbf{z} \right\} \\ -\mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{r}}_i + a - z_i & \leq 0, \quad \forall i = \{1, 2, \dots, k\}, \\ -\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} & \leq -r_p, \\ \mathbf{w}^T \mathbf{1} & = 1, \\ \mathbf{l}_b & \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{u}_b, \\ \mathbf{w} & \geq \mathbf{0}_n, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}_k. \end{aligned}$$

V takejto úlohe predstavuje vektor \mathbf{l}_b dolnú hranicu a vektor \mathbf{u}_b hornú hranicu intervalu, v ktorom sa môžu nachádzať váhy portfólia, to znamená, že prvky l_i resp. u_i predstavujú dolnú resp. hornú hranicu intervalu, v ktorom sa môže nachádzať parameter váh w_i .

3.2.3 Transakčné náklady v portfóliu

Každý predaj alebo nákup akcie vytvára náklady, vo forme poplatkov, pri tvorbe a aj pri budúcich alokáciach portfólia. Preto transakčné náklady nie sú zanedbateľné, aj keď v predošlých kapitolách bol tento predpoklad axiomatický. Nasledovná teória o transakčných nákladoch v portfóliu je obdobná ako v [2].

Nech premenné b_i resp. s_i predstavujú celkové transakčné poplatky za nákup resp. predaj akcie i . Treba si uvedomiť, že pri alokovaní portfólia nemôže nastať, že by sme nakupovali a zároveň predávali akcie i v jednej a tej istej alokácii, nakoľko by to viedlo k neefektívite.

Celkový poplatok za nákup akcie i zapíšeme nasledovne:

$$(39) \quad b_i = \begin{cases} g_i(w_i - \bar{w}_i), & \text{ak } w_i > \bar{w}_i, \\ 0, & \text{ak } w_i \leq \bar{w}_i, \end{cases}$$

a celkový poplatok za predaj akcie je vyjadrený ako

$$(40) \quad s_i = \begin{cases} h_i(\bar{w}_i - w_i), & \text{ak } \bar{w}_i > w_i, \\ 0, & \text{ak } \bar{w}_i \leq w_i, \end{cases}$$

pričom \bar{w}_i sú pôvodné váhy akcie i v portfóliu a w_i sú nové optimálne váhy akcie i . Konštanta g_i predstavuje transakčný poplatok pri nákupe jedného kusu akcie i a h_i je konštanta asociovaná s predajom jedného kusu akcie i . Pripomeňme si, že b_i a s_i nemôžu byť súčasne nulové, pretože b_i nadobúda hodnotu 0 pri predaji akcie i a vice-versa.

Nech $\mathcal{R}(\mathbf{w})$ predstavuje účelovú funkciu v pôvodnej úlohe optimalizácie portfólia. Nová účelová funkcia zahŕňajúca aj náklady portfólia potom vyzerá nasledovne:

$$(41) \quad \mathcal{R}(\mathbf{w}) + \sum_{i=1}^n (b_i + s_i),$$

pričom člen, ktorý pribudol v účelovej funkcii, sa môže prepísať do tvaru

$$(42) \quad \mathcal{R}(\mathbf{w}) + \sum_{i=1}^n \max\{b_i, s_i\},$$

ktorý nám zaručil predpoklad o súčasnej nenulovosti b_i, s_i v indexe i . Účelová funkcia (42) sa dá zmeniť pomocou novej premennej y_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a optimalizačný problém

bude mať nasledovný tvar:

$$(43) \quad \min_{\mathbf{w}, \mathbf{y}} \left(\mathcal{R}(\mathbf{w}) + \sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$b_i \leq y_i,$$

$$s_i \leq y_i,$$

kde $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ a y_i predstavuje celkový transakčný poplatok¹⁸ spojený s akciou i . Nerovnosti v (43) môžeme prepísať do tvaru:

$$g_i w_i - y_i \leq g_i \bar{w}_i,$$

$$h_i \bar{w}_i \leq y_i + h_i w_i.$$

Treba si uvedomiť, že ak pôvodná optimalizačná úloha mala n premených v účelovej funkcii, ktoré sa vzťahovali na optimálne váhy portfólia¹⁹, potom po pridaní funkcie zahŕňajúcej transakčné poplatky má nová účelová funkcia dvakrát toľko premenných ako pôvodná účelová funkcia bez transakčných poplatkov. Taktiež sa zväčší počet lineárnych ohraničení v tvare nerovností o $2n$.

3.2.4 Markowitzovo portfólio s transakčnými nákladmi

Uvažujme o Markowitzovom portfóliu. Potom úloha hľadania optimálnych váh Markowitzovho portfólia s transakčnými nákladmi dostane nasledovný tvar:

$$\min_{\mathbf{w}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{w}^T Q \mathbf{w} + \mathbf{y}^T \mathbf{1} \}$$

$$\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} = r_p,$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1,$$

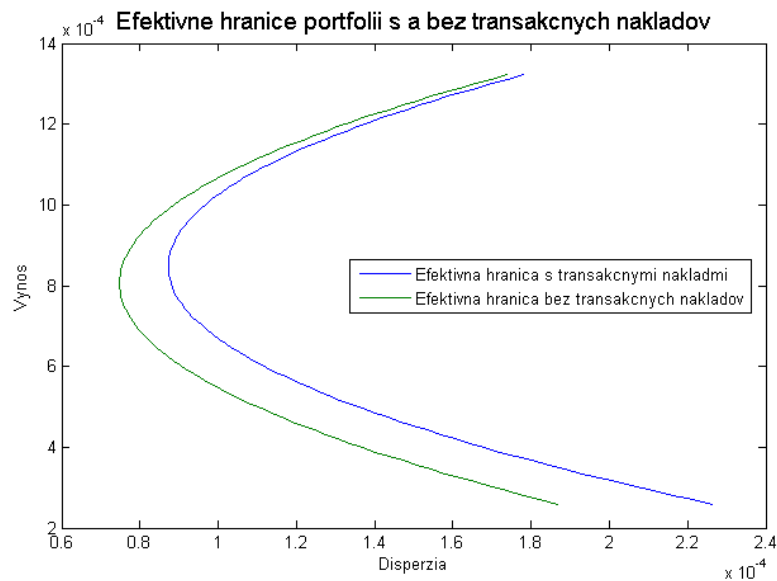
$$\mathbf{g} \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{y} - \mathbf{g} \mathbf{w} \geq \mathbf{0}_n,$$

$$\mathbf{h} \mathbf{w} + \mathbf{y} - \mathbf{h} \bar{\mathbf{w}} \geq \mathbf{0}_n.$$

Vektory \mathbf{g} , \mathbf{h} majú zložky určené podľa (39) resp. (40), vektor $\bar{\mathbf{w}}$ je vektor pôvodných váh portfólia.

¹⁸tento poplatok už nerozlišujeme medzi nákupným a predajným poplatkom

¹⁹v prípade minimalizácie miery rizika portfólia s napr. mierou *AVaRD*, do účelovej funkcie vstupujú aj iné premenné



Obrázok 5: Efektívne hranice Markowitzovho portfólia s a bez transakčných nákladov

Podľa legendy v Obrázku č. 5 vidíme, že modrá parabola predstavuje optimálne Markowitzove portfólia s transakčnými nákladmi. Tieto portfólia dosahujú, od určitej hodnoty disperzie, menší výnos pri rovnakom riziku, ako portfólia bez transakčných nákladov. V Prílohe B č. 3 sa nachádza autorom vytvorený program z Matlabu, ktorý vytvorí efektívne hranice použité v Obrázku č. 5. Pôvodné váhy \bar{w} portfólia sú zvolené tzv. naivnou diverzifikáciou. To znamená, že všetky prvky vektora \bar{w} majú rovnakú hodnotu, konkrétne $\bar{w}_i = \frac{1}{n}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, kde n je počet akcií.

4 Matematické programovanie a metóda vnútorného bodu

V Kapitole 3 sme sa zaoberali teóriou portfólia, ktorého mieru rizika predstavovala disperzia a *AVaRD*. Tieto úlohy na optimalizáciu portfólia sa vo svojej podstate líšili iba funkciou, ktorá predstavovala mieru rizika, pričom túto funkciu sme minimalizovali za určitých podmienok, ohraničení. Na riešenie takýchto úloh často používame numerické metódy²⁰. V Markowitzovej úlohe optimalizácie portfólia musíme riešiť úlohu, ktorej funkcia je v kvadratickej forme, kdežto úloha minimalizácie portfólia s *AVaRD* je funkcia vyjadrujúca túto mieru rizika lineárna.

Matematické programovanie predstavuje dôležitú súčasť numerickej matematiky. Jeho úlohou je hľadanie extrémov funkcií. Tieto úlohy môžeme ďalej rozdeliť na úlohy s voľnými a viazanými extrémami, pre bližšie špecifikácie úloh odkazujeme čitateľa na [3]. Markowitzova úloha je úlohou konvexného kvadratického programovania s lineárnymi ohraničeniami a úloha minimalizácie miery rizika *AVaRD* je úlohou lineárneho programovania s lineárnymi ohraničeniami. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že úlohy lineárneho programovania tvoria špeciálnu časť úloh konvexného kvadratického programovania. Preto sa budeme v tejto kapitole zaoberať iba úlohou konvexného kvadratického programovania. Jednou z úloh konvexného kvadratického programovania je implementácia algoritmu, ktorý numericky rieši zadanú úlohu. V dnešnej dobe je jedným z najrozšírenejších algoritmov na riešenie úloh konvexného kvadratického programovania metóda vnútorného bodu. Táto metóda má mnoho variácií, ale my sa zameriame iba na jej fundamentálny princíp. Jej využitie je implementované v Kapitole 5, kde používame softvér na riešenie úloh matematického programovania. Tieto úlohy riešime pomocou spomenutej metódy vnútorného bodu, ktorej algoritmus využíva aj použitý softvér.

4.1 Úloha konvexného kvadratického programovania

Úloha konvexného kvadratického programovania je špeciálny prípad úlohy konvexného programovania, kde hľadanie extrémumu prebieha na konvexnej kvadratickej funkcii.

²⁰existujú i analytické metódy ako bolo uvedené v Podkapitole 3.1

Uvažujme o konvexnej kvadratickej funkcii $f(x)$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

Budeme hľadať minimum tejto funkcie na množine ohraničení, predstavovanej lineárnou sústavou. Zapišme túto úlohu nasledovne:

$$(44) \quad \min_{\mathbf{x} \in R^n} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$(45) \quad A \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$(46) \quad \mathbf{x} \geq 0.$$

Matica $Q \in R^n \times R^n$ je kladne semidefinitná a matica $A \in R^m \times R^n$ pričom $m < n$, vektor $\mathbf{b} \in R^m$ a vektory $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in R^n$. O vektore \mathbf{x} hovoríme ako o prípustom ak spĺňa podmienky ohraničenia (45) a (46). Množinu prípustných vektorov označme

$$F = \{\mathbf{x} \in R^n \mid A \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$$

a jej vnútro označme

$$F^0 = \{\mathbf{x} \in R^n \mid A \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} > 0\}.$$

Ak chceme o vektore \mathbf{x} hovoriť ako o optimálnom, musí spĺňať podmienky optimality. Základné podmienky optimality pre úlohu na viazaný extrém nám ponúka Lagrangeova analýza. Uveďme si preto Lagrangeovu funkciu pre úlohu (44)–(46):

$$(47) \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \delta) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \delta^T (A \mathbf{x} - \mathbf{b}), \text{ pričom } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}_n.$$

Potom Kuhn-Tuckerove podmienky²¹ vychádzajúce z Kuhn-Tuckerovej vety, pozri [3], majú tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} &\geq \mathbf{0}_n, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^T &= \mathbf{0}_n, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} &= \mathbf{0}_n, \end{aligned}$$

²¹d'alej len KT-podmienky

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_n.$$

Tieto podmienky nazývame nutnými podmienkami optimality. Problémom takejto úlohy je, že ju nevieme jednoducho riešiť napríklad Newtonovou metódou[1], nakoľko klasickú Newtonovu metódu môžeme použiť iba na ohraničenia v tvare rovností. Tento problém ale môžeme vyriešiť transformáciou úlohy do tvaru rovnostných ohraničení s transformovanou účelovou funkciou. Potom môžeme na takúto úlohu použiť vhodný algoritmus a danú úlohu numericky vyriešiť. Touto problematikou sa zaoberá nasledovná podkapitola, ktorej témou je metóda vnútorného bodu na riešenie úloh kvadratického programovania.

4.1.1 Metóda vnútorného bodu

Princípom metódy vnútorného bodu je zabezpečiť, aby sa jednotlivé iterácie algoritmu nachádzali vo vnútri množiny prípustných riešení. Iterácie majú tendenciu „opustiť“ vnútro množiny najmä vtedy, ak sa nachádzajú „blízko“ hranice striktné prípustných riešení²². Použitím bariérovej funkcie, ktorá má schopnosť tieto iterácie „udržať“ vo vnútri množiny prípustných riešení, sa tento problém môže eliminovať. Z uvedeného vyplýva, že bariérová funkcia musí spĺňať určité podmienky. Na základe [1], [3],[5] formulujeme nasledovnú definíciu.

Definícia 4.1. *Nech funkcia $\phi(u)$ spĺňa nasledovné podmienky:*

1. *Bariérová vlastnosť*

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \phi(u) = \infty,$$

2. *$\phi(u)$ je rýdzo konvexná a klesajúca.*

Potom funkcia $\phi(u)$ sa nazýva bariérová funkcia.

Vhodnou voľbou bariérovej funkcie sa ukázala funkcia logaritmu²³, ktorá zaručuje dobré konvergenčné vlastnosti, pozri [3]. Zvoľme preto za funkciu $\phi(u)$ záporne vzatú funkciu prirodzeného logaritmu, konkrétne

$$\phi(u) = -\ln(u).$$

²²Hranica striktné prípustných riešení $F^s = \{\mathbf{x} \in R^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} = 0\}$.

²³existujú aj iné bariérové funkcie, ako napríklad $f(u) = \frac{1}{u}$

Poľahky vidno, že podmienky Definície 4.1 sú splnené.

Uvažujme o úlohe (44)–(46) a pretransformujme ju s využitím logaritmickej bariérovej funkcie a parametra $0 < \mu < 1$ nasledovne:

$$(48) \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Pôvodné obmedzenie na vektor $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_n$ je obsiahnuté v bariérovej funkcii, nakoľko definičný obor logaritmickej funkcie môže obsahovať iba kladné hodnoty. Vidíme, že týmto spôsobom sme sa mohli „zbaviť“ nerovnostného ohraničenia. Lagrangeova funkcia pre úlohu (44)–(46) má tvar

$$(49) \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \delta) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \delta^T (A \mathbf{x} - \mathbf{b}).$$

Potom podmienky optimality úlohy (48) majú tvar:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}_n,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} = \mathbf{0}_n.$$

Parameter μ sa nazýva riadiaci parameter a jeho úlohou je riadiť veľkosť vplyvu bariérovej funkcie k pôvodnej účelovej funkcii. To znamená, že znižovaním parametra μ pripisujeme menšiu váhu bariérovej funkcii a zväčšujeme váhu pôvodnej účelovej funkcie. Takýto postup dáva aj návod na algoritmus riešenia takejto úlohy. Tento postup sa často nazýva postup sledovania centrálnej trajektórie²⁴. Ako určiť centrálnu trajektóriu, pozri [7]. Algoritmus sledovania centrálnej trajektórie môžeme schematicky zapísať nasledovne[5]:

Nastav: Štartovací bod x^0 , riadiaci parameter μ^0 , $\alpha \in (0, 1)$, x^{k+1} a $k=0$

opakuaj:

Rieš úlohu (48) pre dané μ^k , dostávame riešenie x^k ;

Nastav parameter $\mu^{k+1} = \alpha \mu^k$;

$k=k+1$;

pokiaľ: $\|x^{k+1} - x^k\| \geq Tol$;

²⁴z anglického prekladu *path-following*

V danom algoritme predstavuje Tol konštantu, ktorá určuje presnosť riešenia a α je parameter, ktorý určuje rýchlosť klesania riadiaceho parametra. Ako určovať parameter α možno nájsť napríklad v [1] alebo [5]. Takýto algoritmus predstavuje iba „vonkajšie“ iterácie metódy vnútorného bodu. Vnútorné iterácie predstavuje samotné riešenie úlohy (48) pre zvolený parameter. Úlohu (48) môžeme riešiť napríklad Newtonovou metódou. Podrobnejší opis takéhoto postupu je opísaný v [5].

5 Praktická ukážka tvorby optimálneho portfólia

V Kapitole 3 sme sa zaoberali predovšetkým teóriou optimálneho portfólia. Ako aplikovať poznatky z teórie do praktického použitia si ukážeme v nasledujúcej časti. Skôr než pristúpime ku konkrétnemu príkladu ukážeme si ako môže vyzeráť tvorba a rebalancia portfólia všeobecne. V Podkapitole 5.2.2 budeme využívať webovú aplikáciu, ktorá nám poskytne užívateľské rozhranie pre riadenie portfólia.

5.1 Praktická tvorba a rebalancia portfólia

Uvažujme o investorovi, ktorý má rozpočet jeden milión dolárov. Tento rozpočet budeme označovať R , pričom finančné prostriedky chce investor investovať do ním vybraných n akcií. Od tejto investície požaduje ročný výnos $r_p = 10\%$. Investor uvažuje o investícii na jeden rok s tým, že rebalanciu portfólia bude vykonávať každý mesiac. Na portfólio sa nevzťahujú žiadne transakčné náklady a záporné váhy nebudú povolené. V nasledujúcich bodoch si ozrejmime všeobecný postup pri tvorbe portfólia.

1. Výpočet optimálnych váh portfólia

Z historických cien akcií vypočítame historické výnosy akcií. Z historických výnosov získame potrebné vstupné parametre do optimalizačnej úlohy. Zkonštruujeme optimalizačnú úlohu a z jej výstupu dostaneme vektor optimálnych váh \mathbf{w} .

2. Nákup akcií

Vektor cien, označme ho $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, bude obsahovať posledné známe ceny akcií, teda ceny za ktoré môžeme nakúpiť akcie²⁵. Optimálny²⁶ počet akcií, ktoré môžeme nakúpiť zapíšme do vektora

$$\mathbf{w}^{ks} = (w_1^{ks}, w_2^{ks}, \dots, w_n^{ks}),$$

kde jednotlivé prvky vektora w_i^{ks} vypočítame ako

$$w_i^{ks} = \max_{z \in \mathbb{Z}} \left\{ z \leq \frac{w_i * R}{c_i} \right\},$$

²⁵pre jednoduchosť je táto cena Close v dni obchodovania

²⁶na základe vektora \mathbf{w}

pričom c_i predstavuje cenu akcie i . Takýmto zaokrúhlením vznikne suma, označme ju L , ktorá sa neinvestuje a je rovná

$$L = R - \mathbf{w}_{ks}^T \mathbf{c}.$$

Sumu L môžeme potom využiť napríklad pri rebalancovaní portfólia. Táto suma predstavuje pomerne malú časť hodnoty portfólia a jej hodnota klesá s výškou R .

Pomocou bodov (1)–(2) získame vektor \mathbf{w}_{ks} , ktorý znázorňuje optimálne počty kusov²⁷ akcií v portfóliu.

Ako bolo spomenuté v úvode tak investor požaduje vykonávať rebalanciu portfólia každý mesiac. Poďme sa preto bližšie oboznámiť s rebalancovaním portfólia. Pod pojmom rebalancia portfólia sa myslí výpočet nových optimálnych váh napr. vzhľadom k získaniu aktuálnejších dát. V našom prípade to bude predstavovať poznanie nových cien akcií v mesiaci rebalancie. To znamená, aby sme aktualizovali náš časový rad historických cien akcií, najstaršie dáta vynecháme a pridáme k historickým dátam posledné ceny, ktoré sme získali. Takýto postup nám zaručí určité sledovanie trendu vývoja akciového trhu, ktorý zahrnieme do našich historických dát. V nasledujúcich bodoch si uvedieme možnosť postupu pri rebalancovaní portfólia:

1. Výpočet nových váh

Pre optimalizačnú úlohu vypočítame vstupné údaje na základe aktuálneho časového radu. Výstupom optimalizačnej úlohy bude opäť vektor váh.

2. Nákup resp. predaj akcií

Hodnota portfólia v čase rebalancie je rovná cene akcií v čase rebalancie vynásobenej počtami kusov akcií v portfóliu pred rebalanciou. Označme pôvodné optimálne počty kusov akcií v portfóliu $\bar{\mathbf{w}}^{ks}$. Ďalej nech vektor ρ predstavuje rozdiel medzi starými a novými váhami portfólia, teda

$$\rho = \mathbf{w}^{ks} - \bar{\mathbf{w}}^{ks},$$

²⁷nakolko sme počty akcií zaokrúhlovali nadol, tak tento vektor je optimálny vzhľadom na toto zaokrúhlenie

kde \mathbf{w}^{ks} sú nové váhy portfólia vypočítané podľa bodu 1. Potom ak $\rho_i > 0$ tak musíme do portfólia zakúpiť akcie i v počte kusov rovnému ρ_i , analogicky ak je $\rho_i < 0$ tak akcie i predávame.

Postup v bode dva hovorí aby sme pri rebalancovaní, teda novej alokácii, portfólia nepredávali všetky akcie a potom opäť nakúpili akcie podľa nových optimálnych váh, ale predali resp. nakúpili iba určený počet akcií daný vektorom ρ .

5.2 Webová aplikácia

Existujú mnohé spôsoby, ako sa vysporiadať s náročnosťou pri tvorbe a nasledovnej alokácii portfólia. My sme si vybrali spôsob, ktorý by mal odzrkadľovať požiadavky modernej doby. Správa portfólia by mala byť rýchla a pohodlná. Splniť tieto požiadavky sa pokúsime pomocou webovej aplikácie.

5.2.1 Princíp webovej aplikácie a jej technická podpora

Webová aplikácia, využíva na svoj chod platformu .NET²⁸ a o webové rozhranie sa stará ASP.NET²⁹. Základ celej aplikácie tvorí SQL databáza, do ktorej sa zapisujú všetky potrebné údaje. Medzi nich patrí kompletná správa užívateľov od registrácie až po zmenu hesla. V databáze sa taktiež uchovávaajú historické ceny akcií potrebné k optimalizácii portfólia a aj údaje o portfóliu a jeho rebalanciách. Výpočty, ktoré sa týkajú samotnej optimalizácie, vykonáva knižnica³⁰ optimalizačného softvéru MOSEK. V našej aplikácii budeme tento softvér využívať na optimalizáciu Markowitzovho portfólia, ako aj na optimalizáciu portfólia s *AVaRD* ako mierou rizika. Algoritmus, ktorý používame zo softvéru MOSEK³¹, je založený na metóde vnútorného bodu uvedenej v Podkapitole 4.1.1. Rozhranie medzi touto knižnicou a aplikáciou tvorí kód naprogramovaný autorom v jazyku C#.NET. V uvedenom programovacom jazyku je vytvorený aj tzv. Code-Behind aplikácie, ktorý sa stará o celkovú funkčnosť aplikácie. V elektronickej prílohe sa nachádza kompletný zdrojový kód k aplikácii.

²⁸čítaj „dotnet”

²⁹Active server pages

³⁰súbor s uloženými procedúrami a funkciami

³¹softvér obsahuje aj iné algoritmi, ako je napr. simplexová metóda

Uvedená aplikácia funguje v dvoch základných módoch *Demo* a *Live*, z ktorých si môže užívateľ vybrať po prihlásení. Mód *Demo*, ktorý slúži na simuláciu tvorby a rebalancie portfólia, využíva iba dáta z minulosti. To znamená, že užívateľ sa môže „vrátiť“ do minulosti a pozorovať vývoj portfólia, ktoré sa vytvorí a rebalancuje podľa požiadaviek užívateľa. Napríklad si môže zvoliť akcie, ktoré bude obsahovať jeho portfólio, k týmto akciám získať dáta za časové obdobie, ktoré si určí³². Užívateľ môže kedykoľvek svoje portfólio vymazať a vytvoriť si nové. Viaceré portfólia v rovnakom časovom období nie sú povolené. Princípom módu *Live* je, aby si užívateľ mohol vytvoriť portfólio na základe historických dát a sledovať jeho vývoj v prítomnosti. To znamená, že napr. pri vytváraní váh optimálneho počtu kusov akcií, sú využité posledné známe Close ceny akcie. Aplikácia nepodporuje súčasný beh módov *Demo* a *Live* pre jedného užívateľa.

5.2.2 Riešenie optimalizácie portfólia pomocou webovej aplikácie

Uvažujme o príklade z Podkapitoly 5.1, pričom si určíme konkrétne akcie, ktoré bude obsahovať naše portfólio. Okrem príkladu sa budeme podrobnejšie venovať aj jednotlivým funkciám aplikácie.

Prvým krokom k úspešnému používaniu aplikácie je registrácia na vytvorenie užívateľského konta. Po úspešnej registrácii, sa môže užívateľ prihlásiť. Potom si môže zvoliť mód, v ktorom chce vytvoriť portfólio. Nakoľko chceme demonštrovať príklad z úvodu kapitoly, zvolíme si mód *Demo*. Po tejto selekcii sme automaticky presmerovaní na časť, kde určíme akcie³³, ktoré sa budú zúčastňovať v portfóliu. Zvoľme si akcie AAPL, F, FCX, HNZ, HPQ, MCD, MSFT, NKE, ORCL, XOM. O úroveň nižšie, pozri Obrázok č. 6 v Prílohe A, sa nachádza formulár na určenie časového intervalu historických dát a frekvencie sťahovaných dát. Zvoľme si historické dáta od 1.4.1997 po 1.4.2007, s mesačnou frekvenciou. Tieto dáta sú získavané z portálu finance.yahoo.com. Po úspešnom stiahnutí, sa dáta uložia do databázy a objaví sa tabuľka s názvami tickerov, poslednou uzatváraciou cenou a očakávaného výnosu akcie. Po kliknutí na ticker akcie, si môže užívateľ prezrieť graf vývoja jej ceny. Na Obrázku č. 8 v Prílohe A je uvedený graf akcie HNZ, vytvorený aplikáciou.

³²za predpokladu, že sú dostupné v danom časovom období

³³skratku akcie, resp. ticker

Po získaní historických dát prejdeme k samotnej alokácii portfólia. Z Kapitoly 3 vieme, že ako vstupné dáta potrebujeme nie len historické ceny akcií ale aj určiť požadovaný výnos portfólia. Obrázok č. 7 v Prílohe A znázorňuje dialóg, v ktorom určíme požadovaný výnos a objem peňazí v dolároch, ktorý chceme investovať. V príklade je určený požadovaný výnos rovný 10% ročne a výška investície jeden milión dolárov. Po zadaní potrebných údajov na alokáciu portfólia, aplikácia vytvorí v prvej tabuľke váhy portfólia podľa Markowitzovej teórie z Podkapitoly 3.1. V druhej tabuľke sa nachádzajú váhy portfólia určované podľa Podkapitoly 3.2. Uvedené hodnoty sa zapíšu do databázy a budú využité nie len pri rebalancii portfólia ale aj na vytvorenie grafu, ktorý znázorní vývoj portfólia. Na Obrázku č. 11 v Prílohe A sú znázornené tabuľky s váhami a dialóg predchádzajúci ich vytvoreniu.

Ďalším krokom, sledujúc zadanie príkladu z úvodu kapitoly, je rebalancia portfólia. Aplikácia nás do časti rebalancie portfólia presmeruje automaticky po jeho vytvorení. V tejto časti, nie je potrebné zadávať žiadne dáta, aplikácia vykoná všetky operácie automaticky.

Princíp rebalancie portfólia vykonáva aplikácia v nasledovných krokoch:

1. Aplikácia zistí z databázy dátum vytvorenia portfólia³⁴. Od tohto dátumu uloží do databázy nové ceny akcií³⁵.
2. Z nových cien vypočíta štatistiky, ktoré sú potrebné na vypočítanie nových váh Markowitzovho portfólia, ako aj portfólia s mierou rizika *AVaRD*.
3. Novú hodnotu portfólia a počet akcií aplikácia vypočíta pomocou hodnôt uložených v databáze, sledujúc postup uvedený na začiatku tejto kapitoly.

Na Obrázku č. 9 v Prílohe A je znázornená rebalancia. Všetkých 12 rebalancií vypočítaných pomocou aplikácie je uvedených v Prílohe A v Tabuľke č. 3 pre Markowitzovo portfólio a v Tabuľke č. 4 pre portfólio s mierou rizika *AVaRD*. Bilancia portfólia na konci sledovaného obdobia sa vykonáva tak, že vytvoríme ešte jednu rebalanciu a hodnota portfólia pri tejto rebalancii, teda 1.4.2008 je konečnou hodnotou portfólia. V Tabuľke

³⁴dátum poslednej chronologicky usporiadanej ceny akcie

³⁵podľa toho, či sú dáta denné, týždenné alebo mesačné

č. 2 v stĺpci Markowitz sa nachádza hodnota na začiatku portfólia, hodnota portfólia pre poslednú rebalanciu a výnos portfólia za sledované obdobie. Analógia platí pre stĺpec AVaRD. Z uvedených dát v Tabuľke č. 2 vidíme, že portfólio s mierou rizika AVaRD vytvorilo zisk o 1,67% za jeden rok vyšší ako Markowitzovo portfólio. Nakoľko spomínaný zisk portfólia u oboch metód výpočtu optimálnych váh je kladný, dokonca prevyšujúci požadovaný výnos 10%, môžeme usúdiť, že teória sa uplatnila v praxi úspešne. Samozrejme, nie vždy nás môže optimálne portfólio „ochrániť“ pred klesajúcim trendom celého akciového trhu. V Tabuľkách č. 3 a 4 možno vidieť, že ak by sme portfólio rebalancovali iba jeden krát, tzn. do 1.5.2007, zisk portfólia by bol záporný. To nás navádza na fakt,

| | Markowitz | AVaRD |
|--|-----------|-----------|
| Hodnota portfólia na začiatku periódy rebalancovania | 1 000 000 | 1 000 000 |
| Hodnota portfólia na konci celkovej periódy rebalancovania | 1 139 868 | 1 156 535 |
| Celkový výnos portfólia v percentách | 13,98% | 15,65% |

Tabuľka 2: Celková hodnota Markowitzovho a AVaRD portfólia k 2.4.2008

že krátkodobé investovanie je omnoho volatilnejšie ak rozumná investícia na dlhšie časové obdobie. Sledovanie portfólia si vyžaduje pri dlhodobom investovaní viac času a preto aj tu by sme videli uplatnenie webovej aplikácie, v móde *Live*.

6 Záver

Obsahom tejto práce bola teória portfólia s mierami rizika predstavovanými veličinami v tvare disperzie a Average Value-at-Risk. Na to, aby sme mohli s týmito veličinami pracovať sme uviedli na úvod práce kapitolu, ktorá sa zaoberala základnými charakteristikami aktív. V našom prípade sme sa v celej práci zaoberali výlučne aktívami reprezentovanými akciami.

Ďalej sme sa zaoberali teóriou portfólia. Ako základný model na vybudovanie portfólia sme využili Markowitzovu teóriu. Základ tejto teórie bol použitý aj na portfólium, ktorého mieru rizika predstavuje Average Value-at-Risk Deviation. Pre potreby tvorby portfólia s uvedenou mierou rizika sme sa oboznámili zo základmi stochastického kalkulu. Pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice sme uviedli možný spôsob ako generovať scenáre budúceho výnosu akcie. Tie sme potom použili nie len pri budovaní teórie ale aj ako základ výpočtu Average Value-at-Risk Deviation v praktickom prípade.

V praktickej časti, sme si ukázali, ako možno vytvoriť a rebalancovať portfólio. Na tento účel bola autorom vytvorená webová aplikácia, ktorá má umožniť rýchly a jednoduchý spôsob uplatnenia teórie v praxi. Príklad, ktorý bol uvedený v poslednej kapitole úspešne demonštroval zvolený prístup k správe akciového portfólia. Dúfame, že sa aplikácia stane nie len dobrým pomocníkom, ale aj motiváciou pre nové metódy a prístupy k tvorbe a rebalancii portfólia.

Referencie

- [1] Boyd S., Vandenberghe L., *Convex optimization*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2004;
- [2] Fernando K. V., *Practical Portfolio Optimization*, working paper, United Kingdom [http://www.nag.co.uk/doc/TechRep/Pdf/tr2_00.pdf]
- [3] Hamala M., *Nelineárne programovanie*, ALFA, Bratislava, 1976;
- [4] Cheng S., Liu Y., Wang S., *Progress in Risk Measurement*, Advanced Modelling and Optimization, Volume 6, Number 1, Republic of China, 2004; [http://www.ici.ro/camo/journal/vol6/v6a1.pdf]
- [5] Kapusta T., *Optimalizácia portfólia*, Diplomová práca, MFF UK Bratislava, 2001;
- [6] Kwok Y. K., *Mathematical Models of Financial Derivates*, Springer–Verlag Singapore Pte. Ltd, 1998;
- [7] Macek J., *Metoda vnútorného bodu pro rozsáhle úlohy nelineárního programování*, Diplomová práca, MFF Univerzita Karlova v Prahe, 1999;
- [8] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V., *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava 2005;
- [9] Pflug Ch., Römisch W., *Modeling, Measuring and Managing Risk*, World Scientific Publishing Company, 2007
- [10] Pflug Ch., *Some remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk*, Kluwer Academic Publishers, 2000; [http://www.univie.ac.at/sor/aurora6/Papers/Kluwer.pdf]
- [11] Riečanová Z., Horváth J., Olejček V., Riečan B., Volauf P., *Numerické metódy a matematická štatistika*, Bratislava 1986;
- [12] Rockafellar Tyrrell R., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, The Journal of Risk, Vol. 2, No. 3, 21–24, 2000; [http://www.ise.ufl.edu/uryasev/CVaR1_JOR.pdf]

- [13] Ševčovič D., *Analytické a numerické oceňovanie finančných derivátov*, Bratislava 2001;
[<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/derivaty/skripta.pdf>]

Príloha A

V tejto prílohe sa nachádzajú obrázky, ktoré predstavujú reálnu webovú aplikáciu odovzdanú v elektronickej podobe. Tabuľky, ktoré sú súčasťou tejto prílohy obsahujú údaje vypočítané webovou aplikáciou, zo zadaním z Kapitoly 5.

Obrázok č. 6

Teória portfólia
praktická ukážka jej aplikácie

Prihlásenie
Odhlás Matfyz

Stahovanie historických cien akcií
V časti Zoznam tickerov zadajte ticker akcie a stlačte Vložiť. Po vložení tickeru môžete zadať ďalší a uvedený spôsob opakovať pokiaľ nevložíte všetky Vami vybrané tickery. Ak sa pokúsite vložiť jeden ticker viackrát upozorní Vás na to chybová hláška. V prípade, že ste zadali ticker nechcete vložiť, odškrtnutím políčka sa ticker vymaže.

V časti Stiahni dáta stačí vyplniť príslušné kolónky dátumom. Mesiac dátumu si môžete vybrať z rozbalovacieho menu. V prípade, že zadáte za dátum Od: dátum, ktorého deň v týždni je víkend, potom stiahnuté dáta budú od pondelka nasledujúceho týždňa. Analógia platí pre dátum Po:, pričom dáta budú stiahnuté od piatka pred týmto dátumom.

Navigácia:
Domov
Vytvor portfólio
Rebalancuj portfólio

Vymaž portfólio

Novinky:
28 April, 2008
Odovzdávanie diplomovej práce do 17:00!

Užitočné weby:
Yahoo! Finance
Google
Microsoft Investor

Registrácia

Zoznam tickerov
Zadaj ticker:
 AAPL F FCX HNZ HPQ
 MCD MSFT NKE ORCL XOM

Miesto určenia dátumov pre stiahnutie historických dát

Oblasť zadávania tickerov akcií

Stiahni dáta
Dátumu:
Po dátum:
Frekvencia:

Obrázok 6: Formulár na získanie historických cien akcií

Obrázok č. 7

Teória portfólia

praktická ukážka jej aplikácie

Prihlásenie
Odhiás Matfyz

Navigácia:
Domov
Vytvor portfólio
Rebalancuj portfólio

Vymaž portfólio

Novinky:
28 April, 2008
Odovzdávanie diplomovej práce do 17:00!

Užitočné weby:
Yahoo! Finance
Google
Microsoft Investor

Registrácia

| Akcia | Očakávaný výnos | Ročný očakávaný výnos |
|-----------------------------|-----------------|-----------------------|
| Graf akcie AAPL AAPL | 1,42 | 12% |
| Graf akcie F F | -1,21 | -12% |
| Graf akcie FCX FCX | 0,69 | 12% |
| Graf akcie HNZ HNZ | 0,17 | 0% |
| Graf akcie HPQ HPQ | -0,22 | 0% |

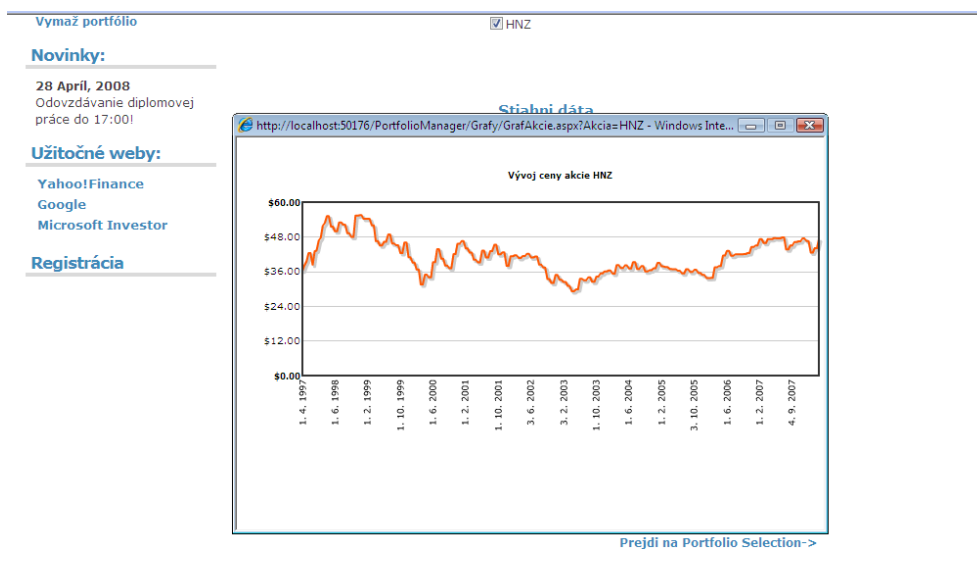
1 2

Požadovaný výnos portfólia:
Vlož výšku investície:

Oblasť, do ktorej sa zadávajú požadované parametre portfólia

Obrázok 7: Dialóg na určenie požadovaného výnosu a investičnej sumy

Obrázok č. 8



Obrázok 8: Graf vytvorený aplikáciou pre akciu HNZ

Obrázok č. 9

Teória portfólia
praktická ukážka jej aplikácie

Prihlásenie
Odhlás Matfyz

Navigácia:
Domov
Vytvor portfólio
Rebalancuj portfólio

Vymaž portfólio

Novinky:
28 Apríl, 2008
Odvzdávanie diplomovej práce do 17:00!

Užitočné weby:
Yahoo!Finance
Google
Microsoft Investor

Registrácia

| Váhy Markowitzovho portfólia | | | Váhy portfólia s AVaRD | | |
|------------------------------|--------|------------|------------------------|--------|------------|
| Ticker | Váhy | PocetKusov | Ticker | Váhy | PocetKusov |
| AAPL | 0,3669 | 3897 | AAPL | 0,3602 | 3826 |
| F | 0 | 0 | F | 0 | 0 |
| FCX | 0,1626 | 2445 | FCX | 0,2359 | 3548 |
| HNZ | 0,165 | 3492 | HNZ | 0 | 0 |
| HPQ | 0 | 0 | HPQ | 0 | 0 |
| MCD | 0 | 0 | MCD | 0 | 0 |
| MSFT | 0 | 0 | MSFT | 0 | 0 |
| NKE | 0,2947 | 2759 | NKE | 0,2988 | 2797 |
| ORCL | 0 | 0 | ORCL | 0 | 0 |
| XOM | 0,0109 | 144 | XOM | 0,1051 | 1394 |
| 1 2 | | | 1 2 | | |
| Ukáž graf vývoja | | | Ukáž graf vývoja | | |

Obrázok 9: Zobrazenie vypočítaných váh portfólia

Obrázok č. 10

Teória portfólia

praktická ukážka jej aplikácie

Prihlásenie
Odhlás Matfyz

Navigácia:
[Domov](#)
[Vytvor portfólio](#)
[Rebalancuj portfólio](#)

[Vymaž portfólio](#)
 Dátum rebalencie portfólia a hodnota portfólia v dátume rebalencie
Novinky:
 28 Apríl, 2008
 Odovzdávanie diplomovej práce do 17:00!
Užitočné weby:
[Yahoo!Finance](#)
[Google](#)
[Microsoft Investor](#)
Registrácia

Váhy Markowitzovho portfólia

Alokácia portfólia z 1. 4. 2008

| Ticker | Vahy | PocetKusov |
|--------|--------|------------|
| AAPL | 0,3469 | 2608 |
| F | 0 | 0 |
| FCX | 0,2909 | 3514 |
| HNZ | 0,2469 | 5766 |
| HPQ | 0 | 0 |
| MCD | 0 | 0 |
| MSFT | 0 | 0 |
| NKE | 0 | 0 |
| ORCL | 0 | 0 |
| XOM | 0,1152 | 1420 |

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...

Hodnota portfólia: 1268186,75

[Ukáž graf vývoja](#)

Váhy portfólia s AVaRD

Alokácia portfólia z 1. 11. 2007

| Ticker | Vahy | PocetKusov |
|--------|--------|------------|
| AAPL | 0,2646 | 2029 |
| F | 0 | 0 |
| FCX | 0,2971 | 3662 |
| HNZ | 0,1986 | 4732 |
| HPQ | 0 | 0 |
| MCD | 0 | 0 |
| MSFT | 0 | 0 |
| NKE | 0 | 0 |
| ORCL | 0 | 0 |
| XOM | 0,2397 | 3016 |

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...

Hodnota portfólia: 1295289,71

[Ukáž graf vývoja](#)

[Rebalancuj!](#)

Obrázok 10: Ukážka zistenia hodnoty portfólia v dátume alokácie

Obrázok č. 11

Odhlás Matfyz

Navigácia:
[Domov](#)
[Vytvor portfólio](#)
[Rebalancuj portfólio](#)

[Vymaž portfólio](#)
Novinky:
 28 Apríl, 2008
 Odovzdávanie diplomovej práce do 17:00!
Užitočné weby:
[Yahoo!Finance](#)
[Google](#)
[Microsoft Investor](#)
Registrácia

| Akcia | Očakávaný výnos | Ročný očakávaný výnos | |
|-----------------|-----------------|-----------------------|------|
| Graf akcie AAPL | AAPL | 1,43 | 12% |
| Graf akcie F | F | -1,25 | -12% |
| Graf akcie FCX | FCX | 0,69 | 12% |
| Graf akcie HNZ | HNZ | 0,18 | 0% |
| Graf akcie HPQ | HPQ | -0,23 | 0% |

1 2

Požadovaný výnos portfólia:

Vlož výšku investície:

[Vypočítaj váhy portfólia](#)

Váhy Markowitzovho portfólia

| Ticker | Vahy | PocetKusov |
|--------|--------|------------|
| AAPL | 0,3669 | 3897 |
| F | 0 | 0 |
| FCX | 0,1626 | 2445 |
| HNZ | 0,165 | 3492 |
| HPQ | 0 | 0 |

1 2

Graf Markowitz portfólia

Váhy portfólia s AVaRD

| Ticker | Vahy | PocetKusov |
|--------|--------|------------|
| AAPL | 0,3602 | 3826 |
| F | 0 | 0 |
| FCX | 0,2359 | 3548 |
| HNZ | 0 | 0 |
| HPQ | 0 | 0 |

1 2

[Prejdí na portfolio rebalance->](#)

Obrázok 11: Spodné tabuľky na obrázku obsahujú váhy portfólia po prvej alokácii

V Tabuľke č. 3 predstavuje riadok jednu rebalanciu Markowitzovho portfólia. To znamená, že v riadku sa nachádzajú hodnoty váh v portfóliu, pri danom dátume.

| Dátum | AAPL | F | FCX | HNZ | HPQ | MCD | MSFT | NKE | ORCL | XOM | Hodnota portfólia |
|-----------|--------|---|--------|--------|-----|--------|------|--------|------|--------|-------------------|
| 2.4.2007 | 0,3676 | 0 | 0,1653 | 0,1532 | 0 | 0 | 0 | 0,2958 | 0 | 0,018 | 1 000 000 |
| 1.5.2007 | 0,4206 | 0 | 0,2135 | 0,3078 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,0581 | 877 996,24 |
| 1.6.2007 | 0,3691 | 0 | 0,1661 | 0,3493 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1155 | 993 631,52 |
| 2.7.2007 | 0,3631 | 0 | 0,25 | 0,3106 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,0764 | 1 007 318,12 |
| 1.8.2007 | 0,3366 | 0 | 0,2966 | 0,2727 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,0941 | 1 043 779,32 |
| 4.9.2007 | 0,3469 | 0 | 0,2909 | 0,2469 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1152 | 1 052 248,03 |
| 1.10.2007 | 0,263 | 0 | 0,2535 | 0,3143 | 0 | 0 | 0 | 0,018 | 0 | 0,1513 | 1 172 750,03 |
| 1.11.2007 | 0,2398 | 0 | 0,2525 | 0,295 | 0 | 0 | 0 | 0,0509 | 0 | 0,1618 | 1 268 186,75 |
| 3.12.2007 | 0,2153 | 0 | 0,2162 | 0,3123 | 0 | 0 | 0 | 0,1036 | 0 | 0,152 | 1 212 791,89 |
| 2.1.2008 | 0,2002 | 0 | 0,2533 | 0,2425 | 0 | 0,0147 | 0 | 0,1026 | 0 | 0,1867 | 1 254 016,56 |
| 1.2.2008 | 0,1902 | 0 | 0,3778 | 0,1189 | 0 | 0 | 0 | 0,1441 | 0 | 0,169 | 1 092 506,27 |
| 3.1.2008 | 0,1897 | 0 | 0,4404 | 0,0466 | 0 | 0 | 0 | 0,151 | 0 | 0,1723 | 1 116 833,05 |

Tabuľka 3: Markowitzovo optimálne portfólio

V Tabuľke č. 4 predstavuje riadok jednu rebalanciu portfólia s mierou rizika AVaRD.

| Dátum | AAPL | F | FCX | HNZ | HPQ | MCD | MSFT | NKE | ORCL | XOM | Hodnota portfólia |
|-----------|--------|---|--------|--------|-----|--------|------|--------|------|--------|-------------------|
| 2.4.2007 | 0,3114 | 0 | 0,2779 | 0 | 0 | 0,0004 | 0 | 0,3378 | 0 | 0,0729 | 1 000 000 |
| 1.5.2007 | 0,335 | 0 | 0,3317 | 0,0765 | 0 | 0,053 | 0 | 0 | 0 | 0,2563 | 856 855,32 |
| 1.6.2007 | 0,3142 | 0 | 0,2966 | 0,0964 | 0 | 0,0203 | 0 | 0 | 0 | 0,2397 | 981397,69 |
| 2.7.2007 | 0,3532 | 0 | 0,3484 | 0 | 0 | 0,0298 | 0 | 0 | 0 | 0,2781 | 1003092,37 |
| 1.8.2007 | 0,2626 | 0 | 0,3534 | 0,16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1943 | 1074341,71 |
| 4.9.2007 | 0,2646 | 0 | 0,2971 | 0,1986 | 0 | 0,2413 | 0 | 0 | 0 | 0,2397 | 1073553,19 |
| 1.10.2007 | 0,1961 | 0 | 0,2709 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,2917 | 1198536,9 |
| 1.11.2007 | 0,2035 | 0 | 0,2699 | 0,2865 | 0 | 0,1875 | 0 | 0,1499 | 0 | 0,2401 | 1295289,71 |
| 3.12.2007 | 0,1745 | 0 | 0,2365 | 0 | 0 | 0,0147 | 0 | 0,14 | 0 | 0,2517 | 1236658,25 |
| 2.1.2008 | 0,1728 | 0 | 0,2781 | 0,1082 | 0 | 0,0773 | 0 | 0 | 0 | 0,2236 | 1293631,58 |
| 1.2.2008 | 0,1865 | 0 | 0,386 | 0,1144 | 0 | 0,0534 | 0 | 0 | 0 | 0,2597 | 1136249,04 |
| 3.1.2008 | 0,1726 | 0 | 0,4654 | 0 | 0 | 0,0801 | 0 | 0,1651 | 0 | 0,2819 | 1165753,35 |

Tabuľka 4: AVaRD optimálne portfólio

Príloha B

Všetky programy uvedené v prílohe sú vytvorené autorom a naprogramované v Matlab-e.

Príloha B č. 1

Funkcia na vypočítanie AVaR pomocou (15) a pomocou odhadu (17). Vykreslenie histogramu, ktorý slúži aj na zakreslenie AVaRD výnosu akcie. Funkcia vola funkciu *SimulujVynosy*, ktorá je uvedená v Prílohe B č. 1.1

```
function [C]=AVaRAkcie(CenyAkcii,PocetSimulacii) Alfa=0.05;
%zavola funkciu na generovanie vynosov

Vynos=SimulujVynosy(CenyAkcii,PocetSimulacii);
%v tejto casti pocitame AVaR cez odhad

UsporiadaneVynosy=sort(Vynos); AlfaZvynosov=Alfa*(length(Vynos));
AlfaZvynosov if (AlfaZvynosov<1)
    AlfaZvynosov=1;
else AlfaZvynosov=fix(AlfaZvynosov); end AlfaZvynosov
AVaRzUsp=mean(UsporiadaneVynosy(1:AlfaZvynosov));
%-----

n=length(Vynos); A1=sparse(1:n,1,1,n,n+1); A2 =
sparse(1:n,2:n+1,-1,n,n+1); A = A1+A2; b=Vynos();
fA=sparse(1,2:n+1,1/(Alfa * n),1,n+1); fB=sparse(1,1,-1,1,n+1);
f=fA+fB; for i=1:n+1
    if(i==1)
        Lb(i)=-inf;
    else
        Lb(i)=0;
    end
end
%Vypocitame AVaR cez ulohu lin.programovania
x=linprog(f,A,b,[],[],Lb); AVaRLP=-f*x AVaRzUsp

hist(Vynos,-0.7:0.01:0.7)
%-----
```


Príloha B č. 1.1

Funkcia na simulovanie výnosov akcie pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice

```
function [SimulovaneVynosy]=SimulujVynosy(CenyAkcii,PocetSimulacii)
[PocetDat,PocetAkcii]=size(CenyAkcii);
Wiener=randn(PocetSimulacii,PocetAkcii);

%vynosy
for i=1:PocetAkcii
    for j=2:PocetDat
        VynosAkcie(j-1,i)=log(CenyAkcii(j,i)/(CenyAkcii(j-1,i)));
    end
end

%Odhad strednej hodnoty
StredHodnota=mean(VynosAkcie);

%Odhad variancie
StdOdchylka=std(VynosAkcie);

%Matica nasimulovanych vynosov
for i=1:PocetAkcii
    for j=1:PocetSimulacii
        MaticaSimulacii(j,i)=StredHodnota(i) + sqrt(StdOdchylka(i))*Wiener(j,i);
    end
end

SimulovaneVynosy=MaticaSimulacii;
```

Príloha B č. 2

Funkcia na vytvorenie efektívnej hranice Markowitzovho portfólia s kovariančnou maticou 3x3.

```
function MarkowitzEfektivnaHranica UrcenyVynos=[];
f=[0;0;0];
KovariancnaMatica=[0.00324625,0.00022983,0.00420395;
                    0.00022983,0.00049937,0.00019247;
                    0.00420395,0.00019247,0.00764097];
SumaVah=1; ExpVynosy=[0.010111, 0.0043532, 0.0137058];
Delitel=(0.0137058-0.0043532)/3000;
%<---Matica rovnostnych ohraniceni
Aeq=[1,1,1;
     ExpVynosy(1),ExpVynosy(2),ExpVynosy(3)];
%>---
%<----Vektor rovnostnych ohraniceni
beq=[1;0.012];
%>---
options=optimset('LargeScale','off');
%<---Zvoleny vynos Rp
UrcenyVynos(1)=0.0043532;
%>---
%<---Cyklus na vytvorenie dvojice bodov do plot-u
for i=1:500
    if (i>1)
        UrcenyVynos(i)=0.0043532+i*Delitel;
    end
    beq(2,1)=UrcenyVynos(i);
    Vahy=quadprog(KovariancnaMatica,f,[],[],Aeq,beq,DolneVahy,[],[],options);
    VarianciaPortfolia(i)=Vahy'*KovariancnaMatica*Vahy;
end
for i=1:500
    if (i>1)
        UrcenyVynos(i)=0.0043532+i*Delitel;
    end
    beq(2,1)=UrcenyVynos(i);
    VahyB=quadprog(KovariancnaMatica,f,[],[],Aeq,beq,[],[],[],options);
    VarianciaPortfoliaB(i)=VahyB'*KovariancnaMatica*VahyB;
end
%>---
plot(VarianciaPortfoliaB,UrcenyVynos); legend('Hranica efektívnych portfólií');
```

Príloha B č. 3

Funkcia na výpočet efektívnej hranice Markowitzovho portfólia s a bez transakčných nákladov. Nakreslí do jedného grafu obidve efektívne hranice. Pôvodné váhy sú počítané naivnou diverzifikáciou.

```
%<---Funkcia na vytvorenie a vypocitanie vah Markowitzovho portfolia
%<---s trans. nakladmi a bez nich.
%<---Ako vstup sa moze zadat subor cien akcie, napr. z MS-Excel
function MarkowitzSnakladmi(CenyAktcii)
%<---Ocakavane vynosy
Vynosy=VypocitajVynosy(CenyAktcii);
%>---

%<---Kovariancna matica
KM=cov(Vynosy);
%>---
OcakVynosy=mean(Vynosy);
VynPortfolia=mean(OcakVynosy);
[NVynosov,NAktcii]=size(Vynosy);

%<---Nastavim vstupy do optimalizacneho problemu
KM1=sparse(1,1:NAktcii,KM(1,:),2*NAktcii,2*NAktcii);
KM2=sparse(2,1:NAktcii,KM(2,:),2*NAktcii,2*NAktcii);
KM3=sparse(3,1:NAktcii,KM(3,:),2*NAktcii,2*NAktcii);
KM4=sparse(4,1:NAktcii,KM(4,:),2*NAktcii,2*NAktcii);
KovMatica=KM1+KM2+KM3+KM4;
Predaj=[0.06,0.06,0.06,0.06];
Nakup=[0.06,0.06,0.06,0.06];
PovVahy=[0.25,0.25,0.25, 0.25];
Jed=-ones(1,NAktcii);
A1=sparse(1:NAktcii,1:NAktcii,Nakup,2*NAktcii,2*NAktcii);
A2=sparse(1:NAktcii,(NAktcii+1):(2*NAktcii),Jed,2*NAktcii,
2*NAktcii);
A3=sparse((NAktcii+1):(2*NAktcii),1:NAktcii,-Predaj,
2*NAktcii,2*NAktcii);
A4=sparse((NAktcii+1):(2*NAktcii),(NAktcii+1):(2*NAktcii),Jed,
2*NAktcii,2*NAktcii);
A=A1+A2+A3+A4; Aeq1=sparse(1,1:NAktcii,OcakVynosy,2,2*NAktcii);
Aeq2=sparse(2,1:NAktcii,ones(1:NAktcii,1),2,2*NAktcii);
Aeq=Aeq1+Aeq2;
NakupovyNaklad=Nakup.*PovVahy; PredajovyNaklad=-Predaj.*PovVahy;
b1=sparse(1:NAktcii,1,NakupovyNaklad,2*NAktcii,1);
b2=sparse((NAktcii+1):(2*NAktcii),1,PredajovyNaklad,2*NAktcii,1);
b=b1+b2; beq(1,1)=VynPortfolia; beq(2,1)=1.00;
INF=[-inf,-inf,-inf,-inf];
lb1=sparse(1:NAktcii,1,zeros(NAktcii,1),2*NAktcii,1);
```

```

lb2=sparse((NAkcii+1):(2*NAkcii),1,INF,2*NAkcii,1); lb=lb1+lb2;
f1=sparse(1,1:NAkcii,zeros(1:NAkcii,1),1,2*NAkcii);
f2=sparse(1,(NAkcii+1):(2*NAkcii),ones(1:NAkcii,1),1,2*NAkcii);
f=f1+f2; f=f'; AeqB1=sparse(1,1:NAkcii,OcakVynosy,2,NAkcii);
AeqB2=sparse(2,1:NAkcii,ones(1,1:NAkcii),2,NAkcii);
AeqB=AeqB1+AeqB2; lbB=zeros(NAkcii,1); fB=zeros(NAkcii,1);
options=optimset('LargeScale','off');
krok=(max(OcakVynosy)-min(OcakVynosy))/80; UrcenyVynos=[];
UrcenyVynos(1)=min(OcakVynosy);
%>---
%<---cyklus na vytvorenie dvojice bodov [disperzia,vynos]
for i=1:100
    UrcenyVynos(i)=min(OcakVynosy)+i*krok;
    beq(1,1)=UrcenyVynos(i);
    Vahy=quadprog(full(KovMatica),full(f),full(A),full(b),
    full(Aeq),full(beq), [], [], [], options);
    VahyB=quadprog(KM,fB, [], [], full(AeqB),full(beq),
    [], [], [], options);
    VarPort(i)=Vahy'*KovMatica*Vahy;
    VarPortB(i)=VahyB'*KM'*VahyB;
end
%<---
plot(VarPort,UrcenyVynos,VarPortB,UrcenyVynos); legend('Efektívna
hranica s transakčnými nákladmi','Efektívna hranica bez transakčných
nákladov');
%plot(VarPortB,UrcenyVynos);

```