

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



**Oceňovanie finančných derivátov pomocou Lévyho  
procesov**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2008

Halina Filová

# Oceňovanie finančných derivátov pomocou Lévyho procesov

## DIPLOMOVÁ PRÁCA

Halina Filová

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce  
Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2008

**Čestné prehlásenie:**

Čestne prehlasujem, že túto diplomovú prácu som vypracovala samostatne, len s pomocou nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a literatúry uvedenej v zozname.

V Bratislave, apríl 2008

.....  
Halina Filová

**Pod'akovanie:**

Ďakujem vedúcemu Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za cenné rady, pripomienky, návrhy a odborné vedenie pri vypracovávaní diplomovej práce.

## Abstrakt

V súčasnosti sa na oceňovanie finančných derivátov používa hlavne Black - Scholesov model. Avšak pri porovnávaní reálnych cien s vypočítanými sa našlo niekoľko zásadných rozdielov, čo viedlo k snahe nájsť model, ktorý by sa vyhol nedostatkom klasického prístupu. Táto práca sa zaoberá jedným z takýchto modelov. Poukazuje na chyby Black – Scholesovho modelu a uvádza model, ktorý by mohol tieto slabiny eliminovať. Okrem vysvetlenia daného prístupu a vyjadrenia explicitného vzorca pre oceňovanie európskeho typu opcií, sú uvedené aj príklady pre porovnanie obidvoch prístupov.

**Kľúčové slová:** Black – Scholesov model, Laplaceova transformácia, Lévyho procesy, Volatility smile

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>7</b>
<b>1 Finančné deriváty</b>	<b>8</b>
1.1 Opcie	9
<b>2 Oceňovanie vanilla opcií pomocou Black – Scholesovho modelu</b>	<b>11</b>
2.1 Nedokonalosti Black – Scholesovho modelu	12
2.1.1 Porovnanie rozdelenia reálnych finančných dát a normálneho rozdelenie	13
2.1.1.1 Stredná hodnota, štandardná odchýlka, šikmosť a špicatosť	13
2.1.1.2 Odhad hustoty	13
2.1.1.3 Štatistický test	14
2.1.2 Stochastická volatilita	15
2.1.3 Nekonzistentnosť vypočítaných cien s reálnymi cenami opcií	16
<b>3 Lévyho procesy</b>	<b>18</b>
3.1 Príklady Lévyho procesov	22
3.1.1 Poissonov proces	22
3.1.2 Zložený Poissonov proces	23
3.2 Oceňovanie vanilla opcií pomocou Lévyho procesov	23
3.2.1 Predpoklady	23
3.2.2 Charakterizácia Lévyho procesov	24
3.2.2.1 Exponent Laplaceovej transformácie	25
3.2.2.2 Charakteristická funkcia	25
3.2.3 Cena opcie	26
3.2.3.1 Všeobecný vzorec	26
3.2.3.2 Vzorec pre výpočet ceny vanilla opcie pre zložený Poissonov proces	27
<b>4 Porovnanie oceňovania finančných derivátov pomocou Black – Scholesovho modelu a Lévyho procesov</b>	<b>30</b>
4.1 Porovnanie cien opcií	31
4.2 Porovnanie implikovaných volatilit	34
<b>Záver</b>	<b>38</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>39</b>
<b>Prílohy</b>	<b>40</b>

# Úvod

Finančné deriváty vznikli z dôvodu jednostranného zabezpečenia investícií voči riziku. V rôznych formách boli takéto zabezpečenia používané už od čias antického Grécka, ale ich situácia nebola vždy jednoduchá. Napríklad v 16. storočí v Holandsku spôsobili opcie pád trhu s tulipánmi a tým pádom aj ekonomickú krízu. O sto rokov neskôr po podobnej situácii vo Veľkej Británii, boli dokonca zakázané. Uznania sa dočkali až v roku 1934, keď boli v USA legalizované. Prvá opčná burza vznikla v roku 1973 v Chicagu. Do vzniku tejto burzy boli opcie minimálne používané a ročný objem sa pohyboval okolo 300 000 kusov. Po vzniku burzy, v roku 1979, sa toto číslo vyšplhalo až na 35,4 milióna a do roku 2000 sa skoro zvojnásobilo na 60 miliónov.

Rok 1973 bol pre opcie veľmi významný aj z dôvodu publikovania práce Fishera Blacka a Myrona Scholesa obsahujúcej vzorec pre oceňovanie európskeho typu opcií, neskôr známeho ako Black – Scholesov vzorec. Tento vzorec sa do veľkej miery používa doteraz. Pri analýzach podmienok, nutných k platnosti použitého vzorca, sa však prišlo na niekoľko nezrovnalostí. To viedlo, a doteraz vedie, k snahe nájsť model, ktorého podmienky budú skôr reflektovať realitu a výsledky budú minimálne tak dobré ako s použitím Black – Scholesovho modelu.

Cieľom tejto práce je poukázať na nedostatky klasického modelu pri snahe popísať reálne dáta, ohodnotiť cenu opcie, uviesť nový model oceňovania finančných derivátov a na konkrétnych dátach ukázať lepší odhad cien opcií.

Táto práca je rozdelená do štyroch kapitol. Prvá kapitola obsahuje úvod do problematiky, objasnenie pojmov, skrývajúcich sa pod finančnými derivátmi, a hlavne pojmu opcie. V druhej kapitole je uvedený vzorec pre výpočet ceny vanilla opcie pomocou Black – Scholesovho modelu a zároveň obsahuje aj podrobnejšiu analýzu nedokonalostí tohto modelu. Tretia kapitola zavádza pojem Lévyho procesov, osvetľuje ich použitie pri snahe zachytiť vývoj reálnych finančných dát a zároveň odvodzuje explicitný vzorec pre výpočet ceny opcie pri použití špeciálneho Lévyho procesu – Zloženého Poissonovského procesu. V poslednej kapitole je uvedená analýza porovnania problémových ukazovateľov pomocou vyššie uvedených dvoch prístupov na konkrétnych príkladoch.

# Kapitola 1<sup>1</sup>

## Finančné deriváty

Finančné deriváty sú finančné nástroje odvodené od hodnoty primárnych aktív. Slúžia na zaistenie investičného portfólia voči riziku, ktoré je spôsobené výkyvmi hodnôt aktív. Týmito aktívami môžu byť akcie, dlhopisy, komodity, menové kurzy, úrokové miery, burzové indexy, drahé kovy a podobne.

Poznáme štyri základné typy finančných derivátov.

1. Forwardy predstavujú termínový kontrakt medzi vypisovateľom a investorom, ktorý je uzatváraný na aktívum alebo finančný nástroj za stanovenú cenu. Predstavujú záväzok kúpiť (alebo predať) dané aktívum pri dohodnutých podmienkach, pričom úplne závisia od dohody oboch strán, lebo sa uzatvárajú mimo burzy.
2. Futurity sú forwardy, s ktorými sa obchoduje na špecializovaných burzách. To znamená, že všetky podmienky, okrem ceny, sú vopred stanovené. Burza vystupuje ako sprostredkovateľ obchodu. Obchod s futuritami je kontrolovaný štátnom.
3. Opčné deriváty predstavujú právo, nie povinnosť, kúpiť alebo predať aktívum alebo finančný nástroj v stanovenom termíne za vopred dohodnutú cenu. Opcie su bližšie rozobrané v ďalšej časti.
4. Swapy sú dohody o časovo obmedzenej výmene série platieb medzi dvoma alebo viacerými subjektmi, ktoré sú obchodované mimo burzy.

Kombináciou finančných derivátov vznikajú syntetické finančné nástroje.

---

<sup>1</sup> Väčšinu materiálu na túto kapitolu som čerpala z knihy MELICHERČÍK I., OLŠAKOVÁ L., ÚRADNÍČEK V., Kapitoly z finančnej matematiky, Bratislava, Epos, 2005



## 1.1 Opcie

Opcia je základný typ opčného derivátu. Predstavuje právo kúpiť alebo predat' určité podkladové aktívum za vopred stanovenú realizačnú cenu  $K$ , v deň splatnosti (maturity)  $T$ . Predávajúci dostane za vypísanie opcie opčnú prémie, ktorá vznikne ako súčet vnútornej ceny a časovej hodnoty opcie. Podľa toho, čo je obsahom opcie, rozlišujeme 2 typy opcií.

1. Kúpne opcie, ktoré predstavujú právo kúpiť v stanovenom termíne dané cenné papiere za dohodnutú cenu od vypisovateľa opcie.
2. Predajné opcie, ktoré predstavujú právo predat' v stanovenom termíne dané cenné papiere za dohodnutú cenu predávajúcemu opcie.

Základné opcie sú opcie európskeho typu (takzvané vanilla opcie), kde právo predat' alebo kúpiť podkladové aktívum je možné využiť len v deň splatnosti. V prípade, ak je možné uplatniť opciu kedykoľvek do maturity hovoríme o americkom type opcií.

Všetky opcie rovnakého typu, viazané na rovnaké aktívum, tvoria triedu opcií. Môžu mať rozdielny deň splatnosti alebo realizačnú cenu. Opcie, ktoré patria do rovnakej triedy opcií a súčasne majú rovnakú realizačnú cenu a rovnakú maturitu tvoria opčnú sériu.

Vzhľadom na rozdiel medzi realizačnou cenou opcie  $K$  a spotovou cenou podkladového aktíva  $S$  sa opcia môže v čase vypršania dostať do troch pozícií:

- *In The Money*:  $S - K > 0$  pre kúpnu opciu a  $K - S > 0$  pre predajnú opciu. V tomto prípade má zmysel opciu uplatniť.
- *At The Money*:  $S - K = 0$  pre obidva typy opcií.
- *Out of The Money*:  $S - K < 0$  pre kúpnu opciu a  $K - S < 0$  pre predajnú opciu. V tomto prípade nemá zmysel opciu uplatniť.

Ďalšie typy opčných derivátov:

- Exotické opcie predstavujú všetky neštandardné opcie. Delia sa na štyri základné skupiny:
  1. modifikované opcie s meniacimi sa zmluvnými znakmi
  2. opcie závislé od vývoja podkladového aktíva
  3. multivariantné opcie, ktoré sú závislé od viacerých podkladových aktív
  4. zložené opcie, ktoré predstavujú opcie na opcie
- Opčné listy sú definované ako dlhodobé kúpne opcie. Ich majiteľ má právo kúpiť určitý finančný nástroj za stanovenú cenu. Opčné listy majú len jedného eminenta,

maturita môže byť niekoľko rokov, majú len jednu realizačnú cenu a eminent môže vypísať len obmedzený počet opčných listov.

- Stropy, dna a tzv. obojky predstavujú právo kupujúceho na priebežné plnenie od predajcu. V prípade stropu sa toto právo uplatňuje, ak trhová úroková miera stúpne nad dohodnutú hranicu, v prípade dna, ak trhová úroková miera klesne pod dohodnutú hranicu a obojok je kombinácia týchto dvoch opčných derivátov typu stropu a dna.

## Kapitola 2

### Oceňovanie vanilla opcií pomocou Black - Scholesovho modelu

Základné predpoklady pri oceňovaní opcií môžeme zhrnúť do nasledovných bodov:

- pri obchodovaní sa neuplatňujú žiadne transakčné náklady
- pre všetky obdobia sa používa rovnaké úrokovanie
- je možné kúpiť alebo predat' neobmedzené množstvo akcií, aj desatinné množstvá
- existuje možnosť požičať si akékoľvek množstvo peňazí za bezrizikovú úrokovú mieru
- neexistuje možnosť arbitráže
- existuje možnosť krátkej pozície, je možné vlastniť záporný počet aktív

Pre použitie Black-Scholesovho modelu je nutný ďalší predpoklad, a to že vývoj ceny akcie ( $S_t/S_{t-1}$  pre  $t=1,2,\dots,T$ ) predstavuje náhodný výber z lognormálneho rozdelenia s parametrami  $\mu$  a  $\sigma^2$ .

Potom Black - Scholesov vzorec pre výpočet hodnoty európskej kúpnej opcie nevyplácajúcej dividendy v čase  $t$  je :

$$V^{call}(S, K, T, r, \sigma) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

a vzorec pre výpočet hodnoty európskej predajnej opcie nevyplácajúcej dividendy v čase  $t$  je:

$$V^{put}(S, K, T, r, \sigma) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

S = cena akcie v čase t

K = realizačná cena opcie

T = deň splatnosti

r = bezriziková úroková miera

$\sigma$  = volatilita akcie

## 2.1 Nedokonalosti Black-Scholesovho modelu

Black-Scholesov model sa stal najpoužívanejším nástrojom pre oceňovanie finančných derivátov aj napriek nutnosti splnenia niekoľkých podmienok. Navyše sa ukazuje, že klasický Black-Scholesov model nie veľmi dobre opisuje štatistické vlastnosti finančných časových radov. Existujú dva hlavné problémy tohto modelu:

1. Zlogaritmované hodnoty nemajú vlastnosti Normálneho rozdelenia.
2. Volatilita sa s časom stochasticky mení.

Schoutens analyzoval tieto problémy v knihe [3].

Na testovanie použil 7 skupín dát. Skupiny zlogaritmovaných hodnôt indexov Nasdaq-Composite, DAX, SMI, CAC - 40 a S&P500 boli brané za časové obdobie 1997 - 1999. Ďalšie 2 skupiny sú tvorené hodnotami indexu S&P500 za obdobie 1970 - 2001 pričom jedna obsahuje všetky denné zlogaritmované hodnoty a druhá obsahuje všetky hodnoty okrem zlogaritrovanej hodnoty korešpondujúcej s výrazným prepadom z 19.10.1987.

Svoje pozorovania rozdelil do 3 častí:

- Porovnanie rozdelenia reálnych finančných dát a normálneho rozdelenia
- Stochastická volatilita
- Nekonzistentnosť vypočítaných cien s reálnymi cenami opcií

Všetky grafy uvedené v tejto kapitole sú prebraté z knihy [3].

## **2.1.1 Porovnanie rozdelenia reálnych finančných dát a normálneho rozdelenia**

### **2.1.1.1 Stredná hodnota, štandardná odchýlka, šikmosť a špicatosť**

Pri normálnom rozdelení nie je žiadne obmedzenie pre strednú hodnotu a štandardná odchýlka musí byť väčšia ako nula. Stredná hodnota 5 skupín dát z obdobia 1997 - 1999 sa pohybuje na úrovni 0,0011 a 0,0003 pre skupiny dát z rokov 1970-2001. Štandardná odchýlka je rovnako vyššia pri dátach z obdobia 1997 - 1999 (hodnoty okolo 0,0135) ako pri dátach z obdobia 1970 - 2001 (hodnoty okolo 0,0097).

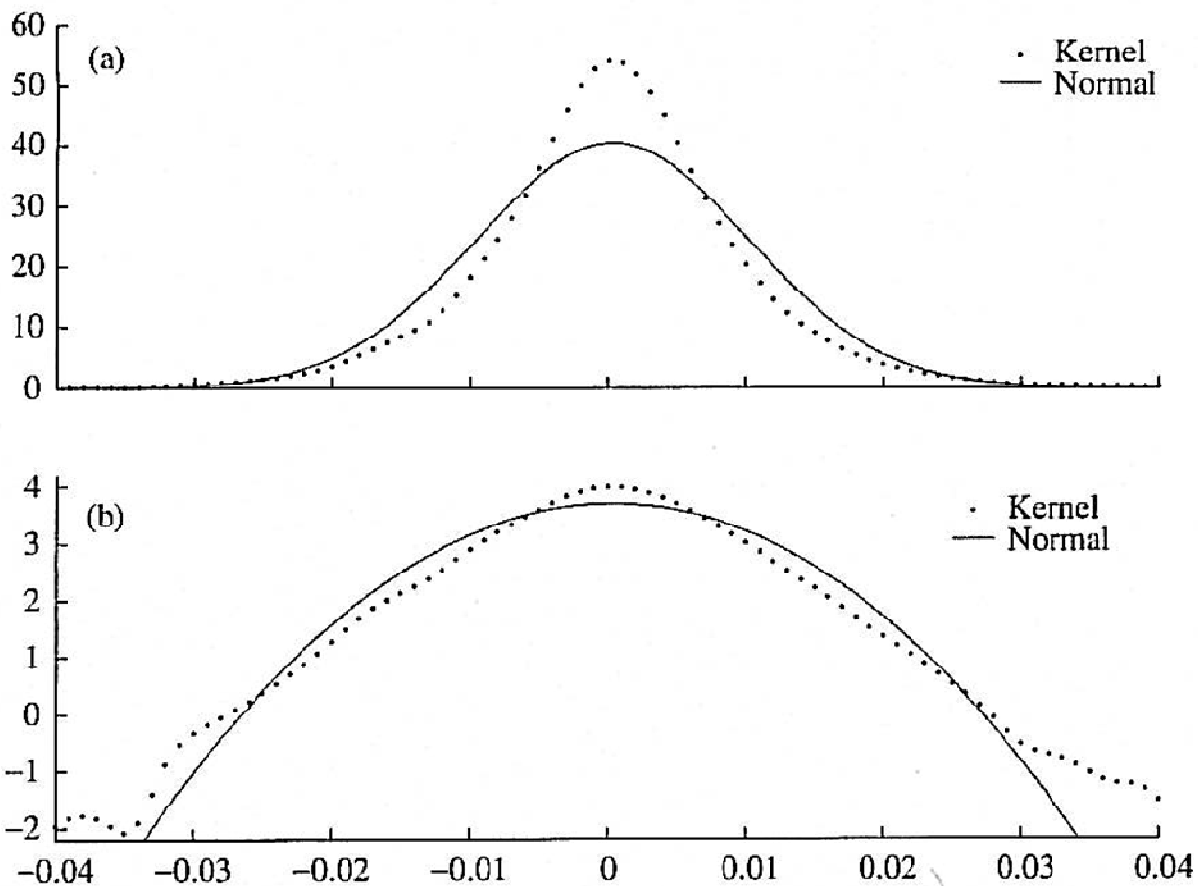
Koeficient šikmosti je pri normálnom rozdelení 0. Všetky skupiny testovaných dát majú záporný koeficient šikmosti. Pričom skupina dát S&P500, ktorá obsahuje všetky dáta za obdobie 1970 - 2001, má koeficient šikmosti -1,67. Ostatné skupiny majú hodnotu tohto koeficientu v rozmedzí -0,1099 – -0.5439. To znamená, že empirické rozdelenie všetkých testovaných skupín má chvost viac naľavo ako napravo, pričom normálne rozdelenie je symetrické.

Koeficient špicatosti má pre normálne rozdelenie hodnotu 3. Koeficienty špicatosti všetkých testovaných skupín sú väčšie ako 3. Najväčšiu hodnotu má koeficient indexu S&P500 obsahujúci všetky dáta za obdobie 1970 - 2001 a to 43,36. Ostatné skupiny dát majú koeficient špicatosti v rozmedzí 4,63 – 7,17. Empirické rozdelenie má teda rýchlejší spád k 0 a vyšší vrchol ako normálne rozdelenie.

### **2.1.1.2 Odhad hustoty**

Na odhad hustoty použil Gaussovské jadro. Pri porovnaní odhadu hustoty vytvoreného pomocou Gaussovského jadra s hustotou skupiny dát indexu S&P500 obsahujúcou dáta za obdobie 1970-2001 je vidieť výrazný nesúlad. Hodnoty indexu sa výrazne nehýbu a obsahujú celkom dosť veľké množstvo hodnôt hustoty okolo nuly. Pri porovnaní zlogaritmovaných hustôt vidno, že zlogaritmovaná hustota normálneho rozdelenia má kvadratický spád, zatiaľ čo empirická zlogaritmovaná hustota má skôr lineárny. Táto vlastnosť je typická pre finančné dáta. Z tohto vyplýva, že normálne rozdelenie nie veľmi dobre sedí na finančné dáta.

Graf 2.1: a, Normálne rozdelenie a Gaussovské jadro a b, zlogaritmované hustoty normálneho rozdelenia a hustoty, odhadnutej pomocou Gaussovského jadra;



### 2.1.1.3 Štatistický test

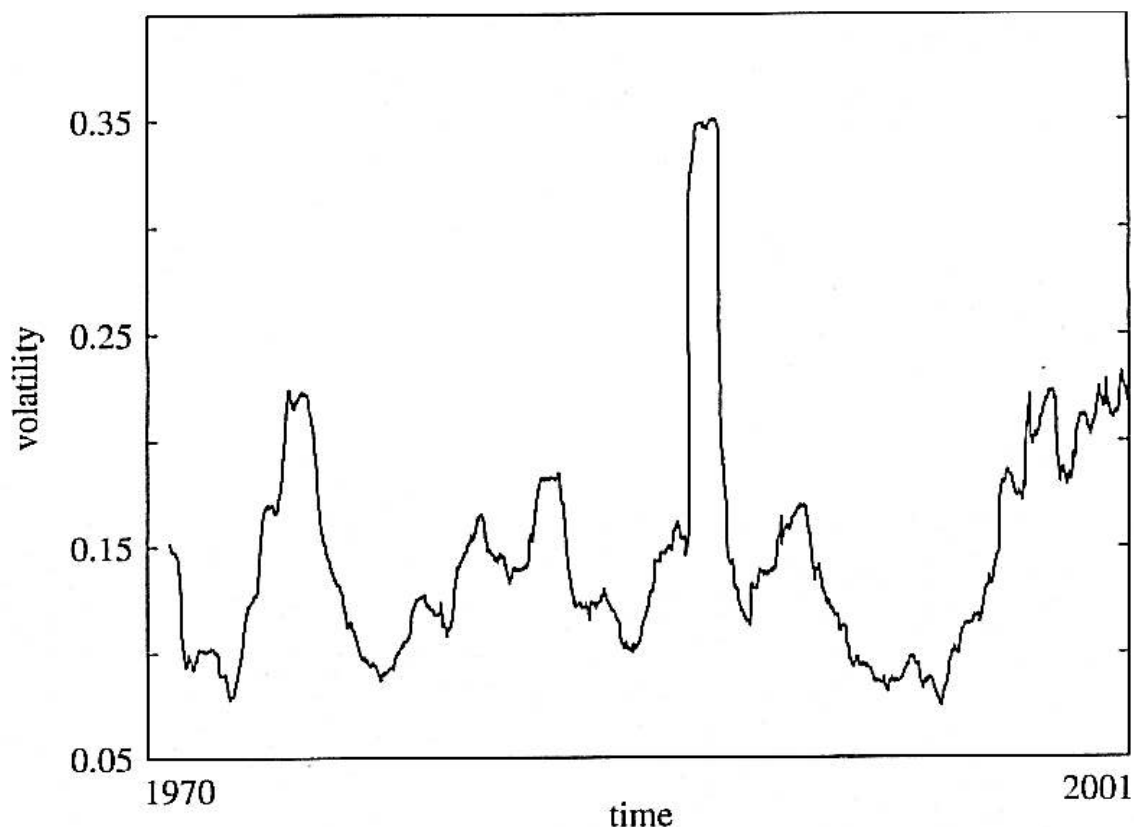
Na testovanie vhodnosti použitia normálneho rozdelenia použil Schoutens  $\chi^2$  - test. Hladinu významnosti si určil 0,05 a pri testovaní všetkých skupín dát mu p – hodnota vždy vyšla menšia ako 0,05. Z toho vyplýva, že hypotéza vhodnosti normálneho rozdelenia je zamietnutá v každom testovanom prípade.

Toto testovanie Schoutens uzatvára tvrdením, že dvojparametrový model, ktorý predstavuje aj normálne rozdelenie, nezachytáva dostatočne vývoj finančných dát. Navrhuje použitie minimálne štyroch parametrov, ktoré zachytia nielen pozičný a volatilný parameter, ale aj asymetrický parameter a parameter opisujúci spád.

## 2.1.2 Stochastická volatilita

Vlastnosť, ktorá v Black – Scholesovom modeli chýba, je zachytenie stochastického vývoja volatility v čase. To, že sa odhadovaná volatilita stochasticky v čase mení je možné vidieť na historickej volatilitate dát. Schoutens analyzoval graf historickej volatility indexu S&P500, pričom historickú volatilitu odhadol pre každý deň v období 1971 – 2001 na základe ročných historických cien indexov . Hodnoty historickej volatility sa pohybujú v rozpätí 0,07 – 0,35.

Graf 2.2: Historická volatilita indexu S&P 500 (1971 – 2001)



Na grafe 2.2 je vidno fluktuácie a najvyššia hodnota volatility je dosiahnutá v deň krachu na burze 19.10.1987.

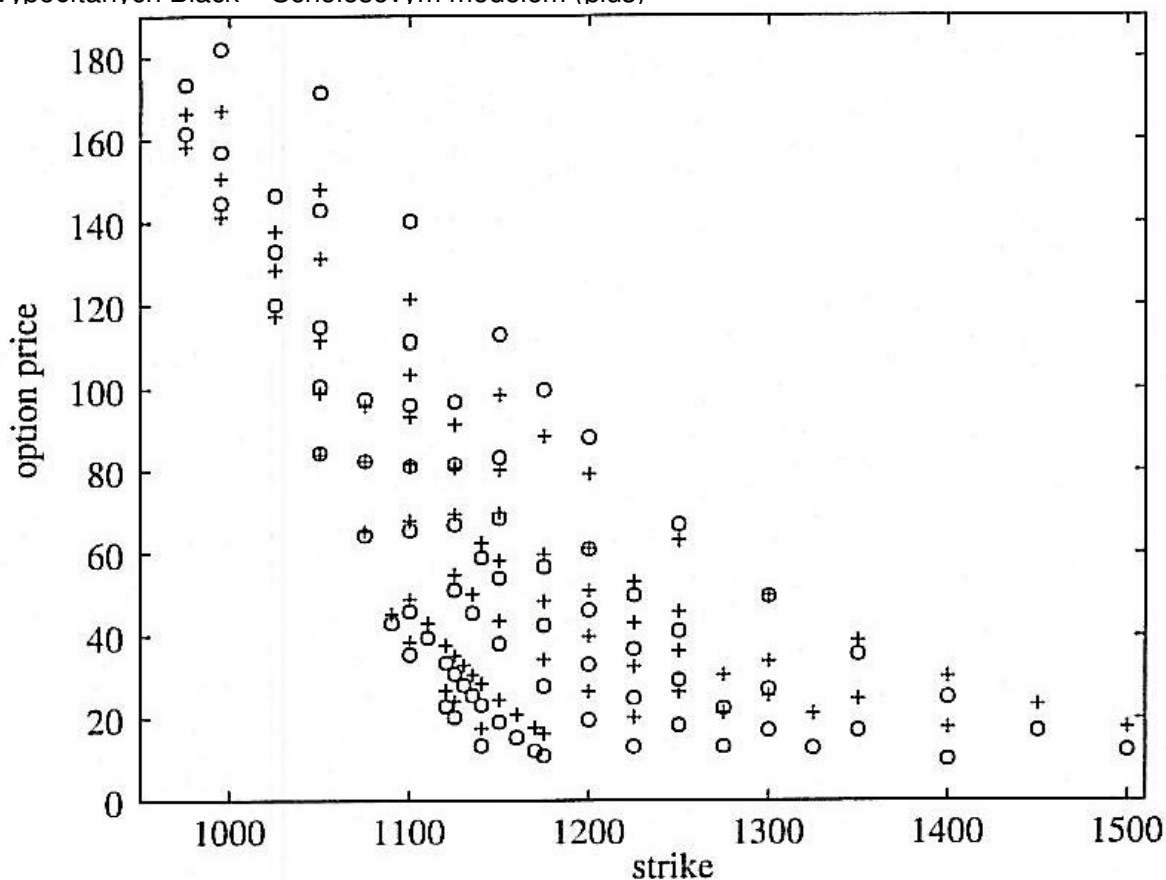
Navyše pri porovnávaní absolútnych zlogaritmovaných nárastov cien zistil, že sa vytvárajú skupiny s vysokými nárastmi a rovnako aj s nízkymi.

Tieto pozorovania viedli autora k vytváraniu modelov pre oceňovanie opcií so stochatickou volatilitou.

### 2.1.3 Nekonzistentnosť vypočítaných cien s reálnymi cenami opcií

Pre porovnanie reálnych cien s cenami odhadnutými pomocou Black – Scholesovho vzorca sa parametre modelu odhadli pomocou metódy najmenších štvorcov (MNS). Schoutens skúmal vzťah reálnych a vypočítaných cien pre index S&P500 a výsledky sú vidieť na grafe 2.3. Vidíme, že ak je reálna cena opcie okolo 80\$ a realizačná cena do 1200\$ ceny sú ako tak podobné, ale len čo sa posúvame v realizačnej cene alebo cene opcií rozdiely sa zväčšujú. Ak sa budeme pozerať na vyššie ceny opcií, pri konštantnej realizačnej cene, vidíme, že vypočítané hodnoty sú oveľa nižšie ako reálne. V prípade, že sa pozrieme na ceny opcií nižšie ako 80\$, vypočítané ceny sú zase výrazne vyššie ako reálne. Rovnako, ak sa pozrieme na rozdiel medzi reálnymi a vypočítanými cenami opcií pri konštantnej cene opcie a zmene realizačnej ceny vidíme, že so zvyšujúcou sa realizačnou cenou sa zväčšuje aj rozdiel medzi reálnymi a vypočítanými cenami.

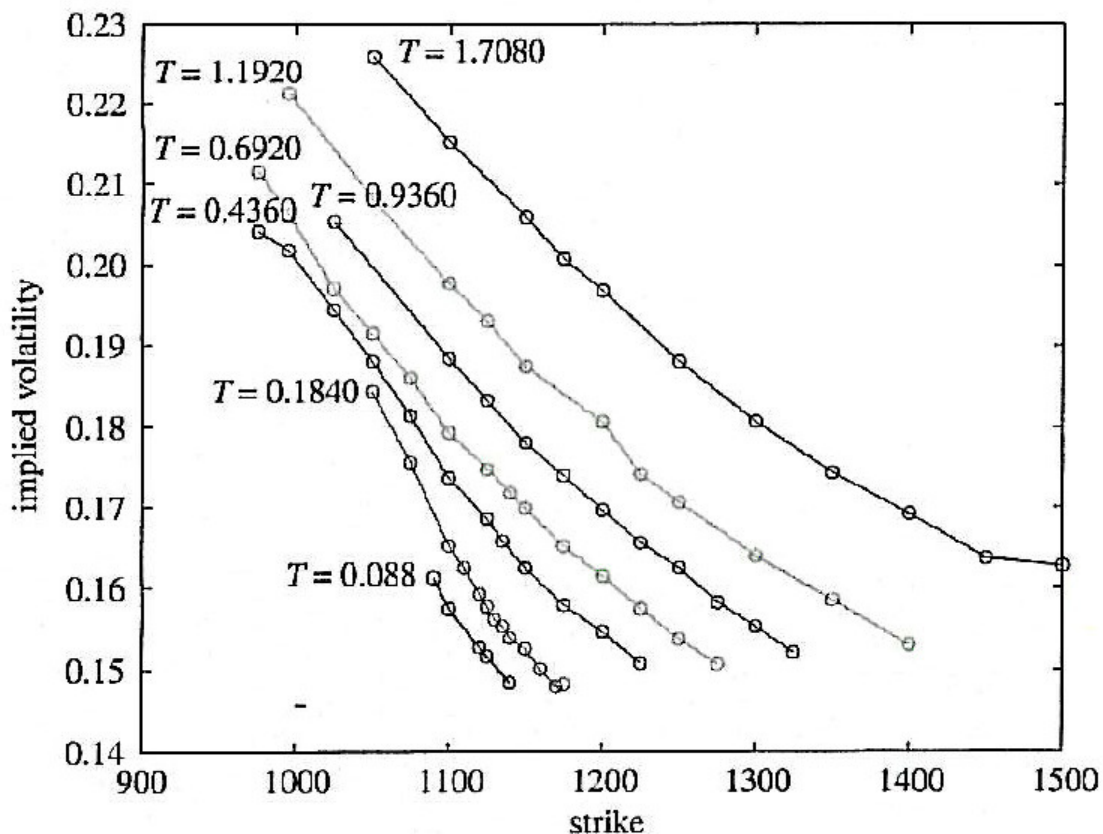
Graf 2.3: Porovnanie reálnych cien opcií (krúžok) a nakalibrovaných cien opcií vypočítaných Black – Scholesovým modelom (plus)





Pre porovnanie reálnych a empirických cien opcí je možné použiť aj hodnoty implikovanej volatility. Podľa Black – Scholesových predpokladov je hodnota volatility konštantná, ale na reálnych dátach je vidno veľké odchýlky pre rôzne hodnoty realizačnej ceny opcie a aj času do maturity. Tomuto efektu sa často hovorí aj volatility smile.

Graf 2.4 Implikované volatility reálnych dát



Je vidieť, že jeden z hlavných problémov Black-Scholesovho modelu je fakt, že vývoj cien opcí sa nespráva podľa Normálneho rozdelenia. Preto by bolo potrebné nájsť podobný proces ako Brownov pohyb, ktorý by bol založený na všeobecnejšom rozdelení ako je Normálne. T.j. proces s nezávislými a stacionárnymi prírastkami, ktorého rozdelenie by bolo nekonečne deliteľné. Takýto proces sa nazýva Lévyho proces.

## Kapitola 3

### Lévyho procesy

**Definícia:** Nech  $X$  je spojitá náhodná premenná. Charakteristická funkcia premennej  $X$   $\Phi_X(u)$  je definovaná ako

$$\Phi_X(u) = E[e^{iuX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f(x) dx,$$

kde  $f(x)$  predstavuje hustotu premennej  $X$ . Charakteristický exponent premennej  $X$   $\Psi_X(u)$  je definovaný nasledovne:

$$\Psi_X(u) = \log \Phi_X(u)$$

**Tvrdenie 1:** Ak sú dve spojité náhodné premenné  $X, Y$  nezávislé tak  $\Phi_{X+Y} = \Phi_X \Phi_Y$

**Dôkaz:** Podľa definície charakteristickej funkcie platí

$$\begin{aligned}\Phi_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu(x+y)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu(x+y)} f(y)g(x) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuy} e^{iux} f(y)g(x) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_X(u) e^{iuy} f(y) dy \\ &= \Phi_X(u) \Phi_Y(u)\end{aligned}$$

**Definícia:** Pravdepodobnostné rozdelenie je nekonečne deliteľné ak  $\forall n \in \mathbb{N}$  platí, že  $\Phi(u)$  je  $n$ -tá mocnina nejakej charakteristickej funkcie.

**Príklad 1:**  $X \sim N(0, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{iuX}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuX} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2 + 2\sigma^2 iux - (\sigma^2 iu)^2 + (\sigma^2 iu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x - \sigma^2 iu)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\sigma^2 iu^2}{2}} dx \\ &= e^{-\frac{u^2 \sigma^2}{2}} \\ &= \left( e^{-\frac{u^2 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2}{2}} \right)^n \end{aligned}$$

$= \Phi_X(u)$  je n-tá mocnina

Motivácia tohto príkladu spočíva v snahe rozdeliť proces na nezávislé prírastky s rovnakým rozdelením. Normálne rozdelenie tvorí základ pre Wienerov proces,  $W_t \sim N(0, t)$ . A teda vieme tento proces rozdeliť nasledovne

$$W_1 = (W_{1/n} - W_0) + (W_{2/n} - W_{1/n}) + \dots + (W_1 - W_{(n-1)/n})$$

kde  $(W_{i/n} - W_{(i-1)/n}), i=1, \dots, n$  predstavujú nezávislé prírastky správajúce sa nasledovne

$$(W_{i/n} - W_{(i-1)/n}) \sim N(0, 1/n)$$

**Príklad 2:** Diracova miera kde  $X=a$  s pravdepodobnosťou 1

$$\mathbb{E}[e^{iuX}] = e^{iua} = \left( e^{iu \frac{a}{n}} \right)^n$$

Prislúchajúci proces k Diracovej miere je proces  $P_t = \gamma t$

**Príklad 3:** Poissonovo rozdelenie je dané predpisom

$$P(x = j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}$$

$$\Phi(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{iuj} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{iu})^j}{j!} e^{-\lambda} \\
&= e^{(\lambda e^{iu})} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{iu}-1)} - \text{charakteristická funkcia} \\
&= \left( e^{\lambda/n(e^{iu}-1)} \right)^n
\end{aligned}$$

Poissonovo rozdelenie je nekonečne deliteľné. Prislúchajúci proces k Poissonovmu rozdeleniu je Poissonov proces.

**Príklad 4:** Zložené Poissonovo rozdelenie je dane predpisom  $X = \sum_{i=1}^N Z_i$ ,  $t \geq 0$ , kde

$Z_i$ ,  $i=1,2,\dots$  je nezávislá a rovnako rozdelená postupnosť náhodných nezávislých premenných. Pre zistenie charakteristickej funkcie premennej  $X$  si napíšeme distribučnú funkciu rozdelenia pre borelovskú množinu  $A$  nasledovne:

$$P(Z_i \in A) = \frac{\nu(A)}{\lambda},$$

kde  $\nu$  je miera na  $\mathbb{R}$  a platí :

$$\nu(\mathbb{R}) = \lambda < \infty \text{ a } \nu(\{0\}) = 0.$$

$$\Phi_X(u) = E[e^{iuX}] = E[E[e^{iuX} | N = k]]$$

Pre  $k=0$  dostaneme hodnotu  $e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!}$

Pre  $k=1$   $e^{-\lambda} \frac{\lambda}{1!} \Phi_Z(u)$

Pre  $k=2$   $e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} \Phi_Z^2(u) \dots$

$$\begin{aligned}
\Phi_X(u) &= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \lambda \Phi_Z(u) + e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} \Phi_Z^2(u) + \dots \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda \Phi_Z(u)} = e^{\lambda(\Phi_Z(u)-1)}
\end{aligned}$$

$$\Psi_Z(u) = \lambda(\Phi_Z(u) - 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1) \nu(dx)$$

Zložené Poissonovo rozdelenie je teda tiež nekonečne deliteľné, lebo mieru  $\nu$  vieme transformovať na  $\nu/n$  a vyššie uvedená charakteristická bude vlastne  $n$ -tou mocninou transformovanej charakteristickej funkcie. Proces prislúchajúci k zloženému Poissonovmu rozdeleniu je zložený Poissonov proces.

**Definícia:** Stochastický proces  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  je Lévyho proces ak  $\forall s, t \geq 0$  je prírastok  $X_{t+s} - X_t$  nezávislý na  $(X_\vartheta; 0 \leq \vartheta \leq t)$  a má rovnaké rozdelenie ako  $X_s$ . Špeciálne  $X_0 = 0$ .

**Tvrdenie 2:**  $X_1$  je nekonečne deliteľný

**Dôkaz:**  $X_1$  sa dá prepísať nasledovne

$$X_1 = \left(X_{\frac{1}{n}} - X_0\right) + \left(X_{\frac{2}{n}} - X_{\frac{1}{n}}\right) + \dots + \left(X_1 - X_{\frac{n-1}{n}}\right),$$

kde  $\left(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}}\right), i = 1, \dots, n$  má ako rozdelenie  $X_{\frac{1}{n}}$ . A teda charakteristická funkcia  $X_1$  je  $n$ -tá mocnina charakteristickej funkcie  $X_{\frac{1}{n}}$ . Z toho vyplýva, že aj  $X_t$  je nekonečne deliteľné.

Každý Lévyho proces sa dá charakterizovať podľa svojej charakteristickej funkcie. Charakteristický exponent  $\Psi(u)$  je označovaný aj ako kumulatívna charakteristická funkcia. Pre  $X_1$  je charakteristický exponent  $\Psi(u)$  daný nasledovne:

$$E\left[e^{iuX_1}\right] = e^{\Psi(u)}$$

Pre  $X_2$  vyzerá charakteristický exponent nasledovne:

$$E\left[e^{iuX_2}\right] = e^{2\Psi(u)}$$

Z čoho vieme odvodiť vzorec pre charakteristický exponent pre  $X_t$  nasledovne:

$$E\left[e^{iuX_t}\right] = e^{t\Psi(u)}$$

Charakteristický exponent musí spĺňať nasledujúcu Lévy – Khintchineov vzorec:

$$\Psi(u) = i\gamma u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{iux} - 1 - iux1_{\{|x|<1\}}\right) \nu(dx),$$

kde  $\gamma \in \mathbb{R}, \sigma^2 \geq 0$  a  $\nu$  je miera na  $\mathbb{R}/\{0\}$  a platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \inf\{1, x^2\} \nu(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$$

Ak  $\int_{|x|<1} |x| \nu(dx) < \infty$  môžeme Lévy – Khintchineov vzorec prepísať nasledovne :

$$\Psi(u) = i\gamma u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1) \nu(dx)$$

Charakteristický exponent sa v tomto prípade dá, z pohľadu rozdelenia, rozdeliť na 3 časti: Diracovu mieru, normálne rozdelenie a Zložené Poissonovo rozdelenie.

Na základe príkladov 1,2, a 4 vidíme, že Lévyho proces sa vo všeobecnosti skladá z 3 nezávislých častí:

- driftový komponent – lineárne determinovaná časť
- volatilný komponent – Brownova časť
- skokový komponent – čistá skoková časť

Tieto tri komponenty sú úplne determinované trojicou  $[\gamma, \sigma^2, \nu(dx)]$  nazývanou Lévyho triplet. Miera  $\nu(dx)$  sa označuje ako Lévyho miera pre  $X$ . V prípade, že sa Lévyho miera dá prepísať vo forme  $\nu(dx) = u(x)dx$ , tak  $u(x)$  je Lévyho hustota. Na rozdiel od pravdepodobnostnej hustoty však nemusí byť integrovateľná a musí mať nulovú hodnotu v počiatočnom bode.

Medzi špeciálne typy Lévyho procesov patrí subordinátor. Subordinátor je nezáporný neklesajúci Lévyho proces. Ide o proces, s nulovou Brownovou časťou, nezáporným driftom a Lévyho mierou, ktorá má len kladné prírastky.

### 3.1 Príklady Lévyho procesov

Táto časť sa zaoberá 2 príkladmi Lévyho procesov, konkrétne subordinátorov. Dôraz je kladený na ich hustotu, charakteristickú funkciu a Lévyho triplet.

#### 3.1.1 Poissonov proces

Poissonov proces je najjednoduchšia forma Lévyho procesu. Keďže Poissonovo rozdelenie je nekonečne deliteľné, je možné definovať Poissonov proces  $N = \{N_t, t \geq 0\}$ , s parametrom intenzity  $\lambda > 0$  ako proces, ktorý začína v 0, má nezávislé a stacionárne prírastky. Prírastky  $N_{t+s} - N_t$  sa správajú podľa Poissonovho rozdelenia  $Po(\lambda t)$ . Poissonov proces je rastúci čisto skokový proces s veľkosťou skoku rovnou 1. Lévyho triplet je daný trojicou  $[0, 0, \lambda \delta(1)]$ , kde  $\delta(1)$  je Diracova miera v bode 1. Čas medzi dvoma po sebe idúcimi skokmi sa správa podľa exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou  $\lambda^{-1}$ .

### 3.1.2 Zložený Poissonov proces

Zložený Poissonov proces je daný predpisom  $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i, t \geq 0$ , kde

$N = \{N_t, t \geq 0\}$  je Poissonov proces s parametrom intenzity  $\lambda > 0$  a  $Z_i, i=1,2,\dots$  je nezávislá a rovnako rozdelená postupnosť náhodných nezávislých premenných. Klasický Poissonov proces je vlastne zjednodušeným prípadom zloženého Poissonovho procesu, kde  $Z_i = 1, i = 1, 2, \dots$

Charakteristický exponent procesu  $X_t$  je daný nasledovne:

$$\Psi_{X_t}(u) = t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1) \nu(dx)$$

Z toho dostaneme Lévyho triplet  $\left[ \int_{-1}^1 x \nu(dx), 0, \nu(dx) \right]$

## 3.2 Oceňovanie vanilla opcií pomocou Lévyho procesov

### 3.2.1 Predpoklady

Všeobecne predpokladáme, že existuje Lévyho proces  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ , definovaný ako stochastický proces adaptovaný na Brownovu filtráciu  $\{F_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ , pre ktorý  $X_0 = 0$  skoro vždy. Laplaceova transformácia Lévyho procesu je ohraničená. To znamená, že existuje také  $\tau > 0, \lambda_u > 0$ , že pre  $\forall \lambda_d \in ]-\infty, \lambda_u], t \in [0, \tau]$  je Laplaceova transformácia  $\lambda \rightarrow E[e^{\lambda X_t}]$  ohraničená dvoma kladnými konštantami z intervalu  $[\lambda_d, \lambda_u]$  a  $\exists B_d > 0, B_u > 0$  také, že  $\forall \lambda \in [\lambda_d, \lambda_u], \forall t \in [0, \tau]$  platí  $B_d \leq E[e^{\lambda X_t}] \leq B_u$ .

Opisovaný proces  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  je modelovaný ako spojitý proces zložený z geometrického Brownovho pohybu a Lévyho procesu bez Brownovej (volatilnej) časti a môžeme ho zapísať nasledovne:

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_t} e^{X_t}$$

Podmienka Laplaceovej transformácie na nezápornú hodnotu  $\lambda$  implikuje, že  $S_t$  je nulové s nulovou pravepodobnosťou.  $P(S_t = 0) = 0$ , pre každé  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Pre konkrétne porovnanie vypočítaných cien opcií s cenami opcií vypočítanými Black – Scholesovým modelom budeme pracovať so zloženým Poissonovým procesom. Definujeme si  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  ako Brownov pohyb,  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  ako Poissonov proces s intenzitou  $\theta$  a postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených premenných  $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$  s hodnotou na intervale  $]-1, +\infty]$  a  $U_0 = 1$  skoro vždy. Predpokladáme, že pre  $u \in ]-\infty, 1]$  je  $\mathbb{E}[(1+U)^u]$  konečná a filtrácie dané procesmi  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ ,  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  a  $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sú nezávislé. Proces  $S_t$  sa správa ako rizikové aktívum s nejakými stochastickými skokmi so stochastickou intenzitou  $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , ktorá je modelovaná podľa Poissonovho procesu  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ . Medzi dvoma skokmi sa aktívum správa podľa geometrického Brownovho pohybu ako v Black - Scholesovom modeli s driftom  $\mu$  a volatilitou  $\sigma$ . Proces  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  sa potom dá zapísať nasledovne:

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_t} \prod_{j=1}^{N_t} (1 + U_j),$$

za podmienky  $\prod_{j=1}^0 (1 + U_j)$ .

Lévyho proces  $X_t$  je v tomto prípade vyjadrený výrazom  $\ln \prod_{j=1}^{N_t} (1 + U_j)$ .

### 3.2.2 Charakterizácia Lévyho procesov

Budeme sa zaoberať charakterizáciou Lévyho procesov pomocou Laplaceovej transformácie a charakteristickej funkcie. Všetky tvrdenie v tejto sekcii sú uvedené bez dôkazov, tie sa nachádzajú v článku [4].



### 3.2.2.1 Exponent Laplacovej transformácie

**Tvrdenie 3:** Existuje funkcia  $\Upsilon : ]-\infty, \lambda_0] \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná pre  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\lambda \in ]-\infty, \lambda_0]$  pre ktorú platí:

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X_t}] = e^{t\Upsilon(\lambda)}$$

Táto funkcia sa nazýva Lévy – Laplaceov exponent.

Z tohto vyplýva, že strednú hodnotu  $S_t$  vieme prepísať ako:

$$\mathbb{E}[S_t^\lambda] = S_0^\lambda e^{t\left(\lambda\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} + \Upsilon(\lambda)\right)}$$

A rovnako vieme vyjadriť Lévyho exponent pre vyššie uvedený zložený Poissonov proces.

$$\mathbb{E}[S_t^\lambda] = e^{t\left(\lambda\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} + \theta(\mathbb{E}((1+U)^\lambda) - 1)\right)}$$

Z čoho vyplýva, že jeho Lévyho exponenciálna funkcia je  $\Upsilon(\lambda) = \theta(\mathbb{E}((1+U)^\lambda) - 1)$

### 3.2.2.2 Charakteristická funkcia

Druhá charakteristika Lévyho procesu je jeho charakteristická funkcia, ktorá môže byť analyzovaná pomocou Fourierovej transformácie.

**Tvrdenie 4:** Existuje taká funkcia  $\Psi : ]-\infty, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , že pre  $\forall t \in \mathbb{R}^+$  a pre  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , platí

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}] = e^{t\Psi(\lambda)}, \text{ kde}$$

$\Psi(\lambda)$  je kumulatívna charakteristická funkcia spĺňajúca Lévy – Khintchineovu formulu, kde  $\gamma \in \mathbb{R}$

Na odhadnutie Brownovej časti použijeme nasledovné tvrdenie:

**Tvrdenie 5:** Limita zlomku  $\frac{\Psi(\lambda)}{\lambda^2}$  existuje a navyše  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda^2} = -\frac{\sigma^2}{2}$ .

Explicitnú charakteristickú funkciu zloženého Poissonovho procesu môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\text{pre } \forall t, \lambda \in \mathbb{R} \text{ platí } \mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}] = e^{t\left(i\lambda\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} + \theta(\mathbb{E}((1+U)^{i\lambda}) - 1)\right)}$$

### 3.2.3 Cena opcie

Z dôvodu existencie nekonečného množstva ekvivalentných martingalových mier, pod ktorými je  $(e^{-rt} S_t)_{t \in \mathbb{R}}$  martingal, budeme predpokladať, že diskontovaná akcia je martingal pod prirodzenou pravdepodobnostnou mierou  $\mathbb{Q}$  pravdepodobnostného priestoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ . Správna cena je pod touto mierou dosiahnutá ako očakávaná diskontovaná výplata.

Keďže  $(e^{-rt} S_t)$  je martingal pod  $\mathbb{Q}$ , môžeme zaviesť nasledovné obmedzenie:

**Tvrdenie 6:**  $\mu = r - \Phi(1)$

**Dôkaz:**  $(e^{-rt} S_t)$  je martingal. Z toho vyplýva, že

$E[e^{-rt} S_t] = S_0$  a pri využití aplikácie tvrdenia 2 pre  $S_t$  vyplýva, že

$$e^{t\left(-r + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\sigma^2}{2} + \Phi(1)\right)} = 1, \text{ inak povedané platí tvrdenie 6.}$$

#### 3.2.3.1 Všeobecný vzorec

Označme si  $P^{call}$  respektívne  $P^{put}$  cenu kúpnej resp. put opcie a  $V^{call}(S, K, T, r, \sigma)$  resp.  $V^{put}(S, K, T, r, \sigma)$  cenu kúpnej resp. predajnej opcie vypočítanú pomocou Black – Scholesovho modelu.

**Tvrdenie 7:** cena vanilla opcie je daná nasledovne

$$P^i = E\left[V^i\left(S_0 e^{-T\Phi(1)} e^{X_T}, K, T, r, \sigma\right)\right]$$

kde  $i$  predstavuje kúpne alebo predajné opcie.

**Dôkaz:** Predchádzajúce tvrdenie stačí dokázať pre kúpne opcie typu call, lebo pre predajné opcie je dôkaz obdobný. Cena opcie je vypočítaná ako očakávanie diskontovanej výplatnej funkcie:

$$\begin{aligned} P^i &= E\left[e^{-rT} (S_T - K)^+\right] \\ &= E\left[e^{-rT} \left(S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_t} e^{X_T} - K\right)^+\right] \end{aligned}$$

Využitím nearbitrážnej podmienky pre lineárny komponent (tvrdenie 6) môžeme napísať:

$$= \mathbb{E} \left[ e^{-rT} \left( \left( S_0 e^{-T\Phi(1)} \right) e^{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_t} e^{X_T} - K \right)^+ \right]$$

Využitím podmieneného očakávania dostaneme:

$$= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ e^{-rT} \left( \left( S_0 e^{-T\Phi(1)} e^{X_T} \right) e^{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_t} - K \right)^+ \mid X_T \right] \right]$$

Čo sa dá interpretovať ako Black – Scholesov model vedúci k finálnemu výsledku.

### 3.2.3.2 Vzorec pre výpočet ceny vanilla opcie pre zložený Poissonov proces

Na základe nearbitrážnej podmienky uvedenej v tvrdení 5 môžeme formulovať nasledovné tvrdenie.

**Tvrdenie 8:** Nearbitrážna podmienka (tvrdenie 6) vedie k

$$\mu = r - \theta \mathbb{E}[U]$$

A cena vanilla opcie je daná vzorcom

$$P^i = \mathbb{E} \left[ V^i \left( S_0 e^{-T\theta \mathbb{E}[U]} \prod_{j=1}^{N_T} (1 + U_j), K, T, r, \sigma \right) \right]$$

Predpokladajme že proces hustoty skokov modelovaný premennou  $(1+U)$  sa správa podľa lognormálneho rozdelenia so strednou hodnotou  $m$  a volatilitou  $v^2$ . Potom explicitný vzorec pre výpočet ceny vanilla opcií je daný nasledovne:

**Tvrdenie 9:**

$$P^i = e^{-\theta(1+c)T} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\theta(1-c)T)^n}{n!} V^i(S_0, K, T, r_n, \sigma_n)$$

kde

$$c = \mathbb{E}[U] = e^{m + \frac{v^2}{2}} - 1$$

$$r_n = r - \theta c + \frac{n \left( m + \frac{v^2}{2} \right)}{T}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + \frac{nv^2}{T}}$$

**Dôkaz:** Nech  $\varepsilon = 1$  predstavuje kúpnu opciu a  $\varepsilon = -1$  predstavuje predajnú opciu. Keďže  $U+1$  má lognormálne rozdelenie so strednou hodnotou  $m$  a volatilitou  $v^2$  očakávanie  $U$  sa dá vyjadriť ako  $E[U] = e^{\frac{m+v^2}{2}} - 1$ , ktoré označíme  $c$ . Použitím všeobecného vzorca pre výpočet hodnoty opcie (tvrdenie 6) dostaneme:

$$P^i = \sum_{n=0}^{+\infty} E \left[ V^i \left( S_0 e^{-Tc\theta} \prod_{j=1}^n (1+U_j), K, T, r, \sigma \right) \right] e^{-T\theta} \frac{(\theta T)^n}{n!}$$

Náhodne premenné  $(1+U_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sú nezávislé rozdelené a majú lognormálne rozdelenie so strednou hodnotou  $m$  a volatilitou  $v^2$ . Ich súčin  $\prod_{j=1}^n (1+U_j)$  je tiež lognormálne rozdelený so strednou hodnotou  $nm$  a volatilitou  $nv^2$ . Označme  $g$  centralizované normálne rozdelenie ( $g \sim N(0,1)$ ). Potom platí:

$$P^i = \sum_{n=0}^{+\infty} E \left[ \begin{array}{l} \varepsilon S_0 e^{-Tc\theta} e^{nm+\sqrt{nv}g} N \left( \varepsilon \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0 e^{-Tc\theta}}{e^{-rT} K} \right) + nm + \sqrt{nv}g}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T} \right) \right) \\ -\varepsilon K e^{-rT} N \left( \varepsilon \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0 e^{-Tc\theta}}{e^{-rT} K} \right) + nm + \sqrt{nv}g}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma}{2}\sqrt{T} \right) \right) \end{array} \right] e^{-T\theta} \frac{(\theta T)^n}{n!}$$

Dá sa dokázať, že pre  $g \sim N(0,1)$  a  $\forall a, b, c, \in \mathbb{R}$  platí:

$$E \left[ e^{ag} N(bg + c) \right] = e^{\frac{a^2}{2}} N \left( \frac{c + ab}{\sqrt{1+b^2}} \right)$$

Na základe tejto vlastnosti dostaneme

$$\begin{aligned} & E \left[ \varepsilon S_0 e^{-Tc\theta} e^{nm+\sqrt{nv}g} N \left( \varepsilon \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0 e^{-Tc\theta}}{e^{-rT} K} \right) + nm + \sqrt{nv}g}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T} \right) \right) \right] \\ &= \varepsilon S_0 e^{-Tc\theta} e^{nm+nv^2} N \left( \varepsilon \frac{\ln \left( \frac{S_0 e^{-Tc\theta}}{e^{-rT} K} \right) + nm + nv^2 + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T} \sqrt{1 + \frac{nv^2}{\sigma^2 T}}} \right) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \varepsilon K e^{-rT} N \left( \varepsilon \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0 e^{-Tc\theta}}{e^{-rT} K} \right) + nm + \sqrt{nv}g}{\sigma \sqrt{T}} - \frac{\sigma}{2} \sqrt{T} \right) \right) \right] \\ &= \varepsilon K e^{-rT} N \left( \varepsilon \frac{\ln \left( \frac{S_0 e^{-Tc\theta}}{e^{-rT} K} \right) + nm + nv^2 - \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T} \sqrt{1 + \frac{nv^2}{\sigma^2 T}}} \right) \end{aligned}$$

čo sa dá prepísať ako

$$P^i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \varepsilon S_0 e^{\left( \frac{nm + n \frac{v^2}{2} - \theta c}{T} \right) T} N \left( \varepsilon \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \left( \frac{n \left( m + \frac{v^2}{2} \right)}{T} + r - \theta c \right) T + \frac{1}{2} \left( \sigma^2 + \frac{nv^2}{T} \right) T}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{nv^2}{T}} \sqrt{T}} \right) - \varepsilon K e^{-rT} N \left( \varepsilon \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \left( \frac{n \left( m + \frac{v^2}{2} \right)}{T} + r - \theta c \right) T - \frac{1}{2} \left( \sigma^2 + \frac{nv^2}{T} \right) T}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{nv^2}{T}} \sqrt{T}} \right) \right] e^{-T\theta} \frac{(\theta T)^n}{n!}$$

čo vedie k tvrdeniu 9.

Pri predpoklade, že proces hustoty skokov modelovaný premennou  $(1+U)$  sa správa podľa lognormálneho rozdelenia so strednou hodnotou  $m$  a volatilitou  $v^2$  vieme odvodiť

Lévy – Laplaceov exponent ako  $\Phi(\lambda) = \theta \left( e^{\lambda m + \frac{\lambda v^2}{2}} - 1 \right)$  a rovnako vieme odvodiť explicitný

vzorec pre Lévy – Khintchineov exponent ako  $\Psi(\lambda) = i\mu\lambda - \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} + \theta \left( e^{i m \lambda - \frac{\lambda^2 v^2}{2}} - 1 \right)$ .

Odvodenie týchto vzorcov je uvedené v článku [4].

## Kapitola 4

### **Porovnanie oceňovania finančných derivátov pomocou Black – Scholesovho modelu a Lévyho procesu**

Z teórie vyplýva, že problémy Black – Scholesovho modelu by mohli byť odstránené použitím Lévyho procesov. A to nie len predpoklad normálneho rozdelenia finančných dát, ale rovnako aj stochastický vývoj volatility akcií.

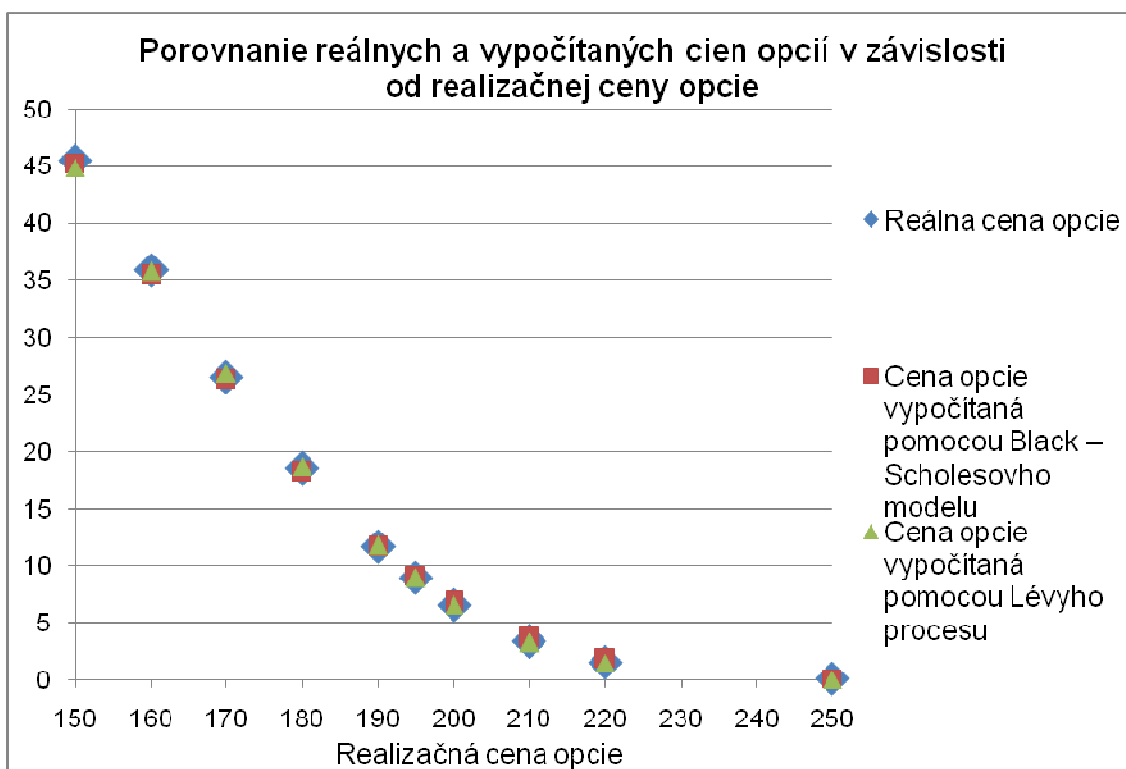
Rozhodli sme sa porovnať ceny opcií vypočítané pomocou obidvoch metód s reálnymi cenami a taktiež volatility dané vypočítanými cenami opcií s hodnotami vypočítanými z reálnych cien. Použili sme opcie na akciu spoločnosti Apple z dôvodu likvidity vyššieho počtu opcií s rôznymi realizačnými cenami a zároveň preto, že spoločnosť Apple nevypláca dividendy. Opcie spoločnosti Apple sú síce amerického typu, no pri kúpnych opciách to nevadí. Pri predajných opciách môže tento fakt spôsobovať určité problémy, no rovnako je problém nájsť dostatočný počet likvidných predajných opcií európskeho typu k jednej akcii. Cena akcie a opcií je k dátumu 3.1.2008. Výpočty boli realizované v štyroch prípadoch. Odlišovali sa dvoma rôznymi maturitami opcií, a to január 2008 a apríl 2008, a dvoma typmi opcií, kúpny a predajnými. Pre každý prípad sme aplikovali 10 reálnych cien, ku ktorým sme kalibrovali vypočítané ceny pomocou metódy MNŠ. V prípade Black – Scholesovho modelu sme kalibrovali volatilitu akcie a v prípade modelu s Lévyho procesom sme kalibrovali cenu opcie cez volatilitu akcie, intenzitu zloženého Poissonovského procesu a strednú hodnotu a volatilitu lognormálneho rozdelenia premenných  $(1 + U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ . Cena akcie bola 194,84\$ a bezriziková úroková miera 3,15%. V prílohe sa nachádza tabuľka so všetkými nakalibrovanými parametrami.

## 4.1. Porovnanie cien opcí

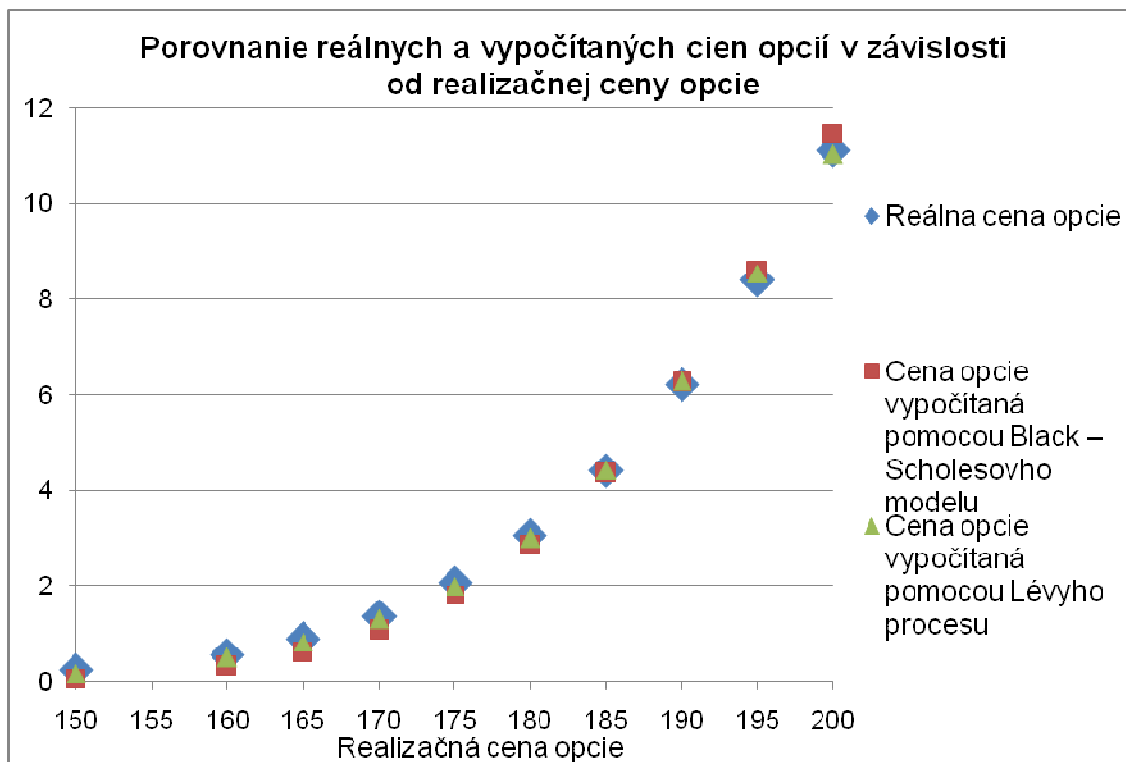
V tejto časti sa budem zaoberať porovnaním vypočítaných cien opcí pomocou vyššie uvedených metód s reálnymi dátami. Tabuľky s dátami k jednotlivým grafom sa nachádzajú v prílohe.

Ceny opcí vypočítané pomocou Black – Scholesovho modelu sme kalibrovali cez volatilitu (a teda aj všetky ceny opcí) tak, aby minimalizovala súčet najmenších štvorcov. Ceny opcí vypočítané pomocou Lévyho procesu sme kalibrovali tak, aby bol súčet najmenších štvorcov menší ako súčet vypočítaný nakalibrovaným Black – Scholesovým modelom pre rovnaký typ opcie s rovnakou maturitou. V každom skúmanom prípade sa nám podarilo nakalibrovať také parametre, že súčet najmenších štvorcov vypočítaných cien pomocou Lévyho procesov bol menší ako súčet najmenších štvorcov vypočítaných cien pomocou Black – Scholesovho modelu.

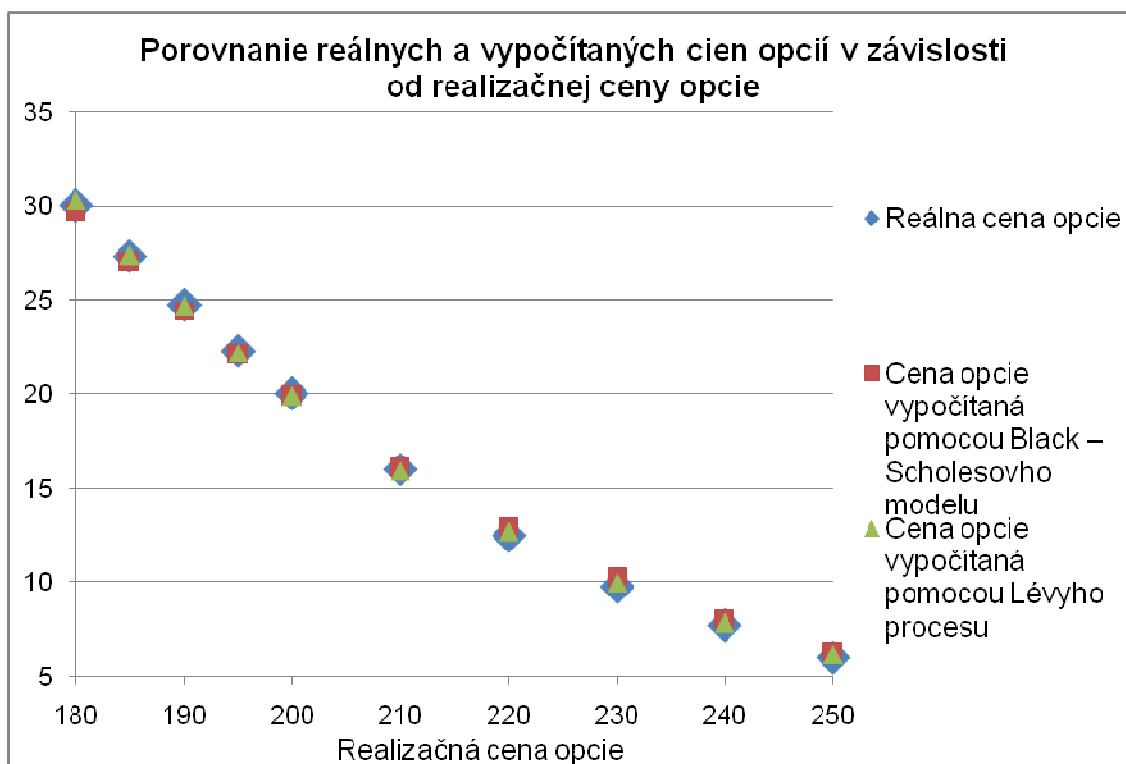
Graf 4.1: Porovnanie cien kúpnych opcí s maturitou v januári 2008



Graf 4.2: Porovnanie cien predajných opcí s maturitou v januári 2008

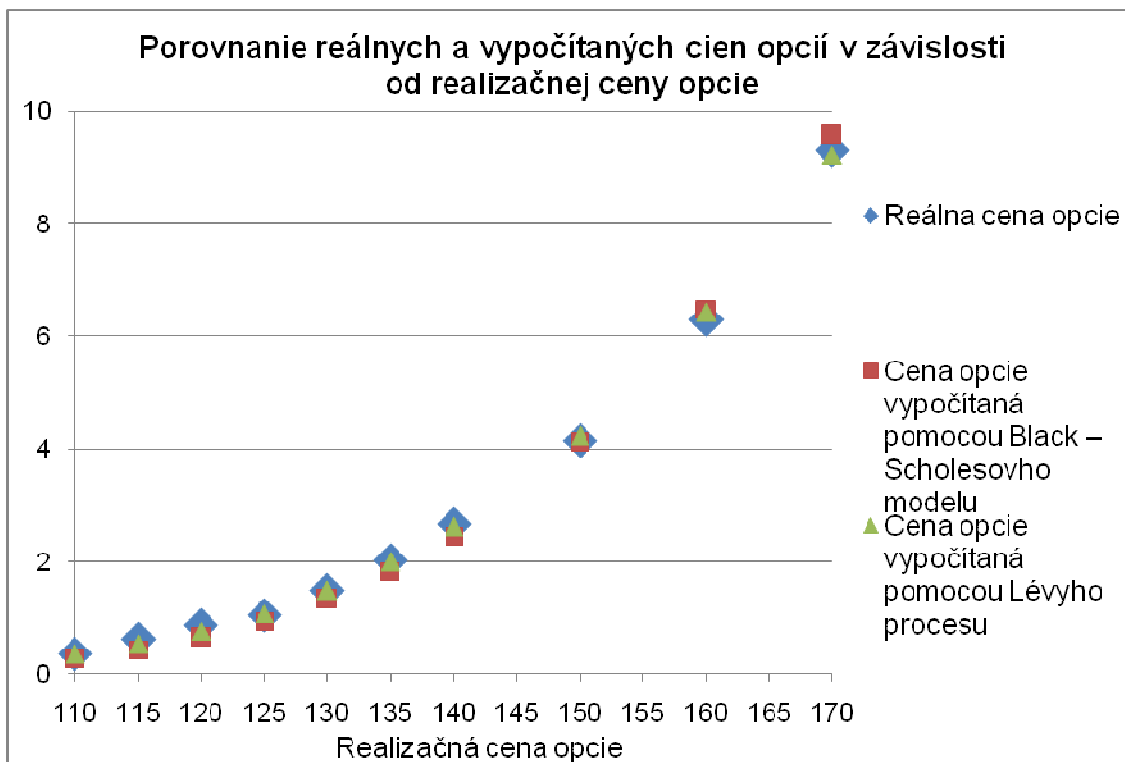


Graf 4.3: Porovnanie cien kúpnych opcí s maturitou v apríli 2008





Graf 4.4: Porovnanie cien predajných opcií s maturitou v apríli 2008



Na grafoch porovnáваме ceny opcií pri rôznych realizačných cenách. Najvýraznejšie rozdiely medzi vypočítanými cenami (v porovnaní s odchýlkou od reálnych cien) je jednoznačne vidieť pri predajných opciách. Pri aprílovej maturite vyšli súčty najmenších štvorcov nasledovne: pre nakalibrovaný Black – Scholesov model 0,3318 a pre Lévyho proces 0,0506. Pri januárovej maturite to vyzerá ešte jednoznačnejšie. Súčet najmenších štvorcov pre Black – Scholesov model vyšiel 0,5232 a pre Lévyho proces 0,0539. Rozdiely pri kúpnych opciách vyzerajú vo všeobecnosti menej výrazné aj keď pri aprílovej maturite je vidieť zreteľnejšiu odchýlku cien vypočítaných pomocou Black – Scholesovej metódy. Súčty vyšli pre januárovú maturitu 0,7696 pre Black – Scholesov model a 0,5918 pre Lévyho proces, a pre aprílovú maturitu 0,9365 resp. 0,2502 pre Black – Scholesov model resp. pre Lévyho proces.

Je nutné dodať, že tieto výsledky sa odlišujú jemnosťou delenia intervalov. Pre kalibráciu sa vytvorila sieť hodnôt a prechádzala sa exaktne každá hodnota. Nebola použitá žiadna numerická aproximácia. Pre kalibráciu Black – Scholes bolo použité jemnejšie delenie ako pri kalibrácii jednotlivých parametrov Lévyho procesu a aj to stačilo na dosiahnutie lepšieho výsledku. Pri kalibrovaní menšieho počtu cien dokonca nebolo

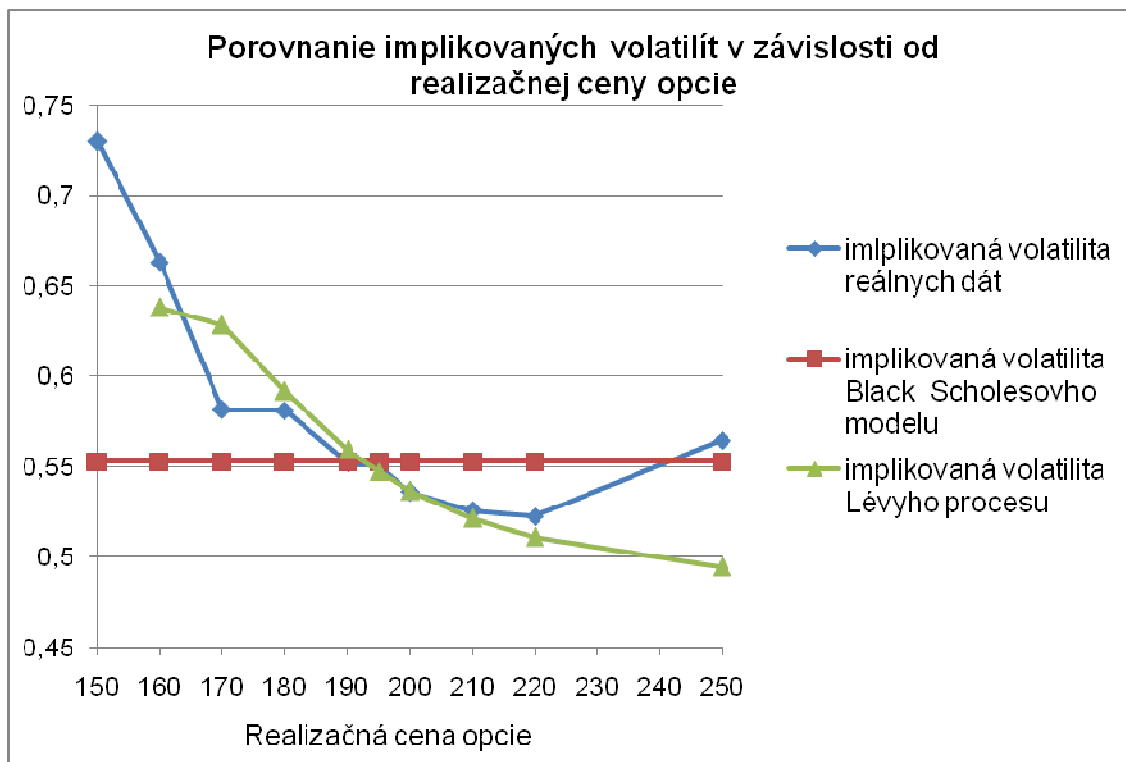
nutné kalibrovať volatilitu akcie, stačilo použiť historickú volatilitu a súčty najmenších štvorcov vychádzali menšie pre ceny vypočítané pomocou Lévyho procesu.

Je vidieť, že pri vhodnej kalibrácii premenných je možné, pri použití vzorca pre výpočet ceny opcie pomocou Lévyho procesu, dosiahnuť lepších výsledkov ako pri použití klasického Black – Scholesovho modelu.

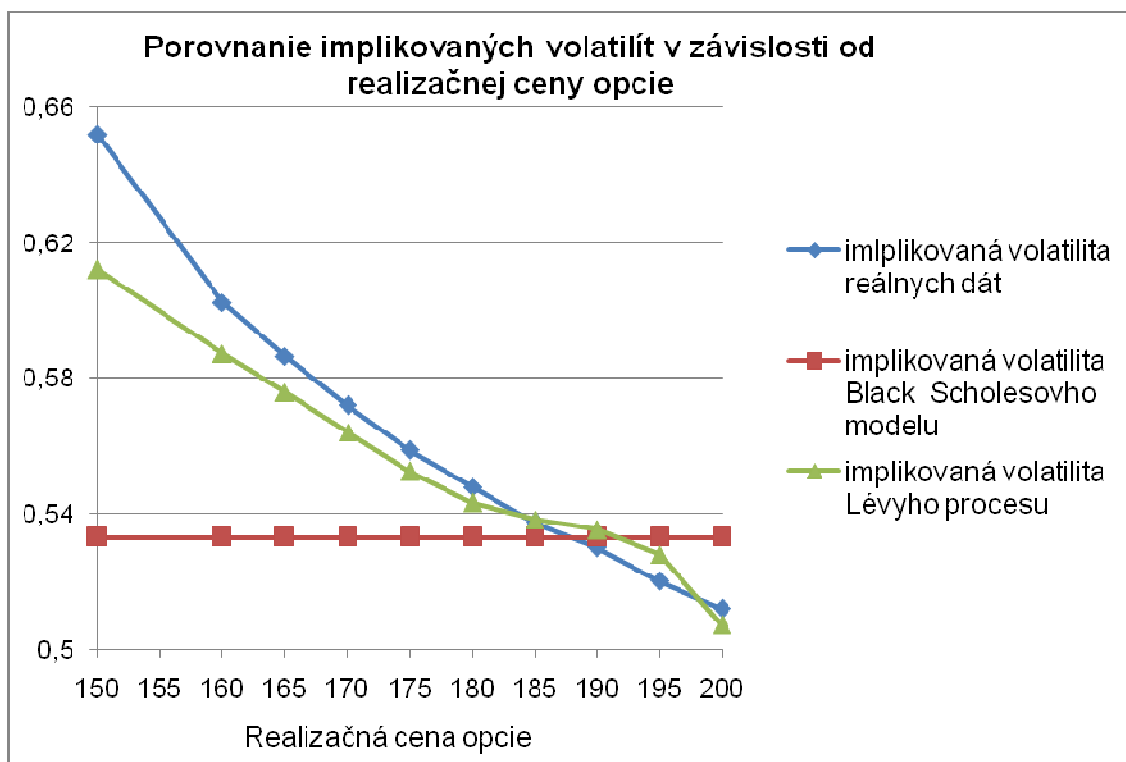
## **4.2. Porovnanie implikovaných volatilit**

V predchádzajúcej časti sa ukázalo, že pri vhodnom zvolení parametrov, sa ceny opcií vypočítané pomocou Lévyho procesu viac blížila k reálnym cenám opcií ako ceny vypočítané Black – Scholesovým modelom. Do veľkej miery sa tak potvrdil predpoklad, že viac parametrov určí cenu opcie presnejšie. V tejto časti sa budeme zaoberať na implikované volatility reálnych a vypočítaných hodnôt opcií. Na vypočítanie hodnôt implikovanej volatility sa použil Black – Scholesov vzorec. V Black – Scholesovom modeli je volatilita konštantná, a tak v každom grafe predstavuje priamku. Pri počítaní implikovanej volatility Lévyho procesu nevyšla v jednom prípade žiadna hodnota a to z dôvodu, že cena opcie bola nižšia ako hodnota, ktorá by vyšla pri použití Black – Scholesovho modelu pri rovnakej realizačnej cene, maturite, bezrizikovej úrokovej miere, cene akcie a nulovej volatility. Ide konkrétne o hodnotu pre januárovú kúpnu opciu s realizačnou cenou 150\$. Všetky ostatné hodnoty vyšli správne a nachádzajú sa v nasledovných grafoch. Tabuľky s dátami k jednotlivým grafom sa nachádzajú v prílohe.

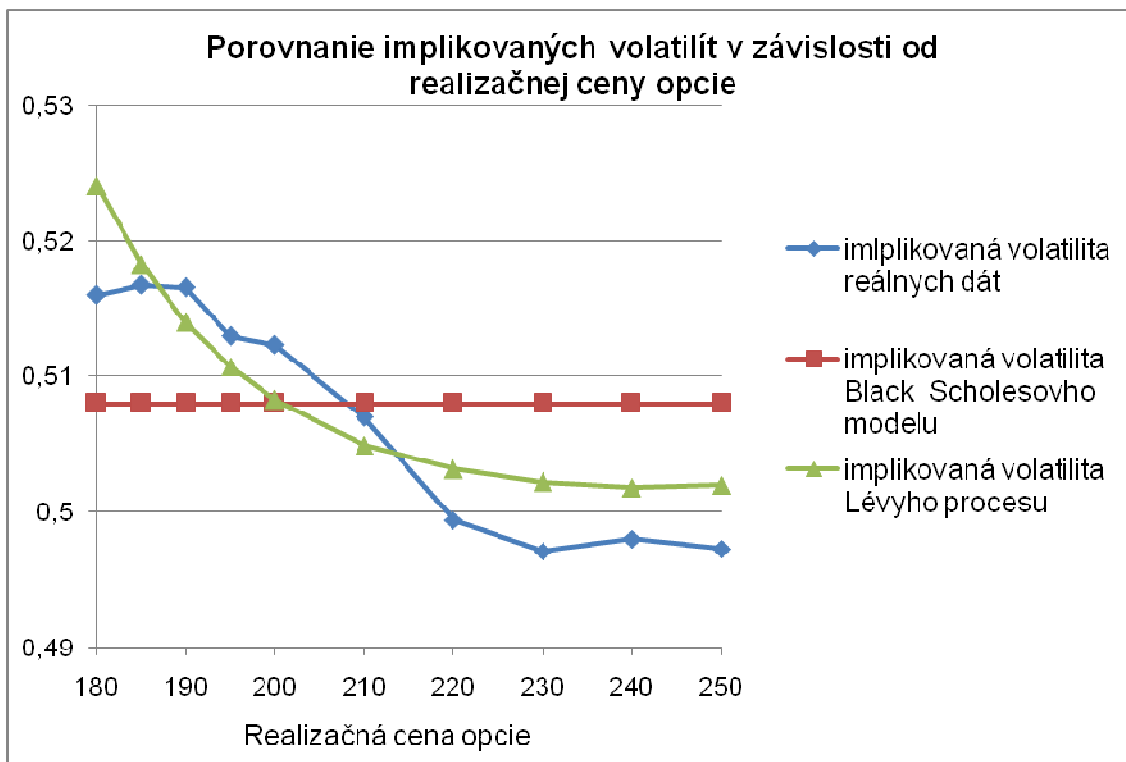
Graf 4.5: Porovnanie implikovaných volatilit kúpnych opcí s maturitou v januári 2008



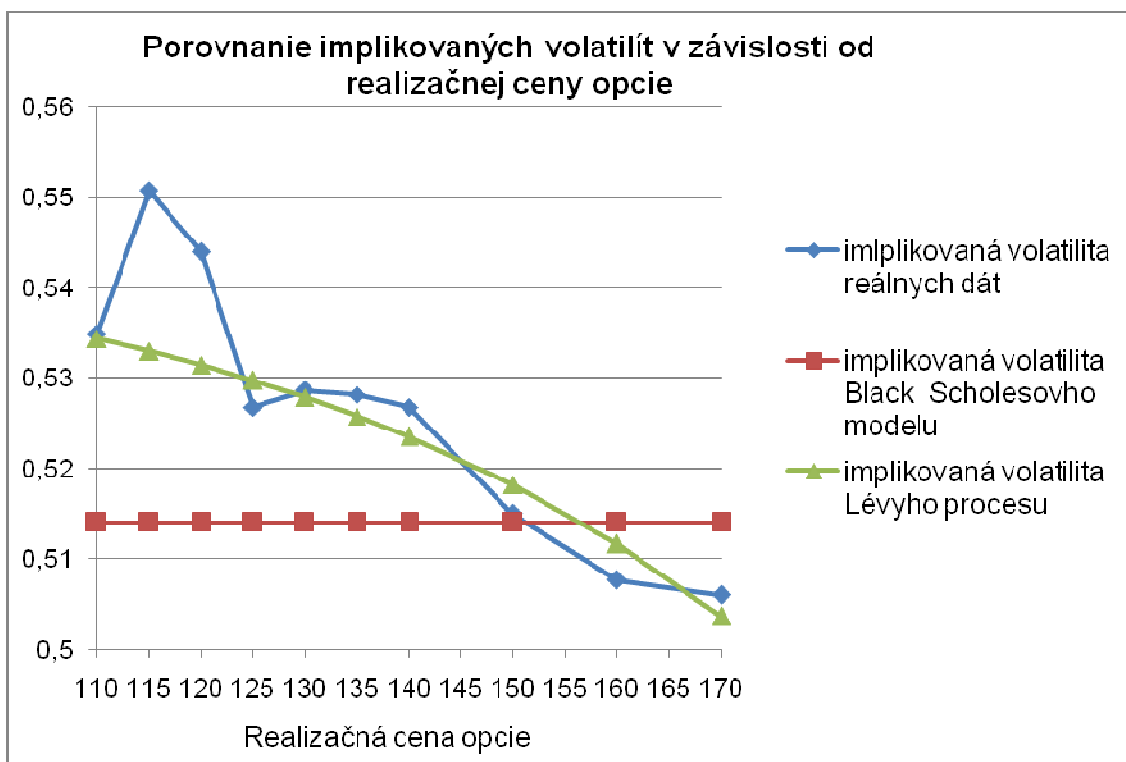
Graf 4.6: Porovnanie implikovaných volatilit predajných opcí s maturitou v januári 2008



Graf 4.7: Porovnanie implikovaných volatilit kúpnych opcí s maturitou v apríli 2008



Graf 4.8: Porovnanie implikovaných volatilit predajných opcí s maturitou v apríli 2008



Z grafov je jednoznačne vidieť, že volatilita daná Black – Scholesovým modelom vôbec nereflektuje pohyb volatility. Na rozdiel od toho implikovaná volatilita daná Lévyho procesom sa v čase chová podobne ako implikovaná volatilita z reálnych dát. Veľký výkyv, ktorý je v grafe 4.8, implikovaná volatilita daná Lévyho procesom nezachytila, ale napríklad v grafe 4.6 je vidieť takmer totožný sklon kriviek implikovanej volatility reálnych dát a Lévyho procesu, iba s tým rozdielom, že implikovaná volatilita Lévyho procesu je približne o 0,01 hodnoty nižšia ako implikovaná volatilita z reálnych dát. Je vidieť, že správanie sa implikovaných volatilit, daných reálnymi dátami a Lévyho procesom je veľmi podobné. Na rozdiel od volatility danej Black – Scholesovým modelom, ktorá sa v čase nemení, sa implikovaná volatilita daná Lévyho procesom správa podobne ako volatilita reálnych dát a teda jasne dokazuje stochastický charakter volatility akcií.

Na základe použitých príkladov môžeme povedať, že Lévyho procesy lepšie opisujú ceny vanilla opcií ako Black – Scholesov model.

## Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo poukázať na nedostatky Black – Scholesovho modelu, snaha ukázať prístup, ktorý tieto nedostatky odstráni a ukázať na príkladoch porovnanie týchto dvoch prístupov s reálnymi dátami.

Ukázali sme, že Black – Scholesov model má hlavné nedostatky v predpokladoch, ktoré nekorešponujú s realitou. Ide o predpoklad normálneho rozdelenia finančných dát a o predpoklad konštantnej volatility, ktorá sa v realite správa ako stochastický proces. Z týchto nesprávnych očakávaní vyplýva aj rozdiel medzi reálnymi dátami a vypočítanými cenami opcií pomocou Black – Scholesovho vzorca.

Zaviedli sme predpoklady pre rozdelenie nového procesu a zároveň aj rozdelenia, ktoré ich spĺňajú. Tieto procesy patria do skupiny Lévyho procesov. Lévyho proces je založený na všeobecnejšom nekonečne deliteľnom rozdelení ako je normálne rozdelenie a zároveň používa viac premenných na opísanie reálnych dát. Uviedli sme charakteristickú funkciu pre Lévyho procesy a zároveň explicitnú charakteristickú funkciu pre Zložený Poissonov proces. Odvodili sme všeobecný vzorec pre výpočet hodnoty opcie európskeho typu. Pre Zložený Poissonov proces sme odvodili explicitný vzorec pre výpočet hodnoty európskeho typu opcie.

Pre porovnanie obidvoch modelov sme použili štyri príklady s jednou cenou akcie, rôznymi maturitami a dvomi typmi opcií. Porovnávali sme nakalibrované ceny opcií a implikované volatility vypočítaných cien oboma modelmi s reálnymi. V Black – Scholesovom modeli sa kalibrovala jedna premenná metódou MNŠ a v Lévyho procesoch štyri premenné takisto metódou MNŠ. Porovnanie cien vyšlo lepšie pre Lévyho procesy a v dvoch prípadoch úplne jednoznačne. Pri porovnaní implikovaných volatilit sa implikovaná volatilita Lévyho procesu chovala podobne ako reálna.

Je vidieť, že na daných príkladoch sa použitie Lévyho procesu ukazuje ako oveľa vhodnejšie. Treba ale povedať, že kalibrovanie cien pri použití reálneho modelu trvalo pomerne dlhú dobu. Bolo by tak zaujímavé skúmať, ako by sa dal výpočtový čas skrátiť tak, aby konkuroval Black – Scholesovmu modelu.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] MELICHERČÍK I., OLŠAKOVÁ L., ÚRADNÍČEK V., Kapitoly z finančnej matematiky, Bratislava, Epos, 2005
- [2] ŠEVČOVIČ D., Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov, Bratislava, 2001
- [3] SCHOUTENS W., Levy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives, Chichester, Wiley, 2003
- [4] BAHAMOU E., Option pricing with Levy process, working paper, 2000

## Prílohy

Tabuľka 1: Nakalibrované parametre

Parameter	Kúpna opcia s časom vypršania v januári 2008	Kúpna opcia s časom vypršania v apríli 2008	Predajná opcia s časom vypršania v januári 2008	Predajná opcia s časom vypršania v apríli 2008
Volatilita akcie B-S modelu	0,553	0,508	0,533	0,514
Volatilita akcie Lévy. procesu	0,44	0,52	0,17	0,54
Intenzita Zlož. Pois. procesu	31,3	4,7	12,36	6,82
Drift Zlož. Pois. procesu	-0,6	-0,8	-0,1	0
Volatilita Zlož. Pois. procesu	0,001	0,001	0,001	0,001

Tabuľka 2: Porovnanie cien kúpnych opcií s maturitou v januári 2008

Realizačná cena opcie	Reálna cena opcie	Cena opcie vypočítaná pomocou Black – Scholesovho modelu	Cena opcie vypočítaná pomocou Lévyho procesu
150	45,50	45,1257	44,8984
160	35,90	35,4218	35,7742
170	26,50	26,2794	26,8936
180	18,55	18,2015	18,6849
190	11,65	11,6598	11,763
195	9,00	9,0468	8,9512
200	6,60	6,8726	6,6132
210	3,35	3,7228	3,2953
220	1,56	1,8570	1,4539
250	0,17	0,1471	0,0633



Tabuľka 3: Porovnanie cien predajných opcií s maturitou v januári 2008

<b>Realizačná cena opcie</b>	<b>Reálna cena opcie</b>	<b>Cena opcie vypočítaná pomocou Black – Scholesovho modelu</b>	<b>Cena opcie vypočítaná pomocou Lévyho procesu</b>
150	0,24	0,0591	0,1612
160	0,55	0,2969	0,4876
165	0,87	0,5827	0,8082
170	1,35	1,0593	1,2888
175	2,05	1,7980	1,9875
180	3,05	2,8704	2,9956
185	4,40	4,3382	4,4145
190	6,20	6,2456	6,2817
195	8,40	8,6128	8,5288
200	11,10	11,4353	11,0232

Tabuľka 4: Porovnanie cien kúpnych opcií s maturitou v apríli 2008

<b>Realizačná cena opcie</b>	<b>Reálna cena opcie</b>	<b>Cena opcie vypočítaná pomocou Black – Scholesovho modelu</b>	<b>Cena opcie vypočítaná pomocou Lévyho procesu</b>
180	30,00	29,6965	30,3052
185	27,30	26,9555	27,3590
190	24,75	24,4078	24,6466
195	22,25	22,0491	22,1574
200	20,05	19,8732	19,8807
210	16,00	16,0423	15,9141
220	12,50	12,8481	12,6515
230	9,80	10,2167	9,9953
240	7,72	8,0722	7,8528
250	6,00	6,3411	6,1391

Tabuľka 5: Porovnanie cien predajných opcií s maturitou v apríli 2008

<b>Realizačná cena opcie</b>	<b>Reálna cena opcie</b>	<b>Cena opcie vypočítaná pomocou Black – Scholesovho modelu</b>	<b>Cena opcie vypočítaná pomocou Lévyho procesu</b>
110	0,35	0,2695	0,3477
115	0,63	0,4232	0,5241
120	0,86	0,6394	0,7634

125	1,05	0,9333	1,0710
130	1,49	1,3210	1,4815
135	2,02	1,8188	1,9862
140	2,66	2,4426	2,6043
150	4,15	4,1276	4,2242
160	6,30	6,4788	6,4137
170	9,30	9,5675	9,2196

Tabuľka 6: Porovnanie implikovaných volatilit kúpnych opcií s maturitou v januári 2008

<b>Realizačná cena opcie</b>	<b>Implikovaná volatilita reálnej ceny opcie</b>	<b>Implikovaná volatilita ceny opcie vypočítanej pomocou Black – Scholesovho modelu</b>	<b>Implikovaná volatilita ceny opcie vypočítaná pomocou Lévyho procesu</b>
150	0,7299	0,553	
160	0,6626	0,553	0,6380
170	0,5815	0,553	0,6284
180	0,5811	0,553	0,5918
190	0,5524	0,553	0,5596
195	0,5504	0,553	0,5474
200	0,5360	0,553	0,5368
210	0,5256	0,553	0,5216
220	0,5226	0,553	0,5112
250	0,5647	0,553	0,4947

Tabuľka 7: Porovnanie implikovaných volatilit predajných opcií s maturitou v januári 2008

<b>Realizačná cena opcie</b>	<b>Implikovaná volatilita reálnej ceny opcie</b>	<b>Implikovaná volatilita ceny opcie vypočítanej pomocou Black – Scholesovho modelu</b>	<b>Implikovaná volatilita ceny opcie vypočítaná pomocou Lévyho procesu</b>
150	0,6518	0,533	0,6120
160	0,6023	0,533	0,5872
165	0,5865	0,533	0,5758
170	0,5720	0,533	0,5641
175	0,5588	0,533	0,5525
180	0,5478	0,533	0,5434
185	0,5374	0,533	0,5384
190	0,5300	0,533	0,5353
195	0,5202	0,533	0,5281
200	0,5121	0,533	0,5073

Tabuľka 8: Porovnanie implikovaných volatilit kúpnych opcií s maturitou v apríli 2008

<b>Realizačná cena opcie</b>	<b>Implikovaná volatilita reálnej ceny opcie</b>	<b>Implikovaná volatilita ceny opcie vypočítanej pomocou Black – Scholesovho modelu</b>	<b>Implikovaná volatilita ceny opcie vypočítaná pomocou Lévyho procesu</b>
180	0,5160	0,508	0,5240
185	0,5167	0,508	0,5182
190	0,5165	0,508	0,5140
195	0,5129	0,508	0,5107
200	0,5123	0,508	0,5083
210	0,5070	0,508	0,5049
220	0,4994	0,508	0,5031
230	0,4971	0,508	0,5022
240	0,4980	0,508	0,5018
250	0,4973	0,508	0,5020

Tabuľka 9: Porovnanie implikovaných volatilit predajných opcií s maturitou v apríli 2008

<b>Realizačná cena opcie</b>	<b>Implikovaná volatilita reálnej ceny opcie</b>	<b>Implikovaná volatilita ceny opcie vypočítanej pomocou Black – Scholesovho modelu</b>	<b>Implikovaná volatilita ceny opcie vypočítaná pomocou Lévyho procesu</b>
110	0,5349	0,514	0,5344
115	0,5507	0,514	0,5330
120	0,5440	0,514	0,5315
125	0,5268	0,514	0,5298
130	0,5286	0,514	0,5279
135	0,5282	0,514	0,5258
140	0,5268	0,514	0,5236
150	0,5150	0,514	0,5182
160	0,5077	0,514	0,5117
170	0,5061	0,514	0,5037