

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



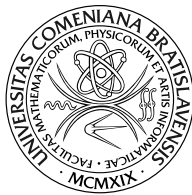
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2008

Martin Fitala

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



Investovanie majetku dôchodkových fondov
vzhľadom na zákonné obmedzenia

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Martin Fitala

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Soňa Kilianová

Študijný odbor: Aplikovaná matematika

Špecializácia: Ekonomická a finančná matematika

Bratislava 2008

Čestné prehlásenie

*Prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne
iba na základe získaných teoretických poznatkov, konzultácií s diplomovým vedúcim
a s použitím uvedenej literatúry.*

Bratislava 2008

Martin Fitala

Podakovanie

*Ďakujem vedúcej diplomovej práce Mgr. Sone Kilianovej
za všetky cenné rady, pripomienky a ochotu venovať mi svoj čas
pri vypracovávaní diplomovej práce.*

*Moje podakovanie tiež patrí Mgr. Martinovi Proksovi
za inšpiráciu, komentáre a pripomienky,
bez ktorých by táto práca nevznikla.*

Abstrakt

V práci sa venujeme problematike určovania interných investičných limitov (tzv. Soft limitov) pre investovanie fondov Dôchodkových správcovských spoločností do akciových investícií. Účelom stanovovania Soft limitov je predchádzanie porušeniu zákonných obmedzení pre investovanie majetku dôchodkových fondov s určitou mierou spoľahlivosti. V práci sa zaoberáme popisom štruktúry a legislatívnych opatrení týkajúcich sa investovania dôchodkových fondov. Pripomíname tiež teoretické poznatky o modelovaní náhodného vývoja akciových cien, ktoré sú založené na populárnom predpoklade lognormality. Venujeme sa podrobnejšie odhadovaniu parametrov procesu, ktorých dobré nastavenie je dôležité pre spoľahlivosť výsledkov. Odvádzame jednoduchý model pre výpočet Soft limitov na základe lognormálneho rozdelenia ceny akcie. Funkčnosť vzorcov overujeme Monte Carlo simuláciami a ich praktické použitie spojené s optimalizáciou na základe známej Markowitzovej teórie portfólia ilustrujeme na príklade modelového dôchodkového fondu.

Kľúčové slová: dôchodkové fondy, Hard a Soft limit, Brownov pohyb, Monte Carlo simulácie, Markowitzov model portfólia s bezrizikovým aktívom

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Dôchodkové správcovské spoločnosti	2
1.2	Ciele Diplomovej práce	3
2	Dôchodkové správcovské spoločnosti na Slovensku	5
2.1	Platná legislatíva a investičné obmedzenia	6
2.2	Štruktúra fondov a oblasti investovania	11
3	Modelovanie stochastického vývoja cien akcií	13
3.1	Stochastický charakter akciových trhov	13
3.2	Brownov pohyb, Geometrický Brownov pohyb, Itôova lema	14
3.3	Odhady parametrov	19
3.4	Dynamický odhad volatility, modely GARCH	22
3.4.1	EWMA	24
3.4.2	GARCH(1,1)	25
3.4.3	Odhad parametrov metódou maximálnej vierohodnosti	26
4	Soft limity pre akciové investície	28
4.1	Volatilita dlhopisovej zložky	28
4.2	Formulácia problému	31
4.3	Jednoduchý prípad jednej pohybujúcej sa akcie	33
4.4	Všeobecný prípad n akcií	35
5	Simulácie a Optimalizácia	37
5.1	Modelové portfólio	37
5.2	Majetok v dôchodkovom fonde ocenený v slovenských korunách	39
5.3	Monte Carlo simulácie	39
5.4	Testovanie vzorcov	42
5.5	Markowitzov model	47
5.5.1	Markowitzov model akciového portfólia	47
5.5.2	Markowitzov model portfólia s bezrizikovým aktívom	50

5.5.3	Aplikácia pre prípad dôchodkového fondu	52
5.6	Dvojstupňová optimalizácia portfólia pri Soft limitoch	56
6	Záver	59

1 Úvod

Pred niekoľkými rokmi došlo na Slovensku v rámci sociálnej reformy aj k reforme dôchodkového systému. Po tom, ako boli v rokoch 2003 v 2004 prijaté legislatívne normy a vytvorili sa príslušné inštitúcie, funguje na Slovensku od 1. januára 2005 trojpilierový systém dôchodkového zabezpečenia.

Nakoľko nový systém v sebe obsahuje z veľkej časti prvky svojho predchodcu, bolo účelom reformy jednak vyriešenie otázky nespravodlivého ohodnocovania výšky dôchodkov, ktoré nezohľadňovalo viaceré dôležité aspekty pri ich výpočte, jednak to bolo riešenie problému vyplývajúceho z blížiacej sa demografickej krízy.

Predchádzajúci priebežný dôchodkový systém bol založený na princípe, keď pracovne aktívna spoločenská trieda sa stará o ľudí v poproduktívnom veku, t.j. z odvodov platených do Sociálnej poisťovne boli následne vyplácané príspevky dôchodcom. Takýto systém predpokladá existenciu dostatočne početnej pracovnej sily, ktorá by bola schopná systém financovať. V dôsledku poklesu pôrodnosti na Slovensku po začiatku 90-tych rokov minulého storočia sa však očakáva, že v budúcnosti dôjde k podstatnému zníženiu počtu aktívne pracujúcich ľudí na jedného obyvateľa v dôchodkovom veku. V prípade fungovania výlučne priebežného systému tak existovali dôvodné obavy o jeho udržateľnosti do budúcnosti. Aby sa znížili dopady nepríjemného vývoja, došlo k zavedeniu tzv. druhého–kapitalizačného piliera. Tento pilier v súčasnosti tvorí, spolu s reformovaným prvým a doplnkovým tretím pilierom, hlavný nástroj zabezpečenia dôchodcov.

Osobe zapojenej do druhého piliera sa polovica z odvodov, ktoré do roku 2005 odvádzala do Sociálnej poisťovne, presúva na tzv. osobný dôchodkový účet. Tento účet je súkromným majetkom sporeteľa, avšak financie z neho sú určené k zabezpečeniu na starobu. Prostriedky na osobných dôchodkových účtoch majú za úlohu zhodnocovať špeciálne inštitúcie, tzv. Dôchodkové správcovské spoločnosti.

Podrobný popis štruktúry, analýzy fungovania a zavedenia nového dôchodkového systému môže čitateľ nájsť napr. v [1] alebo [7].

1.1 Dôchodkové správcovské spoločnosti

Dôchodkové správcovské spoločnosti (ďalej aj DSS) vznikli za účelom zhodnocovania prostriedkov na účtoch sporiteľov, ktorí vstúpili do druhého piliera. Štatút a fungovanie DSS sú presne vymedzené príslušnými zákonmi. Tieto taktiež stanovujú veľmi prísne podmienky, ktoré musí naplniť spoločnosť, aby sa mohla podieľať na trhu DSS.

Podľa zákona č. 43/2004 Z.z. [13], Dôchodková správcovská spoločnosť zhodnocuje prostriedky sporiteľov vedením a správou dôchodkových fondov. Za týmto účelom vytvára 3 dôchodkové fondy: konzervatívny, vyvážený a rastový dôchodkový fond. Rozdiely medzi nimi sú predovšetkým v hraniciach stanovených pre podiely jednotlivých typov investičných nástrojov. Tieto obmedzenia a členenie by mali poskytnúť sporiteľovi určitú voľnosť zvoliť si podľa svojich preferencií a investičného zamerania. Každý z dôchodkových fondov je správcovskou spoločnosťou spravovaný, avšak nie je súčasťou jej majetku. Majetok fondu je v úschove u depozitára, ktorým je obyčajne banka, a táto tiež vykonáva všetky úkony spojené s investovaním.

Pre zabezpečenie maximálnej ochrany majetku sporiteľov podlieha nakladanie s prostriedkami fondu viacúrovňovej kontrole, a to až piatich nezávislých inšancií. Na najvyššej úrovni dohliada na činnosť Dôchodkovej správcovskej spoločnosti Národná Banka Slovenska, neustále kontrolujúca hospodárenie DSS, a tiež sám občan, ktorý má prístup k pravidelným informáciám o vývoji vo fonde. Okrem tejto kontroly je spravovanie DSS pod dohľadom depozitára, nezávislého audítora a vnútornej kontroly Dôchodkovej spoločnosti.

Dôchodkové fondy síce nie sú garantom konkrétneho výnosu, avšak boli stanovené určité pravidlá, ktoré majú zabezpečiť, aby výkonnosť fondu nebola podpriemerná v porovnaní s fondami ostatných DSS. V prípade, že k takémuto narušeniu dôjde, je DSS povinná doplniť chýbajúce finančné prostriedky zo svojho majetku. Ak toho nie je schopná, je finálnym ručiteľom štát, ktorý vzniknutú odchýlku pokrýva prostredníctvom rezervného fondu solidarity Sociálnej poisťovne.

1.2 Ciele Diplomovej práce

Dôchodkovým správcovským spoločnostiam bola stanovená povinnosť zhodnocovať zverené finančné prostriedky investovaním na finančných trhoch. Investovanie na finančných trhoch však so sebou vždy prináša aj riziko straty časti vložených prostriedkov. Dokonca aj v prípade investičných nástrojov, ktoré sú považované za relatívne bezpečné, nie je možné toto riziko úplne vylúčiť. Pretože Dôchodkové správcovské spoločnosti obhospodarujú fondy veľkého spoločenského významu, boli stanovené prísne pravidlá, ktoré majú riziko prípadných strát podstatným spôsobom obmedziť. Okrem už spomenutých odlišných nárokov na štruktúru troch fondov, je zavedených viacero dôležitých obmedzení aj s ohľadom na typ, pôvod, či emitenta investičného nástroja. Účelom týchto pravidiel je prinútiť správcovské spoločnosti diverzifikovať investičné portfólio, aby sa znížilo riziko prípadných strát.

Jednou z povinností, ktoré Dôchodkovým správcovským spoločnostiam ukladá zákon, je ohodnocovanie majetku dôchodkového fondu každý deň. Toto ohodnotenie musí byť navyše vykonané v slovenských korunách, nakoľko príslušné zákonné limity sa vzťahujú na hodnotu majetku vyjadrenú v slovenských korunách. Ako často bude dochádzať k rebalancovaniu samotného portfólia, je však otáznou. K príslušným úkonom totiž môže dôjsť na základe vnútorného rozhodnutia spoločnosti alebo na základe vonkajších udalostí. Ak však prihliadneme k tomu, že transakčné náklady spojené s investovaním hradí samotná dôchodková spoločnosť, dalo by sa očakávať, že k rebalancovaniu portfólia bude dochádzať v čase, v ktorom sa objaví vhodná investičná príležitosť alebo v prípade, že príslušná investičná komisia rozhodne o zmene investičného plánu (napr. navýšením akciovej zložky portfólia).

Pri kriticky nastavenom portfóliu môže medzitým dôjsť k tomu, že v dôsledku nečakaných pohybov na finančných trhoch sa niektorý z investičných titulov dostane za zákonom povolenú hranicu. Už s ohľadom na hroziace sankcie zo strany štátu je preto pochopiteľne v záujme každej dôchodkovej spoločnosti mať nastavené rozloženie svojich investícií tak, aby v rámci istých bezpečných hraníc podobnému prekročeniu včas zabránili. DSS používajú pre takúto bezpečnú hranicu pojem Soft Limit a pre zákonom stanovenú hranicu pojem Hard limit.

Stanovovaním Soft limitov sa budeme zaoberať a na základe známych teoretick-

ých poznatkov sa pokúsime vytvoriť jednoduchý matematický model, ktorý by mal prekročeniu Hard limitov s určitou pravdepodobnosťou predísť. Zameriame sa pritom na akciovú zložku portfólia, ktorá má kľúčový význam v správaní fondu a v jeho budúcom vývoji.

V tejto práci zároveň budeme považovať dlhopisy za bezrizikovú investíciu. Tento predpoklad síce na jednej strane nezodpovedá celkom skutočnosti, avšak s ohľadom na komplikovaný teoretický aparát, ktorý by bol potrebný pri ich modelovaní, a vzhľadom na doterajší vývoj dôchodkových fondov, z ktorého je zrejmé, že sa na ňom náhodné fluktuácie dlhopisovej zložky zásadným spôsobom neprejavili, je akceptovateľný.

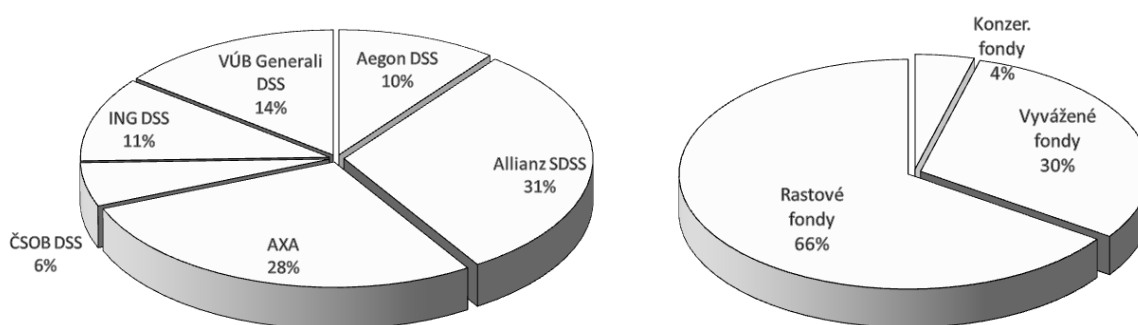
S dlhopismi ako o bezrizikovej investícii počíta aj klasická Markowitzova teória portfólia so svojou Mean-Variance analýzou [6]. Poznatok vyplývajúci zo známej Vety o jednom fonde [6] [5], je tak možné použiť pre dodatočnú optimalizáciu portfólia pri určených Soft limitoch.

Práca je rozdelená do 6 kapitol. V kapitole si 2 povieme niečo o slovenských Dôchodkových správcovských spoločnostiach, legislatívnych obmedzeniach, ktoré musia pri investovaní dodržiavať, a o aktuálnom vývoji a zložení dôchodkových fondov. V kapitole 3 sú zhrnuté niektoré teoretické poznatky stochastického kalkulu, ktorý tvorí dôležitý aparát pre pochopenie náhodného vývoja akcií na finančných trhoch. Časť kapitoly je tiež venovaná dynamickým odhadom volatility modelmi GARCH a EWMA, ktoré môžu byť vhodným doplnkom pri aplikácii Soft limitov na krátke časové obdobie. V kapitole 4 si predstavíme myšlienku jednoduchého modelu pre výpočet Soft limitov a odvodíme vzťah pre ich výpočet. V kapitole 5 najprv v Monte Carlo simuláciach overíme funkčnosť vzorcov za predpokladov, pre ktoré boli odvodené, a potom navrhne dvojestupňovú optimalizáciu za použitia Markowitzovej teórie portfólia.

2 Dôchodkové správcovské spoločnosti na Slovensku

V súčasnosti na Slovensku pôsobí šesť Dôchodkových správcovských spoločností, ktoré splnili potrebné podmienky a získali licenciu na vytváranie fondov druhého kapitalizačného piliera.

Tieto spoločnosti k 4. aprílu 2008 spravovali majetok dôchodkových fondov v hodnote 57 miliárd Sk¹, čo je suma, ktorú od sporiteľov nazhromaždili od začiatku svojho pôsobenia v marci 2005. Sporiteľ má možnosť zvoliť si konkrétnu správcovskú spoločnosť, ktorá bude spravovať jeho úspory a tiež si môže určiť, v ktorom z troch typov fondov majú byť jeho úspory zhodnocované.

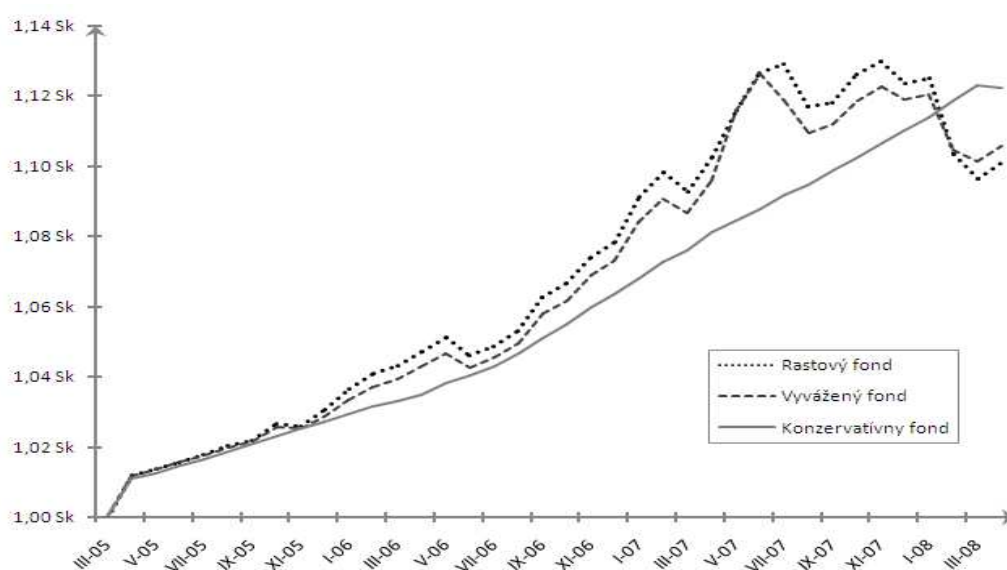


Obrázok 1: Podiely DSS a rozloženie úspor, Zdroj: www.adss.sk.

Ako je vidieť na obrázku vpravo vyššie, v súčasnosti je veľká väčšina úspor sporiteľov, a to až 96%, uložená na účtoch rastových a vyvážených fondov. Táto situácia zodpovedá iba nedávnomu spusteniu druhého kapitalizačného piliera a s ním spojeného dlhodobého zamerania investičných stratégií. V dlhšom časovom horizonte sa však dá očakávať, že s príchodom výplaty prvých sporiteľov, dôjde k presunu týchto prostriedkov smerom k menej rizikovým konzervatívnym fondom. Tento budúci posun je zrejмый s ohľadom na zákonné obmedzenia, ktoré neumožňujú, aby osoba, ktorá je v pred dôchodkovom veku, mohla mať svoje úspory uložené v rastovom alebo vyváženom dôchodkovom fonde.

¹informácie sú dostupné na webovej stránke Asociácie dôchodkových správcovských spoločností www.adss.sk alebo na internetových stránkach jednotlivých DSS

Miera zhodnotenia financií v dôchodkovom fonde je vyjadrená hodnotou tzv. dôchodkovej jednotky. Táto hodnota bola pri založení všetkých súčasných fondov 22. marca 2005 stanovená na 1 Sk. Pre sporiťela vyjadruje mieru, ktorou boli peniaze na jeho osobnom dôchodkovom účte počas danej doby zhodnotené. Vývoj dôchodkovej jednotky jednej zo správcovských spoločností je zobrazený na Obrázku 2 nižšie. Vidíme, že momentálna miera zhodnotenia úspor počas troch rokov je v priemere 10% až 12% v závislosti od typu fondu.



Obrázok 2: Vývoj dôchodkovej jednotky, Allianz SDSS. Zdroj: www.nbs.sk.

2.1 Platná legislatíva a investičné obmedzenia

Pravidlá na Slovensku zavedeného 3-pilierového dôchodkového systému v súčasnosti upravujú tri zákony. Prvý priebežný pilier je ukotvený zákonom č. 461/2003 o sociálnom poistení a tretí doplnkový pilier upravuje Zákon č. 650/2004 o doplnkovom dôchodkovom sporení.

Druhý kapitalizačný pilier ukotvuje primárne zákon č. 43 z roku 2004, a ďalej

niektoré jeho doplnenia, zmeny a novelizácia² z roku 2007. Na základe novelizácie došlo k úprave niektorých pravidiel v druhom pilieri a tiež k jeho opätovnému otvoreniu po dobu prvých šiestich mesiacov roku 2008. Okrem toho, že bola predĺžená minimálna doba sporenia z 10 na 15 rokov, bolo umožnené ľuďom, ktorí tak nestihli urobiť do polovice roka 2006, aby sa do neho dodatočne prihlásili, a taktiež bolo umožnené ľuďom, ktorí už sú zapojení v druhom pilieri, aby z neho naopak vystúpili. Po uplynutí tejto doby sa druhý pilier zrejme definitívne uzavrie a opätovné prehodnotenie rozhodnutia už nebude možné. Vstup nových sporiteľov do piliera sa po uplynutí tejto doby bude ďalej vykonávať automaticky v zmysle platných zákonov.

Ako bolo spomenuté v úvode, Dôchodkové správcovské spoločnosti sú vo svojich investičných aktivitách viazané obmedzeniami, ktoré im majú zabrániť v neprimerane rizikovitom nakladaní s prostriedkami fondu. Základné obmedzenie sa týka štruktúry samotných fondov a vychádza z myšlienky poskytnúť sporiteľovi možnosť vybrať si podľa svojich preferencií medzi rizikovejším alebo menej rizikovým spôsobom zhodnocovania svojich úspor. Zjednodušene sa tieto obmedzenia dajú zhrnúť do nasledovných bodov³:

1. V Rastovom fonde

- (a) hodnota akciových investícií nesmie prekročiť 80% majetku fondu,
- (b) hodnota dlhopisových a peňažných investícií musí tvoriť aspoň 20% majetku fondu.

2. Vo vyváženom fonde

- (a) hodnota akcových investícií nesmie prekročiť 50% majetku fondu,
- (b) hodnota dlhopisových a peňažných investícií musí tvoriť aspoň 50% majetku fondu.

3. Konzervatívny fond

²zákon č. 555/2007, ktorým sa mení a dopĺňa zákon č. 461/2003 Z.z. o sociálnom poistení v znení neskorších predpisov a o zmene a doplnení niektorých zákonov

³podrobné ustanovenia v §88, §89 a §90 zákona č. 43/2004 Z.z.

(a) majetok fondu môže byť použitý iba na dlhopisové a peňažné investície.

Dôchodkové správcovské spoločnosti majú povolené investovať iba do likvidných a dobre obchodovaných cenných papierov, ktoré majú stanovený rating od renomovaných ratingových spoločností v investičnom pásme. Pravidlá pre investovanie zároveň neumožňujú dôchodkovým spoločnostiam pôžičky cenných papierov⁴, čo znamená, že nie je možné prechádzať do tzv. krátkych pozícií, ktoré stavajú na špekulatívnych stratégiách a očakávaní poklesu hodnoty cenného papiera.

Zakázanie akciových investícií v konzervatívnom fonde naznačuje, že tento fond by mal dosahovať relatívne stabilnej miery zhodnotenia. Táto miera však nemusí byť príliš vysoká. Rastový fond, ktorý umožňuje akciové investície až do výšky 80%, má naopak lepšie predpoklady na vyššie výnosy, tieto ale zároveň môžu byť charakteristické výraznejšími výkyvmi. Vyvážený fond predstavuje alternatívu medzi týmito dvoma krajnými prípadmi.

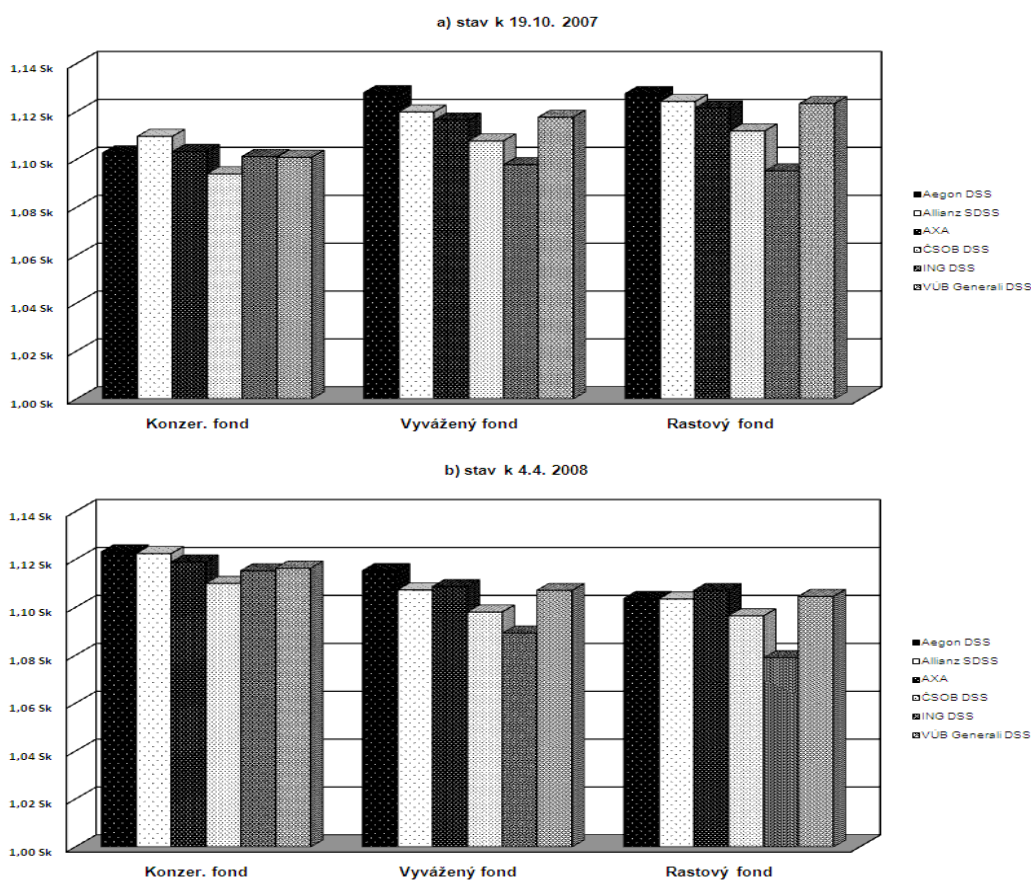
Zákon, okrem iných vecí, ukladá správcovskej spoločnosti povinnosť každodenne sledovať vývoj fondov svojej konkurencie a porovnávať priemerný výnos svojich fondov s výkonnosťou fondov rovnakého druhu ostatných DSS⁵. Pre každý deň musí správcovská spoločnosť vypočítať priemerný výnos dôchodkového fondu a priemerný výnos trhovej konkurencie. Na základe zistení potom určí, či jej fond nedosahuje podpriemerných výsledkov a v prípade, že priemerný výnos fondu je nižší ako

1. 90% priemerného výnosu konkurencie pri konzervatívnom fonde,
2. 70% priemerného výnosu konkurencie pri vyváženom fonde,
3. 50% priemerného výnosu konkurencie pri rastovom fonde,

je povinná previesť časť svojho majetku na účet daného fondu, aby sa tento dostal na požadovanú úroveň s ostatnými fondami. Toto pravidlo zabezpečuje, že výnosnosti fondov sa od seba nebudú zásadným spôsobom odlišovať. Pre ilustráciu je na Obrázku 3 zobrazený stav hodnôt dôchodkových jednotiek z októbra roku 2007 a z apríla roku 2008.

⁴§86 ods. 5 zákona č. 43/2004 Z.z.

⁵§91 ods. 5 zákona č. 43/2004 Z.z.



Obrázok 3: Stav dôchodkových jednotiek.

Základné pravidlo týkajúce sa diverzifikácie investičných nástrojov portfólia, je stanovené v § 82 ods. 1 zákona č. 43/2004 Z.z. Ukladá, že hodnota cenných papierov alebo nástrojov peňažného trhu vydaných rovnakým emitentom nesmie tvoriť viac ako 3% hodnoty majetku v dôchodkovom fonde, ak tento zákon neustanovuje inak. Toto obmedzenie je platné pre všetky druhy akciových investícií a vzhľadom na to, že my sa budeme zaoberať bezpečnými investičnými hranicami pre akciové investície, je pre nás kľúčové.

Z tohto pravidla sú však stanovené výnimky. V prípade dlhopisových investícií je dôchodkovým správcovským spoločnostiam dovolené investovať až 20% majetku

fondy do dlhopisov, na ktoré bola poskytnutá záruka niektorého z členských štátov⁶, pričom v prípade slovenských štátnych dlhopisov môže byť tento podiel navýšený štatútom fondu až na 80%.

Výnimku z tohto pravidla majú tiež hypotekárne záložné listy (HZL), teda dlhopisy vydané komerčnými bankami, ktoré sú kryté pohľadávkami z hypotekárnych úverov. Maximálny podiel na jedného emitenta v tomto prípade nesmie prekročiť 10% hodnoty majetku fondu a v súčte nemôže hodnota investovaná do HZL tvoriť viac ako 50% majetku fondu.

Okrem týchto a niekoľkých ďalších obmedzení⁷ je pre podporu slovenského finančného trhu stanovená podmienka aspoň 30% investovania majetku do cenných papierov alebo peňažných nástrojov slovenských emitentov.

V prípade, že dôjde nejakými nečakanými udalosťami k porušeniu niektorého z týchto limitov, je DSS povinná túto skutočnosť oznámiť Národnej banke a následne zjednať jej bezodkladnú nápravu. Dodržiavanie týchto obmedzení je tak pre investičné aktivity správcovskej spoločnosti kľúčové a zo zákona prioritné. V neskorších častiach sa preto budeme zaoberať modelom, ktorý by mal podobným nečakaným prekročeniam v dôsledku pohybu finančných trhov predísť.

Už skôr sme na Obrázku č. 2 pozorovali vývoj dôchodkovej jednotky jednej zo správcovských spoločností. Na uvedenom grafe je tiež vidieť, že napriek predchádzajúcim, relatívne dobrým výsledkom, došlo v priebehu posledného roka k výraznejším výkyvom vo výkonoch rastového a vyváženého fondu, až sa tieto fondy začiatkom r. 2008 dostali aj pod úroveň krivky fondu konzervatívneho. Že sa tento pokles zrejme týkal všetkých dôchodkových spoločností, sa dá usúdiť aj z Obrázku č. 3 pri porovnaní hodnôt dôchodkových jednotiek vykonaných v časovom odstupe približne pol roka. Je zrejmé, že na výnosoch fondov sa tak odrazila v tomto a v súčasnom období pretrvávajúca kríza na svetových finančných trhoch. Zároveň je vidieť, že najmenej rizikového konzervatívneho fondu sa kríza dotkla iba málo, a že tento fond sa vôbec počas celého vývoja vyznačoval stabilnou mierou rastu s minimálnymi disturbanciami

⁶ pod členským štátom sa rozumie členský štát Európskej Únie alebo OECD

⁷ ako je zabránenie v nadobudnutí kontrolných podielov na riadení emitenta, viď § 82 ods. 7 a 8 zákona č. 43/2004

2.2 Štruktúra fondov a oblasti investovania

Udalosti posledných mesiacov však popri týchto zjavne negatívnych dôsledkoch celosvetovej krízy na naše fondy zároveň poukázali na jednu dôležitú skutočnosť. A to, že rozdielne investičné zamerania dôchodkových fondov môžu naozaj podstatným spôsobom rozhodnúť o vývoji majetku už pri malej úrovni rizikových investícií. Slovenské dôchodkové spoločnosti totiž, napriek tomu, čo zákon umožňuje, v súčasnosti využívajú iba časť z možností v oblasti akciového investovania. Pozrime sa na zloženie fondov dvoch slovenských Dôchodkových správcofských spoločností na Obrázku 4.

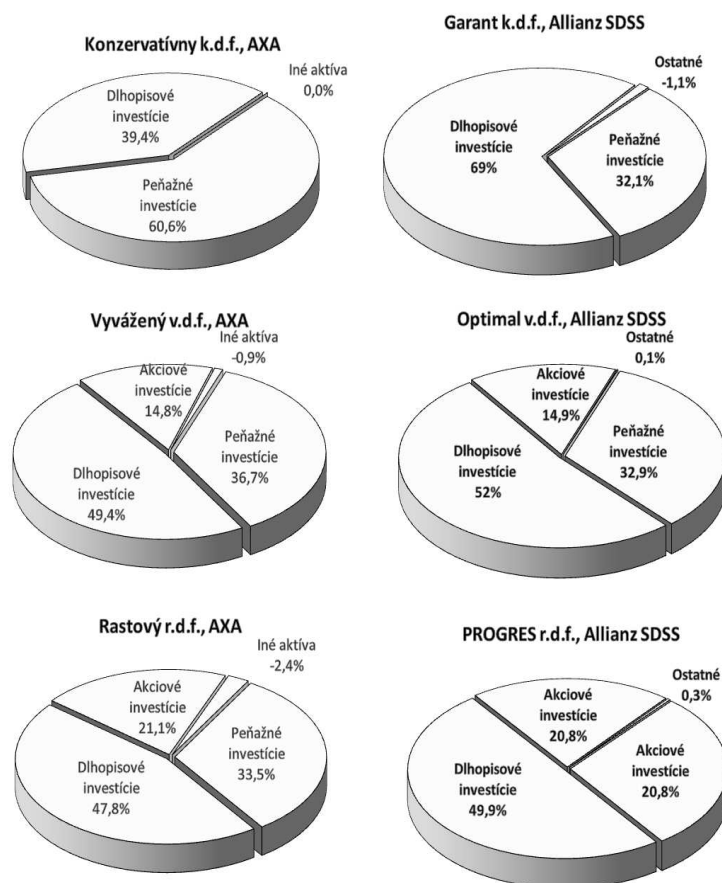
Vidíme, že zastúpenie akciových investícií sa u vyvážených fondov pohybuje na úrovni 15% a u rastových fondov na úrovni 20%. Rozdiely medzi nimi teda nie sú veľké a už vôbec sa nepribližujú k maximálnym povoleným hodnotám 50% u vyváženého resp. 80% u rastového fondu. Ich podobné zloženie sa odráža aj vo veľmi podobných pohyboch kriviek na Obrázku 2, kde sa dá naviac pozorovať, že na krízu na akciových trhoch zo začiatku tohto roku doplatil viac rastový fond.

Dôchodkové správcofské spoločnosti v posledných dvoch rokoch postupne navyšovali podiel akciovej zložky v dynamických fondoch a mali v úmysle v tomto trende pokračovať až do úrovni, ktoré im umožňuje zákon. V dôsledku pretrvávajúcej neistoty na finančných trhoch sú však momentálne nútené postupovať viac konzervatívne a akciovú zložku viac nenavyšujú. Je však pozoruhodné, že i tieto relatívne nízke podiely akciových investícií môžu spôsobiť celkom značné výkyvy vo výkonnosti fondov.

Tri hlavné triedy investičných nástrojov dôchodkových fondov predstavujú akciové, dlhopisové a peňažné investície. Čo všetko je pod týmito pojmami chápané je uvedené v § 87 zákona č. 43/2004 Z.z. Dôchodkové správcofské spoločnosti sa v rámci týchto možností vo svojich aktivitách zameriavajú na nasledovné triedy investičných nástrojov.

1. V oblasti akciových investícií sú to hlavne:

- (a) investície do fondov Exchange Traded Funds (ETF) kopírujúcich vývoj niektorých burzových indexov, ako sú napr. európske DJ EuroStoxx 50, FTSE 100, americké S&P 500, ázijské NIKKEI 225;



Obrázok 4: Dôchodkové fondy spoločností AXA DSS a Allianz SDSS. Zdroj: mesačné správy AXA DSS a Allianz SDSS, marec 2008.

- (b) investície do akcií spoločností, prevažne európskych a amerických.
2. V oblasti dlhopisových investícií:
 - (a) investície do štátnych dlhopisov, prevažne slovenských a krajín V4;
 - (b) investície do Hypotekárnych záložných listov a korporátnych dlhopisov.
 3. V oblasti peňažných investícií:
 - (a) vklady na bežných a vkladových účtoch s krátkou dobou splatnosti do 1 alebo 3 rokov.

3 Modelovanie stochastického vývoja cien akcií

V tejto kapitole si zhrnieme najrozšírenejší matematický aparát, ktorý sa používa pri modelovaní vývoja ceny akcie. Napriek tomu, že sa opiera sa o silný predpoklad normality výnosov akcie, ktorý v praxi často nebýva naplnený, je to najlepší východiskový model, o ktorý sa aj v ďalšej kapitole oprieme pri odvodzovaní vzorcov pre Soft limity. Ku koncu si tiež povieme niečo o prístupoch k odhadovaniu očakávaného výnosu akcie a volatility akcie. Koncepty obsiahnuté v tejto kapitole je možné detailnejšie naštudovať v knihe [2], kapitoly 10, 11 a 15. Ďalej odvolávame čitateľa na [8], [3] a [6].

3.1 Stochastický charakter akciových trhov

Každý obchodník vstupuje na trh s cieľom navýšenia prostriedkov, ktoré do neho vložil. Na základe svojich skúseností, preferencií a dostupných informácií, volí rozhodnutia, od ktorých bude žiadať zabezpečenie istej miery výnosu. Ak je obchodník obozretný, bude svoje rozhodnutia voliť aj s ohľadom na predvídateľné riziko, ktoré na danom trhu existuje.

S investovaním na finančných trhoch je spojené riziko straty časti vložených investícií. Toto riziko je spravidla tým väčšie, čím väčší je možné očakávať výnos. Investovanie na akciových trhoch je vo všeobecnosti považované za rizikovejší spôsob investovania, ktorý však zároveň sľubuje možnosť nadpriemerného zisku. Vývoj cien akcií je tak za týmto účelom neustále veľmi pozorne sledovaný množstvom obchodníkov, ktorí sa snažia predpovedať ich budúci vývoj. Skutočnosť, že by niektorý z nich bol schopný na základe určitého pohybu ceny spoľahlivo predvídať následný nárast ceny s pravdepodobnosťou väčšou ako 50%, by mu dávala do ruky nástroj k nadpriemerným výnosom. Táto výhoda je však anulovaná vo chvíli, keď sa dostatočný počet obchodníkov resp. celý trh stanú znalými tohto potenciálne špecifického vývoja. Svojim spoločným očakávaním totiž v okamihu jeho výskytu vytvoria protitlak, ktorý povedie k okamžitému nárastu ceny a tým k eliminovaniu obchodnej príležitosti.

Z pohľadu obyčajného investora, ktorý má k dispozícii iba všeobecne známe in-

formácie, sa však v matematických modeloch uvažuje o cene akcie ako o náhodnej veličine, ktorej budúci vývoj nemožno s istotou predpovedať. O takejto veličine potom hovoríme, že sleduje nejaký stochastický proces.

Rozšírené matematické modely sa vo svojich východiskách opierajú taktiež o jedno ďalšie dôležité pozorovanie, ktoré hovorí, že posledná známa cena akcie v sebe tiež zahŕňa každú informáciu z jej predchádzajúceho vývoja. Tento predpoklad je dôsledkom skutočnosti, že vývoj akcií na trhu je neustále veľmi pozorne sledovaný a vyhodnocovaný množstvom investorov, ktorí sú následne schopní svojimi aktivitami maximálne zúžitkovať všetky informácie z minulosti. Znamená to teda, že pre ďalší pohyb ceny akcie nie je dôležitý jej historický vývoj, ale iba posledná známa hodnota. Táto vlastnosť, označovaná tiež ako Markovova, je v súlade s hypotézou o tzv. slabej efektívnosti trhu [2]. Weak form of Efficient market hypothesis (hypotéza o slabej efektívnosti trhu) tvrdí, že nadpriemerný výnos (t.j. výnos presahujúci výkon trhu), nie je možné dosiahnuť použitím investičných stratégií, ktoré sa opierajú o všeobecne známe informácie, akými sú historické ceny akcií [9].

3.2 Brownov pohyb, Geometrický Brownov pohyb, Itôova lema

O náhodnej veličine sledujúcej stochastický proces môžeme uvažovať ako o náhodnej veličine, ktorá je spojitá alebo o náhodnej veličine, ktorá je diskretná. Zatiaľ čo spojitá náhodná veličina môže nadobúdať ľubovoľné reálne hodnoty, diskretná náhodná veličina môže nadobúdať iba hodnoty diskkrétne. Rovnakým spôsobom môžeme na náhodnú veličinu pohliadať ako na spojitú alebo diskretnú v čase. A to v závislosti od toho, či sú jej pozorovania vykonávané a zaznamenávané neustále alebo je tak vykonávané s odstupom nejakého času. Pri práci s akciami máme obyčajne k dispozícii dáta zaznamenané v určitých časových intervaloch, akými sú dni alebo mesiace. Taktiež ceny, pod ktorými môžu byť akcie na burzách obchodované, nie sú spojité, ale spravidla sa ponuka a dopyt môžu meniť iba po istých minimálnych hodnotách (tieto sú stanovené v závislosti od obchodnej meny). Cena akcie je teda v praxi veličinou diskretnou a diskretnou v čase. Z teoretického hľadiska sa však na cenu akcie pohliada často ako na veličinu, ktorá je spojitá a spojitá v čase, pretože tento koncept poskytuje ideálne východisko pre následné aplikácie, až pri ktorých

dochádza k diskretizácii.

Aby sme postúpili ďalej, uveďme si proces, ktorý spĺňa skôr uvedené požiadavky na pohyb akcie. Tento proces, známy pod pojmom Brownov pohyb, sa niekedy nazýva aj zovšeobecnený Wienerov proces.

Definícia 3.1. (Brownov pohyb) [8],[3]

Hovoríme, že t -parametrický systém náhodných premenných $\{X(t), t \geq 0\}$ sleduje Brownov pohyb, ak spĺňa nasledovné podmienky:

(i) *zmenu hodnoty ΔX počas krátkeho časového intervalu Δt môžeme zapísať v tvare*

$$\Delta X = \mu \Delta t + (\sigma \sqrt{\Delta t})z,$$

kde z je náhodná premenná zo štandardného normálneho rozdelenia $N(0,1)$.

(ii) *hodnoty ΔX pre ľubovoľné dva krátke časové intervaly Δt sú nezávislé.*

(iii) *$X(0)=0$ a vzorky ciest $X(t)$ sú spojité v premennej $t \geq 0$.*

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ (tieto parametre nazývame drift a variancia) sa volá Wienerov proces.

Z vlastnosti (ii) je zrejmé, že náhodná premenná $X(t)$ má Markovovu vlastnosť, pretože jej prírastky sú od seba nezávislé. Ak použijeme vlastnosť (i) a rozpíšeme v súčte výraz $X(t) - X(0)$, tak sa ľahko presvedčíme aj o tom, že $X(t)$ má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μt a disperziou $\sigma^2 t$ (viď [8] str. 13,14). Táto skutočnosť vyplýva z aditívnosti dvoch nezávislých normálnych premenných ako i skutočnosti, že $X(0) = 0$.

Z toho napokon máme, že $X(t)$ je možné napísať v tvare

$$X(t) = \mu t + \sigma w(t), \tag{1}$$

kde $w(t)$ sme označili Wienerov proces.

K spojitaj náhodnej veličine $X(t)$ obvykle prejdeme limitným prechodom $\Delta t \rightarrow 0$, po ktorom z vlastnosti (i) Brownovho pohybu dostaneme vzťah

$$dX = \mu dt + \sigma dw(t),$$

kde $w(t)$ je Wienerov proces. Táto rovnica sa nazýva tiež stochastická diferenciálna rovnica.

Samotný Brownov pohyb však nie je pre modelovanie ceny akcie veľmi vhodný, pretože očakávaná hodnota prírastku nie je nezávislá od ceny akcie. Ak položíme stochastickú časť rovnú nule, tak pre prírastok v čase Δt máme $\Delta X = \mu\Delta t$, čo znamená, že nárast hodnoty v čase je vždy absolútny bez ohľadu na cenu akcie.

Upravme preto svoje očakávania a uvažujme namiesto toho o $\mu\Delta t$ ako o podielovej zmene v hodnote akcie. Ak hodnotu akcie označíme S , tak zrejme žiadame, aby $\Delta S = S\mu\Delta t$. Po zanedbaní stochastickej zložky je teda naše očakávanie prírastku vyjadrené ako

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t, \quad (2)$$

resp. v limite $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dS}{S} = \mu dt.$$

Výraz (2) definujeme ako jednoduchý výnos⁸ počas krátkej časovej periódy Δt .

Ak postupujeme rovnako aj pri rizikovej zložke procesu, dostaneme stochastickú diferenciálnu rovnicu tzv. geometrického Brownovho pohybu

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw. \quad (3)$$

Parameter σ tu predstavuje mieru neistoty výnosu vyjadrenú v percentách a nazývame ho volatilitou akcie. Obvyklé hodnoty ročnej volatility akcií sa pohybujú v rozmedzí od 20% po 40% [2].

V teórii stochastického kalkulu má svoje dôležité postavenie tvrdenie známe pod názvom Itôova lema. I keď toto tvrdenie nachádza svoje uplatnenie predovšetkým v teórii oceňovania derivátov, používa sa aj pri odvodení stochastického procesu zodpovedajúceho modelu správania akcie pri použití tzv. spojite zložených výnosov⁹.

⁸angl. simple return alebo simple net return

⁹angl. continuously compounded rate of returns

Lema 3.2. (Itôova lema) [8]

Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice tzv. Itôovho procesu: $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dw$, kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} b^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw.$$

Pre podrobnejšie pojednanie o Itôovej leme vrátane celého dôkazu vid' napr. publikáciu [6]. Pri aplikácii výsledku Itôovej lemy na funkciu logaritmu ceny $S(t)$, t.j. na funkciu

$$g(S(t), t) = \ln S(t),$$

najprv vypočítame

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Keďže o $S(t)$ predpokladáme, že jej vývoj zodpovedá stochastickej diferenciálnej rovnici (3), podľa ktorej

$$a(x, t) = \mu S, \quad b(x, t) = \sigma S,$$

dostaneme z Itôovej lemy nakoniec

$$dg = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dw, \tag{4}$$

kde w je Wienerov proces.

Rovnica (4) tak zodpovedá Brownovmu pohybu s driftom $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ a varianciou σ^2 . Ak tento výsledok aplikujeme na výraz $g(t) - g(0)$, t.j.

$$\int_0^t dg(z) dz = \int_0^t d \ln S(z) dz = \ln S(t) - \ln S(0),$$

tak z vlastností Brownovho pohybu vyplýva, že

$$\ln S(t) - \ln S(0) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right),$$

resp.

$$\ln \frac{S(t)}{S(0)} \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right) \quad (5)$$

a

$$\ln S(t) \sim N\left(\ln S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right). \quad (6)$$

Výraz na ľavej strane (5) zodpovedá spojite zloženej miere výnosu počas časového úseku $[0, t]$. Táto skutočnosť vyplynie z toho, že ak η označíme ako spojite zložený výnos za jednu časovú jednotku a zdefinujeme ho prostredníctvom

$$S(t) = S(0)e^{\eta t},$$

tak máme

$$\eta = \frac{1}{t} \ln \frac{S(t)}{S(0)}.$$

Z (5) tiež vyplynie, že η má normálne rozdelenie

$$\eta \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2/t\right), \quad (7)$$

čo znamená, že očakávaná stredná hodnota týmto spôsobom definovaného výnosu je rovná výrazu $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$, pričom výraz $\mu\Delta t$ bol už skôr v (2) definovaný ako výnos akcie za krátke časové obdobie.

Definícia 3.3. (*Geometrický Brownov pohyb*) [8]

Nech $\{X(t), t \geq 0\}$ je Brownov pohyb s parametrami $\tilde{\mu}$ a σ , pričom $\tilde{\mu} = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$, a nech $S_0 \in \mathbb{R}$. Potom systém náhodných premenných $\{S(t), t \geq 0\}$

$$S(t) = S_0 e^{X(t)}, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

nazývame geometrický Brownov pohyb.

Pretože v aplikáciach sa zvyčajne používajú časové rady z výnosov počítaných pomocou logaritmu, predpokladá sa, že pohyb akcie sa riadi geometrickým Brownovým pohybom. Odhad strednej hodnoty výnosu η je tak odhadom parametra $\tilde{\mu}$, ktorý je vždy o niečo menší ako μ . Stochastická diferenciálna rovnica zodpovedajúca tomuto odhadu po dosadení $\tilde{\mu} + \frac{\sigma^2}{2}$ za μ do (3) je

$$dS = \left(\tilde{\mu} + \frac{\sigma^2}{2}\right)Sdt + \sigma Sdw,$$

kde w je Wienerov proces.

Poznámka: Hovoríme, že náhodná premenná Y má lognormálne rozdelenie, ak premenná $\ln Y$ má normálne rozdelenie s príslušnými parametrami.

Z pozorovania (6) je zrejmé, že premennú $S(t)$ môžeme považovať za lognormálne rozdelenú, čo so sebou prináša niektoré výhody. Lognormálne rozdelená náhodná premenná nemôže nadobúdať záporné hodnoty, čo je v súlade s očakávaním, ktoré kladieme na cenu akcie. Ďalšia výhoda vyplýva z aditívnej vlastnosti logaritmov. Ak máme napríklad k dispozícii denné pozorovania spojitých zložených výnosov, tak príslušný mesačný výnos dostaneme jednoduchým sčítaním denných výnosov. Z centrálnej limitnej vety navyše vyplýva, že súčet ľubovoľne rozdelených náhodných premenných má s ich počtom blížiacim sa do nekonečna normálne rozdelenie. To znamená, že v prípade, ak denné výnosy vykazujú štatisticky významné narušenie normality, mesačné výnosy získané týmto spôsobom budú „normálnejšie“.

3.3 Odhady parametrov

Zaveďme v ďalšom texte značenie $\{S_t = S(t), t \in \mathbb{N}\}$ a uveďme S_t ako cenu akcie na konci dňa t . Zdefinujme tiež jednodňový výnos akcie u_t spojitým spôsobom ako

$$u_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}.$$

Pri odhadoch strednej hodnoty výnosu a volatility akcie vychádzame z historických dát, ktoré máme k dispozícii. Ak máme $n + 1$ pozorovaní cien S_0, S_1, \dots, S_n , tak najprv zostrojíme príslušný časový rad u_1, u_2, \dots, u_n . V prípade, že sa rozhodneme odhadnúť parametre z celého radu dostupných historických údajov, dostaneme

odhady tzv. „dlhodobého výnosu“ a „dlhobovej volatility“. Ak sa však naša aplikácia, na ktorú odhady použijeme, týka podstatne kratšieho obdobia (napr. ak modelujeme vývoj akcie na jeden týždeň dopredu, ale máme historické údaje za posledné dva roky), je vhodné zvoliť dátovú základňu menšieho rozsahu, ktorá bude lepšie zodpovedať súčasnej situácii na trhu.

Pri odhadoch parametrov vo všeobecnosti postupujeme spôsobom, že zoberieme m posledných známych pozorovaní $u_{n-m+1}, u_{n-m+2}, \dots, u_n$ a z týchto parametre odhadneme.

Pre odhad očakávaného denného výnosu \bar{u} je našou voľbou jednoduchý aritmetický priemer, ktorý dáva každému pozorovaniu rovnakú váhu

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} u_{n-t}. \quad (9)$$

Tento odhad zodpovedá tzv. nevychýlenému odhadu strednej hodnoty náhodnej veličiny u , ktorá pre nás predstavuje denný výnos.

Poznámka: Ak označíme strednú hodnotu náhodnej veličiny x ako \tilde{x} a definujeme ju prostredníctvom $E(x) = \tilde{x}$, tak pre nevychýlený odhad parametra \tilde{x} , ktorý označíme \bar{x} , musí platiť, že $E(\bar{x}) = \tilde{x}$. Stredná hodnota je jednou zo základných popisných charakteristík náhodných veličín, ktoré tiež bývajú označované ako charakteristiky polohy. Ďalšou dôležitou charakteristikou je disperzia resp. variancia, ktorá patrí medzi charakteristiky variability, viď napr. [4].

Ak ďalej uvažujeme, že rok má 252 pracovných dní, tak ekvivalent zodpovedajúci očakávanému ročnému výnosu, označme ho $\bar{\mu}$, dostaneme pre násobením (9) ako

$$\bar{\mu} = 252\bar{u}.$$

Odhad $\bar{\mu}$ je pritom odhadom parametra $\tilde{\mu}$ z konca predchádzajúcej podkapitoly 3.2.

V podkapitole 3.2 sme si tiež definovali volatilitu ako mieru neistoty výnosu akcie počas jedného roka. Zo (6) sme tiež videli, že volatilita σ zodpovedá tiež štandardnej odchýlke logaritmu ceny akcie na konci prvého roka a podľa (7) aj štandardnej odchýlke spojitely definovaného výnosu η počas jedného roka.

Volatilitu akcie môžeme odhadnúť klasickým spôsobom ako štandardnú odchýlku časového radu pozorovaní $u_{n-m+1}, u_{n-m+2}, \dots, u_n$, ktorý sme vytvorili. Obvyklým prístupom je použiť nevychýlený odhad variancie výnosu.

Ak varianciu náhodnej premennej u definujeme ako $Var(u) = E[(u - \tilde{u})^2]$, kde \tilde{u} je stredná hodnota u , tak jej nevychýlený odhad (viď poznámku na predchádzajúcej strane) má tvar ([4])

$$s^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{t=0}^{m-1} (u_{n-t} - \bar{u})^2$$

a štandardnú odchýlku definujeme ako jej odmocninu

$$s = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{t=0}^{m-1} (u_{n-t} - \bar{u})^2}. \quad (10)$$

Z toho ekvivalent odhadu ročnej variance, ozn. ho $\bar{\sigma}^2$, je

$$\bar{\sigma}^2 = 252s^2$$

a ročnej volatility

$$\bar{\sigma} = \sqrt{252}s.$$

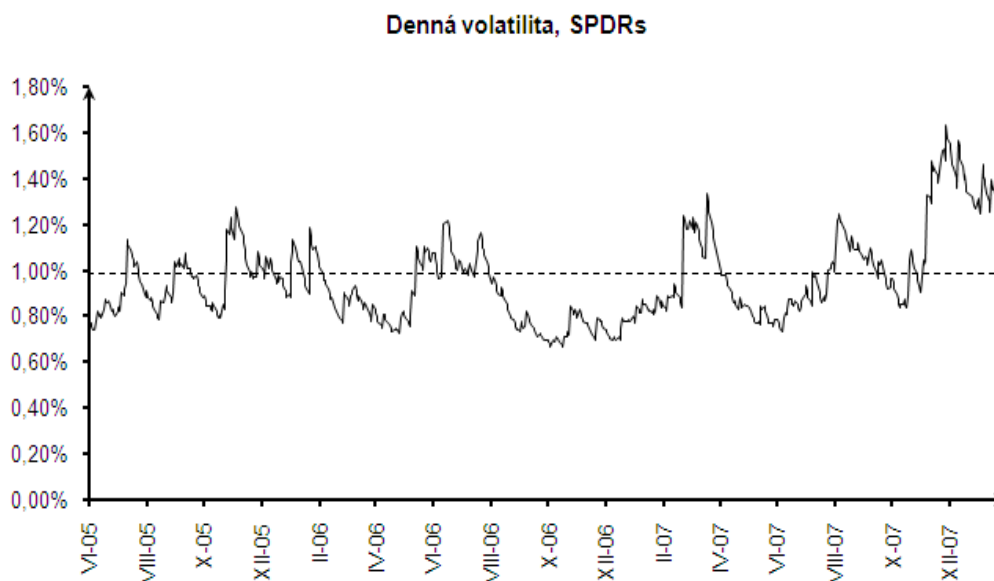
Čo sa týka samotného rozsahu dát, t.j. zvoleného m , je táto voľba v podstate na našom uvážení. Je však empiricky pozorovateľné, že parametre odhadnuté na základe kratšieho obdobia, sa často výrazne líšia od dlhodobého priemerného výnosu a od dlhodošej volatility. Tieto dve sú obyčajne výrazne menšie, než príslušné odhady vykonané na základe kratšieho obdobia.

V aplikáciach sa často používa princíp, podľa ktorého by rozsah dát, z ktorého sú parametre odhadované, mal približne zodpovedať dobe, na ktorú sú tieto odhady aplikované [2]. Ak preto chceme vykonávať simulácie alebo odhadovať budúcu hodnotu na mesiac dopredu, položíme vo vzorcoch (9) a (10) hodnotu m rovnú 21, ak na týždeň položíme $m = 5$, a ak iba na jeden deň, je našou najlepšou voľbou $m = 1$.

3.4 Dynamický odhad volatility, modely GARCH

Ako bolo spomenuté, jedným zo spôsobov odhadu volatility je použitie vzorca (10). Tento prístup k odhadu volatility je relatívne rýchly a jednoduchý, avšak vychádza z toho, že volatilita sa počas daného obdobia nemení a zostáva konštantná. Analýzy však naznačujú, že variancia akcie je v skutočnosti, podobne ako jej cena, stochastickým procesom, ktorý sa zo dňa na deň mení. Tento proces však, na rozdiel od cien akcie, nie je priamo pozorovateľný [2].

Modely GARCH sa zaoberajú sledovaním tohto vývoja a modelovaním dennej volatility. Na Obrázku 5 je spojitou čiarou zobrazený vývoj dennej volatility ETF fondu Spiders, ktorý kopíruje vývoj amerického indexu S&P 500. Vývoj je vyhodnocovaný za obdobie od 3.6.2005 po 31.1.2008 a je namodelovaný pomocou modelu GARCH(1,1). Prerušovanou čiarou je zobrazená dlhodobá denná volatilita a zodpovedá ročnej volatilita na úrovni 15,6%.



Obrázok 5: Denná volatilita amerického ETF fondu SPDRs v čase od 3.6.2005 do 31.1.2008.

Napriek tomu, že sú modely GARCH schopné celkom úspešne zmapovať vývoj

akcie v minulom historickom období, z hľadiska predikcií je vhodnejšie ich aplikovať skôr na kratšie časové obdobie. Táto skutočnosť je dôsledkom vlastnosti „mean reversion“ (viď [2], kap. 15.6), podľa ktorej sa volatilita pri odhade s postupom času do budúcnosti blíži naspäť k dlhodobej volatilita. V našich aplikáciách tak neskôr použijeme GARCH(1,1) model pre odhad volatility v krátkom časovom horizonte (jedného dňa, maximálne jedného týždňa).

Uveďme si teraz základné myšlienky, o ktoré sa modely GARCH a ich špeciálny prípad EWMA opierajú. Pre podrobnejšie informácie je čitateľ odkázaný na kapitolu 15 z knihy [2].

V tejto časti budeme naďalej používať značenie $u_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$ pre aproximáciu spojité zloženého výnosu akcie počas dňa t . Zadefinujme si ďalej σ_n volatilitu (resp. odhad volatility) akcie pre deň n ako jej odhad z konca dňa $n - 1$.

Ako bolo vyššie napísané, štandardným prístupom k odhadu volatility σ_n je výpočet nevychýleného odhadu variancie σ_n^2 na základe m pozorovaní:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^m (u_{n-t} - \bar{u})^2, \quad (11)$$

kde $\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m u_{n-t}$ je priemer u_t .

Očakávaný výnos akcie je v krátkom časovom horizonte (napr. jeden deň) v porovnaní s jeho varianciou relatívne malý. Zaveďme preto zjednodušenie a predpokladajme, že priemerný výnos \bar{u} je nulový. Ak navyše nahradíme výraz $m - 1$ v menovateli vzťahu (11) výrazom m , dostaneme z neho nasledovne upravený odhad¹⁰

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m u_{n-t}^2. \quad (12)$$

Zjavným nedostatkom schémy (12) je, že každému z m pozorovaní priraduje rovnakú váhu, čím môže byť niektorým starším pozorovaniam pripísaný zbytočne veľký význam. Idea modelov GARCH je naproti tomu založená na princípe, ktorý posúva váhy v prospech novších pozorovaní, u ktorých sa predpokladá väčšia dôležitosť.

¹⁰tento odhad je tiež odhadom variancie metódou maximálnej vierohodnosti

Na začiatok prepíšme predchádzajúci odhad za použitia všeobecných váh

$$\sigma_n^2 = \sum_{t=1}^m \alpha_t u_{n-t}^2, \quad (13)$$

pričom α_t je nezáporné pre všetky t a zodpovedá váham priradeným pozorovaniu t dní naspäť. Súčet váh je zároveň rovný 1.

Ak navyiac uvažujeme o tom, že časť variancie bude tvoriť nejaká fixná zložka, dlhodobá variancia, ktorú označíme V , môžeme upraviť (13) to tvaru

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \sum_{t=1}^m \alpha_t u_{n-t}^2, \quad (14)$$

kde γ je váha, ktorú sme priradili V a $\gamma + \sum_{t=1}^m \alpha_t = 1$.

3.4.1 EWMA

Model odhadu volatility EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) je špeciálnym prípadom všeobecného zápisu (13), kde váhy α_t klesajú exponenciálne s postupom späť v čase. Celý model je naformulovaný ako

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) u_{n-1}^2, \quad (15)$$

pričom $\lambda \in (0, 1)$.

Parameter λ je tak váha priradená predchádzajúcemu odhadu variancie σ_{n-1}^2 a $1 - \lambda$ je váha priradená poslednému pozorovaniu ceny, ktoré zodpovedá štvorcu výnosu u_{n-1}^2 .

Pre pochopenie opodstatnenosti exponenciálneho poklesu váh pri takto naformulovanom modeli, je potrebné si rozpísať člen σ_{n-1}^2 (pre bližšie poznámky viď [2], kap. 15). Na základe toho sa dá zistiť, že (15) je ekvivalentný s

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{t=1}^m \lambda^{t-1} u_{n-t}^2 + \lambda^m \sigma_0^2.$$

Pre veľké m je pritom člen $\lambda^m \sigma_0^2$ v takto prepísanom modeli dostatočne malý, a ak ho zanedbáme, zostane nám iba

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{t=1}^m \lambda^{t-1} u_{n-t}^2,$$

čo je špeciálny prípad všeobecného zápisu (13) pre voľbu $\alpha_t = (1 - \lambda)\lambda^{t-1}$. Pretože $1 - \lambda$ je konštanta, je vidieť, že $\alpha_{t+1} = \lambda\alpha_t$, čo keďže $\lambda \in (0, 1)$, znamená, že váhy exponenciálne klesajú.

Obecnou výhodou tohto prístupu je, že jediné, čo si pre výpočet novej volatility musíme zapamätať, sú jej predchádzajúci odhad a posledná cena akcie. Keď potom získame nové dáta, volatility jednoducho aktualizujeme pomocou vzorca (15).

3.4.2 GARCH(1,1)

Rozdiel medzi modelmi EWMA a GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) zodpovedá rozdielu medzi rovnicami (13) a (14), t.j. u druhého sa navyše predpokladá existencia dlhodobej volatility.

Podobne ako tomu bolo v prípade predchádzajúceho modelu s rovnicou (15), modelu GARCH(1,1) zase zodpovedá formulácia

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2, \quad (16)$$

kde $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Parametre α, β a γ sú teda váhami prislúchajúcimi k poslednému pozorovaniu ceny, predchádzajúcej variancii a dlhodobej variancii. Z pohľadu je tiež zrejmé, že EWMA je špeciálnym prípadom modelu GARCH(1,1) pre voľbu $\gamma = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$ a $\beta = \lambda$.

Jednotkové značenie v GARCH(1,1) pritom hovorí, že volatility sa počíta na základe jedného pozorovania ceny a jedného odhadu variancie. Všeobecne sú tak modely GARCH(p,q) počítané na základe p posledných pozorovaní ceny a q posledných odhadov variancie. Týmto modelom už však nezodpovedá rovnica (16).

Rovnicu (16) je možné postupom analogickým ako pri EWMA rozpísať do tvaru

$$\sigma_n^2 = \gamma V \frac{\beta^m - 1}{\beta - 1} + \alpha \sum_{t=1}^m \beta^{t-1} u_{n-t}^2 + \beta^m \sigma_0^2,$$

z čoho je vidieť, že váhy priradené starším pozorovaniám klesajú exponenciálne s mierou určenou parametrom β .

3.4.3 Odhad parametrov metódou maximálnej vierohodnosti

Pre praktické použitie rovnice (16) je potrebné odhadnúť parametre α, β a γ na základe dostupných dát.

Vhodným nástrojom pre tento účel je metóda maximálnej vierohodnosti. Táto metóda je založená na princípe, ktorý maximalizuje pravdepodobnosť spoločného nastatia všetkých pozorovaných udalostí (tieto udalosti predstavuje m posledných cien akcie).

Pri odhade volatility akcie predpokladáme, že jej spojité chápané výnosy aproximované prostredníctvom u_t , sú normálne rozdelené. K tomu budeme navyše počítať s tým, že očakávaný denný výnos \bar{u} je veľmi malý a preto ho zanedbáme.

Keďže chceme použiť dynamický model, tak uvažujeme o variancii σ_t^2 ako o časovom rade pre $t = 1, 2, \dots$ (variancia v čase nie je konštantná). Z hustoty pravdepodobnosti normálne rozdelenej náhodnej premennej so strednou hodnotou 0 a varianciou σ_t^2 , ktorej hodnoty pre $t = 1, 2, \dots$ sú za použitia (16) funkciami parametrov α, β a γ , máme, že pravdepodobnosť nastatia výnosu u_t je

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{u_t^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

Z toho, pretože o výnosoch akcií vieme, že sú nezávislé, je spoločná pravdepodobnosť nastatia všetkých m udalostí

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \prod_{t=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{u_t^2}{2\sigma_t^2}\right). \quad (17)$$

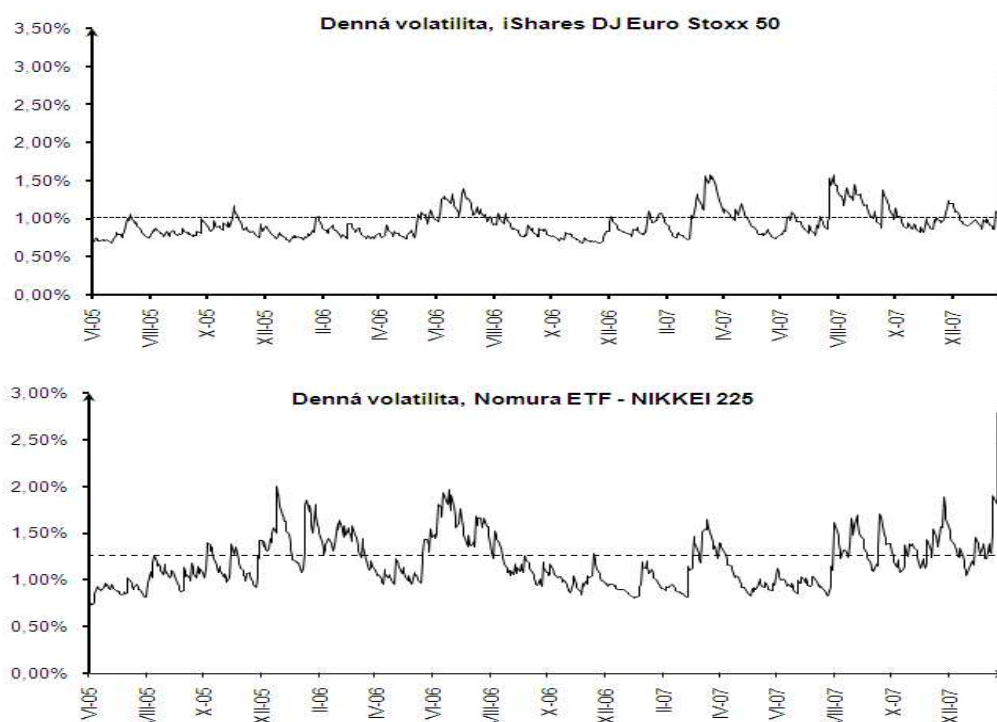
Metóda maximálnej vierohodnosti tvrdí, že najlepším odhadom variancie sú tie hodnoty σ_t^2 , ktoré výraz (17) maximalizujú.

Po odstránení konštanty a jeho zlogaritmovaní dostaneme

$$G(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{t=1}^m \left(-\ln \sigma_t^2 - \frac{u_t^2}{\sigma_t^2}\right),$$

čo je funkcia, ktorej maximalizácia

$$\max_{\alpha, \beta, \gamma} G(\sigma_{n-m}, \dots, \sigma_{n-1}), \quad (18)$$



Obrázok 6: Denné volatility ETF fondov, európskeho DJ Euro Stoxx 50 a ázijského Nomura NIKKEI 225. Vývoj od 3.6.2005 do 31.1.2008.

dá riešenie ekvivalentné maximalizácii funkcie F .

Problém (18) sa rieši iteračne pri použití rovnice (15) alebo (16). Ak je zvolený model EWMA, je navyše celá procedúra zjednodušená, pretože na rozdiel od zložitejšieho GARCH modelu stačí odhadnúť jeden parameter.

My sme na potrebné výpočty použili nástroj Solver z aplikácie Microsoft Excel. Pre detailný postup výpočtu viď špecializovanú časť 15.5 v publikácii [2].

Pre zaujímavosť sú na Obrázku 6 namodelované vývoje volatilit európskeho ETF fondu DJ Euro Stoxx 50 a ázijského Nomura NIKKEI 225. Na oboch grafoch je jasne vidieť nárast v období veľkej krízy na finančných trhoch koncom januára 2008, ktorý bol spôsobený prepadom amerických akcií.

4 Soft limity pre akciové investície

Už v Kapitole 2 sme uviedli, že zákon DSS ukladá, aby podiel jedného akciového titulu v portfóliu dôchodkového fondu neprekročil 3% jeho hodnoty vyjadrenej v slovenských korunách. Spôsob výpočtu Soft limitu, t.j. bezpečnej investičnej hranice pre danú investíciu, ktorý si v tejto kapitole predstavíme, je založený na jednoduchom modeli, ktorý sa opiera o predpoklad normality výnosov akcie, tak ako bolo uvedené v Kapitole 3.

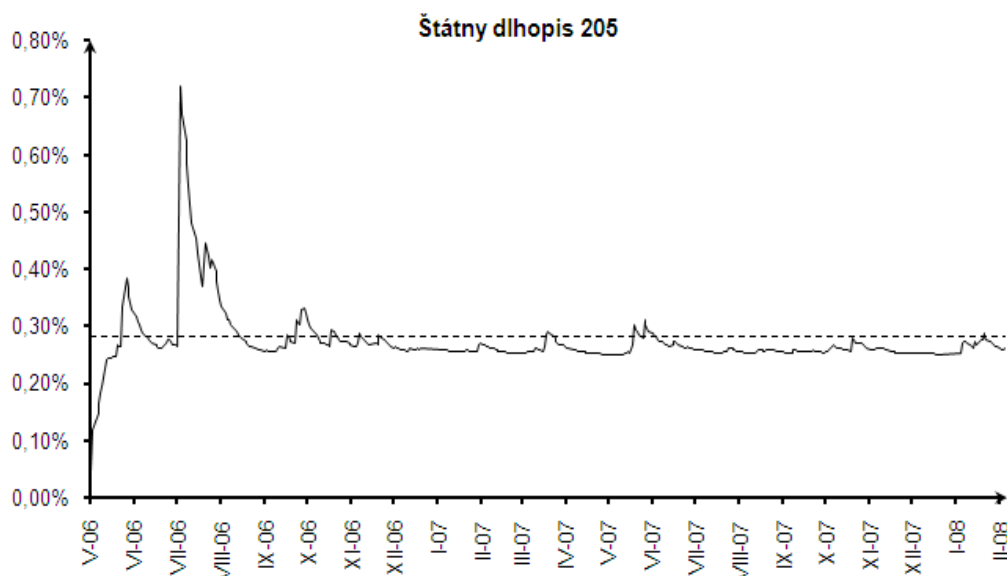
4.1 Volatilita dlhopisovej zložky

V tejto práci zaoberáme iba dôchodkovými fondami, v ktorých sú akciové investície povolené, t.j. predmetom nášho záujmu sú fondy rastové alebo vyvážené. Väčšina majetku týchto fondov je však v súčasnosti investovaná do dlhopisových a peňažných investícií. Peňažné investície sú bezrizikové, avšak dlhopisové pozície vytvárajú isté riziko.

Keďže sme na začiatku uviedli, že na dlhopisy budeme pohliadať ako na bezrizikovú investíciu, nie je našim účelom podrobne rozoberať faktory, ktoré na cenu dlhopisu ovplyvňujú. Za týmto účelom odkazujeme na literatúru, ktorá sa danou problematikou bližšie zaoberá, viď napr. [6]. Je ale vhodné, aby sme uviedli, na akých úrovniach sa za normálnych okolností môžu náhodné výkyvy spôsobené stochastickou časťou dlhopisovej zložky pohybovať.

Cenu dlhopisu ovplyvňuje niekoľko faktorov. Niektoré z nich sú stochastické a niektoré deterministické. Náhodné výkyvy stochastickej zložky dlhopisu sú spôsobené posunom krivky úrokových mier, ktorá je tiež očakávaním trhu o budúcom vývoji úrokových mier. Na vývoji cien dlhopisov obchodovaných na burzách je možné mieru tejto náhodnosti vypočítavať. Ak ide o bezkupónový dlhopis, jeho cena s blížiacim sa časom do splatnosti rastie. Tento nárast však nie je lineárny, a vo vývoji sú jasne pozorovateľné náhodné výkyvy. Ak je to dlhopis typu par bond, t.j. kupónový dlhopis, ktorého kúpna hodnota je rovná jeho nominálnej hodnote, pohybuje sa jeho cena spravidla na tejto úrovni a výkyvy od nej odrážajú náhodný proces.

Na Obrázku 7 je zobrazený denný vývoj volatility (bezkupónového) slovenského



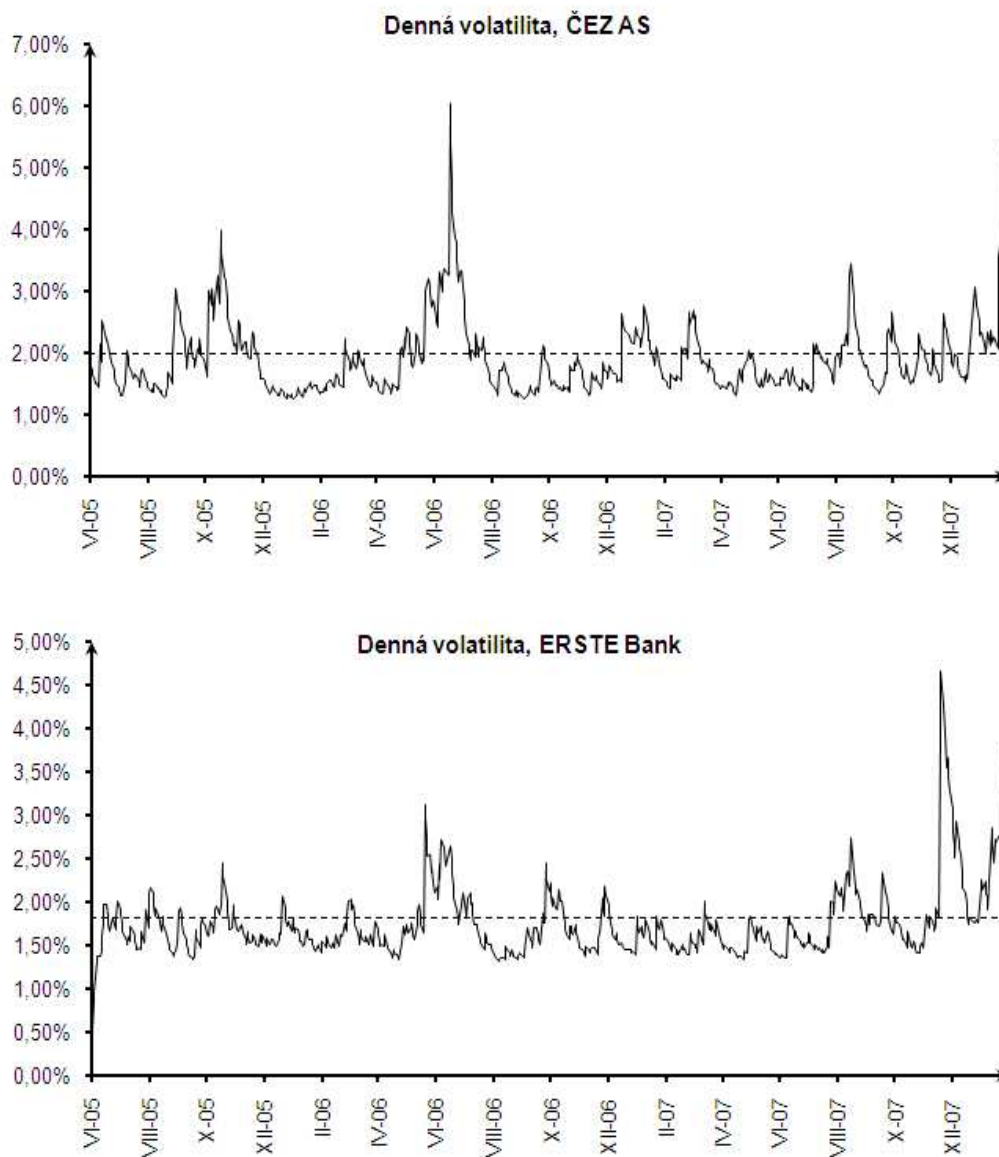
Obrázok 7: Denná volatilita slovenského Štátneho dlhopisu 205 v čase od 4.5.2006 do 8.2.2008, Zdroj dát: Burza cenných papierov v Bratislave, www.bcpb.sk.

Štátneho dlhopisu 205, ktorý bol namodelovaný pomocou GARCH(1,1) v dobe od 4.5.2006 do 8.2.2008. Dlhodobá denná volatilita dlhopisu je 0,28%, čo zodpovedá dlhodobej ročnej volatilita na úrovni 4,46%.

Na Obrázku 8 je pre porovnanie zobrazený vývoj dennej volatility akcie českej energetickej spoločnosti ČEZ a rakúskej Erste Bank od 3.6.2005 do 31.1.2008. Ročná dlhodobá volatilita je v prvom prípade na úrovni 31,57 % a v druhom prípade na úrovni 28,68%. Obe tieto hodnoty sú podstatne vyššie, než je tomu u dlhopisu.

V modeli, ktorý použijeme, budeme uvažovať so spoločnou bezrizikovou úrokovou mierou pre dlhopisové aj peňažné investície na úrovni 3-mesačného BRIBID-u¹¹. Je to referenčná úroková miera, od ktorej sa odvíjajú úroky na krátkodobých (3-mesačných) vkladových účtoch, na ktorých Dôchodkové správcovské spoločnosti viažu istú časť prostriedkov dôchodkových fonfov (viď Obrázok 1 v Kapitole 2). Budeme tak automaticky predpokladať, že výnosy dlhopisov sa od tejto úrokovej miery v podstatnej miere nelíšia.

¹¹Bratislava Interbank Bid Rate, www.nbs.sk



Obrázok 8: Denná volatilita akcií ČEZ AS a Este Bank, od 3.6.2005 do 31.1.2008.

4.2 Formulácia problému

Uvažujme o portfóliu, v ktorom je n akciových titulov a zvyšok tvoria dlhopisové a peňažné investície. Nech sú tieto akciové tituly v portfóliu fondu vo východiskovom čase $t = 0$ zastúpené v počtoch, ktoré označíme $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(n)}$.

Našou základnou motiváciou je, aby sme boli schopní v čase $t = 0$, stanoviť hornú limitnú hranicu (Soft limit) pre podiel akciového titulu i spôsobom, aby tento pri jej dodržaní neprekročil v budúcom časovom okamihu $T > 0$ zákonom stanovenú hranicu (Hard limit) s nejakou minimálnou pravdepodobnosťou danou hladinou $\alpha_0 \in [0, 1]$. Túto pravdepodobnosť budeme pritom preferovať na úrovniach, ktoré by zabezpečili dostatočne bezpečnú rezervu, t.j. budeme o nej uvažovať ako hodnote blízkej 1. Za zákonné obmedzenie (Hard limit) budeme v prípade všetkých akciových titulov (ďalej iba „akcií“) považovať maximálne 3-percentný podiel na hodnote portfólia (viď kapitolu 2).

Označme konštantou $L \in (0, 1)$ zákonný Hard limit spoločný pre všetky akcie. Ďalej označme $S_t^{(i)}$ hodnotu akcie i v čase $t \geq 0$ a $x_t^{(i)}$ počet kusov akcie i v čase $t \geq 0$. Napokon označme náš hľadaný neznámy Soft limit pre akciu i ako $C^{(i)} \in (0, 1)$.

Schématicky sa dá naša požiadavka na počiatkové zastúpenie akcie i v portfóliu, ktorá bola sformulovaná v predposlednom odseku, vyjadriť v podobe implikácie

$$\frac{S_0^{(i)} x_0^{(i)}}{X_0} \leq C^{(i)} \quad \Longrightarrow \quad P \left(\frac{S_T^{(i)} x_0^{(i)}}{X_T} \leq L \right) \geq \alpha_0, \quad (19)$$

kde symbolmi X_0 a X_T sme označili hodnoty portfólia na začiatku a v čase $T > 0$, pričom v druhom prípade doposiaľ neprišlo k rebalancovaniu:

$$X_t = \sum_{k=1}^n S_t^{(k)} x_0^{(k)} + B_t, \quad t \geq 0.$$

Výraz B_t tu predstavuje hodnotu spoločnej peňažno-dlhopisovej zložky portfólia v čase t .

Keďže $S_T^{(k)}$ a $x_0^{(k)}$ sú kladné pre všetky $k = 1, \dots, n$, môžeme nerovnosť v prvom výraze implikácie (19) rozpísať ako

$$S_0^{(i)} x_0^{(i)} \leq C^{(i)} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n S_0^{(k)} x_0^{(k)} + S_0^{(i)} x_0^{(i)} + B_0 \right),$$

z čoho, pretože $C^{(i)} \in (0, 1)$, po vyjadrení $x_0^{(i)}$, t.j. počtu kusov akcie i na začiatku, máme

$$x_0^{(i)} \leq \frac{C^{(i)}}{1 - C^{(i)}} \frac{X_0^{- (i)}}{S_0^{(i)}}. \quad (20)$$

Značenie

$$X_t^{- (i)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n S_t^{(k)} x_0^{(k)} + B_t, \quad t \geq 0$$

budeme používať pre hodnotu portfólia v čase t bez aktíva i .

Druhý výraz z implikácie (19) upravme podobným spôsobom vyjadrením $S_T^{(i)}$ v argumente pravdepodobnosti

$$P \left(S_T^{(i)} \leq \frac{L}{(1 - L)x_0^{(i)}} X_T^{- (i)} \right) \geq \alpha_0. \quad (21)$$

Z (20) je vidieť, že nerovnosť v prvom výraze (19) dáva manažérovi portfólia istú voľnosť pri rozhodovaní o počte nakúpených kusov akcie i , a to až do výšky danej pravou stranou výrazu (20). Zároveň pritom zostane minimálna hladina α_0 (ktorú my nepoznáme), zachovaná. Táto skutočnosť pochopiteľne vyplýva zo spôsobu, ktorým sme sformulovali základnú požiadavku na začiatku tejto podkapitoly. Aby sme však mohli príslušný Soft limit $C^{(i)}$ vypočítať, budeme potrebovať vybrať jednu z dostupných hodnôt $x_0^{(i)}$, ktorú vo výpočte použijeme. Racionálnou voľbou, ktorá zastúpi všetky ostatné možnosti, je hraničná hodnota, ktorú označíme

$$q \equiv \frac{C^{(i)}}{1 - C^{(i)}} \frac{X_0^{- (i)}}{S_0^{(i)}}.$$

Ak teraz nahradíme vo výraze (21) v argumente pravdepodobnosti hodnotu $x_0^{(i)}$ hodnotou q , tak, pretože platí (20) a o distribučnej funkcii vieme, že je neklesajúca, musí pre nejaké $\alpha \in (0, 1)$, také, že $\alpha \leq \alpha_0$, platiť

$$P \left(S_T^{(i)} \leq \frac{L}{(1 - L)q} X_T^{- (i)} \right) \geq \alpha,$$

resp. po rozpísaní q

$$P \left(S_T^{(i)} \leq \frac{L}{(1-L)} \frac{(1-C^{(i)}) X_T^{- (i)}}{C^{(i)} X_0^{- (i)}} S_0^{(i)} \right) \geq \alpha.$$

Použitím hraničnej hodnoty α z tejto nerovnosti, dostaneme nakoniec rovnicu

$$P \left(S_T^{(i)} \leq \frac{L}{(1-L)} \frac{(1-C^{(i)}) X_T^{- (i)}}{C^{(i)} X_0^{- (i)}} S_0^{(i)} \right) = \alpha, \quad (22)$$

z ktorej už vieme Soft limit $C^{(i)}$ vypočítať.

Ak budeme riešiť rovnicu (22) a vypočítame z nej $C^{(i)}$ pre nejaké nami zvolené α , tak zároveň vieme, že toto riešenie bude vyhovovať všetkým prípustným hodnotám $x_0^{(i)}$ daných nerovnosťou v prvom výraze (19) (t.j. ohraničením (20)). Zároveň tiež vieme, že nerovnosť na pravej strane (19) bude splnená aspoň s pravdepodobnosťou α .

Rovnica (22) je tak inými slovami riešením problému (19) pre najprísnejší prípad podielu akcie i na portfóliu, keď je tento podiel nastavený na úroveň samotného Soft limitu. V ďalšom sa budeme zaoberať práve riešením rovnice (22).

4.3 Jednoduchý prípad jednej pohybujúcej sa akcie

V rovnici (22) vystupuje niekoľko premenných, ktoré pre nás vo východiskovom čase $t = 0$ nie sú známe. Sú to budúce hodnoty cien $S_T^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$, všetkých akcií, ktoré majú v portfóliu svoje zastúpenie.

Pre zjednodušenie na začiatok uvažujme, že hodnotovo sa pre nás do budúceho času T , bude meniť iba jediná akcia, označme ju i . Hodnoty ostatných akcií $k = 1, \dots, n$, $k \neq i$ v čase T pritom položíme rovné poslednej známej hodnote $S_T^{(k)} = S_0^{(k)}$. Hodnotu peňažno-dlhopisovej zložky taktiež považujme za nemennú, čím máme $B_T = B_0$.

Na základe tohto zrejme platí $X_T^{- (i)} = X_0^{- (i)}$, čím môžeme rovnicu (22) zjednodušiť do tvaru

$$P \left(S_T^{(i)} \leq \frac{L}{(1-L)} \frac{(1-C^{(i)})}{C^{(i)}} S_0^{(i)} \right) = \alpha.$$

Pokračujme ďalej v úpravách tejto rovnice

$$P \left(\frac{S_T^{(i)}}{S_0^{(i)}} \leq \frac{L}{(1-L)} \frac{(1-C^{(i)})}{C^{(i)}} \right) = \alpha,$$

až kým v argumente pravdepodobnosti nedostaneme známy výraz spojite zloženého výnosu akcie za obdobie $[0, T]$:

$$P \left(\ln \frac{S_T^{(i)}}{S_0^{(i)}} \leq \ln \left(\frac{L}{(1-L)} \frac{(1-C^{(i)})}{C^{(i)}} \right) \right) = \alpha. \quad (23)$$

V Kapitole 2 sme sa zaoberali teoretickým aparátom, ktorého jedným z dôležitých výsledkov bolo, že ak sa cena akcie riadi geometrickým Brownovým pohybom, má jej výnos definovaný spojite zloženým spôsobom normálne rozdelenie. Tento poznatok teraz využijeme a v (23) položíme

$$\ln \frac{S_T^{(i)}}{S_0^{(i)}} = \mu_T^{(i)} + \sigma_T^{(i)} z,$$

kde $\mu_T^{(i)}$ a $\sigma_T^{(i)}$ sú očakávaný výnos a volatilita akcie i za časové obdobie $[0, T]$ a z je náhodná premenná so štandardným normálnym rozdelením $N(0, 1)$. Dostaneme

$$P \left(\mu_T^{(i)} + \sigma_T^{(i)} z \leq \ln \left(\frac{L}{(1-L)} \frac{(1-C^{(i)})}{C^{(i)}} \right) \right) = \alpha$$

a následne

$$P \left(z \leq \frac{1}{\sigma_T^{(i)}} \left(\ln \left(\frac{L}{(1-L)} \frac{(1-C^{(i)})}{C^{(i)}} \right) - \mu_T^{(i)} \right) \right) = \alpha. \quad (24)$$

Zodpovedajúci α - kvantil, $\alpha \in [0, 1]$, štandardného normálneho označme u_α . Pretože vieme, že

$$P(z \leq u_\alpha) = \alpha,$$

dostaneme porovnaním s výrazom (24) vzťah

$$u_\alpha = \frac{1}{\sigma_T^{(i)}} \left(\ln \left(\frac{L}{(1-L)} \frac{(1-C^{(i)})}{C^{(i)}} \right) - \mu_T^{(i)} \right),$$

z ktorého napokon po sérii algebraických úprav vyjadríme hľadaný Soft limit $C^{(i)}$ pre akciu i :

$$C^{(i)} = 1 / \left(e^{\mu_T^{(i)} + \sigma_T^{(i)} u_\alpha} \cdot \frac{1-L}{L} + 1 \right). \quad (25)$$

Poznámka:

Ak poznáme podiel akcie i na hodnote portfólia, a tento podiel si označíme $w^{(i)}$, tak na základe (24) vieme vypočítať pravdepodobnosť s akou pri akcii i dôjde v čase T k prekročeniu Hard Limitu. Stačí totiž ak za $C^{(i)}$ v (24) dosadíme príslušné váhy $w^{(i)}$ a dostaneme:

$$P \left(z \leq \frac{1}{\sigma_T^{(i)}} \left(\ln \left(\frac{L}{(1-L)} \frac{(1-w^{(i)})}{w^{(i)}} \right) - \mu_T^{(i)} \right) \right) = \beta.$$

4.4 Všeobecný prípad n akcií

Ako trochu zložitejší prípad od predchádzajúceho najprv uvažujeme, že sa v priebehu času budú meniť ceny práve dvoch akcií, ktoré označíme i a j a hodnota peňažno-dlhopisovej zložky.

V rovnici (22) nám tak na rozdiel od predošlého prípadu zostane navyše neznáma $S_T^{(j)}$, t.j. cena akcie j v budúcom čase T a budúca hodnota B_T . Budúcu hodnotu akcie môžeme odhadnúť jej očakávanou hodnotou, ktorá sa pre čas $t > 0$ vypočíta ako

$$E(S_t^{(j)}) = S_0^{(j)} e^{\mu^{(j)} t}, \quad (26)$$

kde $\mu^{(j)}$ je očakávaný výnos akcie j za jednotku času, t.j. napríklad za jeden rok alebo za jeden deň [2].

Rovnaký odhad budúcej hodnoty použijeme aj pre bezrizikovú časť portfólia a položíme

$$E(B_t) = B_0 e^{\eta t}, \quad (27)$$

kde η je referenčná úroková miera BRIBID za jednotku času.

Vo vzorci (22) tak budeme potrebovať vyčíslieť hodnoty X_0^{-i} a X_T^{-i} . Prvý výraz je počiatočná hodnota portfólia bez akcie i , ktorú poznáme a druhý dopočítame pomocou (26) a (27):

$$X_T^{-i} = X_T^{-i,j} + S_T^{(j)} x_0^{(j)} + B_T = X_0^{-i,j} + S_0^{(j)} e^{\mu^{(j)}} x_0^{(j)} + B_0 e^{\eta T},$$

kde $X_t^{-i,j}$ označíme hodnotu portfólia bez akcií i a j v čase t .

Úpravami ďalej dostaneme z

$$P \left(S_T^{(i)} \leq \frac{L}{(1-L)} \frac{(1-C^{(i)}) (X_T^{-i,j} + S_T^{(j)} x_0^{(j)} + B_T)}{C^{(i)} X_0^{-i}} S_0^{(i)} \right) = \alpha$$

postupom analogickým predchádzajúcemu vzorec pre výpočet Soft Limitu $C^{(i)}$

$$C^{(i)} = 1 / \left(e^{\mu_T^{(i)} + \sigma_T^{(i)} u_\alpha} \cdot \frac{1-L}{L} \frac{X_0^{-i}}{X_T^{-i,j} + S_T^{(j)} x_0^{(j)} + B_T} + 1 \right).$$

Napokon, ak uvažujeme o všeobecnom prípade, v ktorom každé aktívum vo fonde mení s postupom času svoju hodnotu, aplikujeme jednoducho doterajší postup. Pre použitie v rovnici (22) nám tak zostane odhadnúť výraz X_T^{-i} , čo vykonáme ako v predošlom

$$X_T^{-i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n S_T^{(k)} x_0^{(k)} + B_T$$

a nakoniec analogickým postupom určíme výpočtový vzorec pre príslušný Soft limit

$$C^{(i)} = 1 / \left(e^{\mu + \sigma u_\alpha} \cdot \frac{1-L}{L} \frac{X_0^{-i}}{X_t^{-i}} + 1 \right). \quad (28)$$

5 Simulácie a Optimalizácia

V tejto predposlednej kapitole si zostrojíme modelové portfólio dôchodkového fondu a na jeho akciovej zložke Monte Carlo simuláciami overíme funkčnosť odvodených vzorcov.

V druhej časti sa budeme venovať známemu Markowitzovmu modelu portfólia. Jeho modifikáciu použijeme na dodatočnú optimalizáciu investícií dôchodkového fondu s využitím všeobecného vzorca Soft limitov pre n akcií, ktorý bol odvodený v predchádzajúcej kapitole.

5.1 Modelové portfólio

Aby sme sa čo najviac priblížili realite slovenských dôchodkových fondov, budeme preferovať modelové portfólio, ktoré zodpovedá súčasnému rozloženiu investícií v rastových resp. vyvážených fondov slovenských DSS (viď Obrázok 4 v Kapitole 2). Budeme uvažovať o portfóliu, ktorého majetok vo východiskovom čase (t.j. v čase $t = 0$) má hodnotu 5 miliárd Sk. Budeme tak preferovať, aby väčšia časť majetku bola investovaná do (pre nás) bezrizikových peňažno-dlhopisových investícií a 20% percent malo svoje zastúpenie v akciových investíciách.

Presnejšie nasledovné rozloženie investícií sa bude týkať jedného modelového fondu, na základe ktorého navrhne kombinovanú optimalizáciu ku koncu tejto 5. Kapitoly:

- * Akciové investície: 20%
- * Dlhopisové investície: 50%
- * Peňažné investície: 30%

Peňažné a dlhopisové investície nebudeme bližšie špecifikovať, nakoľko sme už skôr uviedli, že celú peňažno-dlhopisovú zložku portfólia považujeme za jednu bezrizikovú investíciu.

Na účely ďalších simulácií a optimalizácie je však potrebné špecifikovať konkrétne akciové tituly, ktoré si želáme, aby boli v modelovom fonde zahrnuté. Aby sme sa opäť

	Investičný titul	Typ	Denominácia
Akciové investície	SPDRs	ETF	USD
	ishares DJ Euro Stoxx 50	ETF	EUR
	Nomura ETF - NIKKEI 225	ETF	JPY
	Meinl European Land Ltd.	Akcia	EUR
	ČEZ a.s.	Akcia	CZK
	OTP Bank Nyrt.	Akcia	HUF
	PKO Bank Polski SA	Akcia	PLN
	Komerční Banka a.s.	Akcia	CZK
	Unipetrol a.s.	Akcia	CZK
	MOL Hungarian Oil and Gas Nyrt.	Akcia	HUF
	Polski Koncern Naftowy SA	Akcia	PLN
	Conoco Phillips Inc.	Akcia	USD
	Telekom Austria AG	Akcia	EUR
	ERSTE Bank AG	Akcia	EUR
Uniqua Versicherungen AG	Akcia	EUR	

Tabuľka 1: Akciové investície modelového dôchodkového fondu.

priblížili k realite slovenských dôchodkových fondov, vyberme do fondu z prevažnej časti akciové tituly európske a v menšej miere americké a ázijské (jeden ázijský ETF fond), viď Tabuľku 1.

Dáta, ktoré máme k dispozícii sú v rozsahu niečo cez 2.5 roka, od 1.6.2005 do 31.1.2008. My však budeme pracovať iba dátami od 1.6.2005 do 31.12.2007, aby sme sa vyhli skresleniam, ktoré by mohlo spôsobiť zahrnutie problematického januára 2008. Vo výpočtoch taktiež budeme používať bezrizikovú úrokovú mieru. Za tú položíme aritmetický priemer 3 mesačného BRIBID-u v dĺžke zodpovedajúcej časovému obdobiu, pre ktorý budeme počítať Soft limity alebo robiť simulácie. Dáta referenčných úrokových mier z úverov a vkladov, BRIBOR a BRIBID, sú dostupné napr. na internetovej stránke Národnej Banky Slovenska, <http://www.nbs.sk>.

5.2 Majetok v dôchodkovom fonde ocenený v slovenských korunách

Pretože zákonné obmedzenia (Hard limity) na majetok v dôchodkovom fonde sa vzťahujú k majetku fondu, ktorý je vyjadrený v slovenských korunách, je potrebné previesť akciové tituly denominované v zahraničných menách pomocou príslušného historického výmenného kurzu. Tieto historické údaje je tiež možné nájsť na stránke Národnej Banky Slovenska. V nasledovných testoch a simuláciách sme pracovali s historickými cenami akcií, ktoré sme najprv previedli na slovenskú menu.

5.3 Monte Carlo simulácie

Simulácia je procedúra, počas ktorej sú náhodné čísla generované s istými pravdepodobnosťami, o ktorých predpokladáme, že sa viažu so zdrojom neistoty. Týmto zdrojom môžu byť ceny akcií, ceny komodít, úrokové miery alebo výmenné kurzy. Výstupy získané náhodnými pokusmi sú následne analyzované, aby mohli byť zistené pravdepodobné výsledky a vyhodnotené prípadné riziko. Táto technika sa tiež zvykne nazývať Monte Carlo simuláciami¹² podľa opakujúcej sa a náhodnej povahy procesu, ktorý nachádza svoju analógiu v činnostiach vykonávaných pri hraní hazardných hier. My túto techniku použijeme pre modelovanie vývoja cien akcií (konkrétne akcií z Tabuľky 1), a to na základe ich historických údajov. Pre ilustráciu jedného z postupov, ktoré si teraz uvedieme, viď napr. kapitolu 10.4 v publikácii [2].

Vráťme sa do Podkapitoly 3.2, kde sme si uviedli populárny prístup k modelovaniu stochastického vývoja ceny akcie pomocou geometrického Brownovho pohybu (viď Definícia 3.3). Táto Definícia zodpovedá modelu správania ceny akcie pri použití spojitě zložených výnosov.

Ak uvažujeme, že máme k dispozícii časový rad denných výnosov vypočítaných spojitě zloženým spôsobom, t.j. $\{\ln \frac{S_1}{S_0}, \ln \frac{S_2}{S_1}, \dots, \ln \frac{S_m}{S_{m-1}}\}$, tak očakávaný výnos akcie

¹²podľa slávneho kasína v štáte Monako; Douglas Hubbard "How to Measure Anything: Finding the Value of Intangibles in Business"pg. 46, John Wiley & Sons, 2007 (referencia z www.wikipedia.org)

$\tilde{\mu}$ (značenie z Definície 3.3) odhadneme z historických údajov najjednoduchšie ako ich aritmetický priemer. Rovnako by sme volatilitu σ odhadli na základe tohto časového radu.

Odhady $\tilde{\mu}$ a σ tiež môže byť niekedy výhodné odhadnúť spôsobom, ktorý bude zodpovedať dĺžke obdobia, na ktorú chceme vývoj simulovať (viď pojednanie o možných prístupoch k výberu historickej bázy pri odhade očakávaného výnosu a volatility v Podkapitole 3.3).

Ak máme príslušné parametre odhadnuté, tak vhodnou časovou diskretizáciou začínajúcou v bode $X_0 = 0$ nasimulujeme vývoj Brownovho pohybu pomocou jeho prírastkov (viď prvú vlastnosť Brownovho pohybu v Definícii 3.1):

$$\Delta X = \tilde{\mu}\Delta t + (\sigma\sqrt{\Delta t})z,$$

kde z je náhodný výber zo štandardného normálneho rozdelenia. Teda

$$X_i = X_{i-1} + \Delta X, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

vždy pre nový výber z .

Cenu akcie dostaneme následnou aplikáciou exponenciálnej funkcie na nasimulovaný rad hodnôt X_1, X_2, \dots, X_m a pre násobením počiatočnou hodnotou S_0 . Potom

$$S_i = S_0 e^{X_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

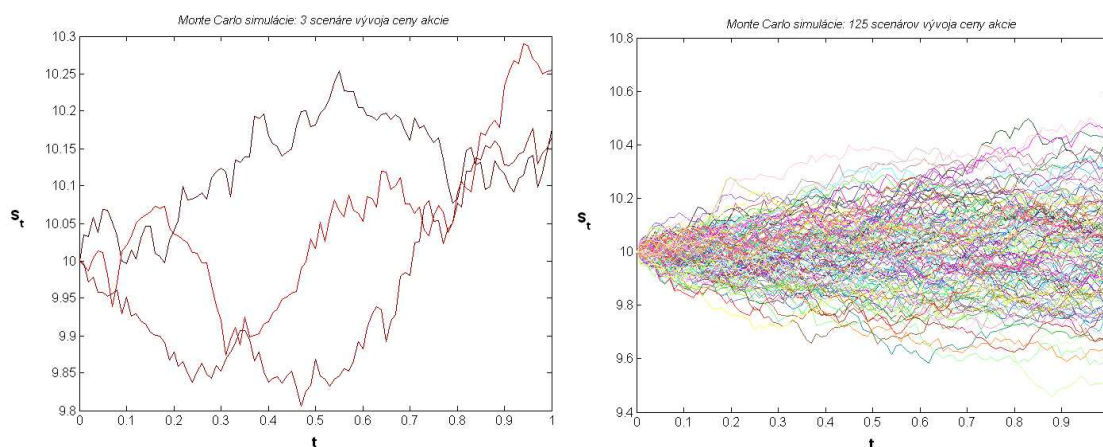
Iným prístupom k simulácii je použiť stochastickú diferenciálnu rovnicu (3) (viď Podkapitola 3.2). Aby sme boli korektní, je však v tomto prípade potrebné odhadnúť parameter μ (očakávaný výnos akcie) z radu denných výnosov definovaných jednoduchým spôsobom, tzn. prostredníctvom radu pomerných zmien $\left\{ \frac{S_1 - S_0}{S_0}, \frac{S_2 - S_1}{S_1}, \dots, \frac{S_m - S_{m-1}}{S_{m-1}} \right\}$.

Potom môžeme použiť diskretný prípad diferenciálnej rovnice (3)

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S z \sqrt{\Delta t}, \quad (29)$$

ktorej simulované hodnoty sú priamo prírastkami ceny akcie riadiacej sa geometrickým Brownovým pohybom:

$$S_i = S_0 + \Delta S \quad i = 1, \dots, m. \quad (30)$$



Obrázok 9: Monte Carlo simulácie vývoja ceny akcie s $\mu = 0,15$ a $\sigma = 0,3$.

My sme v aplikáciách použili prvý spôsob, nakoľko tento sa ukázal byť časovo a výpočtovo menej náročným. Na Obrázku 9 vľavo sú nasimulované 3 možné scenáre vývoja ceny akcie s počiatočnou hodnotou 10, ktorej očakávaný výnos za jednotku času je 15% a volatilita 30%. Na druhom obrázku vedľa je nasimulovaných až 125 scenárov rovnakého procesu. V oboch prípadoch bola použitá diskretizácia $\Delta t = 1/100$.

Pretože sme pri formulácii základnej úlohy pre výpočet Soft limitov (implikácia (19) v Podkapitole 4.2) nepoložili žiadnu požiadavku na neprekročenie Hard limitu počas obdobia $(0, T)$ (viď pravú stranu implikácie (19), kde sa tento výraz vzťahuje iba k časového okamihu $T > 0$), nemá pre nás význam simulovať vývoj akcie počas intervalu $(0, T)$. Je samozrejme možné, že k prekročeniu Hard limitu dôjde behom časového horizontu $(0, T)$ (na prvom zobrazení Obrázku 9 je napríklad vidieť, že v jednom scenári došlo počas obdobia $(0, 1)$ k vychýleniu sa ceny nad úroveň hodnoty, ktorú dosiahla v koncovom čase $t = 1$). Ak si však spomenieme na východiská, z ktorých vychádzala základná definícia Brownovho pohybu čoby Markovovho procesu, je našim predpokladom, že hodnota akcie v poslednom čase v sebe zahŕňa aj každú informáciu z jej dodatočného vývoja. O ten sa my tým pádom nemusíme zaujímať. V nasledovných simuláciách budeme preto vždy simulovať iba hodnoty akcie v koncovom čase T , pre ktorý bol stanovený Soft limit, t.j. diskretizačný faktor položíme $\Delta t = 1$.

5.4 Testovanie vzorcov

Teraz si overíme, či vzťah, ktorý sme odvodili pre všeobecný výpočet Soft limitov pre n akcií (rovnica (28) v Podkapitole 4.4), sa bude v simulovaných podmienkach správať podľa našich očakávaní. Tieto podmienky sú samozrejme v určitých ohľadoch zjednodušením reálnej situácie, nakoľko predpokladajú normálne rozdelenie výnosov, ktoré akcie nie vždy spĺňajú.

Pripomeňme si konečný vzťah pre výpočet Soft limitu pre akciový titul i , tak, ako je uvedený ku koncu Kapitoly 4:

$$C^{(i)} = 1 / \left(e^{\mu + \sigma u_\alpha} \cdot \frac{1 - L X_0^{- (i)}}{L X_t^{- (i)}} + 1 \right). \quad (31)$$

Vzhľadom na to, že Soft limit pre akciu i závisí od podielového zastúpenia ostatných aktív v portfóliu, a to predovšetkým akcií vzhľadom na ich rizikovosť, je zřejmé, že musíme viac konkretizovať rozloženie investícií v akciovej zložke nášho modelového portfólia, tzn. musíme prideliť konkrétne váhy jednotlivým akciovým titulom (tým zároveň rozhodujeme o veľkosti akciovej zložky, pretože tá je súčtom všetkých akciových investícií). Rozhodnime sa pre hraničný prípad a uvažujme s portfóliom, ktorého všetky akciové tituly sú v portfóliu zastúpené v maximálne dovolenej miere, ktorú zákon umožňuje, t.j. nech všetky akciové tituly z Tabuľky 1 majú podiel na majetku vo fonde vo výške 3%. Pretože uvažujeme celkovo o 15 akciových tituloch, akciová zložka takto nastaveného portfólia fondu bude tvoriť $15 * 3\% = 45\%$ jeho majetku. Na základe tohto maximálneho rizikového zastúpenia (pri vybranom súbore 15 akcií), by sme intuitívne očakávali, že sa toto nastavenie premietne aj do výšky Soft limitov. Tieto by tak mali zohľadniť vyššiu rizikovosť fondu nižšími hodnotami.

Uvažujme, že náš východiskový deň, v ktorom sa nachádzame je 1.1.2008, tzn. historické údaje, ktoré máme k dispozícii, sú do 31.12.2007. Taktiež sa musíme rozhodnúť pre časový rámec, na ktorý žiadame Soft limity odhadnúť, t.j. kedy napr. predpokladáme alebo chceme, aby došlo k ďalšiemu rebalancovaniu portfólia. Tu by sme očakávali, že s dlhším časovým horizontom do budúcnosti budú hranice Soft limitov klesať, pretože s dlhším časovým výhľadom rastie aj naša neistota o budúcom vývoji akcií.

Rovnica (31) vyžaduje, aby sme z historických dát odhadli parametre μ a σ . Tieto veličiny môžeme odhadnúť jedným spôsobom pomocou dlhodobého očakávaného výnosu resp. volatility, t.j. odhadom pri použití všetkých dostupných údajov, ktoré máme (od 1.6.2005 do 31.12.2007) alebo môžeme použiť iný spôsob, ktorý zohľadní súčasnú situáciu a dĺžku obdobia, na ktorú robíme výpočet. T.j. ak počítame Soft limity pre obdobie o jeden mesiac dopredu, mali by sme pre odhady μ a σ použiť historické údaje z posledného mesiaca, tzn. v našom prípade z vývoja cien od 1.12.2007 do 31.12.2007. V prípade, že robíme odhad volatility na krátke časové obdobie = jedného dňa, môžeme sa naviac pokúsiť odhadnúť (defacto namodelovať) volatilitu dynamickým spôsobom pomocou modelu GARCH(1,1) (viď Podkapitolu 3.4).

My sme jednoduchšie odhady týchto parametrov (odhad očakávaného výnosu pomocou aritmetického priemeru a volatility pomocou štandardnej odchýlky) realizovali v Matlabe. Pre odhad volatility v prípade krátkeho časového úseku = jedného dňa sme použili nástroj Solver v aplikácii MS Excel (príslušné tabuľky sú súčasťou elektronickej prílohy diplomovej práce).

Soft limity pre prvý z týchto prípadov, t.j. pre odhad μ dlhodobým očakávaným výnosom a σ dlhodobou volatilitou, sú pre rôzne časové škály uvedené v posledných 4 stĺpcoch Tabuľky 2 (miera významnosti bola nastavená na úroveň $\alpha = 0.95$). Ročné odhady parametrov μ a σ jednotlivých akciových titulov sú pre všetky 4 časové škály rovnaké a sú uvedené v stĺpcoch 2 a 3. Z výsledkov je na prvý pohľad zrejmé, že vypočítané Soft limity s rastúcim časovým horizontom podľa očakávania klesajú.

Ak však vypočítame Soft limity pri odhadnutí parametrov μ a σ druhým spôsobom, ktorý zohľadňuje daný časový horizont, tak uvidíme, že Soft limity s rastúcim časom do budúcnosti klesať nemusia (viď Tabuľku 3). Týmto spôsobom vypočítané Soft limity tak zrejme lepšie vyhovujú nedávnomu špecifickému vývoju cien ku dňu stanovenia Soft limitov, t.j. v našom prípade k 1.1.2008. Z výsledkov naviac vidíme, že Soft limit jednom z prípadov dokonca presiahol zákonom povolenú 3%-nú hranicu, čo môže byť dôsledkom očakávania poklesu hodnoty tejto akcie do blízkej budúcnosti. V prípadoch Soft limitu pri akciách OTP Bank a Conoco Phillips stanovených na dobu 1 mesiaca naopak vidíme, že Soft limity boli stanovené na nižšie úrovne. Ak by sme sa pozreli na priemerný rast týchto akciových titulov počas posledného mesiaca

Investičný titul	($\%$)		Soft Limity ($\%$)			
	μ	σ	deň	týždeň	2 týždne	mesiac
SPDRs	-5.16	15.26	2.95	2.90	2.87	2.82
ishares DJ Euro Stoxx 50	6.71	14.52	2.95	2.90	2.86	2.80
Nomura ETF - NIKKEI 225	-2.14	18.98	2.94	2.87	2.83	2.76
Meinl European Land Ltd.	-21.55	33.21	2.90	2.79	2.71	2.61
ČEZ a.s.	44.92	30.24	2.90	2.77	2.68	2.52
OTP Bank Nyrt.	6.20	33.08	2.90	2.78	2.70	2.58
PKO Bank Polski SA	26.67	32.10	2.90	2.78	2.69	2.55
Komerční Banka a.s.	13.25	26.19	2.92	2.82	2.74	2.63
Unipetrol a.s.	32.65	33.76	2.90	2.77	2.67	2.52
MOL Hungarian Oil and Gas Nyrt.	12.25	33.13	2.90	2.78	2.69	2.56
Polski Koncern Naftowy SA	5.14	34.09	2.90	2.78	2.70	2.58
Conoco Phillips Inc.	8.45	28.66	2.91	2.81	2.74	2.62
Telekom Austria AG	3.9	23.04	2.93	2.85	2.79	2.70
ERSTE Bank AG	-1.49	27.58	2.92	2.82	2.75	2.66
Uniqua Versicherungen AG	10.93	26.85	2.92	2.82	2.75	2.65

Tabuľka 2: Soft limity pre portfólio so 45% akciovým zastúpením pre rôzne časové škály; μ -dlhodobý očakávaný výnos, σ -dlhodobá volatilita.

(z výsledkov výstupu programového kódu), zistili by sme, že ich ceny iba počas tohto obdobia vzrástli o 15.47% resp. 16.47%. Tieto údaje sa tak zrejme tiež premietli do výšky Soft limitov.

Upravme teraz zloženie nášho modelového portfólia (so 45%-ným zastúpením akciovej zložky) tak, aby sme vyhovelí výsledkom z Tabuľky 3. Položme podiely jednotlivých akciových titulov na úrovne samotných Soft limitov. Získame tak štyri portfólia (v Tabuľke 4 sú označené číslicami 1 až 4), z ktorých každé zodpovedá jednej z časových škál: 1 deň, 1 týždeň, 2 týždne a 1 mesiac.

Môžeme si ich predstaviť ako štyri odlišné požiadavky na ďalší termín, kedy má

Investičný titul	Soft Limits (%)			
	deň	týždeň	2 týždne	mesiac
SPDRs	2.99	2.92	2.84	2.64
ishares DJ Euro Stoxx 50	2.95	2.86	2.83	2.77
Nomura ETF - NIKKEI 225	2.91	2.82	2.88	2.87
Meinl European Land Ltd.	2.79	2.87	2.58	2.35
ČEZ a.s.	2.87	2.67	2.72	2.59
OTP Bank Nyrt.	2.90	2.85	2.86	2.23
PKO Bank Polski SA	2.89	2.63	2.72	2.45
Komerční Banka a.s.	2.91	2.73	2.73	2.42
Unipetrol a.s.	2.93	2.86	2.76	2.60
MOL Hungarian Oil and Gas Nyrt.	2.89	2.69	2.81	2.53
Polski Koncern Naftowy SA	2.90	2.95	2.88	2.46
Conoco Phillips Inc.	2.97	2.74	2.56	2.31
Telekom Austria AG	2.97	2.84	2.83	2.92
ERSTE Bank AG	3.03	2.91	2.82	2.73
Uniqua Versicherungen AG	2.86	2.74	2.68	2.77

Tabuľka 3: Soft limity pre portfólio so 45% akciovým zastúpením pre rôzne časové škály; μ_p -upravený odhad, σ_p -upravený odhad.

byť portfólio rebalancované.

Ak bol vzorec (31) správne odvodený, tak nasimulovaním veľkého počtu scenárov vývoja akcií (t.j. 15-tich, ktoré majú svoje zastúpenie v týchto portfóliach), by sme mali získať podiel scenárov, u ktorého nedôjde k prekročeniu Hard limitu na úrovni nami zvolenej hladiny α , t.j. na úrovni 95%.

Pomocou Monte Carlo simulácii (viď predchádzajúca podkapitola) sme tak následne pre každé z týchto štyroch kritických portfólií vygenerovali 10 000 scenárov vývoja ich akcií. Výsledok tohto pokusu je uvedený v posledných štyroch stĺpoch Tabuľky 4. Dá sa konštatovať, že výsledky vyšli v súlade s našimi očakávaniami, pretože počty nasimulovaných scenárov, u ktorých došlo k prekročeniu Hard limitu

Investičný titul	Portólio			
	1	2	3	4
SPDRs	95.26	94.00	94.89	95.95
ishares DJ Euro Stoxx 50	94.72	94.54	94.88	95.44
Nomura ETF - NIKKEI 225	95.07	94.85	94.90	95.42
Meinl European Land Ltd.	94.98	95.10	94.91	95.74
ČEZ a.s.	95.09	94.48	94.90	95.62
OTP Bank Nyrt.	94.79	94.12	94.95	95.48
PKO Bank Polski SA	94.75	94.32	95.09	95.76
Komerční Banka a.s.	95.13	94.39	95.19	95.39
Unipetrol a.s.	95.52	93.97	95.24	95.77
MOL Hungarian Oil and Gas Nyrt.	94.90	93.47	95.01	95.29
Polski Koncern Naftowy SA	94.81	93.97	94.80	95.83
Conoco Phillips Inc.	95.05	93.84	94.80	95.46
Telekom Austria AG	94.89	93.52	94.61	95.87
ERSTE Bank AG	94.85	92.96	94.46	94.90
Uniqua Versicherungen AG	95.10	93.47	95.00	95.66
Žiadna z akcií neprekročila HL	46.50%	40.32%	45.00%	50.98%

Tabuľka 4: MC simulácie. Podiely nasimulovaných scenárov (v %), u ktorých nedošlo k prekročeniu HL. Očakávaná hladina: $\alpha=95\%$. Počet simulácií: 10 000/akcia.

pri jednotlivých akciách, sa naozaj pohybujú na nami zvolenej úrovni 95%.

V poslednom riadku Tabuľky 4 je pre každé z portfólií uvedený podiel simulácií (z celkového počtu 10 000), u ktorého nedošlo u žiadnej z akcií k prekročeniu Hard limitu. Toto číslo je z hľadiska toho, čím sa zaoberáme, asi najdôležitejšou informáciou, pretože zákon ukladá, že u žiadnej z akcií nemôže dôjsť k prekročeniu Hard limitu. Čísla z posledného riadku Tabuľky 4 by zodpovedali situácii, keď sa ceny jednotlivých akcií od seba odvíjajú nezávisle. Presnejšie pre 15 akciových titulov máme očakávané zastúpenie scenárov, kedy u žiadnej z akcií portfólia nemá dôjsť k prekročeniu Hard limitu = $0.95^{15} = 46.33\%$, čo približne zodpovedá výsledkom z posledného riadku.

5.5 Markowitzov model

V ďalšom si uvedieme známy optimalizačný model, resp. úlohu, ktorá sa zakladá na tzv. Mean-Variance analýze. Táto úloha sa dá, ako neskôr uvidíme, skombinovať so vzorcom na výpočet Soft limitov, ktorý sme odvodili. Využijeme pritom náš predpoklad o bezrizikivosti peňažno-dlhopisovej zložky dôchodkového fondu. Pre bližšie a podrobné informácie o Markowitzovej teórii portfólia dávame do pozornosti literatúru [6] a [5].

5.5.1 Markowitzov model akciového portfólia

Predpokladajme, že portfólio P je zložené z n akcií, ktorých podiely sú určené váhami w_1, w_2, \dots, w_n , pričom súčet váh je rovný 1.

Ak $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ označíme očakávané výnosy akcií, potom očakávaný (priemerný) výnos portfólia P , ktorý označíme \bar{r}_p , bude

$$\sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i = \bar{r}_p.$$

Aby sme mohli samotný problém naformulovať, potrebujeme taktiež určiť varianciu portfólia, ktorá bude zároveň vyjadrením jeho rizikivosti. Pre tento účel potrebujeme vypočítať varianciu výnosov akcií $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ a tiež ich kovariancie.

Kovariancia výnosov dvoch akcií i a j je definovaná ako

$$\text{cov}(r_i, r_j) = E[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)].$$

Ak máme k dispozícii m pozorovaní výnosov akcií i a j vykonaných s rovnakým časovým odstupom, ozn. r_i^k a r_j^k pre $k = 1, \dots, m$, tak odhadom ich kovariance, označme tento odhad σ_{ij} , bude

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (r_i^k - \bar{r}_i)(r_j^k - \bar{r}_j).$$

Pre varianciu celého portfólia potom platí:

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2 &= E[(r_p - \bar{r}_p)^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i r_i - \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i\right)^2\right] \\
 &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i (r_i - \bar{r}_i)\right) \left(\sum_{j=1}^n w_j (r_j - \bar{r}_j)\right)\right] \\
 &= E\left[\sum_{i,j=1}^n w_i w_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j E[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)] \\
 &= \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}
 \end{aligned}$$

Teraz už môžeme naformulovať Markowitzov model ako matematický problém, ktorého riešením má byť množina portfólií s minimálnou varianciou (viď [6] alebo [5]):

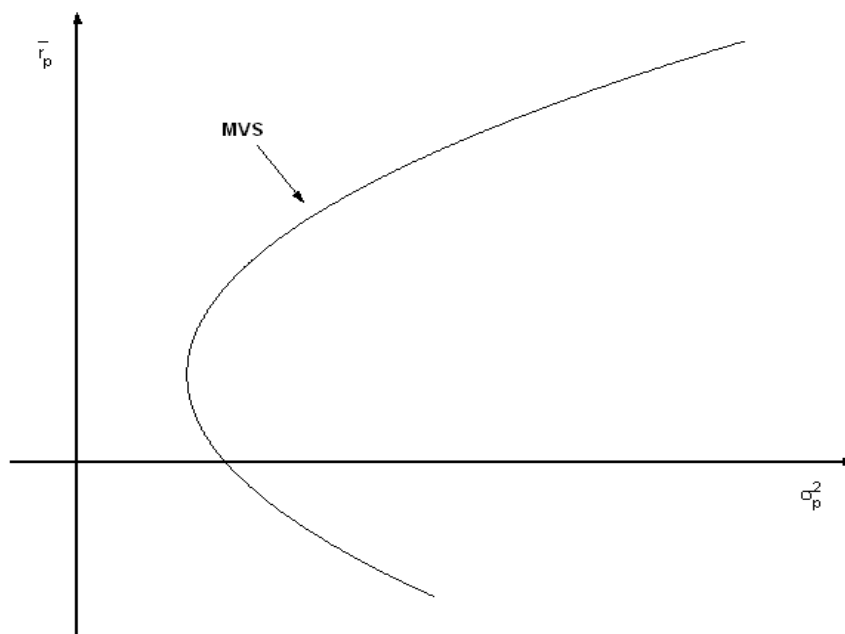
$$\min \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}, \quad (32)$$

pri ohraničeniach:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i &= \bar{r}_p \\
 \sum_{i=1}^n w_i &= 1.
 \end{aligned} \quad (33)$$

Riešenie tejto minimalizačnej úlohy má svoje explicitné vyjadrenie, ktorého výpočet, a ani samotný výsledok tu však nebudeme uvádzať. Pre bližšie podrobnosti čitateľa odkazujeme na Kapitolu 2 v knihe [6].

Na Obrázku 10 je zobrazená pomocou tzv. „Mean-Variance” diagramu množina portfólií s najmenšou varianciou (Minimum Variance Set alebo skr. MVS), ktorá je riešením tohto problému. Ak na x -ovej osi zobrazíme varianciu portfólia a na y -ovej jeho očakávaný jeho výnos, tak vidíme, že Minimum Variance Set tvorí krivka, ktorá je vyjadrením kvadratickej závislosti variance portfólia od jeho očakávaného výnosu (táto skutočnosť vyplýva z riešenia úlohy (32),(33), viď [6]). Množina bodov (=portfólií), ktorá sa nachádza vpravo od MVS krivky, sa nazýva prípustná oblasť



Obrázok 10: Množina portfólií s minimálnou varianciou

(Feasible Set). Je to množina portfólií, ktoré je možné dostať vhodou kombináciou uvažovaných akcií. Táto oblasť nie je pri úlohe formulovanej prostredníctvom (32) pri ohraničeniach (33) sprava ohraničená.

Portfóliá, ktoré sa nachádzajú v hornej časti krivky tvoria tzv. efektívnu hranicu (Effective Frontier) a nazývame ich efektívnymi portfóliami. Ak si totiž zoberieme ľubovoľné portfólio v dolnej časti MVS krivky, tak k nemu vieme nájsť iné na hornej strane, ktoré nám ponúkne vyšší očakávaný výnos pri rovnakej miere rizika. Portfóliá na dolnej strane krivky tak pre nás nie sú zaujímavé.

Známym dôsledkom vyplývajúcim z riešenia úlohy (32), (33) je tzv. Veta o dvoch fondoch:

Veta 5.1. (Veta o dvoch fondoch) [5], [6]

Existujú dva efektívne fondy (=portfóliá) také, že ľubovoľné efektívne portfólio (t.j. portfólio ležiace na efektívnej hranici) môže byť vytvorené kombináciou týchto dvoch

fondov. Inými slovami, všetkým investorom, ktorí hľadajú efektívne portfólio, stačí investovať do týchto dvoch fondov.

Tento poznatok má svoj významný dôsledok, pretože znamená, že dva vzájomné fondy¹³ môžu poskytnúť kompletný investičný servis pre každého. Teda že nie je potrebné pre jedincov nakupovať jednotlivé akcie, stačí, ak investujú svoje financie do vzájomného fondu [5].

5.5.2 Markowitzov model portfólia s bezrizikovým aktívom

Pre naše účely má kľúčový význam nasledovná úvaha, ktorá je zároveň konečným výsledkom Mean-Variance teórie portfólia.

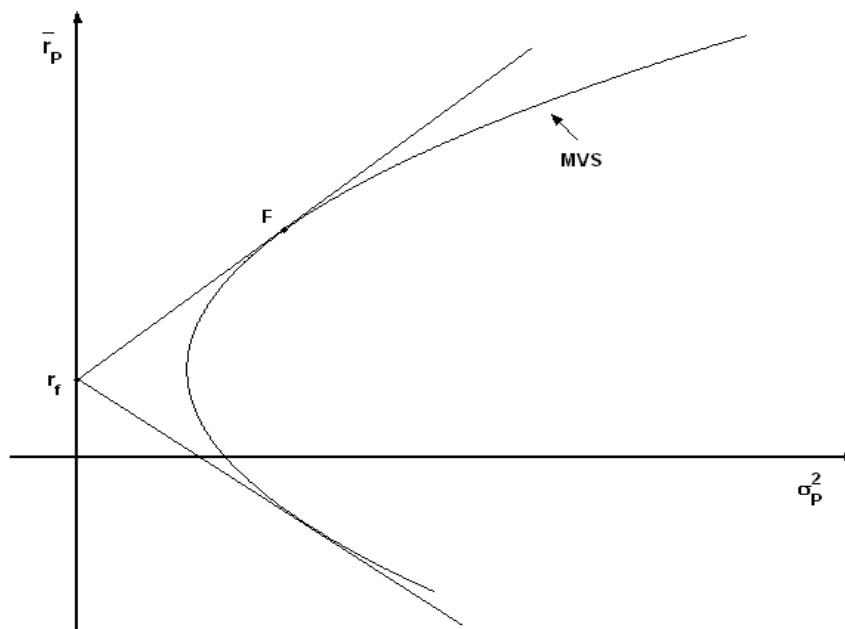
Portfólio, pre ktoré bol Markowitzov problém formulovaný, totiž pozostáva iba z akcií, resp. z akciových investícií. My sa však zaoberáme portfóliom dôchodkového fondu, ktoré v sebe zahŕňa aj ďalšie zložky, ktorými sú peňažné a dlhopisové investície. Keďže sme povedali, že peňažno-dlhopisovú zložku portfólia budeme spoločne považovať za bezrizikovú časť, má pre nás veľký význam tvrdenie, ktoré je známe pod názvom Veta o jednom fonde.

Pri riešení Markowitzovho problému formulovanom vyššie bol využitý predpoklad regulárnosti kovariančnej matice výnosov (viď odvodenie riešenia Markowitzovho problému v publikácii [6], str. 45–48). V prípade, že sa do portfólia rozhodneme zahrnúť navyše bezrizikové aktívum, bude tento predpoklad porušený, nakoľko jeho variancia bezrizikového aktíva je nulová a jeho kovariancia s ostatnými akciami tiež. Problém je tak potrebné riešiť iným spôsobom, a to kombináciou portfólia akcií získaného optimalizáciou Markowitzovho problému a portfólia zloženého z bezrizikového aktíva, viď [6] alebo [5]. Ak označíme $(1 - \alpha)$ váhu pridelenú portfóliu akcií a α váhu bezrizikovej investície, tak pre očakávaný výnos kombinovaného portfólia, ktorý označíme veľkým P , máme

$$\bar{r}_P = \alpha r_f + (1 - \alpha)r_p,$$

kde r_f predstavuje výnos bezrizikového aktíva.

¹³vzájomný fond je investičná spoločnosť, ktorá prijíma investičný kapitál od jednotlivcov a reinvestuje ho do rôznych akcií



Obrázok 11: Markowitzov problém s bezrizikovým aktívom

Pretože výnos bezrizikového aktíva nie je korelovaný s výnosom žiadnej z akcií a jeho volatilita je nulová, bude rizikovosť portfólia P tvoriť iba rizikovosť akciovej zložky, t.j. volatilita portfólia akcií:

$$\sigma_P = \sqrt{(1 - \alpha)^2 \sigma_p^2} = |1 - \alpha| \sigma_p.$$

Pokiaľ by sme na základe týchto vzťahov žiadali portfólio zložené iba z bezrizikového aktíva, položili by sme $\alpha = 1$. Zodpovedajúce portfólio by v tomto prípade malo nulovú varianciu a výnos rovný výnosu bezrizikového aktíva.

Ak ďalej uvažujeme množinu všetkých prípustných riešení (Feasible Set) Markowitzovej úlohy s akciami (tzn. množinu portfólií, ktorá leží vpravo od krivky MVS, viď Obrázok 11), tak pre každý bod (=akciové portfólio) z prípustnej oblasti vieme nájsť polpriamku vychádzajúcu z bodu bezrizikového aktíva a prechádzajúcu akciovým portfóliom. Všimnime si pritom, že množina prípustných riešení sa nám pridaním

bezrizikového aktíva rozšírila a pre kombinované portfólio P ju tvorí trojuholníková oblasť vyznačená polpriamkami na Obrázku 11. Ak vyberieme ľubovoľné akciové portfólio z pôvodnej prípustnej oblasti akciových portfólií, tak kombinované portfólio P bude ležať buď na úsečke medzi ním a bezrizikovým bodom alebo, v prípade, že sa rozhodneme držať krátke pozície v bezrizikovom aktíve, bude ležať ďalej na polpriamke (o krátkych pozíciách v rizikových akciách neuvažujeme). Dá sa tak vidieť, že efektívnu hranicu v tomto prípade tvorí horná dotyčnica ku krivke MVS na Obrázku 11. Dotyčnicové portfólio akcií sme označili písmenom F . Tento výsledok je známy tiež ako Veta o jednom fonde.

Veta 5.2. (Veta o jednom fonde) [5],[6]

Existuje jediný taký fond F (portfólio) zložený z rizikových aktív, že ľubovoľné efektívne portfólio môže byť zostrojené kombináciou tohto fondu a bezrizikového aktíva.

5.5.3 Aplikácia pre prípad dôchodkového fondu

Prejdime teraz ďalej a vráťme sa k tomu, že pri formulácii Markowitzovho problému (32) pri obmedzeniach (33) sme nekládli žiadne podmienky na výber váh. Akciám bolo dovolené ísť ako do krátkych pozícií (tzn. bolo možné si požičiavať), a tiež na ne neboli kladené žiadne limitné nároky (žiadna nútená diverzifikácia).

Ak chceme úlohu upraviť pre podmienky nášho dôchodkového fondu, musíme zaviesť dodatočné obmedzenia na nezápornosť a horné hraničné obmedzenia na akcie, tieto si označíme K_1, \dots, K_n .

Dostaneme tak podobu novej optimalizačnej úlohy:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}, \quad (34)$$

pri ohraničeniach

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i &= \bar{r}_p \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ 0 \leq w_i &\leq K_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (35)$$

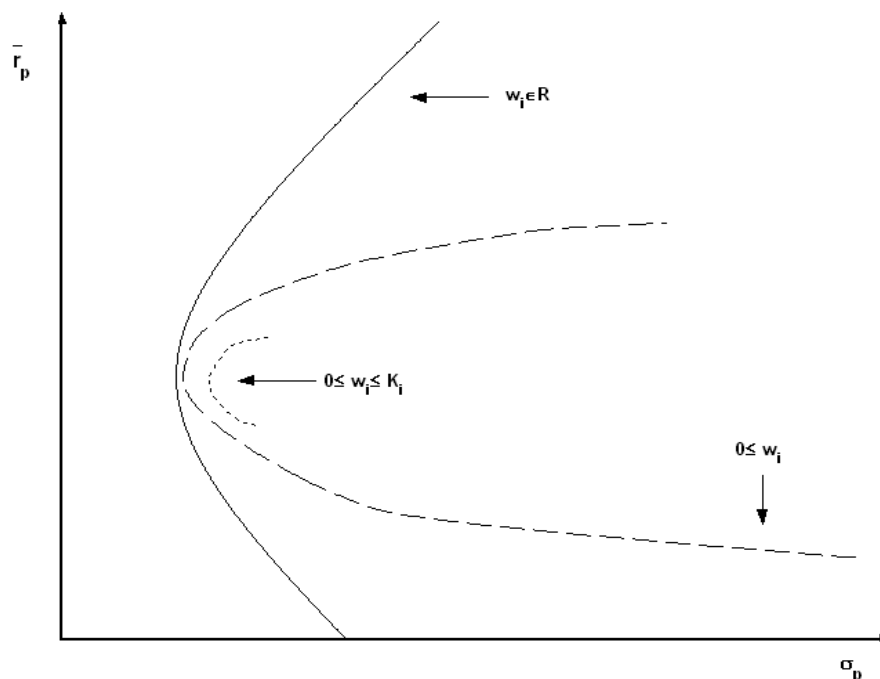
Je zrejmé, že táto úloha už zodpovedá našim požiadavkám kladeným na optimalizáciu akciovej zložky dôchodkového fondu. Problémom však je, že vzhľadom na prítomnosť nerovnostných ohraničení jej riešenie viac nie je možné vyjadriť v explicitnom tvare (viď [6], str. 50 alebo [5], str. 161). Jedná sa však stále o úlohu kvadratického programovania nakoľko má kvadratickú účelovú funkciu. Jej riešenie je tak možné vypočítať numericky pomocou vhodnej numerickej metódy alebo s využitím počítačového programu, ktorý riešenie tohto typu úloh umožňuje. My sme sa pri výpočtoch rozhodli využiť optimalizačný balík aplikácie Matlab.

Po numerickom vypočítaní efektívnej hranice takto modifikovaného Markowitzovho problému nám zostáva určiť portfólio F (viď Obrázok 11), ktoré bude ležať na dotyčnici vychádzajúcej z bodu bezrizikového aktíva (t.j. z bodu výnosu našej peňažno-dlhopisovej zložky dôchodkového fondu).

Je dôležité si uvedomiť, že MVS krivka portfólií vypočítaná na základe tejto úlohy už nie je parabolická, nakoľko ani samotná oblasť prípustných riešení nie je už neohraničená (ako tomu bolo v prípade voľných váh). Na Obrázoku 12 sú pomocou „Mean-Standard Deviation“ diagramu zobrazené 3 množiny riešení Markowitzovho problému s akciami (Minimum Volatility Set krivky) pri voľných, nezáporných a obojstranne ohraničených váhach. Prípustné oblasti (Feasible Sets), ktoré zodpovedajú týmto 3 krivkám sa nachádzajú od nich napravo (avšak v druhom a v treťom prípade už nie sú neohraničené).

Pre nás je dôležité, že prípustná oblasť portfólií (Feasible Set) si vo všetkých troch prípadoch zachováva pre nás dôležitú vlastnosť tzv. konvexnosti vľavo („Convexity to the left“, viď [5], str. 156). Táto vlastnosť hovorí, že úsečka spájajúca ľubovoľné dva body prípustnej množiny nepretína krivku MVS. Toto je pre nás kľúčové poznanie, pretože nám v ďalšom umožňuje uvažovať o efektívnej hranici v riešení Markowitzovho problému s bezrizikovým aktívom (a obojstranne ohraničenými váhami) ako o dotyčnici ku krivke Minimum Variance (resp. Volatility) Set.

Motivácia, ktorá nás vedie nájdaniu tejto dotyčnice, je určenie takého akciového portfólia Markowitzovho problému s obojstranne ohraničenými váhami, ktoré leží na efektívnej hranici a zároveň zvierá s horizontálou prechádzajúcou cez bod bezrizikového aktíva najväčší uhol.



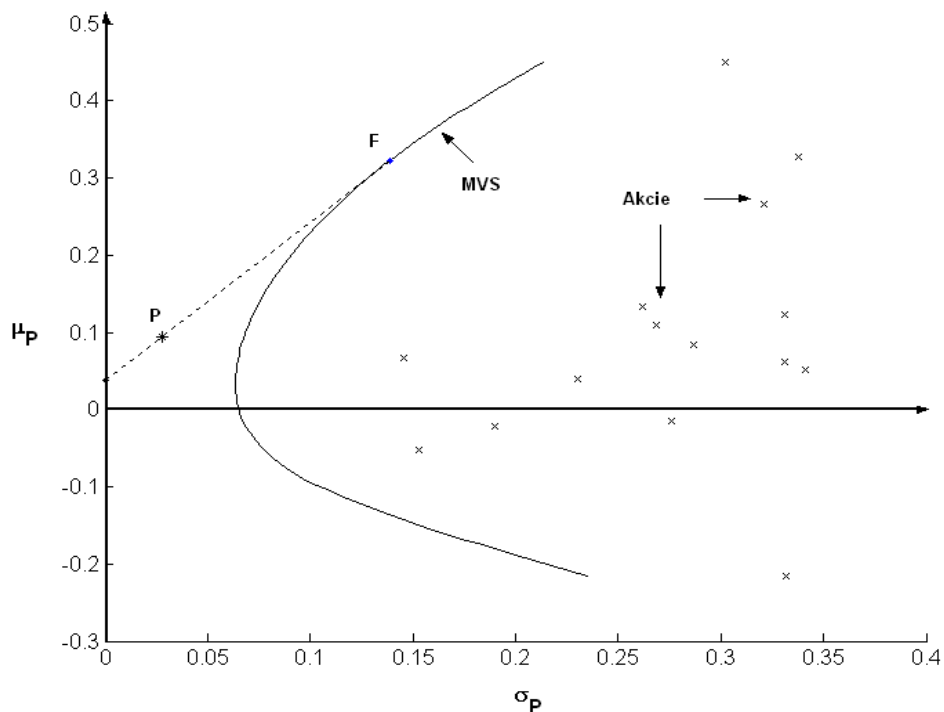
Obrázok 12: Množiny portfólií s minimálnou volatilitou (MVS krivky) pre rôzne ohraňčených váhach Markowitzovej úlohy

Inými slovami, našou úlohou je nájsť takého portfólia na MVS krivke, ktoré zodpovedá maximalizácii funkci tangens, o ktorej vieme, že je na intervale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ rastúca:

$$\max_{(\bar{r}_p, \sigma_p) \in MVS} \tan \theta = \max_{(\bar{r}_p, \sigma_p) \in MVS} \left(\frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p} \right). \quad (36)$$

Po vypočítaní efektívnej hranice nám nakoniec zostane určiť podiel akciových investícií na majetku fondu (t.j. stanoviť parameter α). Ak napr. položíme $\alpha = 0.8$, tak žiadame, aby bola peňažno-dlhopisová zložka v portfóliu fondu zastúpená 80-timi percentami a akciové investície tvorili zvyšných 20%

Na Obrázku 13 je konkrétny prípad Markowitzovej úlohy s bezrizikovým aktívom pre modelové portfólio z Podkapitoly 5.1 za použitia historických údajov od 1.6.2005 do 31.12.2007. Krivka Minimum Volatility Set zobrazená na obrázku bola získaná nu-



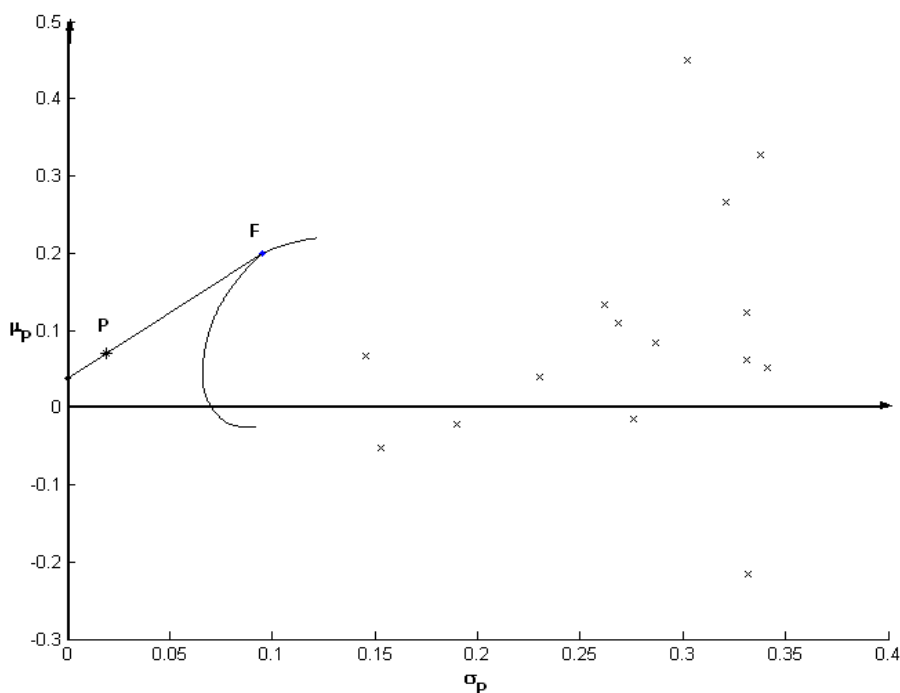
Obrázok 13: Markowitzov problém s bezrizikovým aktívom pri nezáporných váhach.

merickým riešením úlohy (34) pri podmienke nezápornosti váh (bez horného ohraničenia). Na obrázku je prerušovanou čiarou zobrazená efektívna hranica a dotykové akciové portfólio F . Zložené portfólio P , ktoré je vyznačené na efektívnej hranici je kombináciou bezrizikového aktíva a akciového portfólia v pomere 80 : 20 (t.j. akciová zložka zloženého portfólia tvorí 20%). Krížiky na Obrázku 13 zodpovedajú jednotlivým akiovým titulom (viď Tabuľku 1) akciovej zložky portfólia. Očakávaný ročný výnos takto skombinovaného portfólia P je 9.42% a jeho volatilita je iba 2.78%.

5.6 Dvojstupňová optimalizácia portfólia pri Soft limitoch

V tejto poslednej časti navrhujeme na príklade jednoduchý postup, ktorým je možné skombinovať výpočet Soft limitov s optimalizáciou portfólia pomocou Markowitzovho portfólia s bezrizikovým aktívom.

Budeme pracovať s modelovým portfóliom uvedeným v Podkapitole 5.1 (s akciovou zložkou = 20%) a s historickými údajmi od 1.6.2005 do 31.12.2007. Za bezrizikovú mieru výnosu našej peňažno–dlhopisovej zložky použijeme aritmetický priemer z 3–mesačného BRIBID–u za rovnaké časové obdobie.



Obrázok 14: Markowitzov problém s bezrizikovým aktívom pre modelový dôchodkový fond. Prvá optimalizácia.

Vychádzajúc z toho, že pre náš modelový fond máme vybrané konkrétne akciové tituly (viď Tabuľka 1 v Podkapitole 5.1), bude našim prvým krokom optimalizácia akciovej zložky pomocou modifikovanej Markowitzovej úlohy (34) pri odhraničení-

ach (35). Pôvodnú formuláciu Markowitzovho problému (32), (33) nemôžeme použiť, pretože dôchodkový fond má povinnosť dodržiavať 3%-né zákonné obmedzenie na jeden akciový titul a rovnako má zakázané prechádzať do krátkych pozícií v investíciách. Horné obmedzenia na váhy zo systému (35) tak položíme $K_i = 0.03$ pre $i = 1, 2, \dots, 15$.

Numerickým vyriešením úlohy (34) pri (35) na počítači získame krivku MVS. Na základe tohto riešenia zistíme, ktoré z portfólií ležiacich na tejto krivke zodpovedá riešeniu maximalizačnej úlohy (36). Toto dotyčnicové portfólio určí zloženie akciovej zložky v našom dôchodkovom fonde. (viď grafické riešenie aj s vyznačením kombinovaného portfólia P na Obrázku 14)

Konkrétne rozloženie váh vypočítané pre akciovú zložku je uvedené v Tabuľke 5. Keďže za historickú bázu sme použili dáta z obdobia od 1.6.2005 do 31.12.2007, môžeme tento výsledok interpretovať s ohľadom na dlhodobé očakávané výnosy akcií \bar{r}_i a dlhodobú volatilitu $\bar{\sigma}_i$, pretože na základe týchto bolo portfólio optimalizované. Tieto odhady sme uviedli v stĺpcoch 2 a 3 Tabuľky 2, v Podkapitole 5.4, keď sme overovali platnosť Soft limitov. Ak ich porovnáme s výsledkami v Tabuľke 5, tak zistíme, že riešenie Markowitzovej úlohy priradilo kladné váhy 7 akciovým titulom, ktorých dlhodobý očakávaný výnos bol kladný.

Z výsledkov, ktoré sme dostali, je však zrejmé, že takto optimalizované portfólio je vystavené riziku, podľa ktorého by v blízkej dobe mohlo dôjsť k prekročeniu zákonného obmedzenia, a to hneď u viacerých investičných titulov (podieľy akcií 3,5,7,9,12,13,15 boli stanové na úroveň samotného Hard limitu).

Akcia	1	2	3	4	5	6	7	8
w_i	0%	3%	0%	0%	3%	0%	3%	0%
Akcia	9	10	11	12	13	14	15	
w_i	3%	0%	0%	2.88%	2.12%	0%	3%	

Tabuľka 5: Akciová zložka modelového dôchodkového fondu po prvej optimalizácii. Podiel akciovej zložky na hodnote fondu je 20%.

Akcia	1	2	3	4	5	6	7	8
S_i	-	2.9%	-	-	2.78%	-	2.78%	-
Akcia	9	10	11	12	13	14	15	
S_i	2.81%	-	-	2.81%	2.85%	-	2.82%	

Tabuľka 6: Soft limity pre Markowitzovo portfólio. Časový úsek = 1 týždeň.

Tu je preto vhodné použiť vzorec (28) pre výpočet Soft limitov, ktorý sme odvodili a aplikovať ho na portfólio, ktorého akciová zložka je uvedená v Tabuľke 5. Výpočty Soft limitov sme urobili pre časový úsek jedného týždňa a sú uvedené v Tabuľke 6.

Z výsledkov vidíme, že väčšina našich akcií (z Tabuľky 5, pretože sme ešte nerebalancovali) prekračuje bezpečnú hranicu určenú Soft limitom.

Zoptimalizujeme teda portfólio ešte raz vyriešením Markowitzovej úlohy, avšak teraz položíme horné hraničné obmedzenia rovné Soft limitom, t.j. $K_i = C_i$ pre všetky naše pôvodné akcie $i = 1, \dots, 15$.

Akcia	1	2	3	4	5	6	7	8
w_i	-	2.9%	-	-	2.78%	-	2.78%	0.45%
Akcia	9	10	11	12	13	14	15	
w_i	2.77%	-	-	2.81%	2.69%	-	2.82%	

Tabuľka 7: Akciová zložka modelového dôchodkového fondu po druhej optimalizácii. Podiel akciovej zložky na hodnote fondu je 20%.

Po zopakovaní numerickej implementácie vypočítame optimálne váhy a výsledok je uvedený v Tabuľke 7. Vidíme, že aby bola splnená kvóta, ktorú sme stanovili pre podiel akciovej zložky (t.j. 20%), musel byť do portfólia zahrnutý ďalší akciový titul (akcia č. 8). Podiel ostatných akcií bol pritom vo väčšine ostatných prípadov znížený na úroveň Soft limitu.

6 Záver

V tejto práci sme sa venovali určovaniu bezpečných investičných limitov pri rizikovitom investovaní majetku dôchodkových fondov. Na základe jednoduchej úvahy sme odvodili vzťah, ktorý za istých zjednodušujúcich predpokladov môže slúžiť ako približná orientácia v hraniciach, ktoré pri akciových investíciách nie je žiadúce prekročiť, aby neprišlo k porušeniu zákonom stanovených obmedzení.

Taktiež sme navrhli spôsob, ktorým by bolo možné odvodené vzorce skombinovať s optimalizačnou úlohou založenou na Markowitzovej Mean-Variance analýze portfólia.

Uvedený model je možné v mnohých ohľadoch vylepšiť. Nakoľko naša štúdia považovala dlhopisovú zložku za bezrizikovú, model je možné rozšíriť zahrnutím niektorého z prístupov k oceňovaniu dlhopisov. Taktiež klasické uvažovanie opierajúce sa o predpoklad lognormálneho rozdelenia cien akcií mnohé empirické štúdie spochybňujú. V niektorých prípadoch sa ukazuje byť lepšie popisujúcim tento proces Studentovo t -rozdelenie. V prípade dôchodkového fondu je navyše osobitne problematrická povinnosť oceňovania majetku fondu v slovenských korunách, ktorá tento prípad robí ešte viac komplikovaným.

Referencie

- [1] Goliaš, P., *Pension Calculations for the PAYG and Funded Pension System in Slovakia*, Academia Istropolitana Nova, Professional Programme in Applied Economics and Finance, August 2003
- [2] Hull, J. C., *Options, Futures and Other Derivatives*, 4th Edition, Prentice-Hall International, Inc., 2000
- [3] Kwok, Y. K., *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer-Verlag Singapore Pte. Ltd., 1998
- [4] Lamoš, F., Potocký, R., *Pravdepodobnosť a matematická štatistika, štatistické analýzy* ALFA 1989
- [5] Luenberger, D. G., *Investment Science*, Oxford University Press, 1998
- [6] Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V., *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, 2005
- [7] Melicherčík, I., Ungvarský, C., *Pension Reform in Slovakia: Perspectives of the Fiscal Debt and Pension Level.*, Finance a úvěr - Czech Journal of Economics and Finance, Vol.54, No. 9–10, 391–404 (2004)
- [8] Ševčovič, D., *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Bratislava 2001, skriptá
- [9] Han, A., <http://www.alvinhan.com/Efficient-Market-Hypothesis.htm>, Oxford Brookes University
- [10] Národná banka Slovenska, <http://www.nbs.sk>
- [11] Asociácia dôchodkových správcovských spoločností, <http://www.adss.sk>
- [12] Zákon č. 461/2003 Z.z., <http://www.nbs.sk/DFT/DS/ZAKONY/SDS.PDF>
- [13] Zákon č. 43/2004 Z.z., <http://www.nbs.sk/DFT/DS/ZAKONY/SOCP0.PDF>