FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika

Asymptotické metódy oceňovania ázijských typov finančných derivátov

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Lenka Grmanová

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2008

Asymptotické metódy oceňovania ázijských typov finančných derivátov

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Lenka Grmanová

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce:

Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

BRATISLAVA 2008

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne, len s pomocou nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a uvedenej literatúry.

V Bratislave, apríl 2008 . . . .

Lenka Grmanová

Poďakovanie

Chcem sa poďakovať vedúcemu diplomovej práce Doc. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za jeho odborné vedenie, pripomienky, návrhy a za množstvo času a trpezlivosti, ktoré mi venoval pri vypracovávaní diplomovej práce.

Abstrakt

Výkyvy finančných trhov podnieťujú matematikov k vytváraniu a oceňovaniu nových typov finančných derivátov. Ázijské opcie svojím charakterom reagujú na zmenu ceny aktíva, na ktoré sú vypisované. V práci je odvodený postup, ktorý čiastočne vylepšuje v minulosti odvodenú oceňovaciu formulku. Táto diplomová práca prináša tiež súhrn vzorcov na ocenenie špecifického typu opcie, ktorá s časom mení charakter z európskej na ázijskú opciu.

Kľúčové slová: opcia, ázijská opcia, Black-Scholesova rovnica, rovnica vedenia tepla, payoff.

Abstract

Unexpected fluctuations of financial markets lead to finding and pricing the new types of financial derivatives. The character of asian options reacts for the changes in price of underlying asset. In this work we derive an algorithm, which improves the pricing formula derived in the past. This master thesis also brings a set of formulas for pricing a specific option type, which changes its character from european to asian option.

Key words: option, asian option, Black-Scholes equation, standard heat equation, payoff.

Obsah

Úvod

Koncom minulého storočia svetové finančné trhy zaznamenali niekoľko prudkých výkyvov, ktoré mali negatívne účinky na vklady investorov. Práve nestabilný charakter finančných trhov podnietil matematikov k hľadaniu aktív, ktoré by na trhu znížili riziko investora. Jedným z takýchto moderných finančných nástrojov sú aj ázijské opcie, ktorým sa budeme v tejto práci venovať.

V prvej kapitole popíšeme charakter rôznych typov opcií. Vymedzíme základné pojmy a vzťahy a popíšeme postup odvodenia oceňovacej formulky pre európske opcie.

Druhá kapitola poskytuje prehľad pojmov a vzťahov pre ázijské opcie. Naznačuje aj analógiu oceňovacích formuliek pre európske a ázijské opcie. V závere kapitoly je podrobne odvodená semi-analytická metóda ázijského matematika Jin E. Zhanga.

Predelom medzi prvou a druhou časťou práce je tretia kapitola, ktorá opisuje ciele práce a postup ich napĺňania.

V štvrtej kapitole odvodíme vylepšenú semi-analytickú metódu a využijeme ju na ocenenie opcie, ktorej charakter sa mení podľa časového okamihu, v ktorom sa práve nachádza.

Piata kapitola obsahuje grafické zobrazenia ázijského charakteru opcie v rôznych časových okamihoch pred dobou expirácie.

V závere diplomovej práce sú zhrnuté nadobudnuté výsledky a popísané splnené ciele.

1 Opcie

Investovanie na finančných trhoch je v súčasnosti najmodernejšou a najobľúbenejšou metódou, ako zhodnotiť svoje finančné prostriedky. Ceny akcií, indexov a rôznych iných finančných nástrojov sa však na trhu pohybujú náhodne a ich fluktuácie spôsobujú obchodníkom neraz veľké riziká alebo straty. To podnietilo vznik takých finančných nástrojov, akými sú v súčasnosti opcie a akcie rôznych druhov, ktorými sa snažia obchodníci aspoň čiastočne popísať a stabilizovať náhodný charakter aktív, a tým znížiť svoje riziko. Medzi základné typy finančných derivátov zaraďujeme opcie, deriváty úrokových mier, forwardy, swapy a iné.

V diplomovej práci sa budeme venovať iba opciám. Jednoduchú interpretáciu a definíciu tohto finančného nástroja je možné nájsť v rôznych knihách, na internetových stránkach a vo finančných slovníkoch. Na tento nástroj sa však budeme pozerať najmä zo stránky finančnej matematiky.

1.1 Typy opcií

Hlbšie teoretické poznatky k tejto kapitole je možné nájsť v knihe ázijského odborníka Kwoka [5], my sa obmedzíme len na základnú charakteristiku.
Najjednoduchší a zároveň najpoužívanejší typ opcií sú takzvané **vanilla opcie**. **Európsky typ vanilla opcie** predstavuje na finančnom trhu právo, nie však povinnosť, zrealizovať v budúcnosti, konkrétne v expiračnom čase, nákup alebo predaj určitého množstva aktíva.
Kúpou opcie dohadujeme podmienky budúceho obchodu. Presne dohodneme realizačnú cenu a expiračný čas, pri ktorom sa obchod môže zrealizovať. Aktívami, na ktoré sa opcie vypisujú môžu byť akcie, dlhopisy, úrokové miery, meny, burzové indexy, ale aj futurity.

Špecifickou črtou **amerického typu vanilla opcie** je možnosť zrealizovať dohodnutý obchod už pred dobou expirácie. Keďže americký typ opcie nesie so sebou väčšie právo na realizáciu, cena takejto opcie bude vyššia ako cena protajšku európskeho typu. Rozdiel v cene sa nazýva cena za predčasnú realizáciu.

Ďalšou skupinou, ktorá v sebe zahŕňa viaceré typy opcií, sú tzv. **opcie závislé od vývoja ceny**. Tento názov vyjadruje ich vlastnosť - výplata závisí od pohybov ceny aktíva, na ktoré sú vypisované, počas celej životnosti opcie. Napríklad cena **lookback opcie** závisí od minimálnej a maximálnej ceny príslušného aktíva, dosahovanej počas celej životnosti opcie zatiaľ, čo výplata priemerovaných - **ázijských opcií** závisí od priemeru hodnôt aktíva za určitú dobu počas života aktíva. V istom zmysle by sa aj americké opcie dali považovať za závislé od vývoja ceny, pretože môžu byť zrealizované aj pred maturitou a rozhodnutie zrealizovať obchod predčasne je ovplyvnené vývojom ceny aktíva.
Ruské opcie na aktívum zaručujú držiteľovi zisk maximálnej historickej hodnoty spomedzi cien aktíva, dosahovaných pred maturitou. Držiteľ ruskej opcie môže uskutočniť obchod v ľubovoľnom čase pred a v dobe expirácie, preto sa tiež ruské opcie nazývajú aj nepretržitými americkými opciami.
Ďalším používaným typom opcie závisiacej od vývoja ceny akcie sú **bariérové opcie**. Bariérová opcia typu call je právo, nie povinnosť, kúpiť aktívum za dohodnutú expiračnú cenu v čase expirácie. Pokiaľ cena akcie v nejakom čase pred dobou expirácie prekročí stanovenú bariéru, tak opcia automaticky vyprší a vypisovateľ uhradí držiteľovi zmluvou dohodnutý rabat.

1.2 Základné pojmy

Ako už bolo uvedené, opcia predstavuje na finančnom trhu právo, nie však povinnosť, zrealizovať v budúcnosti nákup alebo predaj určitého množstva aktíva. Toto právo uplatniť, či neuplatniť, danú opciu nám prináša istú výhodu oproti tým, ktorí možnosť takéhoto výberu nemajú. Preto už aj samotné právo zrealizovať obchod má hodnotu. Táto hodnota musí byť zaplatená na začiatku vypisovania kontraktu. Cena, ktorú zaplatíme vypisovateľovi za to, že my ako držitelia opcie máme právo na budúce uplatnenie opcie, sa nazýva *opčná prémia.* Tento pojem využíva aj D. Ševčovič v [10].
Základným cieľom matematicko-finančnej teórie je úloha ako oceniť opcie, aby nedošlo k znevýhodneniu ani jednej strany kontraktu.

Call opcia (kúpna opcia) je dohoda, v ktorej majiteľ získava právo kúpiť akciu v dohodnutom expiračnom čase T za dohodnutú expiračnú cenu E. Právo, na základe ktorého držiteľ môže, ale nemusí zrealizovať tento obchod v expiračnom čase, má nenulovú hodnotu V, ktorá musí byť zaplatená v čase uzavretia kontraktu.

Put opcia (predajná opcia) je kontrakt, v ktorom majiteľ získava právo predať akciu v presne určenom expiračnom čase T za vopred dohodnutú expiračnú cenu E. Všeobecnou úlohou je nájsť cenu opcie v čase $t = 0$, [10].

Najznámejší matematický model na oceňovanie finančných derivátov je *Black-Scholesova rovnica.* Model opisuje časový vývoj ceny opcie ako funkciu ceny akcie v čase zostávajúcom do expirácie. V tomto známom modeli oceňovania derivátov zohráva hlavnú úlohu stochastický charakter aktíva. Základnými nástrojmi na popis stochastického charakteru sú Wienerov proces a Brownov pohyb [10].
Samotná Black-Scholesova rovnica má nasledujúci tvar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \tag{1}$$

$S > 0$ – súčasná cena aktíva, na ktoré je opcia vypisovaná ,

V – hodnota opcie na dané aktívum,

T – expiračná doba - termín vypršania platnosti opcie,

$V(S,t)$ – vyjadruje funkciu ceny opcie, preto potom hodnota v čase $t = 0$, t.j. $V(S,0)$ vyjadruje opčnú prémiu na začiatku uzatvárania kontraktu.

K samotnej Black-Scholesovej rovnici však musíme doplniť podmienku, ktorá bude bližšie špecifikovať o aký typ opcie ide. Tou podmienkou bude hodnota funkcie $V(S,t)$ v expiračnom čase $t = T$. Uvedená hodnota určuje *terminálový payoff opcie.*

Terminálový payoff európskeho typu **call opcie**:

$$V(S,T) = \max\ (S - E, 0) = \begin{cases} S - E & \text{pre } S \geq E, \\ 0 & \text{pre } 0 < S < E. \end{cases} \tag{2}$$

Terminálový payoff európskeho typu **put opcie**:

$$V(S,T) = \max\ (E - S, 0) = \begin{cases} E - S & \text{pre } S \leq E, \\ 0 & \text{pre } E < S. \end{cases} \tag{3}$$

Myšlienkou riešenia Black-Scholesovej rovnice a hľadania ceny európskeho typu opcie je hľadanie riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa príslušnú terminálovú podmienku. Black-Scholesova rovnica má tvar parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice (ďalej PDR). Transformáciami ju však vieme previesť na základný tvar parabolickej PDR - na rovnicu vedenia tepla. Zavedením substitúcie časovej premennej a logaritmickou transformáciou ceny akcie získame tvar parabolickej PDR, ktorý vieme exponenciálnou transformáciou previesť na rovnicu vedenia tepla.

1. Substituujeme časovú premennú $t \in [0,T]$ na $\tau = T - t$

$$\Rightarrow V(S, T - \tau) = W(S, \tau),\ \text{ a teda } V(S,t) = W(S, T - t).$$

Týmto postupom sa Black-Scholesova rovnica pretransformuje na tvar

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} - rS\frac{\partial W}{\partial S} + rW = 0.$$

2. Zavedieme logaritmickú transformáciu na premennú S

$$S = e^x, \qquad x = \ln S,$$

$$Z(x,\tau) = W(e^x,\tau).$$

Parciálna diferenciálna rovnica touto transformáciou opäť zmení tvar na

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\,\sigma^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial Z}{\partial x} + rZ = 0.$$

3. Využijeme exponenciálnu transformáciu, aby sme sa v parciálnej diferenciálnej rovnici zbavili členov nižšieho rádu. Takouto úpravou získame základný tvar parabolickej PDR, takzvanú rovnicu vedenia tepla s konštantnými koeficientami, ktorej riešenie v tvare Greenovej funkcie poznáme z teórie parciálnych diferenciálnych rovníc [11]

$$u(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau} Z(x,\tau).$$

Výsledná rovnica a okrajová podmienka pre funkciu u majú nakoniec tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &- \frac{\sigma^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(x,0) &= e^{\alpha x} V(e^x), \qquad -\infty < x < \infty, \qquad \tau \in (0,T). \end{aligned} \tag{4}$$

Keď na toto riešenie spätne aplikujeme substitúcie, ktoré sme použili a pridáme okrajovú podmienku napríklad pre európsky typ call opcie, získame explicitné riešenie, ktoré je hodnotou európskeho callu

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2). \tag{5}$$

Pre vysvetlenie, N(d) je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{s^2}{2}} ds,$$

a $d1$, $d2$ majú nasledovnú hodnotu

$$d1 = d1(S,t) = \frac{\ln{(S/E)} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d2 = d2(S,t) = \frac{\ln{(S/E)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

2 Ázijské opcie

Ázijské opcie sú typom opcií závislých od vývoja ceny aktíva, na ktoré je opcia vypisovaná, kde výplatná funkcia závisí od historického priemeru ceny aktíva. Tomuto typu opcií sa intenzívne venuje vo svojich štúdiach hongkongský matematik Jin E. Zhang, napr. aj v [14].

Ázijské opcie sú veľmi užitočným nástrojom finančného odvetvia. Môžu byť použité na hedgovanie špecifických typov aktív počas určitej časovej periódy. Takéto hedgovanie je pritom lacnejšie ako portfólio obyčajných vanilla opcií. Navyše ázijské opcie majú ďalšiu výhodu oproti vanilla opciám-môžeme ich použiť na ochranu proti cenovej manipulácii zo strany vypisovateľa v čase maturity.

Charakter ázijských opcií môžeme analogicky porovnávať s iným typom opcií a to s *basket opciami* - tzv. košíkovými opciami.
Basket opcie sú opcie, ktorých cena závisí na hodnote portfólia (resp. košíka aktív). Tento typ opcií je v súčasnosti veľmi populárny, podobne ako aj ázijské opcie. Cena opcie na košík aktív je nižšia ako cena na individuálne aktívum, pretože profil výplat lepšie kopíruje zmeny v hodnote portfólia, ako nejaká kombinácia opcií na individuálne aktívum. Hodnota tejto opcie je vysoko korelovaná s hodnotou portfólia v jednotlivých časových okamihoch a to je kľúčová vlastnosť, ktorú majú basket opcie spoločnú s ázijskými opciami [17]. Aj hodnota ázijskej opcie je silno korelovaná s vývojom ceny aktíva v jednotlivých časových okamihoch. Uvedený údaj je zahrnutý aj v oceňovacej formulke, čo uvidíme v nasledujúcej kapitole.

Rozlišujeme dva základné typy ázijských opcií podľa toho, čo je vo výplatnej funkcii priemerované:

- **Average rate opcia** - ak je priemerovaná hodnota v pozícii ceny aktíva, mimochodom je to zložitejší matematický prípad.

- **Average strike opcia** - keď je priemerovaná hodnota v pozícii expiračnej ceny akcie.

Ďalšou vlastnosťou, podľa ktorej môžeme rozlíšiť typy ázijských opcií, je spôsob priemerovania a to na *aritmetické a geometrické ázijské opcie*. Oceňovanie a hedgovanie geometrických ázijských opcií je jednoduché, pretože príslušná Black-Scholesova rovnica sa dá transformovať na rovnicu vedenia tepla s konštantnými koeficientami, ktorej riešenie z teórie parciálnych diferenciálnych rovníc [11] poznáme v tvare Greenovho tepelného jadra.

2.1 Spôsoby oceňovania ázijských opcií

Oceňovanie aritmeticky priemerovaných ázijských opcií je oproti klasickým opciám veľmi ťažké a zložité, pretože aritmetické priemerovanie sa nedá zapísať ako lognormálny proces. Pre takýto typ opcií neexistuje explicitné riešenie príslušnej parciálnej diferenciálnej rovnice. Riešenie sa preto musí hľadať rôznymi aproximatívnymi metódami, ktoré sa ako v [14] dajú rozdeliť do troch kategórií:

1. **Numerický prístup** - spočíva v použití Monte Carlo simulácie na výpočet hodnoty aritmetickej ázijskej opcie. Na riešenie PDR je tiež možné použiť numerickú schému metódy konečných diferencií. Tento prístup využili vo svojich prácach Kemna a Vorst [4], Roger a Shi [9] a tiež Forsyth a Vetzal [16].

2. **Analytická aproximácia** - Turnbull a Wakeman [12] odvodili aproximatívnu formulu výpočtom a spojením niekoľkých prvých momentov

aritmetického priemeru s lognormálnym procesom. Aj pri tomto prístupe je prítomný problém veľkej chyby v presnosti aproximatívneho riešenia.

3. **Odhad dolného a horného ohraničenia hodnoty** - Roger a Shi [9] odvodili hodnotu hornej a dolnej hraničnej hodnoty ázijskej opcie. Tiež je známe aj použitie trinomického stromu na výpočet týchto hraničných hodnôt - Chalansi, Jha a Varikooty [3].

My sa budeme v tejto diplomovej práci zaoberať semi-analytickou metódou oceňovania aritmeticky priemerovaných ázijských average rate opcií. Túto metódu odvodil už spomínaný hongkongský matematik Jin, E., Zhang [14]. Metóda slúži na oceňovanie spojito aritmeticky priemerovaných ázijských opcií. Chápeme to tak, že do priemeru sa zahŕňa cena v každom okamihu časového intervalu, na ktorom má opcia ázijský charakter. Semi-analytická metóda nadobúda oveľa presnejšie výsledky, ako všetky metódy uvedené v predchádzajúcich kategóriach.

2.2 Základné vzťahy

Ako sme spomenuli v úvode kapitoly, rozlišujeme average rate a average strike opcie. Rozdiel je v tom, ktorú hodnotu priemerujeme.
Pri average rate opcii je priemerovaná hodnota v pozícii ceny akcie. Potom výplatná funkcia v čase expirácie má tvar

$$\max(\bar{S} - K, 0),$$

kde S je cena akcie a K je expiračná cena akcie.
Average strike opcia má priemerovanú hodnotu v pozícii expiračnej ceny akcie. Výplatná payoff funkcia v čase expirácie má tvar

$$\max(S - \bar{K}, 0).$$

Pri popise semi-analytickej metódy budeme, podobne ako Zhang, využívať iba average rate opciu so spojitým priemerovaním. Pre average rate opciu fixujeme expiračnú cenu K a cena akcie $\bar{S}$ je aritmetickým priemerom hodnôt za určitý časový interval napr. $[T_0, T]$. Oceňovaciu formulku odvodíme iba pre periódu, na ktorej sa priemeruje, čiže pre také t, že $T_0 \leq t \leq T$. Cena opcie v období, v ktorom ešte neprebieha priemerovanie, sa dá jednoducho vypočítať ako riešenie klasickej Black-Scholesovej rovnice. Ako koncovú podmienku treba však brať do úvahy výplatnú payoff funkciu v čase T_0. To je čas, v ktorom sa stráca charakter obyčajnej vanilla opcie a nastupuje ázijské priemerovanie.
Sústreďme sa na odvodenie semi-analytickej metódy podľa toho, ako ju uvádza Zhang. Využijeme rovnaké zjednodušenie ako on a položíme T_0 rovné nule.

Zavedieme novú premennú I

$$I = \int_0^t S(\tau) d\tau, \tag{6}$$

čo je spojitý súčet cien aktíva, na ktoré je opcia vypisovaná. Aritmetický priemer ceny na intervale $[0, t]$ vypočítame ako podiel I/t. Potom výplatná payoff funkcia pre ázijskú average rate call opciu môže byť zapísaná ako

$$\max\left(\frac{I(T)}{T} - K, 0\right). \tag{7}$$

V [10] a tiež u I. Melicherčíka v [7] si môžeme pripomenúť, že v rizikovo neutrálnom svete má cena akcie stochastický charakter. Na modelovanie ceny akcie môžeme použiť stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$\mathrm{d}S = (r - q)S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}W, \tag{8}$$

kde r je bezriziková úroková miera, q je dividendová miera, σ je volatilita a W je Wienerov proces.

2.3 Analógia oceňovania európskych a ázijských opcií

Podobne, ako možno charakter ázijských opcií porovnávať s charakterom basket opcií, dá sa vyvodiť určitá analógia medzi problémami pri oceňovaní klasických opcií a problémami pri využití vzorca na výpočet hodnoty ázijskej opcie.

Keď oceňujeme európske opcie, do riešenia Black-Scholesovej rovnice nám v každom momente vstupuje hodnota volatility σ. Tento fakt je však podmienený poznaním implikovanej volatility v každom okamihu oceňovania.
Ak má call opcia oceňovací vzorec daný vzťahom (5) a máme dané konkrétne S, t a hodnotu opcie V s expiračnou cenou E v čase T, tak potom jediné kladné číslo σ rieši príslušnú oceňovaciu rovnicu pre tieto hodnoty, a toto riešenie nazývame *implikovaná volatilita* akcie, vypočítaná na základe známych hodnôt parametrov. Aby bol oceňovací vzorec použiteľný, museli by sme na výpočet ceny opcie v ľubovoľnom časovom okamihu poznať hodnotu implikovanej volatility. My túto hodnotu však nepoznáme, preto ako náhradu implikovanej volatility dosadíme do oceňovacej formulky hodnotu historickej volatility, vypočítanú z historických dát.

Podobný problém nastáva aj pri využívaní vzorca na oceňovanie ázijských opcií. V tomto prípade je pre nás neznámou hodnota integrálneho súčtu cien akcie I v každom časovom okamihu. A tu už je možné vidieť spomínanú analógiu s problémom volatility. Aby sme získali hodnotu opcie v určitom čase t na intervale $[0, T]$, môžeme za súčasné ceny vstupujúce do integrálneho súčtu, dosadiť historické údaje o cenách konkrétnej akcie.

2.4 Semi-analytická metóda

V prácach Black-Scholesa [1] a Mertona [8] bola odvodená najdôležitejšia myšlienka oceňovania vanilla opcií. Základným kameňom je Black-Scholesova PDR (1), uvedená v kapitole 1. Na základe týchto prác v roku 1990 Kemna a Vorst [4] ako prví odvodili upravený tvar tejto PDR pre ázijské opcie. Platí, že cena aritmeticky priemerovanej ázijskej call opcie $C(S, I, t)$, na akciu neplatiacu dividendy, spĺňa nasledujúcu parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorej podrobné odvodenie je možné nájsť v kapitole Appendix.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S\frac{\partial C}{\partial I} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \tag{9}$$

a už spomenutú terminálovú podmienku (7)

$$C(S, I, T) = \max\left(\frac{I}{T} - K, 0\right).$$

Do Black-Scholesovej rovnice (9) aplikujeme nasledovnú transformáciu premenných:

$$\xi = \frac{TK - I}{S}\, e^{-r\tau} - \frac{1}{r}\,(1 - e^{-r\tau}), \tag{10}$$

$$\tau = T - t, \tag{11}$$

$$C(S, I, t) = \frac{S}{T} f(\xi, \tau), \tag{12}$$

a získame rovnicu vedenia tepla s premennými koeficientami, t.j. parciálnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\,\sigma^2 \left[\xi + \frac{1}{r}\,(1 - e^{-r\tau})\right]^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0, \qquad -\infty < \xi < \infty. \tag{13}$$

K tej prislúcha koncová podmienka, z ktorej sa po transformácii stala počiatočná podmienka

$$f(\xi, 0) = \max(-\xi, 0). \tag{14}$$

Potom

$$\frac{\partial^2 f(\xi, 0)}{\partial \xi^2} = \delta(\xi), \tag{15}$$

kde $\delta(\xi)$ je Diracova funkcia, nadobúdajúca hodnoty

$$\delta(\xi) = \begin{cases} +\infty & \text{pre } \xi = 0 \\ 0 & \text{pre } \xi \neq 0 \qquad \text{a} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) \mathrm{d}\xi = 1. \end{cases}$$

Preto efekt vedenia tepla existuje iba ak $\xi = 0$ a bude badateľný iba pre oblasti malých hodnôt ξ. Preto v ďalšom postupe môžeme ξ z rovnice (13) vynechať a získať tak riešenie $f_0(\xi, \tau)$ nasledujúcej PDR, ktoré je analytickou aproximáciou pôvodného $f(\xi, \tau)$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2r^2}\,(1 - e^{-r\tau})^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} = 0, \qquad -\infty < \xi < \infty, \tag{16}$$

a prislúchajúca počiatočná podmienka má tvar

$$f_0(\xi, \tau = 0) = \max(-\xi, 0). \tag{17}$$

Do tejto rovnice zavedieme novú časovú premennú η

$$\mathrm{d}\eta = \frac{\sigma^2}{2r^2}(1 - e^{-r\tau})^2 \mathrm{d}\tau,$$

z čoho po integrovaní získame priamo časovú premennú η

$$\eta = \int_0^\tau \frac{\sigma^2}{2r^2}\,(1 - e^{-rs})^2 \mathrm{d}s = \frac{\sigma^2}{4r^3}\,(-3 + 2r\tau + 4e^{-r\tau} - e^{-2r\tau}). \tag{18}$$

Z posledne uvedenej PDR sa stáva parciálna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami, takzvaná rovnica vedenia tepla

$$\frac{\partial f_0}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma^2} = 0, \qquad -\infty < \xi < \infty, \tag{19}$$

s terminálovou podmienkou

$$f_0(\xi, \eta = 0) = \max(-\xi, 0). \tag{20}$$

Riešenie rovnice vedenia tepla, so zadanou počiatočnou podmienkou, nám dáva teória riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc [11] v tvare Greenovho tepelného jadra

$$f_0(\xi, \eta) = -\int_{-\infty}^{0} \xi_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi\eta}}\, e^{-(\xi_0 - \xi)^2/4\eta} \mathrm{d}\xi_0 = -\xi N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right) + \sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\, e^{-\xi^2/4\eta}. \tag{21}$$

Uvedeným postupom sme získali **analytickú aproximáciu ceny ázijskej opcie** (21).

Jednoduchým algebrickým postupom vieme zo získaného vzorca vypočítať vzťahy pre zodpovedajúce opčné charakteristiky, tzv. *grékov*.

Opčné charakteristiky nie sú nič iné, ako parciálne derivácie získanej analytickej aproximácie $C_0(S, I, t)$ hodnoty opcie podľa jednotlivých premenných.

Využijeme pri tom nasledovné derivácie:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_0}{\partial \xi} &= -N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right), \\
\frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta}}\, e^{-\xi^2/4\eta} \;=\; \frac{\partial f_0}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial \xi}{\partial S} &= -\frac{1}{S}\left[\xi + \frac{1}{r}\,(1 - e^{-r\tau})\right], \\
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= 1 + r\xi, \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\sigma^2}{2r^2}\,(1 - 2e^{-r\tau} + e^{-2r\tau}), \\
\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} &= \frac{\eta}{2\sigma}, \\
\frac{\partial \xi}{\partial r} &= -\frac{1}{r^2}\,(r^2\tau\xi + r\tau - 1 + e^{-r\tau}), \\
\frac{\partial \eta}{\partial r} &= \frac{\sigma^2}{4r^4}\,\left[9 - 4r\tau - (12 + 4r\tau)e^{-r\tau} + (3 + 2r\tau)e^{-2r\tau}\right].
\end{aligned}
$$

Výsledkom celého nášho snaženia a pracného odvodzovania sú aproximatívna formula na výpočet ceny aritmeticky priemerovanej ázijskej average rate call opcie s payoffom

$$\max(I/T - K, 0)$$

a hodnoty opčných charakteristík, ktoré môžeme podobne ako Zhang [14] zhrnúť v nasledujúcich dvoch vetách. Prvá veta hovorí o aproximatívnej formulke. Za aproximáciu považujeme obmedzenie premennej ξ na región blízky

0, v predchádzajúcom postupe.

Veta 2.1 *Hodnota aritmeticky priemerovanej ázijskej average rate call opcie a hodnoty príslušných opčných charakteristík sú dané nasledujúcimi aproximatívnymi formulami:*

$$\begin{aligned} C_0(S,I,t) &= \frac{S}{T}\, f_0(\xi,\eta) \;=\; \frac{S}{T}\left[-\xi N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right)+\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\; e^{-\xi^2/4\eta}\right] \\ &= S\frac{1-e^{-r\tau}}{rT}\; N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right) \;+\; \frac{S}{T}\,\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\; e^{-\xi^2/4\eta} \\ &\quad -e^{-r\tau}\;\left(K-\frac{1}{T}\right) N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\Delta_0 = \frac{\partial C_0}{\partial S} = \frac{1-e^{-r\tau}}{rT}\; N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right) \;+\; \frac{1}{T}\,\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\; e^{-\xi^2/4\eta}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= \frac{\partial C_0}{\partial t} = -\frac{S}{T}(1+r\xi)\; N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right) \\ &\quad -\frac{S\sigma^2}{4r^2T\sqrt{\pi\eta}}\;(1-2e^{-r\tau}+e^{-2r\tau})\; e^{-\xi^2/4\eta}, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\Gamma_0 = \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta_0}{\partial S} = \frac{1}{2ST\sqrt{\pi\eta}}\left[\xi+\frac{1}{r}(1-e^{-r\tau})\right]^2\; e^{-\xi^2/4\eta}, \tag{25}$$

$$\mathrm{Vega}_0 = \frac{\partial C_0}{\partial \sigma} = \frac{S}{4T\sigma}\,\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\; e^{-\xi^2/4\eta}, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{\partial C_0}{\partial r} = \frac{S}{r^2T}(r^2\tau\xi+r\tau-1+e^{-r\tau})\; N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right) \\ &\quad +\frac{S\sigma^2}{8r^4T\sqrt{\pi\eta}}[9-4r\tau-(12+4r\tau)e^{-r\tau}+(3+2r\tau)e^{-2r\tau}]\; e^{-\xi^2}/4\eta, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\text{Elasticita}, \Omega_0 = \Delta_0\frac{S}{C_0} = \frac{\frac{1}{r}\;(1-e^{-r\tau})\; N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right) \;+\; \sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\; e^{-\xi^2}/4\eta}{-\xi N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right) \;+\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\; e^{-\xi^2}/4\eta}. \tag{28}$$

kde N(.) je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia, definovaná ako

$$N(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-y^2/2}dy,$$

a ξ, η a τ boli použité v odvodzovacom postupe (41),(42),(50).

$$
\begin{aligned}
\xi &= \frac{TK - I}{S}\, e^{-r\tau} - \frac{1}{r}\,(1 - e^{-r\tau}), \\
\tau &= T - t, \\
\eta &= \int_0^\tau \frac{\sigma^2}{2r^2}\,(1 - e^{-r\tau})^2 ds = \frac{\sigma^2}{4r^3}\,(-3 + 2r\tau + 4e^{-r\tau} - e^{-2r\tau}).
\end{aligned}
$$

Druhá veta nám udáva korekčnú hodnotu opcie a príslušné opčné charakteristiky.

Veta 2.2 *Korekčné členy prislúchajúce k analytickým aproximačným formulám, uvedeným v predchádzajúcej vete, sú dané nasledovnými vzťahmi:*

$$
C_1(S, I, t) = \frac{S}{T}\, f_1(\xi, \tau, r, \sigma), \tag{29}
$$

$$
\Delta_1 = \frac{\partial C_1}{\partial S} = \frac{1}{T} f_1 - \frac{1}{T}\left[\xi + \frac{1}{r}(1 - e^{-r\tau})\right]\frac{\partial f_1}{\partial \xi}, \tag{30}
$$

$$
\Theta_1 = \frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{S}{T}(1 + r\xi)\frac{\partial f_1}{\partial \xi} - \frac{S}{T}\frac{\partial f_1}{\partial \tau}, \tag{31}
$$

$$
\Gamma_1 = \frac{\partial^2 C_1}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta_1}{\partial S} = \frac{1}{ST}\left[\xi + \frac{1}{r}(1 - e^{-r\tau})\right]^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2}, \tag{32}
$$

$$
\mathrm{Vega}_1 = \frac{\partial C_1}{\partial \sigma} = \frac{S}{T}\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}, \tag{33}
$$

$$
\rho_1 = \frac{\partial C_1}{\partial r} = -\frac{S}{r^2 T}(r^2\tau\xi + r\tau - 1 - e^{-r\tau})\frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{S}{T}\frac{\partial f_1}{\partial r}, \tag{34}
$$

$$
\Omega = (\Delta_0 + \Delta_1)\frac{S}{C_0 + C_1}, \tag{35}
$$

kde funkcia $f_1(\xi, \tau, r, \sigma)$ a jej derivácie sa dajú získať numerickým riešením nasledujúcej parciálnej diferenciálnej rovnice metódou konečných diferencií

$$
\frac{\partial f_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2\left[\xi + \frac{1}{r}(1 - e^{-r\tau})\right]^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} = \frac{\sigma^2 \xi}{4\sqrt{\pi\eta}} e^{-\xi^2/4\eta}\left[\xi + \frac{2}{r}(1 - e^{-r\tau})\right], \tag{36}
$$

$$
f_1(\xi, \tau) = 0. \tag{37}
$$

Dôkaz tejto vety ako aj príslušnú schému pre metódu konečných diferencií je možné nájsť v [14].

Teraz, po objasnení postupu môžeme vysvetliť, prečo sa táto metóda nazýva semi-analytická. Analytickou časťou je odvodenie aproximatívneho vzorca $f_0(S, I, t)$ na výpočet hodnoty opcie. Tou neanalytickou časťou je odvodenie korekčného člena $f_1(S, I, t)$ pomocou niektorej metódy konečných diferencií - napr. Crank-Nicholsonovej metódy. Výsledné riešenie pozostáva z formuly, ktorú sme získali aproximáciou, a korekčného člena

$$f(\xi, \tau) = f_0(\xi, \tau) + f_1(\xi, \tau). \tag{38}$$

3 Ciele práce

Keď sme si už vymedzili pojmy a definovali základné vzťahy, môžeme pristúpiť k definovaniu cieľov diplomovej práce. Semi-analytická metóda, ktorú odvodil Zhang, je veľmi užitočná a praktická ako Zhang uvádza vo svojej práci [14]. Má však jednu nevýhodu. Zhang pri jej odvodzovaní použil zovšeobecnenie vlastností opcie na interval $[0, T]$, ktoré spôsobí, že jeho metóda funguje iba pre ázijské opcie, ktoré sú priemerované počas celej svojej životnosti.

Cieľom diplomovej práce je uvedenú Zhangovu metódu pretransformovať na časový interval $[T_0, T]$. Na tomto intervale bude mať náš finančný derivát ázijský charakter a jeho hodnotu môžeme vypočítať pomocou práve nami upravenej semi-analytickej metódy.
Musíme mať na mysli aj začiatočný časový interval $[0, T_0]$, na ktorom bude mať derivát charakter klasickej európskej opcie. Budeme hľadať explicitnú formulku na oceňovanie ako riešenie Black-Scholesovej rovnice pre európske opcie so špeciálnou koncovou podmienkou, ktorú tiež odvodíme.

Netreba však zabudnúť, že ak chceme, aby sa tieto matematické odvodenia, ktoré sú cieľom práce, dali lepšie chápať, treba uviesť aj grafické zobrazenie toho, aký vplyv má ázijský charakter na hodnotu derivátu v jednotlivých časových okamihoch.

4 Vylepšená semi-analytická metóda

Aby boli splnené ciele práce, nasledujúce kapitoly budú obsahovať postup na prerobenie semi-analytickej metódy. Zhang v [14] zovšeobecňuje semi-analytickú metódu na interval $[0, T]$, čo v praxi znamená, že jeho výsledná formula oceňuje ázijské opcie, ktoré sú priemerované počas celej svojej životnosti, od času 0 až do času expirácie T. Našou úlohou je prerobiť semi-analytickú metódu tak, že na časovom intervale $[0, T_0]$ sa bude opcia správať ako klasická európska opcia a na intervale $[T_0, T]$ nadobudne charakter ázijskej opcie a bude priemerovaná aritmetickým priemerom. Odvodzovať budeme v opačnom poradí, t.j. najprv prerobíme Zhangove formulky pre výpočet hodnoty ázijskej opcie na interval $[T_0, T]$ a potom vypočítame limitnú hodnotu v čase T_0. Hodnota limity v čase T_0 je vlastne terminálová podmienka , ktorú musí spĺňať európsky call na intervale $[0, T_0]$. Ako posledné odvodíme riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice druhého rádu na intervale $[0, T_0]$ s odvodenou terminálovou podmienkou v čase T_0. Skromné náznaky takéhoto postupu môžeme nájsť v [15].

4.1 Transformácia semi-analytickej metódy na časový interval $[T_0, T]$

Postupujeme rovnako ako v kap. (2.4), ibaže pre časovú premennú t platí
$T_0 \leq t \leq T , \quad T_0 \neq 0 .$
Hodnota ázijskej aritmeticky priemerovanej opcie na akciu platiacu dividendy spĺňa nasledovnú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S \frac{\partial C}{\partial I} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r-q) S \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \tag{39}$$

s čiastočne pozmenenou terminálovou podmienkou

$$\max\left(\frac{I(T)}{T-T_0}-K,0\right). \tag{40}$$

1. Do Black-Scholesovej rovnice zavedieme nasledovnú substitúciu:

$$\xi = \frac{(T-T_0)K-I}{S}\; e^{-(r-q)\tau} - \frac{1}{r-q}\;(1-e^{-(r-q)\tau}), \tag{41}$$

$$\tau = T-t, \tag{42}$$

$$C(S,I,t) = \frac{Se^{-q\tau}}{T-T_0} f(\xi,\tau), \tag{43}$$

   Black-Scholesova rovnica sa touto substitúciou pretransformuje na difúznu rovnicu s premennými koeficientami s príslušnou terminálovou podmienkou

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\,\sigma^2\left[\xi+\frac{1}{\rho}\,(1-e^{-\rho\tau})\right]^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}=0, \qquad -\infty<\xi<\infty, \tag{44}$$

$$f(\xi,0) = \max(-\xi,0), \tag{45}$$

$$0\le \tau \le T-T_0, \tag{46}$$

$$\rho = r-q. \tag{47}$$

2. Analogicky ako v kap. (2.4) uvažujeme iba ξ blízke 0, aby sme získali rovnicu vedenia tepla, môžeme ho vynechať a získavame aproximatívne riešenie $f_0(\xi,\tau)$, nasledovnej PDR

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\,\sigma^2\left[\frac{1}{\rho}\,(1-e^{-\rho\tau})\right]^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2}=0, \qquad -\infty<\xi<\infty, \tag{48}$$

   prislúchajúca počiatočná podmienka má tvar

$$f_0(\xi,\tau=0)=\max(-\xi,0). \tag{49}$$

3. Do rovnice zavedieme novú časovú premennú η, ktorej zmena v čase je definovaná ako
$$\mathrm{d}\eta = \frac{\sigma^2}{2\rho^2}\,(1-e^{-\rho\tau})^2\mathrm{d}\tau.$$
Po integrovaní získavame priamo časovú premennú η
$$\eta = \int_0^\tau \frac{\sigma^2}{2\rho^2}\,(1-e^{-\rho s})^2\mathrm{d}s = \frac{\sigma^2}{4\rho^3}\,(-3+2\rho\tau+4e^{-\rho\tau}-e^{-2\rho\tau}). \quad (50)$$
Uvedenou substitúciou získame rovnicu vedenia tepla s konštantnými koeficientami
$$\frac{\partial f_0}{\partial\eta} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial\xi^2} = 0, \qquad -\infty < \xi < \infty, \quad (51)$$
$$f_0(\xi,\eta=0) = \max(-\xi,0), \quad (52)$$
ktorej riešenie poznáme v tvare Greenovho tepelného jadra
$$f_0(\xi,\eta) = -\int_{-\infty}^0 \xi_0\frac{1}{\sqrt{4\pi\eta}}\,e^{-[(\xi_0-\xi)^2/4\eta]}\mathrm{d}\xi_0 = -\xi N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right)+\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\,e^{-\xi^2/4\eta}, \quad (53)$$
kde N je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia. Spätnou transformáciou dostávame
$$C(S,I,t) \;=\; \frac{Se^{-q\tau}}{T-T_0}\,\left[-\xi N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right)+\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\,e^{-\xi^2/4\eta}\right]. \quad (54)$$

4. Výsledné riešenie pozostáva z formuly, ktorú sme získali aproximáciou, a korekčného člena, ktorý ako riešenie PDR s premennými koeficientami, získame pomocou metódy konečných diferencií podobne ako v predchádzajúcich kapitolách
$$f(\xi,\tau) = f_0(\xi,\tau) + f_1(\xi,\tau). \quad (55)$$

4.2 Odvodenie terminálovej podmienky v bode T_0

Odvodili sme vzorec (54), kde $\xi,\ \rho,\ \tau$ a η sú dané: (41), (50), (42) a $\rho = r-q$. Zaujíma nás, aká bude hodnota ázijského callu v čase T_0. Aplikáciou limity pre t idúce k T_0 na (54) získame nasledovnú hodnotu

$$C(S,I,T_0) = \frac{Se^{-q\hat{\tau}}}{T-T_0}\left[-\hat{\xi}N\left(\frac{-\hat{\xi}}{\sqrt{2\hat{\eta}}}\right) + \sqrt{\frac{\hat{\eta}}{\pi}}\; e^{-\hat{\xi}^2/4\hat{\eta}}\right], \tag{56}$$

kde

$$\begin{aligned}
\rho &= r - q, \\
\hat{\tau} &= T - T_0, \\
\hat{\xi} &= \frac{\hat{\tau}K - I}{S}\, e^{-\rho\hat{\tau}} - \frac{1}{\rho}\,(1 - e^{-\rho\hat{\tau}}), \\
\hat{\eta} &= \frac{\sigma^2}{4\rho^3}\,(-3 + 2\rho\hat{\tau} + 4e^{-\rho\hat{\tau}} - e^{-2\rho\hat{\tau}}).
\end{aligned} \tag{57}$$

4.3 Vzťah medzi európskymi a ázijskými opciami

Uvažujme opciu s nasledovnými vlastnosťami: na intervale $0 \le t \le T_0$ je to obyčajný európsky call, ktorého hodnota rieši Black-Scholesovu rovnicu s terminálovou podmienkou, odvodenou v kap. (4.2). Zaujíma nás odpoveď na otázku: Ako sa mení charakter takéhoto produktu, ak sa T_0 blíži k T, čiže ak sa skracuje interval priemerovania?

Intuitívna odpoveď na túto otázku je zrejmá. Ak sa T_0 blíži k T, skracuje sa tým interval, na ktorom má opcia ázijský charakter. Teraz vypočítame limitu pre $T_0 \to T$ a potvrdíme intuitívnu domnienku, že v takomto prípade sa ázijský charakter opcie úplne vytratí a limitným prechodom získame payoff klasického európskeho callu. Pre

$$T_0 \le t \le T,$$

máme už dobre známu verziu Black-Scholesovej rovnice pre ázijské opcie na akciu platiacu divideny

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S\frac{\partial C}{\partial I} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0,$$

s terminálovým payoffom

$$\max\left(\frac{I}{T-T_0} - K, 0\right).$$

Teraz spočítame spomínanú limitu z terminálového payoffu

$$\begin{aligned}\lim_{T_0 \to T} C(S,I,T) &= \lim_{T_0 \to T}\left[\max\left(\frac{I}{T-T_0} - K, 0\right)\right]\\ &= \lim_{T_0 \to T}\left[\max\left(\frac{\int_{T_0}^{T} S(\tau)d\tau}{T-T_0} - K, 0\right)\right]\\ &= \max\left[\lim_{T_0 \to T}\left(\frac{\int_{T_0}^{T} S(\tau)d\tau}{T-T_0} - K, 0\right)\right].\end{aligned}$$

Na posledný výraz aplikujeme L'Hospitalovo pravidlo na výpočet limity a dostávame

$$\max\left[\lim_{T_0 \to T}\left(\frac{-S(T_0)}{-1} - K, 0\right)\right] = \max(S(T) - K, 0). \tag{58}$$

Naša intuícia nesklamala a z vypočítanej limity je jasné, že ak T_0 sa blíži k T, tak opcia úplne stráca ázijský charakter a stáva sa z nej klasický európsky call so známym payoffom

$$\max(S(T) - K, 0).$$

4.4 Riešenie Black-Scholesovej rovnice s príslušnou terminálovou podmienkou

Po tom, ako sme odvodili vylepšenú semi-analytickú metódu a limitne sme vypočítali terminálovú podmienku v čase T_0, nám ešte zostáva zohľadniť európsky charakter opcie na intervale $0 \leq t \leq T_0$.

Hľadáme hodnotu európskeho callu na intervale $[0, T_0]$, čiže hľadáme riešenie Black-Scholesovej rovnice s terminálovou podmienkou odvodenou v (4.2). Keďže ide o parciálnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu, postupovať budeme ako v [11].

Zadanie: Máme danú PDR

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r-q) S \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0,$$

na intervale $[0, T_0]$, s terminálovou podmienkou v bode T_0

$$C(S, I, T_0) = \frac{S e^{-q\hat{\tau}}}{T - T_0} \left[-\hat{\xi} N \left(\frac{-\hat{\xi}}{\sqrt{2\hat{\eta}}} \right) + \sqrt{\frac{\hat{\eta}}{\pi}}\; e^{-\hat{\xi}^2/4\hat{\eta}} \right],$$

kde

$$\begin{aligned}
\rho &= r - q, \\
\hat{\tau} &= T - T_0, \\
\hat{\xi} &= \frac{\hat{\tau} K - I}{S}\; e^{-\rho\hat{\tau}} - \frac{1}{\rho}\,(1 - e^{-\rho\hat{\tau}}), \\
\hat{\eta} &= \frac{\sigma^2}{4\rho^3}\,(-3 + 2\rho\hat{\tau} + 4e^{-\rho\hat{\tau}} - e^{-2\rho\hat{\tau}}).
\end{aligned}$$

Postup riešenia:

1. *Zámena času*

   Substituujeme časovú premennú a upravíme časový interval

   $$\tau = T_0 - t,$$

   potom transformujeme aj B-S rovnicu

   $$W(S, \tau) = C(S, T_0 - \tau), \qquad C(S, t) = W(S, T_0 - t),$$

   a aj terminálovú podmienku na počiatočnú podmienku

   $$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} - (r-q) S \frac{\partial W}{\partial S} + rW = 0, \\[2ex] W(S, I, 0) = C(S, I, T_0). \end{cases}$$

2. *Logaritmická transformácia ceny akcie*

   Logaritmujeme premennú vyjadrujúcu cenu akcie

$$S = e^x, \qquad x = \ln S,$$

   a následne aj parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$Z(x,\tau) = W(e^x,\tau), \qquad W(S,\tau) = Z(\ln S,\tau).$$

   Príslušné parciálne derivácie majú nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} &= S\frac{\partial W}{\partial S}, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = S^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + S\frac{\partial W}{\partial S} &= S^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + \frac{\partial Z}{\partial x}, \end{aligned}$$

   a po dosadení do predchádzajúcej diferenciálnej rovnice a koncovej podmienky dostávame:

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial \tau} \; - \; \frac{1}{2}\,\sigma^2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + (\frac{\sigma^2}{2} - r + q)\frac{\partial Z}{\partial x} + rZ = 0, \\ \\ Z(x,0) = C(e^x, I, T_0). \end{cases}$$

$$C(e^x, I, T_0) = \frac{e^x\; e^{-q\tau^*}}{T - T_0}\left[-\xi^* N\left(-\frac{\xi^*}{\sqrt{2\eta^*}}\right) + \sqrt{\frac{\eta^*}{\pi}}\; e^{-\xi^{*2}/4\eta^*}\right],$$

   kde

$$\begin{aligned} \tau^* &= T - T_0, \qquad \rho = r - q, \\ \xi^* &= \frac{\tau^* K - I}{e^x}\; e^{-\rho\tau^*} - \frac{1}{\rho}\,(1 - e^{-\rho\tau^*}), \\ \eta^* &= \frac{\sigma^2}{4\rho^3}\,(-3 + 2\rho\tau^* + 4e^{-\rho\tau^*} - e^{-2\rho\tau^*}). \end{aligned}$$

3. *Transformácia na základnú rovnicu vedenia tepla*

   Využijeme euklidovskú transformáciu rovnice, ktorá nám umožní, pri stanovení podmienok na použité koeficienty, odstrániť parciálne derivácie nižšieho rádu a lineárne koeficienty a tak získať rovnicu vedenia tepla.

$$u(x,\tau) = e^{\alpha x+\beta\tau} Z(x,\tau), \qquad Z(x,\tau) = e^{-\alpha x-\beta\tau} u(x,\tau).$$

Príslušné parciálne derivácie majú tvar:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = e^{-\alpha x-\beta\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u\right), \qquad \frac{\partial Z}{\partial \tau} = e^{-\alpha x-\beta\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \beta u\right),$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = e^{-\alpha x-\beta\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u\right).$$

Ich dosadením do parciálnej diferenciálnej rovnice získavame:

$$A = \alpha\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} - r + q, \qquad B = (1+\alpha)r - \beta - \alpha q - \frac{\alpha^2\sigma^2 + \alpha\sigma^2}{2},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0, \\ \\ u(x,0) = e^{\alpha x} C(e^x, I, T_0). \end{cases}$$

Aby predchádzajúca PDR bola rovnicou vedenia tepla, musíme položiť koeficienty A, B rovné nule.

Odtiaľ dostávame:

$$\alpha = \frac{r-q}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{r+q}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{(r-q)^2}{2\sigma^2}.$$

Takáto voľba α a β nám zaručí, že rovnica pre funkciu u má nakoniec tvar

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ \\ u(x,0) = e^{\alpha x} C(e^x, I, T_0), \end{cases}$$

a

$$u(x,0) = \frac{e^{x(\alpha+1)}e^{-q\tau^*}}{T - T_0}\left[-\xi^* N\left(-\frac{\xi^*}{\sqrt{2\eta^*}}\right) + \sqrt{\frac{\eta^*}{\pi}}\, e^{-\xi^{*2}/4\eta^*}\right],$$

pričom premenné označené hviezdičkami sme definovali v predchádzajúcom kroku postupu.

4. *Aplikácia vzorca na výpočet riešenia PDR*

   Riešenie rovnice vedenia tepla poznáme z teórie PDR-[11] v tvare Greenovej funkcie a má nasledovný tvar

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} \; u(s,0)ds.$$

   Na to, aby sme získali riešenie pôvodnej rovnice, musíme spätne transformovať riešenie $u(x,\tau)$

$$C(S,I,t) = e^{-\beta(T_0-t)} \; e^{-\alpha \ln S} \; u(\ln S, T_0 - t).$$

Upravený tvar riešenia:

Riešenie uvádzame v tvare, ktorý je jednoduchší na pochopenie, ako úplné explicitné riešenie, získané ďalším postupom,

$$\begin{aligned} u(x,\tau) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \frac{1}{T-T_0} e^{-q\tau^*} \;\times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} e^{s(\alpha+1)} \left[-\xi^* N\left(-\frac{\xi^*}{\sqrt{2\eta^*}}\right) + \sqrt{\frac{\eta^*}{\pi}} \; e^{-\xi^{*2}/4\eta^*} \right] ds. \end{aligned}$$

Ak zavedieme nasledovnú substitúciu

$$a = -\frac{\xi^*}{\sqrt{2\eta^*}},$$

môžeme vnútro hranatej zátvorky zapísať ako

$$-\xi^* N(a) + \sqrt{\frac{\eta^*}{\pi}} \; e^{-a^2/2}.$$

Vieme, že pre funkciu hustoty normálneho rozdelenia platí

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-a^2/2}.$$

Aby sme si tieto výrazy upravili na tvar, s ktorým sa dá jednoduchšie pracovať, môžeme ďalej písať:

$$\sqrt{2\eta^*} f(a) - \xi^* N(a) = \sqrt{2\eta^*}(f(a) + aN(a)),$$

$$N' = f(a); \qquad f'(a) = -af(a), \qquad \text{označme} \qquad \phi(a) = f(a) + aN(a),$$

potom

$$\phi'(a) = f'(a) + N(a) + af(a) = -af(a) + N(a) + af(a) = N(a).$$

Po dosadení, získavame

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \frac{1}{T - T_0} e^{-q\tau^*} \sqrt{2\eta^*} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} e^{s(\alpha+1)} \int_{-\infty}^{-\xi^*/\sqrt{2\eta^*}} N(p)\, dp\, ds, \end{aligned}$$

kde hviezdičkou označené premenné sme mali definované v predchádzajúcom postupe a p definujeme ako

$$p = -\frac{\xi^*}{\sqrt{2\eta^*}} = \frac{(1 - e^{-\rho\tau^*})}{\rho\sqrt{2\eta^*}} - \frac{e^{-s}e^{-\rho\tau^*}(K\tau^* - I)}{\sqrt{2\eta^*}}.$$

Hodnotu výsledného riešenia musíme rozdeliť na dve časti podľa vzťahu I a $K\tau^*$, pretože tieto dva prípady sa budú líšiť oblasťami integrovania, na:

1. $I < K\tau^*$, čiže $\quad K\tau^* - I > 0$

   Integračné hranice pre integrovanie podľa p sú

   $$\left(-\infty; \frac{1 - e^{-\rho\tau^*}}{\rho\sqrt{2\eta^*}}\right\rangle.$$

   Zo vzťahu pre p môžeme vyjadriť s

   $$s = -\ln\left(\frac{\frac{e^{\rho\tau^*}}{\rho}(1 - e^{-\rho\tau^*}) - e^{\rho\tau^*}p\sqrt{2\eta^*}}{(K\tau^* - I)}\right).$$

   Integračné hranice pre integrovanie podľa s budú

   $$\langle D; \infty)\,,$$

   keď ako D označíme

   $$D = -\ln\left(\frac{\frac{e^{\rho\tau^*}}{\rho}(1 - e^{-\rho\tau^*}) - e^{\rho\tau^*}p\sqrt{2\eta^*}}{(K\tau^* - I)}\right)$$

dolnú hranicu integrovania, aby sme nepracovali so zložitými výrazmi v integračných hraniciach. Teraz môžeme zameniť poradie integrovania

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \frac{1}{T-T_0} e^{-q\tau^*} \sqrt{2\eta^*} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\frac{1-e^{-\rho\tau^*}}{\rho\sqrt{2\eta^*}}} N(p) \int_D^\infty e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} e^{s(\alpha+1)}\, ds\, dp. \end{aligned}$$

Vnútro integrálu podľa s upravíme na štvorec (teda druhú mocninu nejakého výrazu) obsahujúci integrovanú premennú. Výrazy neobsahujúce integrovanú premennú, ktoré vzniknú pri úprave na štvorec, môžeme vyňať pred integrál a dostávame

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \frac{1}{T-T_0} e^{-q\tau^*} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2\tau}} e^{\frac{(x+(\alpha+1)\sigma^2\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} \sqrt{2\eta^*} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\frac{1-e^{-\rho\tau^*}}{\rho\sqrt{2\eta^*}}} N(p) \int_D^\infty e^{-\left(\frac{s-(x+(\alpha+1)\sigma^2\tau)}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\right)^2/2}\, ds\, dp. \end{aligned}$$

Pre zjednodušenie opäť označíme dolnú hranicu integrovania a zavedieme substitúciu

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \left[-\ln\left(\frac{\frac{e^{\rho\tau^*}}{\rho}(1-e^{-\rho\tau^*}) - e^{\rho\tau^*} p\sqrt{2\eta^*}}{(K\tau^* - I)} \right) - (x+(\alpha+1)\sigma^2\tau) \right] = r.$$

Potom

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \frac{1}{T-T_0} e^{-q\tau^*} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2\tau}} e^{\frac{(x+(\alpha+1)\sigma^2\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} \sqrt{2\eta^*} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\frac{1-e^{-\rho\tau^*}}{\rho\sqrt{2\eta^*}}} N(p) \int_r^\infty e^{-h^2/2}\, dh\, dp. \end{aligned}$$

Upravený tvar výsledného vzťahu je nasledovný

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \frac{1}{T-T_0} e^{-q\tau^*} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2\tau}} e^{\frac{(x+(\alpha+1)\sigma^2\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} \sqrt{2\eta^*} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\frac{1-e^{-\rho\tau^*}}{\rho\sqrt{2\eta^*}}} N(p)(1-N(r))\, dp. \end{aligned} \tag{59}$$

2. $I > K\tau^*$, čiže $\quad K\tau^* - I < 0$

Integračné hranice pre integrovanie podľa p budú teraz opačné a to

$$\left(\frac{1 - e^{-\rho\tau^*}}{\rho\sqrt{2\eta^*}}; \infty \right\rangle.$$

Ak využijeme označenie z predchádzajúceho prípadu, t.j.

$$s = -\ln\left(\frac{\frac{e^{\rho\tau^*}}{\rho}(1 - e^{-\rho\tau^*}) - e^{\rho\tau^*} p\sqrt{2\eta^*}}{(K\tau^* - I)} \right),$$

môžeme povedať, že integračné hranice pre premennú s sú zachované ako v predchádzajúcom prípade. Potom výsledný vzťah bude mať tvar

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \frac{1}{T - T_0} e^{-q\tau^*} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2\tau}} e^{\frac{(x+(\alpha+1)\sigma^2\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} \sqrt{2\eta^*} \times \\ &\times \int_{\frac{1-e^{-\rho\tau^*}}{\rho\sqrt{2\eta^*}}}^{\infty} N(p)(1 - N(r))\, dp \end{aligned} \tag{60}$$

Spätná transformácia a výsledné riešenie:

Podľa kroku číslo 4 v odvodzovaní riešenia na získané vzťahy aplikujeme spätnú transformáciu

$$C(S,I,t) = e^{-\beta(T_0-t)} e^{-\alpha(\ln S)} u(\ln S, T_0 - t), \tag{61}$$

a výsledné riešenia budú mať tvar

1. $I < K\tau^*$

$$\begin{aligned} C(S,I,t) &= e^{-\beta(T_0-t)} e^{-\alpha(\ln S)} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \frac{1}{T - T_0} e^{-q\tau^*} e^{-\frac{(\ln S)^2}{2\sigma^2\tau}} \times \\ &\times e^{\frac{(\ln S+(\alpha+1)\sigma^2\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} \sqrt{2\eta^*} \int_{-\infty}^{\frac{1-e^{-\rho\tau^*}}{\rho\sqrt{2\eta^*}}} N(p)(1 - N(r))\, dp, \end{aligned} \tag{62}$$

kde, pre zopakovanie a zlepšenie orientácie, jednotlivé premenné boli definované takto:

$$\begin{aligned}
r &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\left[-\ln\left(\frac{\frac{e^{\rho\tau^*}}{\rho}(1-e^{-\rho\tau^*})-e^{\rho\tau^*}p\sqrt{2\eta^*}}{(K\tau^*-I)}\right)-(\ln S+(\alpha+1)\sigma^2\tau)\right],\\
\tau &= T_0-t,\\
\tau^* &= T-T_0,\\
\rho &= r-q,\\
\alpha &= \frac{r-q}{\sigma^2}-\frac{1}{2},\\
\beta &= \frac{r+q}{2}+\frac{\sigma^2}{8}+\frac{(r-q)^2}{2\sigma^2},\\
\eta^* &= \frac{\sigma^2}{4\rho^3}(-3+2\rho\tau^*+4e^{-\rho\tau^*}-e^{-2\rho\tau^*}),\\
\xi^* &= \frac{\tau^*K-I}{S}\,e^{-\rho\tau^*}-\frac{1}{\rho}\,(1-e^{-\rho\tau^*}),\\
p &= -\frac{\xi^*}{\sqrt{2\eta^*}}.
\end{aligned} \tag{63}$$

2. $I > K\tau^*$ Využijeme tú istú spätnú transformáciu, ako v prvom prípade. Len nesmieme zabudnúť, že pri takto obrátenej nerovnosti sú integračné hranice pre premennú p iné

$$\begin{aligned}
C(S,I,t) &= e^{-\beta(T_0-t)}e^{-\alpha(\ln S)}\frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\,\frac{1}{T-T_0}\,e^{-q\tau^*}\,e^{-\frac{(\ln S)^2}{2\sigma^2\tau}}\times\\
&\quad\times e^{\frac{(\ln S+(\alpha+1)\sigma^2\tau)^2}{2\sigma^2\tau}}\,\sqrt{2\eta^*}\int_{\frac{1-e^{-\rho\tau^*}}{\rho\sqrt{2\eta^*}}}^{\infty}N(p)(1-N(r))\,dp.
\end{aligned} \tag{64}$$

4.5 Zhrnutie

Výsledky, ktoré sme odvodili v predchádzajúcich podkapitolách, môžeme zhrnúť do nasledujúcich poznatkov. Odvodili sme vzťahy pre špecifický typ finančného derivátu na jednotlivých časových intervaloch.

1. Na časovom intervale $0 < t < T_0$ má náš derivát charakter európskej opcie, ktorej hodnota je riešením klasickej Black-Scholesovej PDR (1) spĺňajúcej koncovú podmienku v bode T_0 odvodenú v (4.2). Hodnota opcie na tomto intervale je teda v závislosti od vzťahu I a $K\tau^*$ rovná buď:

   (a)
$$
\begin{aligned}
C(S,I,t) &= e^{-\beta(T_0-t)} e^{-\alpha(\ln S)} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \frac{1}{T-T_0} e^{-q\tau^*} e^{-\frac{(\ln S)^2}{2\sigma^2\tau}} \times \\
&\quad \times e^{\frac{(\ln S+(\alpha+1)\sigma^2\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} \sqrt{2\eta^*} \int_{-\infty}^{\frac{1-e^{-\rho\tau^*}}{\rho\sqrt{2\eta^*}}} N(p)(1-N(r))\, dp,
\end{aligned}
$$
   pre $I < K\tau^*$; alebo

   (b)
$$
\begin{aligned}
C(S,I,t) &= e^{-\beta(T_0-t)} e^{-\alpha(\ln S)} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \frac{1}{T-T_0} e^{-q\tau^*} e^{-\frac{(\ln S)^2}{2\sigma^2\tau}} \times \\
&\quad \times e^{\frac{(\ln S+(\alpha+1)\sigma^2\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} \sqrt{2\eta^*} \int_{\frac{1-e^{-\rho\tau^*}}{\rho\sqrt{2\eta^*}}}^{\infty} N(p)(1-N(r))\, dp,
\end{aligned}
$$
   pre $I > K\tau^*$,

   kde premenné použité vo výsledných vzťahoch sú definované v (63).

2. V čase T_0 cenu tohto derivátu spojite nadpojíme terminálovou podmienkou, odvodenou v kapitole (4.2)
$$
C(S,I,T_0) = \frac{Se^{-q\hat{\tau}}}{T-T_0} \left[-\hat{\xi} N\left(\frac{-\hat{\xi}}{\sqrt{2\hat{\eta}}}\right) + \sqrt{\frac{\hat{\eta}}{\pi}}\, e^{-\hat{\xi}^2/4\hat{\eta}} \right],
$$

kde

$$\begin{aligned}
\rho &= r - q, \\
\hat{\tau} &= T - T_0, \\
\hat{\xi} &= \frac{\hat{\tau}K - I}{S}\, e^{-\rho\hat{\tau}} - \frac{1}{\rho}\,(1 - e^{-\rho\hat{\tau}}), \\
\hat{\eta} &= \frac{\sigma^2}{4\rho^3}\,(-3 + 2\rho\hat{\tau} + 4e^{-\rho\hat{\tau}} - e^{-2\rho\hat{\tau}}).
\end{aligned}$$

3. Na časovom intervale $T_0 < t < T$ bude mať náš derivát charakter ázijskej opcie, spĺňajúcej pozmenenú Black-Scholesovu rovnicu (39)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S\frac{\partial C}{\partial I} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0,$$

s terminálovou podmienkou v čase T

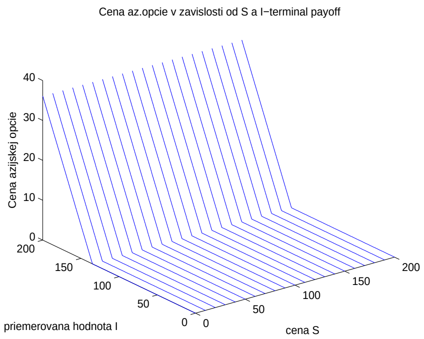
$$\max\left(\frac{I(T)}{T - T_0} - K, 0\right).$$

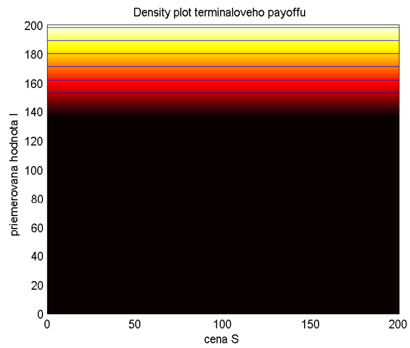
Výsledné riešenie pozostáva z formuly (54), ktorú sme získali aproximáciou v kapitole (4.1) a korekčného člena, ktorý ako riešenie PDR s premennými koeficientami, získame pomocou metódy konečných diferencií podobne ako Zhang v [14].

5 Zobrazenie vplyvu ázijského charakteru opcie

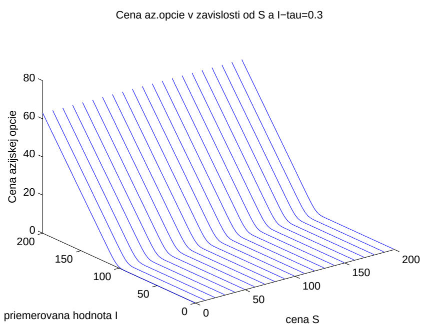
V kapitole uvedieme niekoľko grafov, ktoré nám približujú a popisujú správanie sa ceny ázijského derivátu v závislosti od vzďaľovania sa od času expirácie T. Pod grafom je uvedené τ, udávajúce vzdialenosť t od času expirácie T, udávanú v rokoch. V programe boli použité nasledovné hodnoty času:

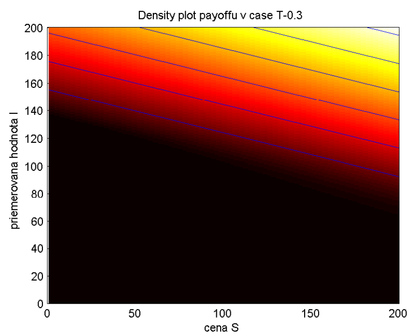
$$T = 3 \text{ roky}, \qquad T_0 = 1.2 \text{ roka}$$





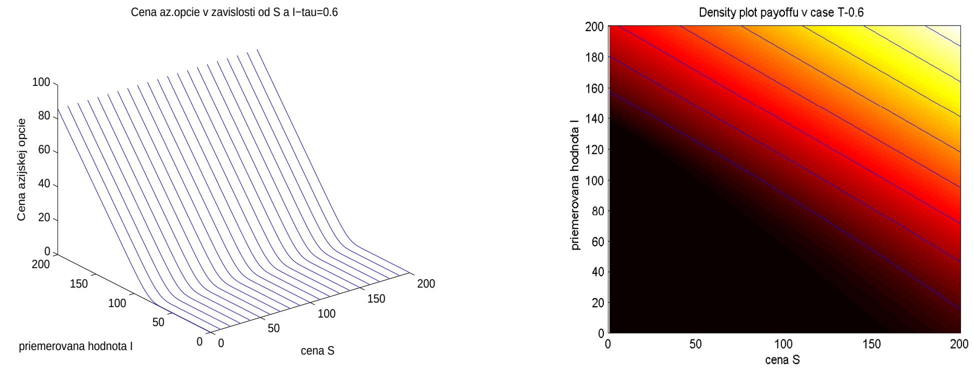
$\tau = 0$, t.j. čas expirácie T



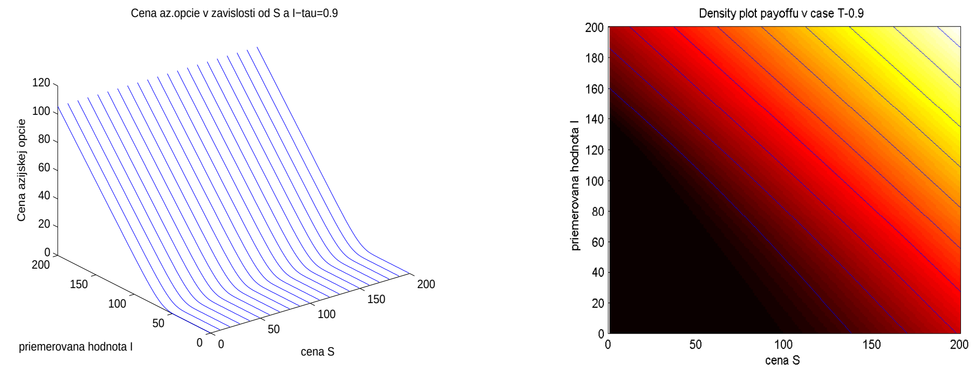


$\tau = 0.3$

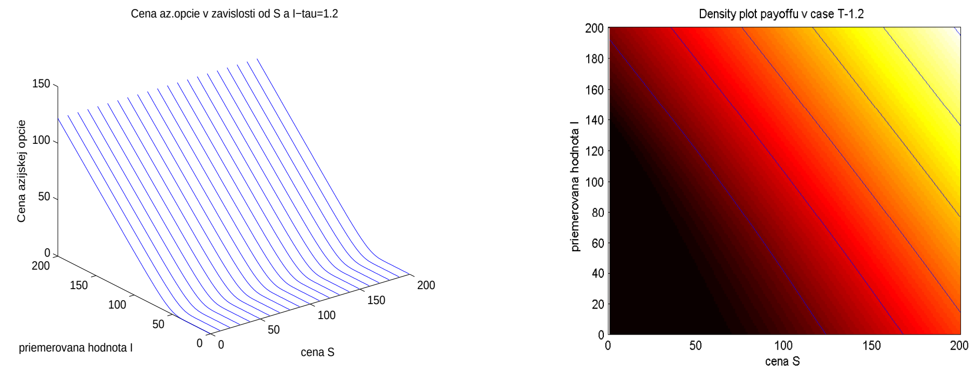
Obrázok 1: Terminálový payoff a úrovňový graf v čase expirácie T, ($\tau = 0$) a príslušné grafy pre $\tau = 0.3$



$\tau = 0.6$

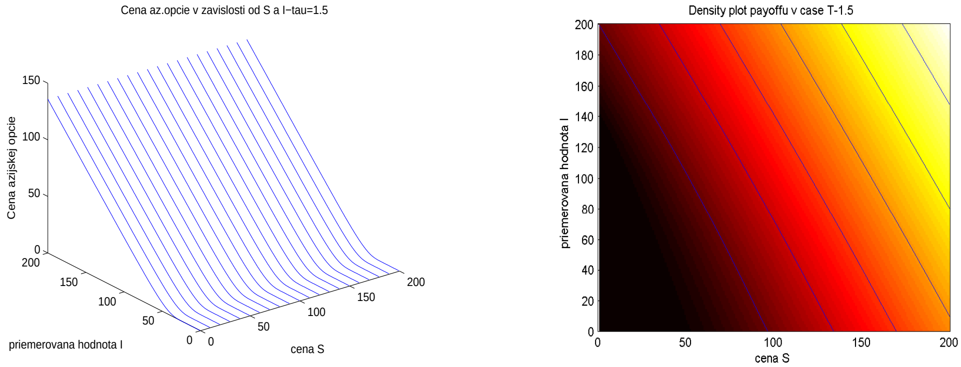


$\tau = 0.9$

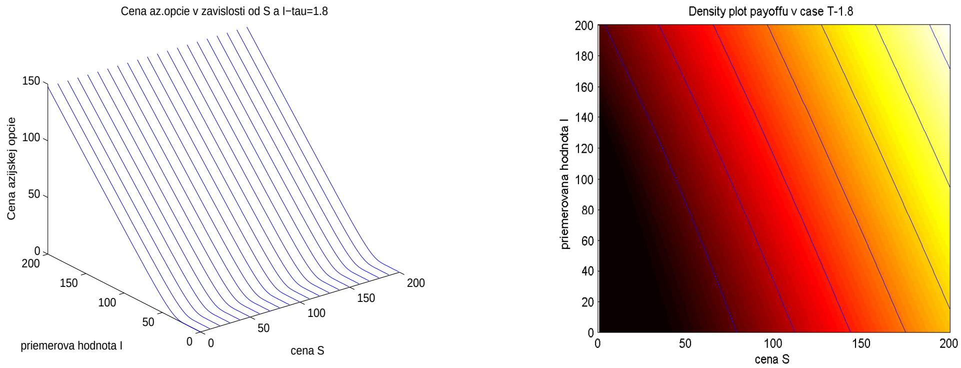


$\tau = 1.2$

Obrázok 2: Payoff grafy a úrovňové grafy riešenia pre $\tau = 0.6,\ 0.9,\ 1.2$



$\tau = 1.5$



$\tau = 1.8$

Obrázok 3: Payoff grafy a úrovňové grafy riešenia pre $\tau = 1.5,\ 1.8$

6 Záver

Oboznámili sme sa s relatívne novým finančným derivátom - ázijskými opciami. Ako už bolo spomenuté, oceňovacie metódy sú pre ázijské opcie ešte stále vo vývoji.

V diplomovej práci využívame semi-analytickú metódu ázijského matematika Zhanga a rozširujeme jej platnosť aj na iné typy časových intervalov. Splnili sme tak stanovený cieľ, pretože už vieme ako treba oceňovať derivát, ktorý má na začiatku svojej životnosti charakter európskej call opcie a zvyšnú časť svojej životnosti je priemerovaný ako ázijská opcia.

Prínos diplomovej práce spočíva v tom, že práve vylepšená semi-analytická metóda nám dáva oceňovaciu formulku pre širšie spektrum ázijských opcií s rôznorodým charakterom. Formulka je aplikovateľná na opcie s rôzne dlhým obdobím priemerovania, podľa toho ako si zvolíme. Popísali sme tiež zaujímavý vzájomný vzťah medzi problémom oceňovania európskych opcií a ázijských opcií.

Ciele stanovené v práci sme teda naplnili. Otázkou na premýšľanie zostáva, ako získaný zložito vyzerajúci oceňovací vzorec zjednodušiť pre praktické využitie vo finančnom svete.

7 Appendix

Odvodenie BS rovnice pre ázijské opcie

V tejto časti uvádzame pre a lepšiu orientáciu čitateľa podrobné odvodenie Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice (9). Uvažujeme aritmeticky priemerovanú ázijskú average rate opciu.
Pri odvodzovaní budeme využívať nasledovné premenné:

$$
\begin{aligned}
S &\quad - \quad \text{cena základného aktíva,}\\
C &\quad - \quad \text{hodnota opcie na dané aktívum,}\\
r &\quad - \quad \text{bezriziková úroková miera,}\\
q &\quad - \quad \text{dividendová miera príslušného aktíva,}\\
\sigma &\quad - \quad \text{volatilita,}
\end{aligned}
$$

Na odvodenie BS rovnice potrebujeme však aj obšírny aparát stochastického kalkulu, ktorý je možné naštudovať si v [10] a tiež v [7].

Vývoj ceny akcie má stochastický charakter, ktorý môžeme popísať rovnicou (8)

$$\mathrm{d}S = (r - q)S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}W,$$

kde W je Wienerov proces.
Hodnota ázijskej opcie je funkcia, ktorá je závislá od ceny podkladového aktíva S, priemerovanej ceny I a časového okamihu t, čo môžeme zapísať ako

$$C = C(S, I, t). \tag{65}$$

Funkcia C má teda vďaka závislosti od S tiež stochastický charakter, preto jej derivovaním, použitím Itôovej lemy, získavame stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$\mathrm{d}C \;=\; \frac{\partial C}{\partial S}\,\mathrm{d}S + \frac{\partial C}{\partial I}\mathrm{d}I + \left(\frac{\partial C}{\partial t} \;+\; \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t, \tag{66}$$

kde dI je vývoj premennej I v čase.
I sme definovali ako $I = \int_0^t S(\tau)d\tau$, z čoho dostávame

$$\mathrm{d}I = S\mathrm{d}t \tag{67}$$

Do rovnice (66) dosadíme (8) a (65) a získame

$$\mathrm{d}C = \frac{\partial C}{\partial S}\left((r-q)S\mathrm{d}t + S\sigma\mathrm{d}W\right) + \frac{\partial C}{\partial I}S\mathrm{d}t + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t. \tag{68}$$

Po úprave a preskupení členov

$$\mathrm{d}C = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + S\frac{\partial C}{\partial I}\right)\mathrm{d}t + S\sigma\frac{\partial C}{\partial S}\mathrm{d}W \tag{69}$$

V ďalšom kroku bude našou snahou vytvoriť podobne ako v [10] samofinancované portfólio s nulovým rastom investícií. Dôležitým predpokladom je aj požiadavka na bezrizikovosť investície do daného portfólia.
Vytvoríme teda portfólio, pozostávajúce z akcií S, opcií na tieto akcie C a bezrizikových dlhopisov B. Ich množstvá označíme ako:

$$\begin{aligned} Q_S &= \text{objem akcií v portfóliu,} \\ Q_C &= \text{objem opcií na akcie v portfóliu,} \\ B &= \text{objem bezrizikových dlhopisov.} \end{aligned}$$

Predpoklad nulového rastu investícií do portfólia môžeme vyjadriť rovnicou

$$SQ_S + CQ_C + B = 0, \qquad \text{pre každé } t \in [0, T], \tag{70}$$

a podmienka samofinancovateľnosti portfólia v každom okamihu je vyjadrená rovnicou

$$S\mathrm{d}Q_S + C\mathrm{d}Q_C + \delta B = 0, \tag{71}$$

ktorú môžeme jednoducho interpretovať - náklady na zmeny množstiev jednotlivých súčastí portfólia sú financované ziskami samotného portfólia.

Ďalším dôležitým faktom je zmena objemu a výnosu dlhopisov v čase, ktorá je daná ako

$$\mathrm{d}B \;=\; rB\mathrm{d}t + \delta B + qSQ_S\mathrm{d}t, \tag{72}$$

kde

$$\begin{aligned} rB\mathrm{d}t &\;-\; \text{bezrizikový dlhopis nevyplácajúci žiadne kupóny,} \\ \delta B &\;-\; \text{zmena objemu dlhopisov v portfóliu,} \\ qSQ_S\mathrm{d}t &\;-\; \text{celkové množstvo vyplatených dividend za čas d}t. \end{aligned}$$

Teraz budeme derivovať rovnicu (70), pričom nesmieme zabudnúť, že v nej derivujeme súčiny. Dostávame vzťah

$$Q_S\mathrm{d}S + Q_C\mathrm{d}C + S\mathrm{d}Q_S + C\mathrm{d}Q_C + \mathrm{d}B = 0. \tag{73}$$

Keď sa na rovnicu dobre pozrieme zistíme, že môžeme dosadiť za dB hodnotu zo vzťahu (72) a súčet $S\mathrm{d}Q_S + C\mathrm{d}Q_C$ môžeme nahradiť $-\delta B$

$$Q_S\mathrm{d}S + Q_C\mathrm{d}C + rB\mathrm{d}t + qSQ_S\mathrm{d}t = 0. \tag{74}$$

Ďalej je možné dosadiť za B z rovnice (70)

$$Q_S\mathrm{d}S + Q_C\mathrm{d}C - (rSQ_S + rCQ_C - qSQ_S)\mathrm{d}t = 0. \tag{75}$$

Keď poslednú získanú rovnicu predelíme členom Q_C a zavedieme substitúciu $\left(-\frac{Q_S}{Q_C}\right) = \Delta$, vznikne

$$\mathrm{d}C - rC\mathrm{d}t - \Delta(\mathrm{d}S - rS\mathrm{d}t + qS\mathrm{d}t) = 0. \tag{76}$$

Teraz pomocou vzťahov (69) a (8) nahradíme premenné v predchádzajúcej rovnici a po preskupení členov dostaneme

$$\left[\frac{\partial C}{\partial t} \;+\; (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} \;+\; \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \;+\; S\frac{\partial C}{\partial I} - rC\right]\mathrm{d}t + S\delta\left(\frac{\partial C}{\partial S} - \Delta\right)\mathrm{d}W = 0. \tag{77}$$

Posledná fáza je využitie predpokladu o bezrizikovosti portfólia. Keď chceme zabezpečiť bezrizikovosť (nulovú volatilitu portfólia), člen pri procese $\mathrm{d}W$ musí byť rovný nule. Preto položíme

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Delta. \tag{78}$$

Po všetkých týchto úpravách napokon dostávame tvar Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice pre ázijské opcie

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S\frac{\partial C}{\partial I} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0. \tag{79}$$

Referencie

[1] BLACK, F., SCHOLES, M. *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economics, Vol. 81, 1973 pp. 637–54.

[2] DAI, MIN, KWOK, Y. K. *Characterization of optimal stopping regions of american asian and lookback options*, Mathematical Finance Vol. 16 /Number I, January 2006, pp. 63-82.

[3] CHALANSI, P., JHA, S., VARIKOOTY, A. *Accurate aproximations for european-style asian options*, Journal of Derivatives, May 1997.

[4] KEMNA, A. G. Z., VORST, A. C. F. *A pricing method for options based on average asset values*, Journal of Banking and Finance Vol. 14, 1990, pp. 113–29.

[5] KWOK, Y., K. *Mathematical models of financial derivatives*, Springer Finance, Singapore, 1998.

[6] LASSERRE, J., B., PRIETO-RUMEAU, T., ZERVOS, M. *Pricing a class of exotic options via moments and SDP relaxations*, Mathematical Finance Vol. 16 /Number III, July 2006, pp. 469-494.

[7] MELICHERČÍK, I., OLŠAROVÁ, L., ÚRADNÍČEK, V. *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, ISBN 80-8057-651-3, Bratislava, 2005.

[8] MERTON, R. C. *Theory of rational option price* Bell Journal of Economics and Management Science Vol. 4, 1973 pp. 141–83.

[9] ROGERS, L., Shi,Z. *The value of an Asian optio.* Journal of Applied Probability Vol. 32, 1995 pp. 1077–88.

[10] ŠEVČOVIČ, D. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Bratislava, 2001. `http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/derivaty/index.html`

[11] ŠEVČOVIČ, D. *Parciálne diferenciálne rovnice*, Bratislava, 1997. `http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/pdr/index.html`

[12] TURNBULL, S., WAKEMAN, L. *A quick algorithm for pricing European average options* Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 26, 1991, pp. 377–89.

[13] WU, XUEPING, ZHANG, JIN, E. *Options on the minimum or the maximum of two average prices*, Review of Derivatives Research, Vol. 3, 1999, pp. 183-204.

[14] ZHANG, JIN, E. *A semi-analytical method for pricing and hedging continously sampled arithmetic average rate options* , Journal of Computational Finance Vol. 5 /Number I, 2001, pp. 59-79.

[15] ZHANG, JIN, E. *Pricing continously sampled asian options with perturbation method*, Journal of Future Markets Vol. 23 /Number IV, 2003, pages 535-560.

[16] ZVAN, R., FORSYTH, P., VETZAL, K. *Robust numerical methods for PDE models of Asian options*, Journal of Computational Finance, Vol. 1(2), 1997, pp. 39–78.

[17] `http://www.fincad.com/support/developerFunc/mathref/Basket.htm`, 30.1.2008.